

شبیه‌سازی ناپایداری انگشتی ویسکوالاستیک در محیط متخلخل با تانسور پراکندگی ناهمسانگرد وابسته به سرعت

حسنی شکری

محمد حسن کیهانی

محمود نوروزی*

دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

چکیده

در این تحقیق، برای نخستین بار ناپایداری انگشتی لزج در جابجایی مخلوط‌شدنی سیال نیوتنی بوسیله‌ی سیال ویسکوالاستیک در یک محیط متخلخل ناهمسانگرد مورد مطالعه قرار گرفته است. مدل‌سازی سیال ویسکوالاستیک توسط معادله ساختاری اولدرود-بی صورت گرفته است. تأثیرات پراکندگی عرضی و طولی وابسته به سرعت محیط بر روی ناپایداری انگشتی با کمک آنالیز پایداری خطی و شبیه‌سازی غیرخطی بررسی شده است. نتایج آنالیز پایداری خطی نشان می‌دهد که هر چه نسبت پراکندگی در جهت عمود بر جریان به جهت جریان افزایش یابد، نرخ رشد ناپایداری کاهش خواهد یافت و جریان پایدارتر می‌شود. شبیه‌سازی غیرخطی با کمک روش طیفی و تبدیلات هارتلی انجام شده و نتایج شامل کانتورهای غلظت، منحنی‌های میانگین غلظت عرضی و طول اختلاط خواهد بود. نتایج شبیه‌سازی غیرخطی نشان می‌دهد که با افزایش پراکندگی محیط متخلخل در جهت جریان نسبت به جهت عمود بر آن، جریان ناپایدارتر شده و انگشتی‌ها با شدت بیشتری رشد می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: ناپایداری انگشتی، سیال ویسکوالاستیک، محیط ناهمسانگرد، آنالیز پایداری خطی، شبیه‌سازی غیرخطی.

Simulation of Viscoelastic Fingering Instability in Anisotropic Velocity-Dependent Dispersion Tensor

H. Shokri

M. H. Kayhani

M. Norouzi

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Department of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Abstract

In this study, the viscous fingering instability in miscible displacement of Newtonian fluid by viscoelastic fluid in an anisotropic porous media is investigated for the first time. The Oldroyd-B model has been used as the constitutive equation. The roll of velocity-dependent transverse and longitudinal dispersions on the fingering instability is investigated through linear stability analysis and nonlinear simulations. The results of linear stability analysis show that the growth rate of instability is decreased by increasing the rate of transverse to longitudinal dispersions and the flow becomes more stable. The nonlinear simulations are performed by use of spectral method and Hartly transformation and the results are included concentration contours, transversely averaged concentration profiles, mixing length and sweep efficiency. The results show that the flow becomes more unstable by increasing the rate of longitudinal to transverse dispersions.

Keywords: Viscous fingering, Viscoelastic fluid, Anisotropic media, Linear stability analysis, Nonlinear simulation.

۱۹۸۸، تن و هومسی [۲] برای نخستین بار از روش طیفی و تبدیلات فوریه برای شبیه‌سازی جریان سیالات نیوتنی اختلاط‌پذیر استفاده نمودند. آنها ضمن مشاهده مکانیزم‌های شناخته شده تعامل انگشتی‌ها مانند انتشار^۱ و اثر پوششی^۲، برای نخستین بار موفق به نشان داده مکانیزم شکافتگی نوک انگشتی‌ها^۳ شدند. در ادامه زیرمن و هومسی [۳] به شبیه‌سازی ناپایداری انگشتی در محیطی ناهمسانگرد و با کمک تبدیلات هارتلی پرداختند. مکانیزم‌های همچون بهم‌پیوستگی چندگانه^۴ و محوشدگی^۵ در مطالعه آنها نشان داده شد. قسمت و عزایز [۴] به بررسی تأثیر تانسور پراکندگی ناهمسانگرد وابسته به سرعت بر روی ناپایداری انگشتی جابجایی اختلاط‌پذیر سیالات نیوتنی پرداختند. در

۱- مقدمه

هنگامی که سیال با لزجت کمتر به درون محیط متخلخلی که با سیال با لزجت بیشتر اشباع شده است تزریق می‌شود، سطح تماس دو سیال به علت اختلاف لزجت ناپایدار شده و به مرور زمان سیال تزریق شونده به صورت انگشتی درون سیال با لزجت بیشتر نفوذ خواهد نمود. این نوع ناپایداری در مکانیک سیالات با عنوان ناپایداری انگشتی لزج شناخته می‌شود. این پدیده به دلیل نقش گسترده آن در بسیاری فرایندهای طبیعی و صنعتی از جمله فرایندهای جداسازی اجزا مواد و کروماتوگرافی در علوم شیمی، جداسازی و حذف مواد آلوده از بسترهای آب زیرزمینی و از همه مهمتر، عملیات ازدیاد برداشت نفت از دیرباز مورد توجه بوده و مطالعات بسیاری را به خود اختصاص داده است. جابجایی سیالات نیوتنی بخش گسترده‌ای از این مطالعات را شامل می‌شود. نخستین مطالعه در این زمینه در سال ۱۹۵۲ توسط هیل [۱] صورت گرفت. پس از آن مطالعات در این زمینه ادامه یافت. در سال

1 Spreading

2 Shielding

3 Tip-splitting

4 Multiple coalescence

5 Fading

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: mnorouzi@shahroodut.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۴/۱۴

تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۲/۰۹

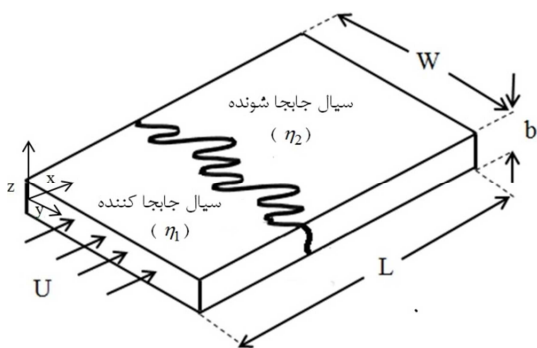
این مطالعه آنالیز پایداری خطی و شبیه‌سازی غیرخطی به کمک ترکیب روش‌های تفاضل محدود و طیفی صورت گرفت و نتایج نشان دهنده کاهش ناپایداری در نتیجه افزایش شدت پراکندگی در جهت عمود بر جریان به جهت جریان است. از جمله مطالعات اخیر در زمینه بررسی تأثیر ناهمسنگردی بر ناپایداری انگشتی نیوتنی می‌توان به مطالعه‌ای انجام شده توسط نوروزی و شوقی [۵] اشاره نمود. در این مطالعه با استفاده از تحلیل پایداری خطی و روش طیفی و تبدیلات هارتلی نشان داده شده هرچه پراکندگی در جهت جریان بر جهت عمود بر جریان کاهش و نفوذپذیری در جهت جریان بر جهت عمود بر جریان افزایش یابد، جریان پایدارتر خواهد شد.

بررسی‌ها در زمینه سیالات غیرنیوتنی به مراتب کمتر از سیالات نیوتنی است. از نخستین مطالعات در این زمینه می‌توان به مطالعه آزمایشگاهی صورت گرفته توسط نیتمن و همکاران [۶] اشاره نمود. پس از آن محققین بسیاری به بررسی تأثیر خواص سیال غیرنیوتنی بر ناپایداری انگشتی پرداختند. بخش وسیعی از این مطالعات بر روی تأثیر خاصیت باریک‌شوندگی سیال غیرنیوتنی تمرکز دارد. از آن جمله می‌توان به بررسی‌های صورت گرفته توسط سینگ و عزیز [۷، ۸]، لی و همکاران [۹]، کیم و چوی [۱۰] اشاره نمود. در تمامی این مطالعات نشان داده شد هر چه خاصیت باریک‌شوندگی سیال جابجاکننده افزایش یابد جریان ناپایدارتر خواهد شد. در مقابل خاصیت باریک‌شوندگی در سیال جابجاشونده پایداری جریان را به دنبال دارد. نوروزی و شوقی [۱۱] به بررسی اثر ناهمسنگردی محیط بر روی ناپایداری انگشتی سیال باریک شونده پرداختند. نتایج آنها تأیید کننده نتایج پیشین است. به این معنی که خاصیت باریک‌شوندگی سیال جابجاکننده موجب ناپایدارتر شدن جریان خواهد شد و افزایش پراکندگی در جهت عمود بر جریان و نفوذپذیری در جهت جریان، شدت ناپایداری انگشتی را کاهش می‌دهد. آنها [۱۲] همچنین اثر ناهمگنی محیط را بر روی این نوع ناپایداری مورد مطالعه قرار دادند. ناهمگنی‌های در نظر گرفته شده در این مطالعه به صورت کاهش نمایی نفوذپذیری محیط در جهت عرضی و کاهش و افزایش نمایی نفوذپذیری محیط در جهت جریان می‌باشد. نتایج آنها نشان می‌دهد هرچه درجه ناهمگنی محیط در جهت عرضی افزایش یابد جریان پایدارتر خواهد شد. افزایش درجه ناهمگنی در حالت نفوذپذیری افزایشی در جهت جریان، موجب پایدارتر شدن جریان و در حالت نفوذپذیری کاهشی موجب ناپایدارتر شدن جریان خواهد شد.

از جمله خواص مهم دیگر سیالات غیرنیوتنی، خاصیت الاستیک آن است. با استفاده از مدل‌های سیالات ویسکوالاستیک می‌توان این خاصیت را مورد بررسی قرار داد. امروزه پلیمرزنی به عنوان ابزاری کارآمد در فرایند ازدیاد برداشت نفت محسوب می‌شود. محلول‌های پلیمری جز در حالت‌های بسیار رقیق سیال ویسکوالاستیک خواهند بود. بررسی‌ها در زمینه نقش سیال ویسکوالاستیک بر روی ناپایداری انگشتی بسیار محدودند و نیاز به بررسی‌های بیشتر همچنان وجود دارد. مورا و مونا [۱۳] با در نظر گرفتن سیال ویسکوالاستیک ماسکول به ارائه حل تحلیلی و عددی برای ناپایداری انگشتی پرداختند. کیهانی و همکاران [۱۴] تأثیر خواص سیال ویسکوالاستیک را بر روی پارامترهای همچون طول اختلاط و بازده جاروبی ارائه داده‌اند. در این مطالعه از مدل کریمینال- اریکسن- فیلیبی برای شبیه‌سازی سیال

ویسکوالاستیک استفاده شد. نتایج آنها نشان می‌دهد که اختلاف تنش نرمال اول تأثیر چندانی بر روی طول اختلاط دو سیال شرکت کننده در جابجایی نخواهد داشت اما موجب بهبود بازده جاروبی می‌شود. اخیراً شکری و همکاران [۱۵] با در نظر گرفتن معادله ساختاری اولدرویدی برای سیال ویسکوالاستیک شرکت کننده در فرایند جابجایی، با کمک آنالیز پایداری خطی و روش طیفی و تبدیلات هارتلی نشان دادند که خاصیت الاستیک این سیال موجب کنترل ناپایداری انگشتی خواهد شد. از طرفی هرچه اختلاف لزجت در سطح تماس افزایش یابد جریان ناپایدارتر خواهد شد.

با دقت در مطالعات پیشین می‌توان مشاهده نمود که تقریباً تلاشی در زمینه شبیه‌سازی ناپایداری انگشتی در حضور سیال ویسکوالاستیک و در محیط ناهمسنگرد صورت نگرفته است. از آنجا که محیط‌های طبیعی و صنعتی به ندرت همسانگرد هستند، نیاز به مطالعه بیشتر در این زمینه احساس می‌شود. در این مطالعه به بررسی تأثیر ناهمسنگردی در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال ویسکوالاستیک پرداخته می‌شود. برای شبیه‌سازی ناهمسنگردی محیط، همچون مطالعه صورت گرفته توسط قسمت و عزیز [۴] تانسور پراکندگی وابسته به سرعت در نظر گرفته خواهد شد. همچنین از معادله ساختاری اولدروید- بی جهت مدلسازی سیال ویسکوالاستیک استفاده خواهد شد. جریان اختلاط‌پذیر فرض شده است. در نتیجه از اثر کشش سطحی صرف نظر خواهد شد. همچنین از هندسه سلول هل- شاول^۱ به عنوان محیط متخلخل استفاده شده است. نمایی از هندسه مسئله در شکل ۱ نمایش داده شده است. در اینجا سیالی با لزجتی پایین (η_1)، سیالی با لزجت بالا (η_2) را جابجا خواهد نمود.



شکل ۱- هندسه مسئله

۲- معادلات حاکم

در این مطالعه، جریان سیال دو بعدی و تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شود. معادلات حاکم بر مسئله شامل معادله پیوستگی، معادله داری و معادله نفوذ- جابجایی برای غلظت خواهد بود.

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla p = -\frac{\eta}{K} \mathbf{u} \quad (2)$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla c = \nabla \cdot \mathbf{D} \nabla c \quad (3)$$

¹ Hele-Shaw cell

همسانگرد خواهد بود. قابل ذکر است در صورت برابر بودن a_T و a_L تانسور پراکندگی با وجود همسانگرد بودن ثابت نخواهد بود و با نرم بردار سرعت به صورت خطی تغییر می‌نماید.

جهت بی‌بعد سازی معادلات حاکم، از U ، $D_{\square}/U^2$ و $D_{\square}/U$ به ترتیب برای بی‌بعد سازی سرعت، طول و زمان استفاده خواهیم نمود که در آنها $D_{\square}$ برابر $D_0 + a_L U$ خواهد بود. لزجت به وسیله لزجت سیال جابجا کننده (η_1) ، فشار توسط $\eta_1 D_{\square}/K$ و غلظت بوسیله غلظت سیال جابجا کننده c_1 ، بی‌بعد خواهند شد. همچنین از یک سیستم لاگرانژی برای بیان معادلات استفاده خواهیم نمود. بدین صورت که فرض می‌کنیم به جای آنکه سیال تزریق شود، کل سیستم با سرعت U حرکت می‌نماید.

صورت بی‌بعد معادلات به صورت زیر خواهد بود:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (14)$$

$$(1 + De \frac{\partial}{\partial t}) \nabla p^* = -\eta^* (1 + De(1 - \beta) \frac{\partial}{\partial t}) (\mathbf{u}^* + \mathbf{i}) \quad (15)$$

$$\frac{\partial c^*}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{x}^*} + \mathbf{v}^* \cdot \frac{\partial c^*}{\partial \mathbf{y}^*} = \left(\frac{\partial^2 c^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 c^*}{\partial y^{*2}} \right) + L \frac{\partial}{\partial x^*} \left[\frac{(1 - \alpha)}{\sqrt{(1 + u^{*2})^2 + v^{*2}}} \left((1 + u^*)^2 \frac{\partial c^*}{\partial x^*} + (1 + u^*) v^* \frac{\partial c^*}{\partial y^*} \right) \right] + L \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\frac{(1 - \alpha)}{\sqrt{(1 + u^{*2})^2 + v^{*2}}} \left((1 + u^*) v^* \frac{\partial c^*}{\partial x^*} + v^{*2} \frac{\partial c^*}{\partial y^*} \right) \right] \quad (16)$$

در معادله (۱۵)، $De = \lambda U^2 / D_{\square}$ ، عدد دبرا و نشان‌دهنده خاصیت الاستیک سیال ویسکوالاستیک خواهد بود. همچنین در معادله (۱۶)، α نسبت پراکندگی ($\alpha = a_T / a_L$) است و L نشان دهنده شدت پراکندگی طولی می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L = \frac{a_L U}{D_0 + a_L U} \quad (17)$$

همچنین صورت بی‌بعد شرایط مرزی و اولیه مسئله عبارتند از:

$$\mathbf{u}^* (x^* = -t^*, y^*, t^*) = 1, \quad \mathbf{v}^* (x^* = -t^*, y^*, t^*) = 0, \quad c^* (x^* = -t^*, y^*, t^*) = 1 \quad (18)$$

$$\mathbf{u}^* (x^* = Pe - t^*, y^*, t^*) = 1, \quad \mathbf{v}^* (x^* = Pe - t^*, y^*, t^*) = 0, \quad c^* (x^* = Pe - t^*, y^*, t^*) = 0 \quad (19)$$

$$(\mathbf{u}^*, c^*) (x^*, y^* = 0, t^*) = (\mathbf{u}^*, c^*) (x^*, y^* = Pe / A, t^*) \quad (20)$$

در معادلات بالا، $Pe = LU / D_{\square}$ ، عدد پکلت است که در زمینه نفوذ یا انتقال جرم مورد بحث قرار می‌گیرد و $A = L / W$ نسبت طول به عرض محیط مورد مطالعه است. در ادامه جهت سهولت کار، بالانویس ستاره از پارامترهای بی‌بعد حذف خواهد شد. جهت تشریح کامل مسئله باید تغییرات لزجت، عدد دبرا و پارامتر β با غلظت مشخص شود. برای این منظور از رابطه نمائی پیشنهاد شده توسط زیمرمن و هومسی [۳] استفاده خواهیم نمود.

در این معادلات $\mathbf{u}$ بردار سرعت، p فشار، η لزجت جریان، K نفوذپذیری محیط، c غلظت و $\mathbf{D}$ تانسور پراکندگی محیط است.

از آنجاییکه در این مطالعه سیال جابجا کننده سیال ویسکوالاستیک در نظر گرفته شده است. بنابراین معادله (۲) نیاز به اصلاح دارد. برای توصیف رابطه تنش و نرخ برش در سیال ویسکوالاستیک معادلات ساختاری متعددی پیشنهاد شده است. معادله الدروید-بی یکی از این معادلات ساختاریست که از تطابق مناسبی با محلول‌های غیرنیوتنی رقیق یا در اصطلاح سیال ویسکوالاستیک با گر برخورداریست. معادله ساختاری اولدروید-بی به صورت زیر می‌باشد:

$$\dot{\tau} + \lambda \ddot{\tau}_{(1)} = \eta (\dot{\gamma}_{(1)} + \theta \dot{\gamma}_{(2)}) \quad (4)$$

در معادله بالا، τ تانسور تنش و $\ddot{\tau}_{(1)}$ مشتق فوق همرفتی تانسور

تنش می‌باشد و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\ddot{\tau}_{(1)} = \frac{D\dot{\tau}}{Dt} - \{(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \dot{\tau} + \dot{\tau} \cdot (\nabla \mathbf{u})\} \quad (5)$$

همچنین $\dot{\gamma}_{(1)}$ و $\dot{\gamma}_{(2)}$ مشتقهای فوق همرفتی تانسور نرخ برش

می‌باشند:

$$\dot{\gamma}_{(1)} = (\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T \quad (6)$$

$$\dot{\gamma}_{(2)} = \frac{D\dot{\gamma}_{(1)}}{Dt} - \{(\nabla \mathbf{u})^T \cdot \dot{\gamma}_{(1)} + \dot{\gamma}_{(1)} \cdot (\nabla \mathbf{u})\} \quad (7)$$

در معادله (۴)، η لزجت کل سیال ویسکوالاستیک است که به صورت مجموع لزجت‌های بخش پلیمری (η_p) و بخش حلال (η_s) آن در نظر گرفته شود. همچنین λ و θ به ترتیب زمان‌هایی از تنش و ثابت تأخیر مدل اولدروید-بی می‌باشند. دو ثابت زمانی به وسیله معادله (۸) بهم مرتبط خواهند بود:

$$\theta = (1 - \beta)\lambda \quad (8)$$

در معادله بالا، پارامتر β به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$\beta = \frac{\eta_p}{\eta_s + \eta_p} \quad (9)$$

اگر ثابت‌های زمانی برابر صفر در نظر گرفته شود معادله (۴) به مدل سیال نیوتنی تبدیل خواهد شد.

با کمک آنالوئی معادله داری برای سیال اولدروید-بی به صورت زیر اصلاح می‌شود [۱۶]:

$$(1 + \lambda \frac{\partial}{\partial t}) \nabla p = -\frac{\eta}{K} (1 + \theta \frac{\partial}{\partial t}) \mathbf{u} \quad (10)$$

تانسور پراکندگی برای یک محیط به صورت معادله (۱۱) در نظر گرفته خواهد شد [۴]:

$$\mathbf{D} = D_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_L & 0 \\ 0 & D_T \end{bmatrix} \quad (11)$$

در این معادله D_0 نشان‌دهنده پخش مولکولی است. همچنین D_L و D_T ضرایب پراکندگی در جهت طولی و عرضی می‌باشند و به صورت زیر تعریف خواهند شد [۴].

$$D_L = a_L \|\mathbf{u}\| \quad D_T = a_T \|\mathbf{u}\| \quad (12)$$

a_T و a_L به ترتیب نشان‌دهنده شدت پراکندگی در جهت طولی و عرضی است. با ترکیب معادلات (۱۱) و (۱۲) خواهیم داشت [۴]:

$$\mathbf{D} = (D_0 + a_T \|\mathbf{u}\|) \mathbf{I} + (a_L - a_T) \frac{\mathbf{u} \mathbf{u}^T}{\|\mathbf{u}\|} \quad (13)$$

هنگامی که $a_L = a_T$ باشد و یا در غیاب جریان، تانسور پراکندگی

$$\eta = \exp(R(1-c)) \quad (21)$$

$$\frac{De}{De_1} = \exp(R'(1-c)) \quad (22)$$

$$\frac{\beta}{\beta_1} = \exp(R^*(1-c)) \quad (23)$$

در معادلات بالا، $R' = \ln(De_2 / De_1)$ ، $R = \ln(\eta_2 / \eta_1)$ ، $R^* = \ln(\beta_2 / \beta_1)$ خواهند بود. قابل ذکر است در سرتاسر این مطالعه زیر نویس‌های (۱) و (۲) به ترتیب نشان‌دهنده سیال جایجا کننده و جایجا شونده می‌باشند. در مورد سیال نیوتنی پارامترهای De و β بسیار بسیار کوچک فرض شده است.

۱-۲- آنالیز پایداری خطی

در آغاز به منظور بررسی تاثیر ناهمسنگردی، مسئله را مورد آنالیز پایداری خطی قرار خواهیم داد. بدین صورت که ابتدا یک حل پایه برای معادلات حاکم در نظر گرفته و سپس جمله اغتشاشی بسیار کوچکی به آن خواهیم افزود. دستگاه معادلات حاصل به صورت زیر می‌باشد:

$$\eta' - \eta_0 \beta_0 De_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + \eta_0 u' + \frac{\partial p'}{\partial x} + De_0 \frac{\partial^2 p'}{\partial x \partial t} + \eta_0 De_0 \frac{\partial u'}{\partial t} + De' \frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial t} = 0 \quad (24)$$

$$-\eta_0 \frac{\partial u'}{\partial x} + \eta_0 \beta_0 De_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial x} - \eta_0 De_0 \frac{\partial^2 u'}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 p'}{\partial y^2} + De_0 \frac{\partial^3 p'}{\partial y^2 \partial t} = 0 \quad (25)$$

$$\eta' = -R \eta_0 c' \quad (26)$$

$$De' = -R' De_0 c' \quad (27)$$

$$\frac{\partial c'}{\partial t} + u' \frac{\partial c_0}{\partial x} = \left(\frac{\partial^2 c'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2} \right) + L u' \frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} + L \frac{\partial c_0}{\partial x} \frac{\partial u'}{\partial x} + L(1-\alpha) \frac{\partial v'}{\partial y} \frac{\partial c_0}{\partial x} + L(\alpha-1) \frac{\partial^2 c'}{\partial y^2} \quad (28)$$

در معادلات بالا، بالانویس پرایم (جز R') نشان‌دهنده پارامتر اغتشاشی و زیر نویس صفر نشان‌دهنده حالت پایه می‌باشد. حل پایه به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_0 = v_0 = 0 \quad (29)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} + De_0 \frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial t} = -\eta_0 \quad (30)$$

$$c_0 = 0.5 \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{4t}} \right) \right] \quad (31)$$

$$\eta_0 = e^{R(1-c_0)} \quad (32)$$

$$De_0 = e^{R'(1-c_0)} \quad (33)$$

$$\beta_0 = e^{R^*(1-c_0)} \quad (34)$$

همچنین جملات اغتشاشی به صورت زیر بسط داده خواهند شد:

$$(c', u', p') = (C, U, P)(x) e^{\sigma(t_0) t} e^{iky} \quad (35)$$

با جاگذاری در معادلات حاکم و ترکیب معادلات، به دستگاه معادله زیر خواهیم رسید:

$$\begin{aligned} & \eta_0 C + \eta_0 \beta_0 De_0 U \sigma(t_0) - \\ & \eta_0 U + R' De_0 C \frac{\partial^2 p_0}{\partial x \partial t} - \eta_0 De_0 U \sigma(t_0) - \\ & (De_0 \sigma(t_0) + 1) \frac{d}{dx} \left(\frac{-\eta_0 (1 + (1 - \beta_0) De_0 \sigma(t_0))}{k^2 (\sigma(t_0) De_0 + 1)} \right) \left(\frac{dU}{dx} \right) + \\ & \frac{\eta_0 (1 + (1 - \beta_0) De_0 \sigma(t_0))}{k^2} \frac{d^2 U}{dx^2} = 0 \\ & \left[\sigma(t_0) - \frac{d^2}{dx^2} + (1 - L + \alpha L) k^2 \right] C = \\ & \left(-\frac{\partial c_0}{\partial x} + L \frac{\partial^2 c_0}{\partial x^2} \right) U + L \alpha \frac{dU}{dx} \frac{\partial c_0}{\partial x} \end{aligned} \quad (36)$$

۲-۲- شبیه‌سازی غیرخطی

به منظور ساده‌شدن حل معادلات حاکم، ابتدا معادلات را به صورت تابع جریان-ورتیسیته تبدیل خواهیم نمود. روابط لازم برای این تبدیل به صورت معادلات زیر خواهد بود:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (37)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right) \quad (38)$$

در این معادلات ψ تابع جریان و ω ، ورتیسیته است. به این ترتیب معادله پیوستگی همواره برقرار خواهد بود. معادله نفوذ-جایجایی به شکل معادله (۴۰) تبدیل خواهد شد.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial c}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial y} = \\ & \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \right) + \\ & L \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\alpha \sqrt{\left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2} - 1}{(1-\alpha)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial c}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial c}{\partial y} \right] \\ & + L \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\alpha \sqrt{\left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2} - 1}{(1-\alpha)} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial c}{\partial x} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial c}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (40)$$

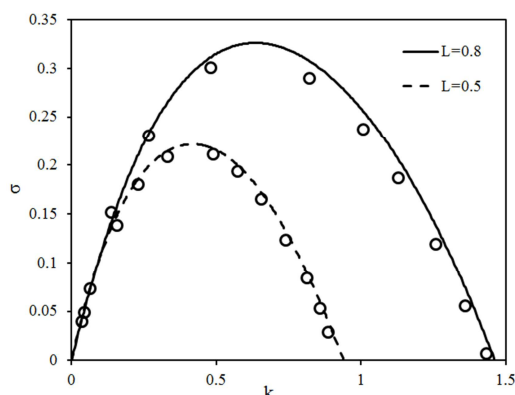
همچنین معادله حاصل از کرل معادله (۱۵) به شکل زیر خواهد

بود:

$$\begin{aligned} & \omega + De(1-\beta) \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\frac{R'}{\eta} \frac{\partial c}{\partial y} De \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial t} + \frac{R'}{\eta} \frac{\partial c}{\partial x} De \frac{\partial^2 p}{\partial y \partial t} - \\ & R \left(\frac{\partial c}{\partial y} \left(1 + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \frac{\partial c}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \\ & \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial y} De \frac{\partial c}{\partial y} (- (R + R')(1-\beta) + R^* \beta) + \\ & \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial x} De \frac{\partial c}{\partial x} (- (R + R')(1-\beta) + R^* \beta) \end{aligned} \quad (41)$$

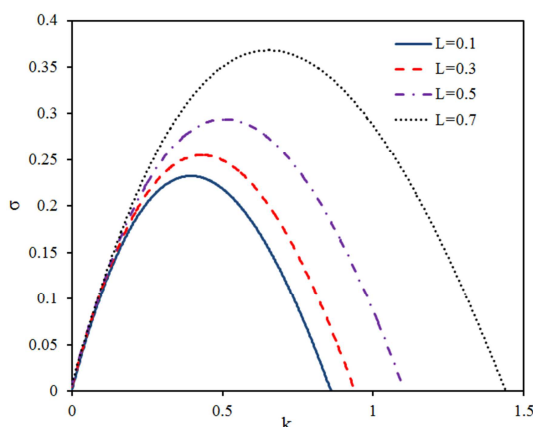
در این مطالعه به منظور شبیه‌سازی غیر خطی معادلات حاکم از روش طیفی و تبدیلات هارتلی بهره خواهیم برد. مزیت این روش نسبت

سرعت بر روی جابجایی ناپایداری انگشتی جریان نیوتنی پرداختند. شکل ۲ نشان دهنده تغییرات نرخ رشد ناپایداری در مقابل عدد موج برای دو مقدار متفاوت پارامتر L است. در این شکل نتایج ارائه شده توسط قسمت و عزایز با دایره‌های توخالی نشان داده شده است.



شکل ۲- مشخصه‌های ناپایداری برای جابجایی سیالات نیوتنی ($R=3$) ، $\alpha=0.1$ و $t_0=0.5$ ، نتایج ارائه شده توسط قسمت و عزایز [۴] با دایره‌های توخالی نشان داده شده است.

شکل ۲ تطابق مناسب بین مطالعه حاضر و نتایج منتشر شده توسط قسمت و عزایز [۴] را نشان می‌دهد. پارامترهای ناپایداری برای مقادیر مختلف پارامتر L برای $R=2.5$ ، $De_1=0.5$ ، $\beta_1=0.1$ ، $\alpha=0.1$ و $t_0=0.1$ در شکل ۳ نمایش داده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود با زیاد شدن پارامتر L جریان ناپایدارتر شده و نرخ رشد افزایش می‌یابد.



شکل ۳- مشخصه‌های ناپایداری در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال ویسکوالاستیک در $t_0=0.1$ و $\alpha=0.1$

شکل ۴ نشان دهنده تاثیر نسبت پراکندگی (α) در $R=2.5$ ، $De_1=0.5$ ، $\beta_1=0.1$ و $L=0.5$ بر روی مشخصه‌های ناپایداریست. می‌توان ملاحظه نمود با افزایش نسبت پراکندگی یعنی افزایش شدت پراکندگی در جهت عرضی به طولی، از شدت ناپایداری کاسته خواهد شد.

به سایر روش‌های موجود، دقت بالای آن است. همچنین با کمک آن معادلات مشتقات جزئی به معادلات دیفرانسیلی معمولی تبدیل خواهد شد. تبدیل دو بعدی هارتلی برای یک تابع دلخواه به صورت زیر خواهد بود:

$$G(k_x, k_y) = \frac{1}{\sqrt{N_x N_y}} \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} g(x, y) \cos\left(\frac{2\pi x k_x}{N_x} + \frac{2\pi y k_y}{N_y}\right) \quad (42)$$

در این معادله N_x و N_y به ترتیب نشان‌دهنده تعداد گره‌های محاسباتی در جهت x و y خواهد بود. همچنین k_x و k_y اعداد موج در جهت x و y است.

برای استفاده از تبدیل هارتلی، نیاز به شرایط مرزی متناوب است. با توجه به شرایط مرزی، تنها شرایط مرزی غلظت متناوب نیست. برای رفع این مشکل، منیکام و هومسی [۱۷] پیشنهاد نمودند که غلظت را به دو بخش پایه و اغتشاشی تقسیم نماییم:

$$c(x, y, t) = \bar{c}(x, y, t) + c'(x, y, t) \quad (43)$$

در معادله بالا، $c'(x, y, t)$ بخش اغتشاشی غلظت و $\bar{c}(x, y, t)$ حل معادله یک‌بعدی نفوذ-جابجایی است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{c}(x, t) = \frac{1}{2} \left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) \right) \quad (44)$$

بنابراین در روند شبیه‌سازی، به جای غلظت کل، فقط بخش اغتشاشی غلظت را محاسبه می‌نماییم. همچنین شرایط اولیه غلظت به صورت زیر بیان می‌شود:

$$c_0(x, y, t=t_0) = \frac{1 - \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{4t}}\right)}{2} + \delta \cdot \operatorname{rand}(y) \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) \quad (45)$$

در این معادله δ ، تعیین کننده شدت مقادیر تصادفی است که معمولاً از مزته ۰/۰۱ انتخاب می‌شود. σ پارامتری است که شدت نفوذ پراکندگی‌ها از مرز جلویی را نشان می‌دهد و $\operatorname{rand}(y)$ مجموعه‌ای از اعداد تصادفیست که بین ۱ تا ۱- انتخاب می‌شود. پیشرفت زمانی در مسئله با استفاده از روش حدس-اصلاح آدامز-بشفورس^۱ صورت می‌گیرد.

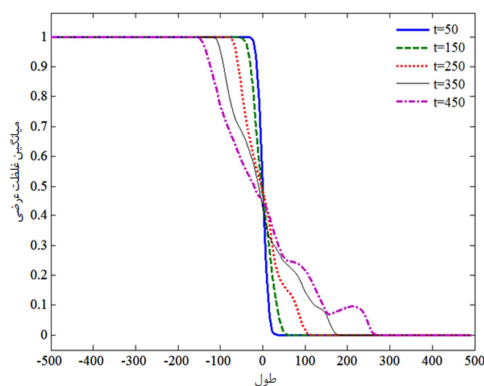
۳- نتایج

۳-۱- آنالیز پایداری خطی

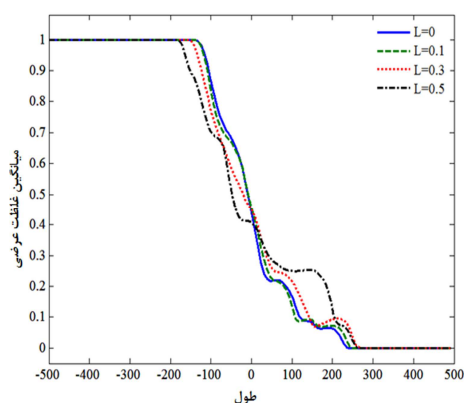
در ادامه به منظور تعیین اثر پارامترهای مهم بر روی ناپایداری انگشتی، نتایج حاصل از تحلیل پایداری خطی ارائه خواهد شد. از روش شوتینگ مرتبه ۲۶ به منظور حل نمودن دستگاه معادلات مقادیر ویژه (۳۶-۳۷) استفاده شده است. دامنه محاسباتی به اندازه‌ی کافی بزرگ در نظر گرفته شده تا تمام مقادیر ویژه را پوشش دهد و سپس بزرگترین مقدار ویژه گزارش شده است. به منظور اعتبارسنجی نتایجی ارائه شده، ابتدا به مقایسه نتایج حاصل از این تحقیق و نتایج ارائه شده توسط قسمت و عزایز [۴] خواهیم پرداخت. همانگونه که پیشتر اشاره شد، قسمت و عزایز به بررسی تاثیر ناهمسانگردی پراکندگی وابسته به

^۱Adams-Bashforth predictor-corrector method

^۲ The sixth order shooting method

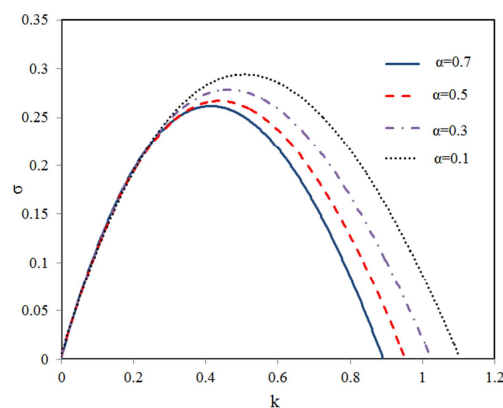


شکل ۵- منحنی میانگین غلظت عرضی در $\alpha = 0.1$ و $L = 0.3$



شکل ۶- منحنی میانگین غلظت عرضی در $\alpha = 0.1$ و $t = 450$

از جمله پارامترهای مهم در سنجش شدت ناپایداری انگشتی محاسبه طول اختلاط دو سیال است. در واقع طول اختلاط نشان‌دهنده میزان پیشروی سیال با لزجت کمتر به درون سیال با لزجت بیشتر می‌باشد. در مطالعه حاضر از روش ارائه شده توسط زیرمن و هومسی [۳] برای محاسبه طول اختلاط استفاده شده است. در این روش فاصله‌ای که در آن غلظت میانگین عرضی از مقدار $0.99/0.1$ تا $0.1/0.99$ تغییر می‌کند به عنوان طول اختلاط در نظر گرفته می‌شود. طول اختلاط برای مقادیر مختلف α و $L = 0.5$ در شکل ۷ نمایش داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود با افزایش پارامتر α یعنی نسبت پراکندگی در جهت عرضی به طولی، طول اختلاط کاهش خواهد یافت. در واقع پراکندگی عرضی به یکنواخت شدن جبهه غلظت کمک خواهد نمود و از شدت ناپایداری انگشتی می‌کاهد. شکل ۸ نشان‌دهنده تغییرات طول اختلاط با زمان و برای مقادیر مختلف پارامتر L است. با افزایش پارامتر L و در نتیجه افزایش شدت پراکندگی در جهت جریان، طول اختلاط افزایش خواهد یافت و ناپایداری شدت می‌گیرد. همانگونه که ملاحظه می‌شود، نتایج شبیه‌سازی غیرخطی در تطابق با نمودارهای به دست آمده از تحلیل پایداری خطی است.



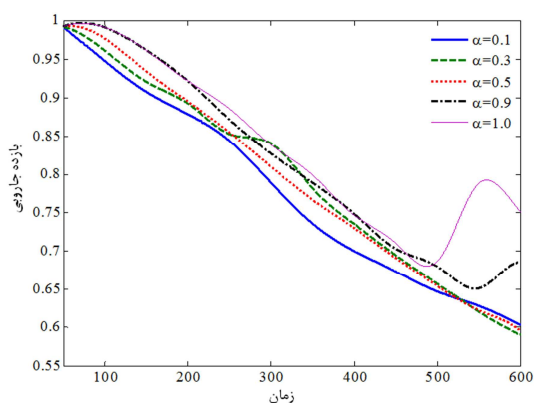
شکل ۴- مشخصه‌های ناپایداری در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال ویسکوالاستیک در $t_0 = 0.1$ و $L = 0.5$

۲-۳- شبیه‌سازی غیر خطی

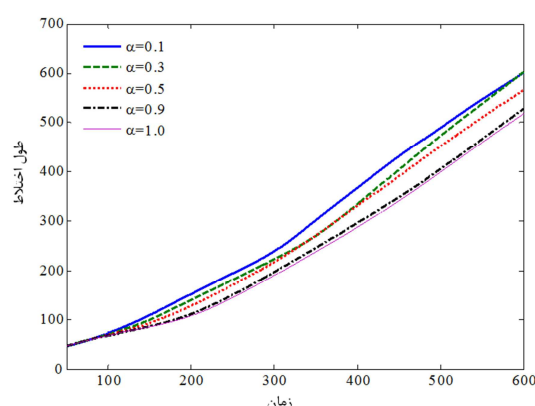
در این بخش به شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی در جابجایی سیال نیوتنی به وسیله سیال ویسکوالاستیک در محیط با پراکندگی ناهمسانگرد می‌پردازیم. موارد مورد مطالعه شامل کانتورهای غلظت، منحنی‌های میانگین غلظت عرضی، طول اختلاط و بازده جارویی خواهد بود. در تمام شبیه‌سازی‌ها $Pe = 1000$ ، $R = 2.5$ ، $\beta_1 = 0.1$ ، $De_1 = 0.5$ در نظر گرفته شده است مگر در مواردی که خلاف آن ذکر شود.

• میانگین غلظت عرضی و طول اختلاط:

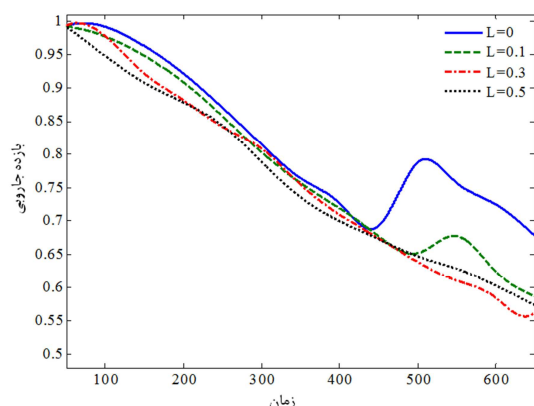
منحنی‌های نشان‌دهنده غلظت عرضی از جمله ابزارهای متداول جهت بررسی ناپایداری انگشتی است. شکل ۵ منحنی میانگین غلظت عرضی در جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال ویسکوالاستیک را در $\alpha = 0.1$ و $L = 0.3$ نشان می‌دهد. همانگونه که ملاحظه می‌شود در زمان‌های آغازی ناپایداری، منحنی به صورت تابع پله‌ای است. با گذشت زمان و شکل‌گیری انگشتی‌ها، پستی و بلندی‌های در منحنی ظاهر خواهد شد. در ناپایداری انگشتی، نرخ رشد و گسترش انگشتی‌ها متناسب با این پستی‌ها و بلندی‌ها است، به صورتی که هر چه موج‌های موجود در منحنی‌ها بیشتر باشند، شدت ناپایداری نیز بیشتر خواهد بود. منحنی‌های میانگین غلظت عرضی برای مقادیر مختلف L در $\alpha = 0.1$ و $t = 450$ در شکل ۶ نمایش داده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود افزایش این پارامتر بر شدت اعوجاج منحنی می‌افزاید. در نتیجه می‌توان نتیجه گرفت که این پارامتر ناپایداری را شدت خواهد بخشید.



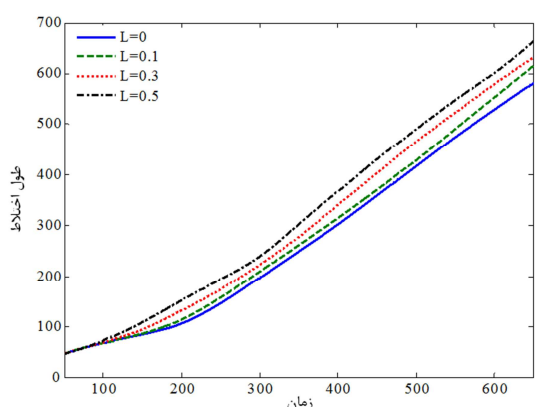
شکل ۹- منحنی بازده جارویی در $L = 0.5$



شکل ۷- منحنی طول اختلاط در $L = 0.5$



شکل ۱۰- منحنی بازده جارویی در $\alpha = 0.1$



شکل ۸- منحنی طول اختلاط در $\alpha = 0.1$

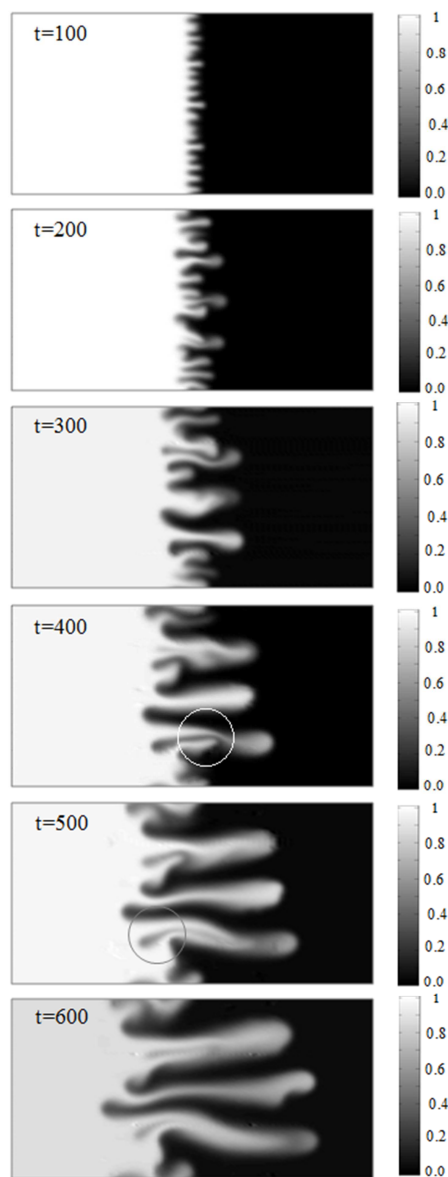
• کانتورهای غلظت:

شکل ۱۱ و ۱۲ به ترتیب نشان دهنده کانتورهای غلظت برای جابجایی سیال نیوتنی توسط سیال ویسکوالاستیک برای دو مقدار $\alpha = 0.1$ و $\alpha = 0.5$ در $L = 0.5$ می‌باشد. ناپایداری انگشتی با اعمال یک اغتشاش تصادفی در سطح تماس دو سیال آغاز می‌گردد و با گذشت زمان، انگشتی‌ها رشد کرده و در سیال با لزجت بیشتر نفوذ می‌کنند. در فریم‌های ابتدایی تعداد انگشتی‌ها زیاد و البته بسیار باریک و ریز هستند. با گذشت زمان، به دلیل مکانیزم‌های مختلف تعامل انگشتی‌ها، از تعداد انگشتی‌ها کاسته شده و در عوض شاهد انگشتی‌های بزرگ و پهن‌تری هستیم. یکی از مکانیزم‌های که در شکل ۱۱ و ۱۲ مکرراً مشاهده می‌شود مکانیزم بهم‌پیوستگی انگشتی‌هاست. در این مکانیزم نوک یک انگشتی به سمت انگشتی مجاورش خم می‌شود و به تدریج در بدنه آن ادغام خواهد شد. نمونه‌ای از این مکانیزم در زمان $t = 400$ با دایره سفید نشان داده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود این دو انگشتی در فریم‌های بعدی به تدریج به یک انگشتی پهن‌تر تبدیل خواهند شد. همچنین این فرایند ادغام موجب می‌شود که دنباله‌ای از سیال با لزجت بالا در انگشتی حاصل محبوس شود که به تدریج در آن مخلوط شده و از بین می‌رود. نمونه‌ای از این دنباله محبوس در شکل ۱۱ و در زمان $t = 500$ با دایره خاکستری نشان داده شده است. با مقایسه دو شکل مشاهده می‌شود که در $\alpha = 0.1$ ساختار انگشتی‌ها پیچیده‌تر و شاهد انگشتی‌های باریک‌تر و بلندتری نسبت به

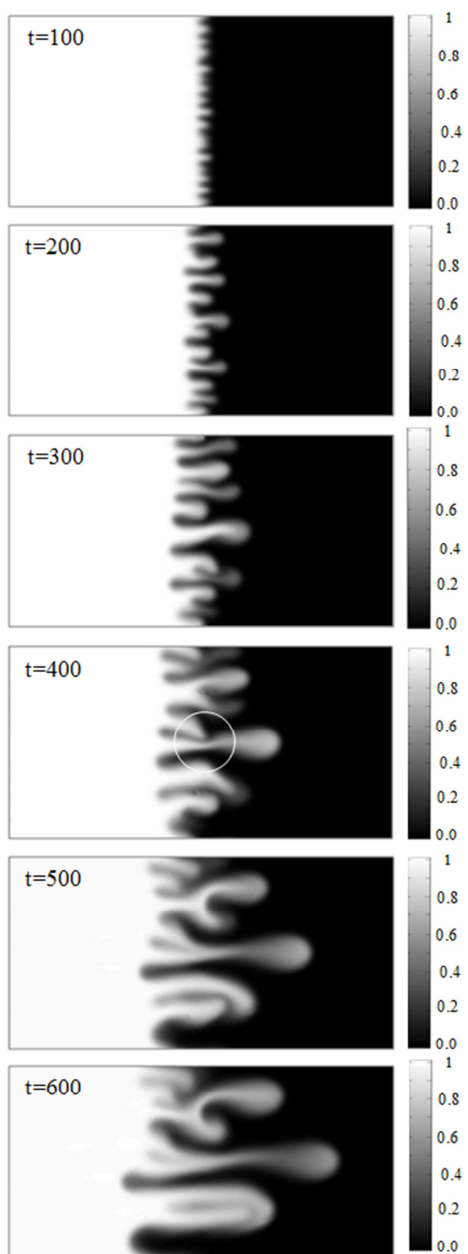
• بازده جارویی:

بازده جارویی نشان‌دهنده حجم سیال جابجا شده به حجم کل سیال موجود در یک محیط متخلخل است. برای محاسبه این پارامتر از روش ارائه شده توسط قسمت و عزایز [۴] بهره خواهیم برد. بدین ترتیب که تعداد گره‌های با غلظت نیم و بالاتر را بر تعداد کل گره‌های موجود در منطقه محاسباتی تقسیم می‌نماییم. تغییرات بازده جارویی نسبت به زمان برای مقادیر مختلف α و L به ترتیب در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده است. همانگونه که انتظار می‌رود افزایش α و کاهش L بازده جارویی را بهبود می‌بخشد. همچنین در آغاز این پارامتر نزدیک ۱ است و با گذشت زمان و رشد انگشتی‌ها از مقدار آن کاسته خواهد شد.

$\alpha = 0.5$ هستیم. در واقع با زیادتر شدن شدت پراکندگی عرضی، انگشتی‌ها پهن‌تر و کوتاه‌تر خواهند شد و از شدت ناپایداری کاسته می‌شود.



شکل ۱۱- کانتورهای غلظت برای $\alpha = 0.1$ و $L = 0.5$



شکل ۱۲- کانتورهای غلظت برای $\alpha = 0.5$ و $L = 0.5$

۴- نتیجه‌گیری

در این مطالعه با کمک آنالیز پایداری خطی و شبیه‌سازی غیر-خطی به بررسی ناپایداری انگشتی در جابجایی سیال نیوتنی به وسیله-ی سیال ویسکوالاستیک پرداخته شده و تاثیر ناهمسانگردی تانسور پراکندگی محیط بر روی این ناپایداری مورد مطالعه قرار گرفته است. تانسور پراکندگی محیط وابسته به سرعت در نظر گرفته شده و برای شبیه‌سازی سیال ویسکوالاستیک از معادله ساختاری اولدرود-بی استفاده شد. همچنین محیط متخلخل به وسیله‌ی سلول هل-شاو شبیه‌سازی شده است. نتایج نشان می‌دهند که ناهمسانگردی تانسور

- [۱۱] نوروزی م. و شوقی م.، شبیه سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی لزج سیال غیرنیوتنی در محیط متخلخل ناهمسانگرد. *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، د. ۱۵، ش. ۷، ص ۴۱۵-۴۲۵، ۱۳۹۴.
- [12] Shoghi M. R. and Norouzi M., Linear stability analysis and nonlinear simulation of non-Newtonian viscous fingering instability in heterogeneous porous media. *Rheologica Acta*, Vol. 54, No.11, pp. 973-991, 2015.
- [13] Mora S. and Manna M., From viscous fingering to elastic instabilities. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 173, No.1, pp. 30-39, 2012.
- [۱۴] کیهانی م. ح.، شکرکی ح و نوروزی م.، شبیه سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی سیال ویسکوالاستیک. *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، د. ۱۶، ش. ۸، ص ۴۷-۵۴، ۱۳۹۵.
- [15] Shokri H., Kayhani M. H. and Norouzi M., Nonlinear simulation and linear stability analysis of viscous fingering instability of viscoelastic liquids. *Physics of Fluids*, Vol. 29, No.1, pp. 033101:1-12, 2017.
- [16] Zhang Z., Fu C. and Tan W., Linear and nonlinear stability analyses of thermal convection for Oldroyd-B fluids in porous media heated from below. *Physics of Fluids*, Vol. 20, No.1, pp. 084103, 2008.
- Manickam O. and Homsy G., Stability of miscible displacements in porous media with nonmonotonic viscosity profiles. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, Vol. 5, No.1, pp. 1356-1367, 1993.

پراکندگی تاثیر قابل ملاحظه‌ای بر ناپایداری انگشتی خواهند داشت. از بررسی تحلیل خطی می‌توان نتیجه گرفت که هر چه نسبت پراکندگی عرضی به طولی (α) افزایش و شدت پراکندگی در جهت جریان (L) کاهش یابد، نرخ رشد ناپایداری کاهش خواهد یافت و در واقع جریان پایدارتر خواهد شد. در شبیه‌سازی غیرخطی با کمک روش طیفی و تبدیلات هارتلی به بررسی تاثیر ناهمسانگردی پراکندگی بر عوامل مشخص کننده ناپایداری مانند منحنی‌های میانگین غلظت عرضی، طول اختلاط، بازده جاروبی و کانتورهای غلظت پرداخته شده است. بوسیله‌ی کانتورهای غلظت، می‌توان روند رشد انگشتی‌ها و مکانیزم‌های مختلف تعامل انگشتی‌ها را مشاهده نمود. همچنین، نتایج همانگونه که انتظار می‌رفت نشان‌دهنده افزایش طول اختلاط و کاهش بازده جاروبی با افزایش پارامتر L و کاهش نسبت پراکندگی عرضی به طولی (α) است. در واقع پراکندگی عرضی محیط از عوامل کنترل کننده ناپایداری و کاهش شدت آن است. در مقابل پراکندگی در جهت جریان، موجب شدت گرفتن ناپایداری جریان خواهد شد.

هرچند در مطالعات پیشین کم و بیش به بررسی تاثیر ناهمسانگردی محیط بر روی ناپایداری انگشتی پرداخته شده است اما براساس بررسی‌های صورت گرفته این مطالعه نخستین تلاش در زمینه شبیه‌سازی ناپایداری انگشتی در حضور سیال ویسکوالاستیک و در محیط ناهمسانگرد می‌باشد.

۵- مراجع

- [1] Hill S., Channeling in packed columns, Chemical Engineering Science. *Chemical Engineering Science*, Vol. 1, No.6, pp. 247-253, 1952.
- [2] Tan C. and Homsy G., Simulation of nonlinear viscous fingering in miscible displacement. *Physics of fluids*, Vol. 31, No.6, pp. 1330-1338, 1988.
- [3] Zimmerman B. and Homsy G., Nonlinear viscous fingering in miscible displacement with anisotropic dispersion. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, Vol. 3, No.8, pp. 1859-1872, 1991.
- [4] Ghesmat K. and Azaiez J., Viscous fingering instability in porous media: effect of anisotropic velocity-dependent dispersion tensor. *Transport in Porous Media*, Vol. 73, No.3, pp. 297-318, 2008.
- [5] Norouzi M. and Shoghi M., A numerical study on miscible viscous fingering instability in anisotropic porous media. *Physics of Fluids*, Vol. 26, No.8, pp. 084102, 2014.
- [6] Nittmann J., Daccord G. and Stanley H. E., Fractal growth of viscous fingers: quantitative characterization of a fluid instability phenomenon. *Nature*, Vol. 314, No.6007, pp. 141-144, 1985.
- [7] Singh B. K. and Azaiez J., Numerical simulation of viscous fingering of shear - thinning fluids. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 79, No.6, pp. 961-967, 2001.
- [8] Azaiez J. and Singh B. K., Stability of miscible displacements of shear thinning fluids in a Hele-Shaw cell. *Physics of Fluids*, Vol. 14, No.5, pp. 1557-1571, 2002.
- [9] Li H., Maini B. and Azaiez J., Experimental and Numerical Analysis of the Viscous Fingering Instability of Shear - Thinning Fluids. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, Vol. 84, No.1, pp. 52-62, 2006.
- [10] Kim M. C. and Choi C. K., Linear analysis on the stability of miscible dispersion of shear-thinning fluids in porous media. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, Vol. 166, No.21, pp. 1211-1220, 2011.