پایدارسازی محلی کلاسی از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ ضربه‌ای با محدودیت نُرم سیگنال کنترل: رویکرد نامساوی‌های ماتریسی

محسن قلعه‌نوئی[۱]، دانشجوی دکتری؛ محمدرضا اکبرزاده توتونچی[۲]، استاد؛ ناصر پریز[۳]، استاد

۱- گروه برق - دانشکده مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد - مشهد - ایران - ghalehnoie.mohsen@mail.um.ac.ir
۲- گروه برق - دانشکده مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد - مشهد - ایران - akbazar@um.ac.ir
۳- گروه برق - دانشکده مهندسی - دانشگاه فردوسی مشهد - مشهد - ایران - n-pariz@um.ac.ir

چکیده: این مقاله، پایدارسازی کلاسی از سیستم‌های غیرخطی سوئیچ ضربه‌ای با محدودیت نُرم سیگنال کنترل را مطالعه می‌کند. به‌دلیل همین محدودیت، تنها کافی است که شرایط پایداری و فرضیات مربوط به دینامیک‌های غیرخطی بر روی یک زیرفضای شامل مبدأ برقرار باشند. البته، این فرضیات به‌گونه‌ای است که اغلب سیستم‌های واقعی را پوشش می‌دهد. هدف در این مقاله، طراحی سیگنالی است که بتواند همگرایی نمایی مسیرهای حالت به یک کران غایی به‌اندازه کافی کوچک را در حضور نایقینی‌ها تضمین نماید. لذا در ابتدا، برای یک سیستم کلی غیرخطی، شرایطی ارائه می شود که تضمین‌کننده همگرایی همه مسیرهای حالت شروع شده از یک زیرفضای جذب به یک کران غایی است. این شرایط برحسب یک تابع لیاپانوف مشترک و حداقل زمان توقف بوده و تنها کافی است بر روی زیرفضای جذب برقرار باشد. در بخش دوم، با استفاده از تابع لیاپانوف تربیعی و بهره‌گیری از فیدبک حالت، شرایط بیان‌شده در بخش اول، به‌صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های خطی یا دوخطی بازنویسی می‌شود. همچنین یک مسأله بهینه‌سازی ارائه می‌گردد که با حل آن، علاوه‌بر تعیین پارامترهای سیگنال کنترل، بزرگ‌ترین ناحیه همگرایی و کوچک‌ترین کران غایی به‌دست می‌آید. در نهایت، چند مثال شهودی به‌منظور نشان‌دادن کارایی روش پیشنهادی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: سیستم سوئیچ ضربه‌ای، محدودیت نُرم، نایقینی، نامساوی ماتریسی، ناحیه جذب، کران غایی.

Local Stabilization for a Class of Nonlinear Impulsive Switched Systems with Norm-Bounded Input: A Matrix Inequality Approach

M. Ghalehnoie[1], Ph.D. Candidate; M.R. Akbarzadeh-Tootoonchi[2], Professor; N. Pariz[1], Professor

1- Electrical Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, Email: ghalehnoie.mohsen@mail.um.ac.ir
2- Electrical Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, Email: akbazar@um.ac.ir
3- Electrical Department, Engineering Faculty, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran, Email: n-pariz@um.ac.ir

Abstract: This paper investigates stabilization for a class of nonlinear impulsive switched systems with norm-bounded input constraint. Due to this constraint, it is only enough that the stabilization criteria and assumptions related to the nonlinearities be met on a subspace containing the origin. Certainly, these assumptions are such that they covers most of real-world systems. The purpose of this paper is to design a norm-bounded control that guarantees the exponential convergence of trajectories to a sufficient small ultimate bound in presence of uncertainties. Therefore, firstly, we present the stability criteria for a general model that ensures the convergence of all trajectories starting from a region of attraction to an ultimate bound. These conditions are in terms of a common Lyapunov function candidate and the minimum dwell-time, and it is enough to be valid on the region of attraction. Secondly, using the common quadratic Lyapunov function candidate and using the state-feedback approach, the established conditions are reformulated as a set of linear or bilinear matrix inequalities. Besides, to achieve the control parameters along with the largest convergence area and smallest ultimate bound, we propose an optimization problem. Finally, some illustrative examples are presented to demonstrate the proposed approach.

Keywords: Impulsive switched system, norm-boundedness, uncertainty, matrix inequality, region of attraction, ultimate bound.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۶/۰۸/۰۵
تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۶/۰۹/۲۳ و ۱۳۹۶/۱۲/۲۷
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۷/۰۴/۲۶
نام نویسنده مسئول: محمدرضا اکبرزاده توتونچی
نشانی نویسنده مسئول: ایران - مشهد - میدان آزادی - دانشگاه فردوسی مشهد - دانشکده مهندسی - گروه برق - قطب علمی رایانش نرم و پردازش هوشمند اطلاعات.

۱- مقدمه

در اغلب فرآیندهای نوین، دینامیک‌های پیوسته و گسسته زمان به‌شدت در یکدیگر درهم‌تنیده شده و خانواده پیچیده‌ای از سیستم‌ها، به‌نام سیستم‌های هایبرید، را تشکیل داده‌اند. سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای، کلاس چالش‌برانگیزی از این خانواده است. این کلاس شامل تعداد متناهی زیر سیستم و یک قانون سوئیچ می‌باشد، به‌گونه‌ای که متغیرهای حالت در زمان سوئیچ ممکن است دچار جهش شوند [۱]. سیستم‌های سوئیچ و ضربه‌ای دارای کاربردهای فراوانی در کنترل و مدلسازی فرآیندهای واقعی بوده که از آن جمله می‌توان به بوم‌شناسی جمعیت [۲]، سیستم‌های مکانیکی [۳]، فرآیندهای شیمیایی [۴] و سیستم‌های آشوب [۵، ۶] اشاره داشت.

وجود همزمان سوئیچ و ضربه، سبب پیچیدگی بیشتر این کلاس نسبت به سیستم‌های سنتی شده است [۱] و لذا محققان تلاش‌های فراوانی را صرف حل مسائل بنیادین کنترل در این حیطه نموده‌اند. در بسیاری از این تحقیقات، راهکارهای گوناگونی مبتنی بر انواع مختلف کاندیدای تابع لیاپانوف ارائه شده است. به عنوان مثال، می‌توان به تابعی لیاپانوف-کراسوفسکی [۷-۹] و یا گسسته شده کاندیدای تابع لیاپانوف [۱۰، ۱۱] اشاره نمود.

از دیدگاهی دیگر، در پاره‌ای از مطالعات، یک کاندیدای لیاپانوف مشترک برای همه زیرسیستم‌ها در نظر گرفته می‌شود [۱۲]. در مقابل، گروهی دیگر از تحقیقات، تکنیک توابع لیاپانوف چندگانه را استفاده می‌نمایند [۶، ۸، ۱۰، ۱۳-۱۶]. در تکنیک لیاپانوف چندگانه، برای هر زیرسیستم، یک تابع لیاپانوف مجزا در نظر گرفته می‌شود که تنها کافی است مشتق زمانی آن در هنگام فعال‌بودن هر زیرسیستم غیرمثبت باشد و در سایر زمان‌ها، این مشتق می‌تواند مثبت باشد. بدین‌ترتیب، اگر چه در این تکنیک، تعداد پارامترها بیشتر شده ولی معمولاً شرایطی با محافظه‌کاری کمتر حاصل خواهد شد.

از دیدگاه قاعده سوئیچ نیز می‌توان تحقیقات انجام‌شده را به دو گروه تقسیم نمود: (۱) آنهایی که پایداری تحت هر قاعده سوئیچ دلخواه را بررسی می‌کنند و (۲) آنهایی که قواعد سوئیچ مقید را در نظر دارند. از آنجا که پایداری و پایدار سازی تحت هر قاعده سوئیچ دلخواه همواره ممکن نیست [۱۷]، اغلب تحقیقات کاربردی، سیگنال‌های سوئیچی را در نظر دارند که در آنها، یا حداقل/حداکثر زمان بین دو سوئیچ متوالی (زمان توقف) [۱۸-۲۰] و یا میانگین آن [۷-۱۰، ۲۱-۲۳] مشخص است. معمولاً در هنگام بررسی سیستم‌های غیرخطی که دارای فرضیاتی به‌صورت سراسری هستند و یا در هنگام بررسی سیستم‌های خطی، تکنیک میانگین دوره توقف دارای محافظه‌کاری کمتری است.

بااین‌حال، لازم به‌ذکر است که در روش‌های مبتنی بر میانگین دوره توقف، تضمینی وجود ندارد که مسیرهای حالت برای همه لحظات آتی، درون یک زیرفضای معین باقی بماند. لذا هنگامی که شرایط، مبتنی بر فرضیاتی است که فقط درون یک زیرفضا معتبر است (و خارج از این زیرفضا ممکن است برقرار نباشد)، تکنیک میانگین دوره توقف کارایی خود را از دست می‌دهد. این در حالی است که با مفروض‌بودن حداقل و یا حداکثر زمان مربوط به دوره توقف می‌توان تضمین نمود که مسیر حالت، درون زیرفضا باقی بماند.

از دیدگاه عملی، بویژه جایی که دستکاری در قانون سوئیچ خارج از اختیار است، طراحی یک قانون کنترل پایدارکننده حائز اهمیت می‌باشد. اغلب مطالعات در این حیطه، دارای دو محدودیت عمده هستند. اولاً، اشباع محرک‌ها را در نظر نمی‌گیرند. ثانیاً، شرایط پایداری به‌صورت سراسری و بر روی کل فضای حالت، پیشنهاد شده است و لذا فرضیات تصور شده نیز به صورت سراسری هستند. این امر می‌تواند محافظه‌کاری زیادی به‌دنبال داشته باشد. این مسأله زمانی بیشتر جلوه می‌نماید که نُرم سیگنال کنترل (برای جلوگیری از اشباع محرک‌ها) محدود بوده و مطالعه سیستم در یک زیرفضا اجتناب‌ناپذیر است.

بر اساس دانش نویسندگان، فعالیت‌های محدودی در زمینه سیستم‌های سوئیچ و ضربه‌ای انجام شده است که اشباع محرک‌ها را بررسی کرده باشند [۲۰، ۲۴-۲۷]. به هر صورت، در عمل چندین جنبه از سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای وجود دارد که باید به‌طور همزمان در مطالعات مدنظر باشد که عبارتند از: غیرخطی‌های شناخته‌شده و فرضیات عملی برای آنها، نایقینی های مختلف، و محدودبودن نُرم سیگنال کنترل. تا به این لحظه، این جنبه‌ها به‌طور همزمان مورد توجه قرار نگرفته‌اند. از طرف دیگر، در بسیاری از روش‌هایی که دینامیک‌های غیرخطی پیوسته زمان را در نظر دارند، شرط لیپ‌شیتز به‌صورت سراسری برای این دینامیک‌ها تصور شده و در نتیجه شرایط استخراج شده (که شامل ماتریس‌هایی از ثوابت لیپ شیتز هستند) نیز به صورت سراسری می‌باشند. اما، در بسیاری از سیستم‌های دنیای واقعی، ممکن است شرط لیپ شیتز در کل فضا برقرار نبوده و یا اینکه برای برقراری آن، نیازمند ماتریس ثوابت بسیار بزرگ هستند به‌گونه‌ای که شرایط بیان‌شده به یک مسأله حل‌نشدنی تبدیل می‌گردد.

توجه داشته باشید، با محدودبودن نُرم سیگنال کنترل (به‌منظور جلوگیری از اشباع محرک‌ها)، رسیدن به یک سیگنال پایدارساز سراسری، عملاً دشوار و نشدنی است [۲۰، ۲۷]. لذا، در نظر گرفتن شرایط لیپ‌شیتز به‌صورت سراسری می‌تواند محافظه‌کارانه باشد. رویکرد کمتر محافظه‌کارانه این است که این فرضیات بر روی زیرفضایی شامل مبدأ در نظر گرفته شود، یعنی جایی که در آن، نُرم سیگنال کنترل نیز محدود است. بنابراین، در این مقاله، بر روی پایدارسازی محلی تمرکز شده است و فرضیات مربوط به دینامیک‌های غیرخطی، به‌صورت محلی بر روی یک زیرفضای شامل مبدأ بیان شده‌اند. در نظر گرفتن منابع مختلفی از نایقینی‌های صفرنشونده در مدل موردبررسی، دیگر تفاوت عمده این مقاله با سایر فعالیت‌ها است. به‌همین دلیل، روش پیشنهادی در این مقاله، همگرایی مسیرهای حالت سیستم به یک کران غایی (و نه همگرایی به خود مبدأ) را بررسی می‌نماید.

در این مقاله، در ابتدا برای یک مدل جامع‌تر، شرایط پایداری محلی به‌گونه‌ای ارائه می‌شود که تضمین‌کننده همگرایی مسیرهای

حالت به یک کران غایی با شد. این شرایط برحسب یک کاندیدای تابع لیاپانوف بیان شـده و از تکنیک حداقل دوره توقف اسـتفاده می‌گردد. سـپس با به‌کارگیری تابع لیاپانوف تربیعی و اسـتفاده از فیدبک حالت، این شـرایط به‌صـورت مجموعه‌ای از نامسـاوی‌های ماتریسـی خطی و دوخطی برای سیستم مورد نظر بازنویسی می‌شود.

در کنار این موارد، به‌منظور د ستیابی به کوچک‌ترین کران غایی به همراه بزرگ‌ترین ناحیه جذب، یک م سأله بهینه سازی معرفی می شود که قیود آن، نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی هستند. این مسأله تو سط جعبه‌ابزارهایی نظیر PENBMI [۲۸] قابل‌حل می‌با شد. از طرف دیگر، از آنجا که همه بخش‌های دوخطی در قیود، شـامل یک متغیر ا سکالر ا ست، الگوریتم‌های مبتنی بر نام ساوی‌های خطی نیز برای حل این مسأله بهینه‌سازی وجود دارد [۲۷].

به‌طور خلا صه، نوآوری‌های روش ارائه شده به‌ترتیب اهمیت عبارت اسـت از: (۱) درنظرگرفتن محدودیت نُرم برای ورودی کنترل در حوزه سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای و در نتیجه جلوگیری از ا شباع محرک‌ها. (۲) درنظرگرفتن سـاختار کاملی از سـیسـتم‌های سـوئیچ ضـربه‌ای که دربردار نده همز مان دینامیک های غیرخطی شـناخته شـده و انواع مختلفی از نایقینی‌های صـفرنشـونده اسـت. بدین ترتیب، این سـاختار طیف و سیعی از سی ستم‌ها و فرآیندهای واقعی را پو شش خواهد داد. (۳) ارائه شـرایط پایداری به‌صـورت محلی که کاربرد این شـرایط را در موارد متعددی امکان پذیر می‌نما ید. از آن جمله می‌توان به مواردی اشـاره کرد که دینامیک‌های غیرخطی، شـرط لیپ‌شـیتز را به‌صـورت محلی برآورده می‌نمایند و یا آنهایی که فضـای مجاز برای متغیرهای حالت، به‌دلیل مسائل عملیاتی یا فیزیکی محدود شده است. (۴) توسعه یک م سأله بهینه سازی به‌منظور د ستیابی به بزرگ‌ترین ناحیه جذب و کوچک‌ترین کران غایی؛ و درنظرگرفتن جنبه‌های مختلف عملی در این مسأله بهینه‌سازی.

ادامه این مقاله بدین صورت سازمان‌دهی شده ا ست. در بخش ۲، توصـیف مسـأله موردنظر به‌همراه پیش‌نیازها آورده شـده اسـت. نتایج ا صلی این مقاله، شامل شرایط پایدار سازی و م سأله بهینه سازی، در بخش ۳ شرح داده شده است. در این بخش و در قضیه ۱، ابتدا با الهام از روش‌های بیان‌شده در [۲۹، ۳۰] و به‌ویژه روش بیضی‌گون جاذب در [۲۷]، شرایط پایداری برای سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای تو سعه داده شده ا ست. سپس در نتیجه ۱، به‌منظور ارائه راهکاری نظام‌مند جهت یافتن سیگنال کنترل، این شرایط به‌صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی بازنویسی می شود. نتایج شبیه سازی، به‌منظور تأیید قضایای تو سعه داده شده، در بخش ۴ دیده می شود. در نهایت، نتیجه‌گیری در بخش ۵ آورده شده است.

علائم و نشـانه‌ها: علائم اسـتفاده‌شـده در نگارش مقاله کاملاً اسـتاندارد هسـتند. به‌عنوان نمونه، برای نمایش ماتریس متقارن معین (یا نیمه‌معین) مثبت A، از نماد $A > 0$ (یا $A \geq 0$) اسـتفاده می‌شـود. همچنین ماتریس‌های یکه و صـفر، به‌ترتیب با نمادهای I و 0 نمایش داده می‌شـوند. علاوه‌بر این، بیضـی‌گون $\mathcal{E}(P,r)$ که بر حسـب ماتریس $P > 0$ و اسـکالر حقیقی مثبت $r > 0$ سـاخته می‌شـود، به‌صـورت $\{x \in \mathbb{R}^n | x^T P x \leq r\}$ تعریف می‌گردد. نماد «*» نیز در نامسـاوی‌های ماتریسی بیانگر بخش‌های متقارن است. تأکید می‌گردد که در هرکجای مقاله که ابعاد ماتریس به صراحت بیان نشده ا ست، فرض بر این ا ست که آن ماتریس‌ها دارای ابعاد مناسـب برای اعمال جبری هسـتند. همچنین، در سرتا سر مقاله، تابع لیاپانوف V برحسب متغیرهای حالت x می‌با شد. به‌منظور ساده‌نویسی، در این مقاله به‌جای نماد $V(x(t))$، از نماد $V(t)$ استفاده می‌شود.

۲- بیان مسأله

در این مقاله، پایدارسازی سیستم غیرخطی سوئیچ ضربه‌ای زیر بررسی می‌گردد که در آن بردار ورودی $u(t) \in \mathbb{R}^m$ دارای م حدود یت نُرم است:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g_i(x,u), & t \neq t_k, k \in \mathbb{N}^+ \\ x(t^+) = C_i x(t), & t = t_k, k \in \mathbb{N}^+, \end{cases} \quad (۱)$$

که در آن،

$$\begin{aligned} g_i(x,u) &= (A_i + \Delta A_i)x + (B_i + \Delta B_i)u(t) \\ &+ f_{ci}(x,u) + \phi_i(t) \end{aligned} \quad (۲)$$

بیانگر دینامیک پیوسته زمان مربوط به زیرسیستم i است.

در سـیسـتم (۱) دنباله زمانی $\{t_k\}_{k=1}^{\infty} := \{t_1, t_2, \dots, t_k, \dots\}$ یک دنباله اکیداً افزایشـی از لحظات ضـربه بوده که توسـط قاعده سـوئیچ $\sigma(t): \mathbb{R}^+ \to \{1,2,\dots,m\}$ شـکل می‌یابد. این قاعده سـوئیچ، لحظه فعال شدن هر یک از m زیر سیستم موجود را تعیین می‌کند. همچنین، $i \in \{1,2,\dots,m\}$ بیانگر زیر سی ستم فعال می‌با شد. در لحظات ضربه، هنگامی که یک زیر سیستم به زیر سیستم دیگر سوئیچ می‌نماید، بردار حالت $x(t) \in \mathbb{R}^n$، بر اسـاس ماتریس جهش $C_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و به‌صـورت ناگهانی دچار جهش می‌گردد. فرض بر این اسـت که بردار حالت $x(t)$، در لحظات ضربه از سمت چپ پیوسته باشد. به‌عبارت‌دیگر:

$$x(t_k) = x(t_k^-) = lim_{\zeta \to 0^+} x(t_k - \zeta). \quad (۳)$$

به‌علاوه، حد را ست بردار حالت $x(t)$، در لحظه ضربه t_k، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$x(t_k^+) = lim_{\zeta \to 0^+} x(t_k + \zeta). \quad (۴)$$

در سـیسـتم (۱)، ماتریس‌های A_i، B_i و C_i، ماتریس‌های معلوم و ثابتی ه ستند. همچنین، تابع $f_{ci}(x,u): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$، معلوم بوده و بیانگر دینامیک‌های غیرخطی و شناخته شده در زیر سی ستم i ا ست به‌گونه‌ای که $f_{ci}(0,0) = 0$ می‌باشـد. ماتریس‌های ΔA_i، ΔB_i و $\phi_i(t)$ نیز نشان‌دهنده انواع مختلفی از نایقینی‌ها و اغتشاشات ناشناخته برای زیر سی ستم i ا ست. علاوه‌بر این موارد، فرض می شود که حداقل زمان مابین دو سوئیچ متوالی τ_{min} شناخته‌شده است. به‌بیان‌دیگر:

$$\tau_{min} := \inf_{k \in \mathbb{N}^+} (t_k - t_{k-1}), \quad (۵)$$

همچنین، فرض‌های زیر در مورد سیستم (۱) مدنظر می‌باشد:

فرض ۱ [۲۷]: نایقینی‌ها، فرم ماتریسی زیر را برآورده می‌کنند:

$$[\Delta A_i(t) \quad \Delta B_i(t) \quad \phi_i(t)] = D_i F_i [E_{ai} \quad E_{bi} \quad E_{\phi i}], \qquad (۶)$$

که در آن ماتریس های D_i، E_{ai}، E_{bi} و $E_{\phi i}$ ثا بت و معلوم بوده و ماتریس $F_i(t)$ یک ماتریس نامعلوم و متغیر با زمان ا ست، به‌گونه‌ای که برای هر $t \in \mathbb{R}^+$ شرط $F_i^T(t)F_i(t) \le I$ برقرار است.

فرض ۲ [۲۷]: تابع $f_{ci}(x,u)$ شـــرط محلی زیر را بر روی دامنه $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^n$ (که مبدأ دستگاه مختصات را در بردارد) برآورده می‌کند:

$$f_{ci}{}^T f_{ci} \le x^T M_i^T M_i x + u^T N_i^T N_i u \qquad (۷)$$

که در آن، ماتریس‌های ثابت M_i و N_i دارای ابعاد مناسب هستند.

نکته ۱: در اغلب مطالعات انجام‌شده، فرض ۲ به چشم می‌خورد؛ با این تفاوت که شـــرط لیپ‌شـــیتز تنها بر روی متغیر x در نظر گرفته می‌شـــود. همچنین این مطالعات فرض می‌کنند که این شـــرط بر روی کل فضـــای $\mathbb{R}^n$ برقرار اســـت. در مورد چنین ســـیســـتم‌هایی، می‌توان $\mathbb{D} = \mathbb{R}^n$ و $N_i = 0$ را در نظر گرفت. بنابراین، فرض موردنظر در این مقاله (یعنی فرض ۲)، این دسته از سیستم‌ها را نیز پوشش می‌دهد.

نکته ۲: درنظرگرفتن فرض ۲، به‌صـــورت محلی و برحســـب هر دو متغیر x و u، دامنه کاربرد نتایج ا ستخراج شده را به تعداد بی شتری از سیستم‌های واقعی گسترش می‌دهد. به‌طور نمونه در مورد سیستم‌هایی که دینامیک‌های غیرخطی، نه‌تنها تابعی از متغیر حالت اســـت بلکه تابعی از ورودی کنترل نیز می‌باشد.

نکته ۳: با درنظرگرفتن فرض‌های ۱ و ۲، دینامیک پیوســـته زمان $g_i(x,u)$، کلاسی از سیستم‌های غیرخطی را شکل می‌دهد که می‌توان اغلب سیستم‌های واقعی را با این ساختار مدل‌سازی نمود [۲۷].

پیش از توسعه نتایج اصلی، صورت خاصی از لم نامساوی-$\boldsymbol{\Lambda}$ [۲۷]، ارائه می‌شود. این لم به‌همراه لم‌های مشهور مکمل شور [۳۱] و لم-اِس [۲۷] در اســـتخراج شـــرایط پایداری به‌صـــورت نامســـاوی‌های ماتریســـی کاربرد دارند.

لم ۱ [۳۲]: ماتریس‌های حقیقی D، E و F با ابعاد مناســـب را در نظر بگیرید. اگر $F^TF \le I$ با شد، آنگاه به‌ازای هر ا سکالر حقیقی مثبت $\gamma > 0$، نامساوی زیر برقرار است:

$$DFE + E^TF^TD^T \le \gamma DD^T + \gamma^{-1}E^TE. \qquad (۸)$$

۳- نتایج اصلی

در این بخش و در ابتدا، اقدام به توســـعه شـــرایط پایداری برای یک سیستم سوئیچ ضربه‌ای جامع‌تر می شود. در حقیقت، روش ارائه شده، تو سعه‌ای از روش بی ضی‌گون جاذب به سی ستم‌های سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی می‌باشـــد [۲۷]. البته تغییرات عمده‌ای در این روش اعمال شده است تا بتواند مسائل عملی بیشتری را پوشش دهد.

در روش ارائه‌شده، به‌دلیل حضور نایقینی‌ها و همچنین محدودبودن نُرم سیگنال کنترل، به‌ترتیب دو زیرفضا در نظر گرفته شده و شرایط با توجه به این زیرفضـــاها بیان می‌شـــوند: (الف) مجموعه داخلی Ω_1 که مســـیرهای حالت در نهایت به این مجموعه همگرا می‌شـــود و (ب) مجموعه خارجی $\Omega_2 \supset \Omega_1$ که نه‌تنها سیگنال کنترل بر روی آن دارای نُرم محدود است بلکه همه مسیرهای حالتی که از زیرفضای Ω_2 شروع شـــده باشـــد، علاوه‌بر همگرایی غایی به زیرفضـــای Ω_1، همواره درون زیرفضای Ω_2 باقی می‌ماند. به‌بیان‌دیگر، فضای Ω_2 یک مجموعه نامتغیر مثبت ا ست. شرایط بیان شده در این بخش، نه‌تنها وجود چنین ویژگی را تضمین می‌کند بلکه پایداری غایی سی ستم را نیز برآورده می سازد. لذا، در ابتدا، شـــرایط کافی پایداری برای ســـیســـتم جامع زیر که در آن قاعده سوئیچ، شرط (۵) را برآورده می‌کند، ارائه می‌شود:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f_i(x(t)), & t \ne t_k, k \in \mathbb{N}^+ \\ x(t^+) = g_i(x(t)), & t = t_k, k \in \mathbb{N}^{+\prime} \end{cases} \qquad (۹)$$

در ســـیســـتم (۹)، توابع برداری f_i و g_i به‌ترتیب دینامیک‌های پیوسته زمان و گسسته زمان مربوط به زیر سیستم i هستند. در اینجا نیز، زیر سی ستم فعال i، تو سط قاعده سوئیچ $\sigma(t)$ تعیین می شود. در ادامه و برای سیستم (۹)، نشان داده می شود که همه مسیرهای حالت شروع‌شده از زیرفضای خارجی:

$$\Omega_2 = \nu(V,r) := \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \le r\} \qquad (۱۰)$$

در نهایت به زیرفضای درونی:

$$\Omega_1 = \nu(V,\delta) := \{x \in \mathbb{R}^n | V(x) \le \delta\} \qquad (۱۱)$$

همگرا می شوند که در آن V یک کاندیدای تابع لیاپانوف منا سب ا ست به‌گونه‌ای که $V(x) = c$ به‌ازای هر $c > 0$ یک منحنی بســـته باشـــد. همچنین $r > \delta > 0$ ا سکالرهای حقیقی و مثبت ه ستند. لازم به ذکر ا ست که علت بیان ناحیه جذب خارجی Ω_2 و کران غایی Ω_1 برح سب کاندیدای لیاپانوف V، ســـهولت تبدیل شـــرایط اســـتخراج‌شـــده به مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی در هنگام بررسی سیستم (۱) می‌باشد.

قضیه ۱: اسکالرهای حقیقی و مثبت $0 < \delta < r$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که یک کاندیدای تابع لیاپانوف مناســـب V، اســـکالرهای حقیقی و مثبت ρ، $\mu \ge 1$ و $\delta' > \delta$ وجود دا شته با شند به‌گونه‌ای که $V(x) = c$ به‌ازای هر $c > 0$ یک منحنی بسته بوده و همچنین شرایط زیر برقرار باشد:

$$\dot{V} \le -\rho V, \qquad \forall x \in \upsilon(V,r) \backslash \upsilon(V,\delta), \qquad (۱۲)$$

$$V(t_k^+) \le \mu V(t_k), \quad \forall x \in \upsilon(V,r) \backslash \upsilon(V,\delta), \qquad (۱۳)$$

$$V(t_k^+) \le \delta', \qquad \forall x \in \upsilon(V,\delta), \qquad (۱۴)$$

$$\alpha := \rho - \ln \mu / \tau_{min} > 0, \qquad (۱۵)$$

جایی که τ_{min} در (۵) تعریف شده است. آنگاه سیستم (۹) پایدار غایی با باند غایی $\upsilon(V,\delta)$ به‌ازای همه شـــرایط اولیه $x_0 \in \upsilon(V,r)$ می‌باشـــد. به‌علاوه، ســـیســـتم (۹) به‌صـــورت نمایی به مجموعه نامتغیر مثبت $\upsilon(V,\delta')$ همگرا می‌شود.

برهان: در ابتدا نشان داده می‌شود که پیش از همگرایی به کران غایی $\upsilon(V,\delta)$، مقدار تابع لیاپانوف به‌صورت نمایی کاهش می‌یابد. برای این منظور فرض می‌شود که این همگرایی در طول بازه زمانی $(t_k,t_{k+1}]$ رخ دهد.

در ابتدا، روند تغییرات تابع لیاپانوف V، در طول بازه زمانی $(t_0,t_k]$ بررسی می‌گردد. بر اساس شرط (۱۲) به‌ازای هر $t\in(t_0,t_1]$ داریم:

$$V(t)\le V(t_0)\,exp\big(-\rho(t-t_0)\big), \qquad (۱۶)$$

که نتیجه زیر را به دنبال دارد:

$$V(t_1)\le V(t_0)\,exp\big(-\rho(t_1-t_0)\big), \qquad (۱۷)$$

و در نتیجه، با توجه به (۱۳) داریم:

$$V(t_1^+)\le \mu V(t_0)\,exp\big(-\rho(t_1-t_0)\big). \qquad (۱۸)$$

با ادامه همین روند برای بازه‌های زمانی $(t_1,t_2]$، $(t_2,t_3]$، ... و $(t_{k-1},t_k]$ خواهیم داشت:

$$V(t_k^+)\le \mu^k V(t_0)\,exp\big(-\rho(t_k-t_0)\big). \qquad (۱۹)$$

که اگر حداقل زمان توقف برابر τ_{min} درنظر گرفته شود، آنگاه تعداد واقعی سوئیچ‌ها کوچک‌تر یا مساوی $(t_k-t_0)/\tau_{min}$ خواهد بود. بنابراین، رابطه (۱۹) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\frac{V(t_k^+)}{V(t_0)} &\le \mu^{(t_k-t_0)/\tau_{min}}\,exp\big(-\rho(t_k-t_0)\big)\\ &= \exp\left(\frac{t-t_0}{\tau_{min}}\ln\mu\right)exp\big(-\rho(t_k-t_0)\big)\\ &= exp\left(-\left(\rho-\frac{\ln\mu}{\tau_{min}}\right)(t_k-t_0)\right).\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

بدین ترتیب، با توجه به شرط (۱۵) و رابطه (۲۰) می‌توان نتیجه گرفت که مقدار تابع لیاپانوف در طول بازه زمانی $(t_0,t_k]$، به‌صورت نمایی و با نرخ $\alpha<\rho$ کاهش می‌یابد. در طول بازه $(t_k,t_\delta]$ نیز، با توجه به (۱۲)، نرخ کاهش تابع لیاپانوف از α بیشتر است. در نتیجه اگر اولین زمان همگرایی به کران $\upsilon(V,\delta)$ به‌صورت $t_\delta\in(t_k,t_{k+1})$ نامیده شود، آنگاه برای هر $t\in(t_0,t_\delta]$ به‌دست می‌آید:

$$V(t)\le \mu^k V(t_0)\,exp\big(-\rho(t-t_0)\big). \qquad (۲۱)$$

با توجه به شرط (۱۲)، مسیر حالت برای تمام زمان‌های $t\in(t_\delta,t_{k+1}]$ درون این کران $\upsilon(V,\delta)$ باقی خواهد ماند و پس از جهش در زمان t_{k+1}^+ مسیر حالت درون فضای $\upsilon(V,\delta')$ باقی می‌ماند (به رابطه (۱۴) توجه شود). ازآنجایی که $\delta'<r$ است، مجدداً مسیر حالت به‌صورت نمایی به کران $\upsilon(V,\delta)$ همگرا شده و همین روند تا انتها ادامه خواهد یافت. بدین ترتیب، $\upsilon(V,r)$ یک مجموعه جذب بوده و $\upsilon(V,\delta')$ مجموعه‌ای متغیر مثبت است. همچنین $\upsilon(V,\delta)$ کران غایی محسوب شده و یک مجموعه جذب خواهد بود. بدین ترتیب اثبات کامل می‌شود.

□

نکته ۴: روش پیشنهادی در قضیه ۱، تلفیق و توسعه‌ای از روش‌های ارائه‌شده در [۲۷، ۲۹، ۳۰] برای سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای غیرخطی با نایقینی‌های صفرنشونده می‌باشد. البته تغییرات چشمگیری در شرایط بیان‌شده وجود دارد. در قضیه ۱، شرایط ارائه‌شده برای پایداری باید بر روی مجموعه خارجی برقرار باشد در حالی که در روش‌های مشابه، این شرایط بایستی بر روی کل فضای $\mathbb{R}^n$ برقرار باشد. این تفاوت، سبب سادگی پاره‌ای از فرضیات ضروری در آینده می‌گردد. به‌طور مثال، کافی است تا شرط لیپ‌شیتزِ مربوط به غیرخطی‌های معلوم به‌صورت محلی برقرار باشند. از دیگر تفاوت‌های موجود مابین قضیه ۱ و مراجع مذکور، وجود شرط (۱۴) می‌باشد. در واقع، به‌دلیل وجود اثر ضربه، در مقایسه با [۲۹، ۳۰]، شرط (۱۴) در کنار سایر شرایط و به‌منظور تضمین پایداری در هنگام ضربه در نزدیکی مبدأ، اضافه شده است.

به‌هر حال، یافتن یک کاندیدای تابع لیاپانوف V به‌گونه‌ای که کوچک‌ترین کران غایی و بزرگ‌ترین مجموعه جذب را به‌دنبال داشته باشد، شرط اساسی در قضیه ۱ محسوب می‌گردد. حال که شرایط پایداری برای سیستم جامع (۹) بیان گردید، این آمادگی وجود دارد که با درنظرگرفتن یک کنترل‌کننده فیدبک حالت، شرایط بیان‌شده در قضیه ۱ را برای سیستم (۱) بازنویسی نمود و روشی نظام‌مند برای یافتن تابع لیاپانوف ارائه کرد.

برای این منظور، سیگنال کنترل زیر را در نظر بگیرید:

$$u(t)=u_{\sigma(t)} \qquad (۲۲)$$

که در آن $u_i=K_ix,\ i\in\{1,2,\dots,m\}$ سیگنال‌های کنترل مناسبی هستند که توسط قاعده سوئیچ $\sigma(t)$ با یکدیگر ترکیب شده‌اند. براساس این قاعده سوئیچ، ورودی کنترل u_i هنگامی فعال می‌شود که زیرسیستم i فعال باشد. همچنین تابع لیاپانوف تربیعی $V=x^TPx$ که در آن P یک ماتریس معین مثبت با ابعاد مناسب است را در نظر داشته باشید. بایستی توجه داشت که تحت این تابع لیاپانوف، زیرفضای خارجی $\Omega_2=\nu(V,r)$ معادل بیضی‌گون $\mathcal{E}(P,r)$ بوده و زیرفضای داخلی $\Omega_1=\nu(V,\delta)$ نیز معادل بیضی‌گون $\mathcal{E}(P,\delta)$ می‌باشد.

همچنین، در طول بازه‌های زمانی که زیرسیستم i فعال است، مشتق زمانی تابع لیاپانوف V به‌صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}\dot V &= \dot x^TPx+x^TP\dot x\\ &= g_i^T(x,u_i)\,Px+x^TPg_i(x,u_i),\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

که در آن $g_i(x,u_i)$ در (۲) تعریف شده است و ΔA_i، ΔB_i و ϕ_i نایقینی‌هایی هستند که در فرض ۱ تعریف شده‌اند. جایگزینی این موارد در (۲۳)، رابطه زیر را به دنبال دارد:

$$\begin{aligned}\dot V = x^T\big(&A_i^TP+PA_i+K_i^TB_i^TP+PB_iK_i\\ &+E_{ai}^TF_i^TD_i^TP+PD_iF_iE_{ai}+K_i^TE_{bi}^TF_i^TD_i^TP\\ &+PD_iF_iE_{bi}K_i\big)x+f_{ci}^TPx+x^TPf_{ci}\\ &+E_{\phi i}^TF_i^TD_i^TPx+x^TPD_iF_iE_{\phi i}.\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

با استفاده از نامساوی-Λ و فرض ۲ نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}f_{ci}^TPx+x^TPf_{ci} &\le \zeta_ix^TPPx+\zeta_i^{-1}f_{ci}^Tf_{ci}\\ &\le x^T\big(\zeta_iPP+\zeta_i^{-1}M_i^TM_i+\zeta_i^{-1}K_i^TN_i^TN_iK_i\big)x\end{aligned} \qquad (۲۵)$$

که در آن ζ_i یک اسکالر حقیقی مثبت است. با استفاده از لم ۱ نیز می‌توان نامساوی‌های زیر را نتیجه گرفت:

$$E_{\phi i}^T F_i^T D_i^T Px + x^T PD_i F_i E_{\phi i} \le \gamma_{\phi i} x^T PD_i D_i^T Px + \gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i}, \quad (۲۶)$$

$$x^T E_{ai}^T F_i^T D_i^T Px + x^T PD_i F_i E_{ai} x \le \gamma_{ai} x^T PD_i D_i^T Px + \gamma_{ai}^{-1} x^T E_{ai}^T E_{ai} x, \quad (۲۷)$$

$$x^T K_i^T E_{bi}^T F_i^T D_i^T Px + x^T PD_i F_i E_{bi} K_i x \le \gamma_{bi} x^T PD_i D_i^T Px + \gamma_{bi}^{-1} x^T K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i x, \quad (۲۸)$$

که در آن‌ها γ_{ai}، γ_{bi} و $\gamma_{\phi i}$ اسکالرهای حقیقی مثبت و دلخواهی می‌باشند. با جایگذاری روابط (۲۵) الی (۲۸) در رابطه (۲۴)، کران بالایی به‌صورت زیر برای مشتق تابع لیاپانوف بدست می‌آید:

$$\dot V \le x^T\big(\Psi_i + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i + \zeta_i^{-1} K_i^T N_i^T N_i K_i + \gamma_{ai}^{-1} E_{ai}^T E_{ai} + \gamma_{bi}^{-1} K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i\big)x + \gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i}, \quad (۲۹)$$

جایی که:

$$\Psi_i = A_i^T P + PA_i + K_i^T B_i^T P + PB_i K_i + \zeta_i PP + \big(\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}\big) PD_i D_i^T P, \quad (۳۰)$$

می‌باشد. لذا اگر به‌ازای هر $x \in \Omega := \mathcal{E}(P,r)\backslash\mathcal{E}(P,\delta)$ شرط زیر برقرار باشد:

$$x^T\big(\Psi_i + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i + \zeta_i^{-1} K_i^T N_i^T N_i K_i + \gamma_{ai}^{-1} E_{ai}^T E_{ai} + \gamma_{bi}^{-1} K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i + \rho P\big)x \le -\gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i}, \quad (۳۱)$$

می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای هر $x \in \Omega$، شرط $\dot V \le \rho x^T Px = \rho V$ برقرار است. به‌عبارت دیگر با برقراری رابطه (۳۱) به‌ازای هر $x \in \Omega$، شرط (۱۲) نیز برقرار خواهد بود.

بر اساس لم-اِس، اگر اسکالرهای حقیقی مثبت τ_{1i} و τ_{2i} وجود داشته باشد، به‌گونه‌ای که دو شرط زیر برقرار باشد:

$$-\gamma_{\phi i}^{-1} E_{\phi i}^T E_{\phi i} - \tau_{1i} r + \tau_{2i}\delta \ge 0, \quad (۳۲)$$

$$\tau_{1i} P - \tau_{2i} P - \big(\Psi_i + \zeta_i^{-1} M_i^T M_i + \zeta_i^{-1} K_i^T N_i^T N_i K_i + \gamma_{ai}^{-1} E_{ai}^T E_{ai} + \gamma_{bi}^{-1} K_i^T E_{bi}^T E_{bi} K_i + \rho P\big) \ge 0. \quad (۳۳)$$

آنگاه دستگاه نامساوی‌های ماتریسی:

$$x^T Px \le r, \quad x^T Px \ge \delta, \quad (۳۴)$$

که معادل زیرفضای $\Omega := \mathcal{E}(P,r)\backslash\mathcal{E}(P,\delta)$ می‌باشد، شرط (۳۱) و در نتیجه شرط (۱۲) را برآورده می‌نماید. افزون‌بر این، با استفاده از لم مکمل شور، روابط (۳۲) و (۳۳) به‌ترتیب معادل روابط زیر هستند:

$$\begin{bmatrix} -\tau_{1i} r + \tau_{2i}\delta & E_{\phi i}^T \\ * & \gamma_{\phi i} I \end{bmatrix} \ge 0, \quad (۳۵)$$

$$\begin{bmatrix} -\Pi_i & M_i^T & K_i^T N_i^T & E_{ai}^T & K_i^T E_{bi}^T \\ * & \zeta_i I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \zeta_i I & 0 & 0 \\ * & * & * & \gamma_{ai} I & 0 \\ * & * & * & * & \gamma_{bi} I \end{bmatrix} \ge 0, \quad (۳۶)$$

که در آن:

$$\Pi_i = -\tau_{1i} P + \tau_{2i} P + \Psi_i + \rho P. \quad (۳۷)$$

با ضرب ماتریس $diag(P^{-1}, I, I, I)$ از سمت چپ و راست در نامساوی ماتریسی (۳۶)، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} -\psi_i & P^{-1} M_i^T & W_i^T N_i^T & P^{-1} E_{ai}^T & W_i^T E_{bi}^T \\ * & \zeta_i I & 0 & 0 & 0 \\ * & * & \zeta_i I & 0 & 0 \\ * & * & * & \gamma_{ai} I & 0 \\ * & * & * & * & \gamma_{bi} I \end{bmatrix} \ge 0, \quad (۳۸)$$

که در آن:

$$\psi_i = -\tau_{1i} P^{-1} + \tau_{2i} P^{-1} + \rho P^{-1} + P^{-1} A_i^T + A_i P^{-1} + P^{-1} K_i^T B_i^T + B_i K_i P^{-1} + \zeta_i I + \big(\gamma_{\phi i} + \gamma_{ai} + \gamma_{bi}\big) D_i^T D_i, \quad (۳۹)$$

$$W_i^T = P^{-1} K_i^T, \quad (۴۰)$$

می‌با شد. لذا، اگر به‌ازای هر $i \in \{1, 2, \dots, m\}$، نامساوی‌های ماتریسی (۳۵) و (۳۸) برقرار باشند، رابطه (۱۲) برقرار خواهد بود.

حال، به‌منظور یافتن معادلی برای شرط (۱۳) به‌صورت نامساوی‌های ماتریسی، تابع لیاپانوف $V = x^T Px$ در (۱۳) جایگذاری می‌شود. بدین ترتیب رابطه (۱۳)، معادل رابطه زیر به‌ازای هر $x \in \mathcal{E}(P,r)\backslash\mathcal{E}(P,\delta)$ خواهد بود:

$$x^T(t_k^+) Px(t_k^+) \le \mu x^T(t_k) Px(t_k), \quad (۴۱)$$

با استفاده از تابع جهش مربوط به زیرسیستم i از (۱) نتیجه می‌شود که $x(t_k^+) = C_i x(t_k)$. لذا از (۴۱) می‌توان نتیجه گرفت که به‌ازای هر $x \in \mathcal{E}(P,r)\backslash\mathcal{E}(P,\delta)$ باید رابطه زیر برقرار باشد:

$$x^T(t_k)\big(C_i^T PC_i - \mu P\big)x(t_k) \le 0. \quad (۴۲)$$

مشابه آنچه که در مورد روابط (۳۲) و (۳۳) بیان شد، با اعمال لم-اِس، شرط (۴۲) (که بر اساس توضیحات فوق معادل شرط (۱۳) برای سیستم (۱) است) برآورده می‌شود، اگر اسکالرهای حقیقی مثبت τ_{3i} و τ_{4i} وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که روابط:

$$-\tau_{3i} r + \tau_{4i}\delta \ge 0, \quad (۴۳)$$

$$\tau_{3i} P - \tau_{4i} P - \big(C_i^T PC_i - \mu P\big) \ge 0 \quad (۴۴)$$

برقرار باشند. با استفاده از لم مکمل شور برای نامساوی (۴۴) و سپس ضرب‌کردنِ این حاصل در ماتریس $diag(P^{-1}, I)$ (از سمت چپ و راست) نامساوی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \tau_{3i} P^{-1} - \tau_{4i} P^{-1} + \mu P^{-1} & P^{-1} C_i^T \\ * & P^{-1} \end{bmatrix} \ge 0. \quad (۴۵)$$

بدین ترتیب نشان داده شد که شرط (۱۳) با نامساوی‌های ماتریسی (۴۳) و (۴۵) معادل می‌گردد. به‌طور مشابه، با جایگذاری:

$$V(t_k^+) = x^T(t_k^+) Px(t_k^+) = x^T(t_k) C_i^T PC_i x(t_k) \quad (۴۶)$$

در رابطه (۱۴) و سپس اعمال لم-اِس می‌توان نتیجه گرفت که رابطه (۱۴) نیز برقرار است، اگر اسکالر حقیقی مثبت τ_{5i} وجود داشته باشد به‌گونه‌ای که روابط:

$$\delta' - \tau_{5i}\delta \ge 0, \quad (۴۷)$$

$$\tau_{5i} P - C_i^T PC_i \ge 0 \quad (۴۸)$$

برقرار باشند. مجدداً با اعمال لم مکمل شور برای نامساوی (۴۸) و سپس ضرب‌کردن نتیجه حاصل در ماتریس $diag(P^{-1}, I)$ (از سمت چپ و راست)، می‌توان نامساوی ماتریسی زیر را نتیجه گرفت:

$$\begin{bmatrix} \tau_{5i}P^{-1} & P^{-1}C_i^T \\ * & P^{-1} \end{bmatrix} \geq 0. \qquad (۴۹)$$

به‌طور خلاصه، با در نظر گرفتن نامساوی‌های ماتریسی (۳۵)، (۳۸)، (۴۳)، (۴۵)، (۴۷) و (۴۹)، روابط (۱۲) الی (۱۴) برای سیستم (۱) تحت سیگنال کنترل (۲۲) تحقق می‌یابد. لذا، اگر شرط (۱۵) نیز صحیح باشد، آنگاه طبق قضیه ۱، همه مسیرهای حالت در سیستم (۱) تحت ورودی کنترل (۲۲)، به‌ازای هر شرط اولیه $x_0 \in \mathcal{E}(P,r)$، نه‌تنها درون بیضی‌گون خارجی $\mathcal{E}(P,r)$ باقی می‌ماند، بلکه به‌صورت نمایی به بیضی‌گون نامتغیر $\mathcal{E}(P,\delta')$ نیز همگرا خواهد شد.

نکته ۵: مشاهده می شود که نامساوی‌های به‌دست‌آمده، همگی نامساوی‌های ماتریسی خطی و یا دوخطی هستند. لذا به‌منظور استفاده از جعبه‌ابزارهای موجود برای این دسته از نامساوی‌های ماتریسی، شرط غیرخطی (۱۵) بایستی بازنویسی شود. با توجه به اینکه $\mu \geq 1$ است و در نتیجه $\ln(\mu) \leq \mu - 1$ است، شرط (۱۵) را می‌توان با شرط خطی ولی تا حدودی محافظه‌کارانه زیر جایگزین نمود:

$$\rho - (\mu - 1)/\tau_{min} > 0, \qquad (۵۰)$$

به‌هرحال، در عمل همواره حداکثر بزرگی سیگنال کنترل محدود می‌باشد [۲۷]. برای این منظور، غالباً از نامساوی زیر بهره گرفته می‌شود:

$$\|u\|^2 = u^T u \leq u_{max}^2, \qquad (۵۱)$$

جایی که u_{max} یک اسکالر حقیقی مثبت و از پیش معلوم می‌باشد. لذا در ادامه، شرایط کافی دیگری برای تضمین این محدویت ارائه می‌شود.

با توجه به روابط (۲۲) و (۵۱)، به‌منظور داشتن یک سیگنال کنترل با نُرم محدود، عبارت زیر باید به‌ازای هر $i \in \{1,2,\dots,m\}$ و برای هر $x \in \mathcal{E}(P,r)$ برقرار باشد:

$$\|u_i\|^2 = u_i^T u_i = x^T K_i^T K_i x \leq u_{max}^2. \qquad (۵۲)$$

با اعمال روندی مشابه با آنچه در قبل آورده شد، معادل شرط (۵۲)، دو نامساوی ماتریسی خطی زیر خواهد بود:

$$u_{max}^2 - \tau_{6i} r \geq 0, \qquad (۵۳)$$

$$\begin{bmatrix} P^{-1} & W_i^T \\ * & \tau_{6i} I \end{bmatrix} \geq 0, \qquad (۵۴)$$

که در آن τ_{6i} اسکالری حقیقی و مثبت است. به‌عبارت دیگر، اگر به‌ازای هر $i \in \{1,2,\dots,m\}$، نامساوی‌های (۵۳) و (۵۴) برآورده شوند، محدودبودن نُرم سیگنال کنترل (۲۲) تضمین می‌گردد. با درنظرگرفتن توضیحات فوق و همچنین $L = P^{-1}$ و $W_i = K_i P^{-1} = K_i L$، می‌توان بر اساس قضیه ۱، نتیجه زیر را توسعه داد.

نتیجه ۱: ثابت‌های حقیقی و مثبت $0 < \delta < r$ و u_{max} را در نظر بگیرید. فرض کنید که ماتریس معین مثبت L، ماتریس های W_i، اسکالرهای حقیقی و مثبت ρ، $\mu \geq 1$، $\delta' > \delta$، ζ_i، τ_{ji}، γ_{ai}، γ_{bi} و $\gamma_{\phi i}$ که در آن $i \in \{1,2,\dots,m\}$ و $j \in \{1,2,\dots,6\}$ است وجود داشته باشند به‌گونه‌ای که شرایط (۳۵)، (۳۸)، (۴۳)، (۴۵)، (۴۷)، (۴۹) و (۵۰) به‌ازای هر $i \in \{1,2,\dots,m\}$ برقرار باشد. آنگاه سیستم حلقه‌بسته (۱) تحت قاعده کنترل (۲۲) با $u_i = K_i x = W_i L^{-1} x$ به‌ازای هر شرط اولیه $x(t_0) \in \mathcal{E}(L^{-1},r)$ به‌صورت نمایی به بیضی‌گون $\mathcal{E}(L^{-1},\delta')$ همگرا می‌شود. به‌علاوه، اگر شرایط (۵۳) و (۵۴) نیز برقرار باشد، سیگنال کنترل طراحی‌شده دارای نُرم محدود بوده و شرط $\|u\|^2 = u^T u \leq u_{max}^2$ به‌ازای هر $x(t) \in \mathcal{E}(L^{-1},r)$ برقرار است.

نکته ۶: همان‌طور که در برهان قضیه ۱ دیده می‌شود، مقدار کاندیدای تابع لیاپانوف به‌صورت نمایی و مطابق رابطه زیر کاهش می‌یابد:

$$V(t) \leq V(t_0)\, exp\big(-\alpha(t - t_0)\big), \qquad (۵۵)$$

که در آن، متغیر α در رابطه (۱۵) تعریف شده است. ازآنجاکه $V = x^T P x$ است، می‌توان در نتیجه ۱، کران بالایی برای نُرم متغیرهای حالت به‌صورت زیر بدست آورد:

$$\|x(t)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_{max}(P)}{\lambda_{min}(P)}}\, \|x(t_0)\|\, exp\left(-\frac{\alpha}{2}(t - t_0)\right). \qquad (۵۶)$$

۳-۱- بهینه‌سازی مقادیر و نکات عملی دیگر

به‌منظور دستیابی به کوچک‌ترین بیضی‌گون جاذب (یا همان حداقل کران غایی)، می‌توان اندازه δ یا $trace\{L\}$ و یا هر دو را حداقل نمود. برای کاهش بار محاسبات و بدون از دست‌دادن کلیت، در ادامه $\delta = 1$ فرض شده و سپس تلاش می‌شود که با محدودکردن $trace\{L\}$ اندازه بیضی‌گون جاذب حداقل گردد. در واقع، کاهش این ویژگی از ماتریس L سبب کاهش جمع مربعات قطرهای بیضی‌گون می‌گردد [۲۷].

به‌هرحال، در صورت ثابت‌بودن اسکالر r، حداقل سازی $trace\{L\}$ سبب کاهش اندازه بیضی‌گون خارجی نیز می شود. بنابراین، به‌منظور حداکثرکردن بیضی‌گون خارجی، باید مقدار r را به‌طور همزمان حداکثر نمود. در کنار این موارد، به‌منظور کاهش اندزه مجموعه نامتغیر $\mathcal{E}(P,\delta')$، مقدار پارامتر δ' بایستی حداقل گردد.

از سوی دیگر، در پایدارسازی عملی بایستی اطمینان حاصل شود که همه مسیرهای حالت به یک فضای محدود و از پیش تعیین‌شده همگرا می‌گردند. در مورد توابع لیاپانوف تربیعی، این فضا به‌صورت بیضی‌گون $\mathcal{E}(Q_{in},1)$ درنظر گرفته می‌شود که در آن Q_{in} یک ماتریس متقارن معین مثبت و از پیش معلوم است. ازآنجایی‌که ماتریس Q_{in}، متقارن و معین مثبت است، می‌توان برای آن و یا برای معکوس آن ریشه دوم تعیین نمود. به‌طور مثال، ماتریس X_{in} را می‌توان به‌گونه‌ای تعیین کرد که $X_{in}^T X_{in} = Q_{in}^{-1}$ باشد. در روش پیشنهاد شده در نتیجه ۱، به‌منظور حصول اطمینان از همگرایی مسیرهای حالت به زیرفضای $\mathcal{E}(Q_{in},1)$، بایستی شرط زیر برقرار باشد:

$$\mathcal{E}(P,\delta = 1) \subseteq \mathcal{E}(Q_{in},1) \subseteq \mathcal{E}(P,r) \qquad (۵۷)$$

و از آنجا که $\mathcal{E}(P,r)=\mathcal{E}(r^{-1}P,1)$ است، آنگاه شرط (۵۷) نیز زمانی که عبارت $P^{-1}\le Q_{in}^{-1}\le rP^{-1}$ برآورده شود، معتبر خواهد بود. لذا در مسأله بهینه‌سازی، بایستی دو شرط زیر نیز گنجانده شود:

$$L\le Q_{in}^{-1}, \tag{۵۸}$$

$$\begin{bmatrix} L & X_{in}^T \\ * & rI \end{bmatrix}\ge 0 \tag{۵۹}$$

که در آن، عبارت (۵۹) از اعمال لم مکمل شور بر روی شرط $Q_{in}^{-1}=X_{in}^TX_{in}\le rP^{-1}$ به‌دست آمده است.

علاوه‌بر این موارد، مجدداً یادآور می‌شود که شرایط بیان‌شده به‌صورت محلی هستند و بر همین اساس، فرض ۲ به‌صورت محلی منظور شده است. این حالت برای بسیاری از سیستم‌های غیرخطی واقعی نیز صدق می‌کند که در آنها شرط لیپ‌شیتز بر روی کل فضای $\mathbb{R}^n$ برقرار نبوده، درحالی‌که ممکن است بتوان این شرط را به‌صورت محلی و بر روی یک زیردامنه $\mathbb{D}\subseteq\mathbb{R}^n$ در نظر گرفت. چنین شرط لیپ‌شیتزی در روند استخراج کران بالای مربوط به تابع لیاپانوف تربیعی مورد توجه بوده است. لذا به‌منظور اطمینان از معتبربودنِ روابط (۳۵) و (۳۸)، شرط زیر بایستی برقرار باشد:

$$\mathcal{E}(P,r)=\mathcal{E}(r^{-1}P,1)\subseteq\mathcal{E}(Q_{out},1)\subseteq\mathbb{D}, \tag{۶۰}$$

که در آن $Q_{out}>0$ یک ماتریس معین مثبت مطلوب است، به‌گونه‌ای که $\mathcal{E}(Q_{out},1)\subseteq\mathbb{D}$ بزرگترین بیضی‌گون ممکن درون $\mathbb{D}$ باشد. شرط فوق نیز هنگامی حاصل می‌گردد که عبارت زیر برقرار باشد:

$$rP^{-1}\le Q_{out}^{-1}. \tag{۶۱}$$

لذا در مسأله بهینه‌سازی مورد نظر، به همراه سایر قیود، قید زیر نیز لحاظ می‌گردد:

$$Q_{out}^{-1}-rL\ge 0. \tag{۶۲}$$

با در نظر گرفتن توضیحات بیان‌شده در بالا، به‌منظور دستیابی همزمان به پارامترهای کنترلی مطلوب به همراه رسیدن به بزرگ‌ترین بیضی‌گون جذب و کوچک‌ترین کران غایی، مسأله بهینه‌سازی زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &min.:\ trace\{L\}+\omega_1\delta'-\omega_2 r\\ &s.t.\ :\ r\ge 1,\mu\ge 1,\delta'>1,(35),(38),(43),(45),\\ &\qquad (47),(49),(50),(53),(54),(58),(59),(62) \end{aligned} \tag{۶۳}$$

که در آن ω_1 و ω_2 ضرایب مصالحه می‌باشند.

۴- شبیه‌سازی

در ادامه، با استفاده از دو مثال عددی و یک مثال عملی، کارایی نتایج بخش ۳ بررسی می‌شود. در این مثال‌ها، دینامیک‌های غیرخطی، شرط لیپ‌شیتز را بر روی $\mathbb{R}^n$ برآورده نمی‌کنند ولی به‌دلیل مشتق‌پذیربودن و پیوسته‌بودن، می‌توان در یک زیرفضای محدود اطراف مبدأ، ماتریس ثوابت لیپ‌شیتز را (به‌گونه‌ای که فرض ۲ برقرار باشد) به‌دست آورد.

مثال ۱: فرض کنید که سیستم (۱) تنها شامل یک زیر سیستم با پارامترهای معلوم زیر:

$$\begin{aligned} &A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\\ &f_c(x)=(0.1x_1x_2\quad 0.1x_1^2)^T,\qquad C=-1.1\times I_{2\times 2}. \end{aligned} \tag{۶۴}$$

بوده و نایقینی‌ها توسط ماتریس‌های:

$$\begin{aligned} &D=0.1\times I_{2\times 2},\qquad F(t)=\mathrm{diag}(sin(t),cos(t)),\\ &10E_\phi=E_b=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\qquad E_a=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix} \end{aligned} \tag{۶۵}$$

معرفی شده باشد. واضح است که ماتریس $f_c(x)$ شرط لیپ‌شیتز را بر روی کل فضای $\mathbb{R}^n$ برآورده نمی‌کند؛ ولی بر روی زیرفضای:

$$\mathbb{D}=\{x\in\mathbb{R}^2||x_1|\le 10\} \tag{۶۶}$$

رابطه زیر برقرار است:

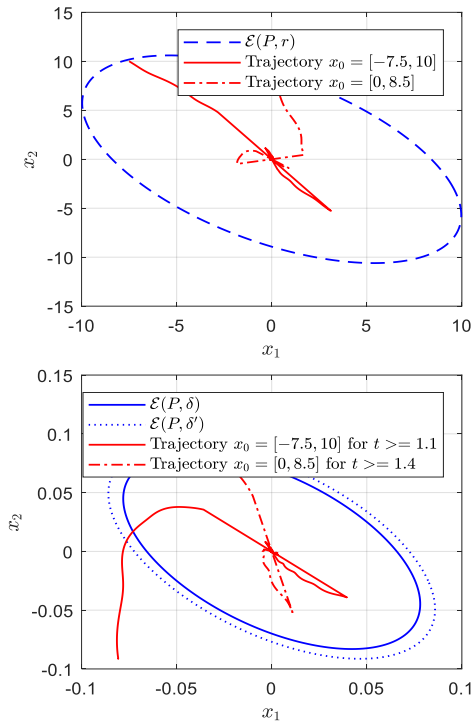
$$f_c^Tf_c=0.01x_1^2(x_1^2+x_2^2)\le(x_1^2+x_2^2)=x^Tx \tag{۶۷}$$

بدین ترتیب، ثابت‌های لیپ‌شیتز، $M=I_{2\times 2}$ و $N=0$ بوده و بایستی مجموعه جذب به‌گونه‌ای انتخاب گردد که درون زیرفضای $\mathbb{D}$ جای داشته باشد. برای این منظور، زیر فضای مطلوب $\mathcal{E}(Q_{out},1)$ که در آن $Q_{out}=diag(0.01,1\times 10^{-10})$ است در نظر گرفته می شود. باید توجه داشت که بر اساس تجزیه مقادیر تکین مربوط به ماتریس های معین مثبت، اندازه قطر های بیضی‌گون $\mathcal{E}(Q_{out},1)$، متناسب با معکوس جذر مقادیر ویژه ماتریس Q_{out} می‌باشد. از طرف دیگر، مطابق رابطه (۶۶)، زیرفضای مجاز در راستای محور x_2 نامحدود است. لذا، در واقعیت مقدار ویژه Q_{out} در راستای x_2 صفر است. ولی ازآنجاکه در قید (۶۲)، معکوس Q_{out} استفاده می شود، این مقدار ویژه، بسیار کوچک انتخاب شده است تا ضمن معکوس‌پذیربودن، قطر بیضی‌گون حاصل در این راستا بسیار بزرگ باشد و در نتیجه فضای مجاز در این راستا محدود نگردد. در کنار زیرفضای مجاز، زیرفضای جاذب مطلوب، به‌صورت $\mathcal{E}(Q_{in},1)$ با $Q_{in}=diag(10,10)$ در نظر گرفته می‌شود.

علاوه‌بر این، در این شبیه سازی، دنباله زمان‌های ضربه به صورت {۰/۳, ۰/۷, ۱/۱, ۱/۶, ۲/۲, ۲/۸, ۳/۴, ...} فرض می گردد. در این دنباله، حداقل زمان توقف (τ_{min}) ۰/۳ ثانیه است. با در نظر گرفتن u_{max} برابر ۱۰۰، مسأله بهینه‌سازی (۶۳) به‌منظور یافتن بهره کنترل‌کننده مناسب حل می‌شود. پارامترهای مطلوب به‌دست آمده عبارت است از:

$$\begin{aligned} &L=\begin{bmatrix}0.0061 & -0.0035\\ -0.0035 & 0.0069\end{bmatrix},\qquad r=16293,\\ &K=[-6.9595\quad -9.1851],\qquad \delta'=1.2102. \end{aligned} \tag{۶۸}$$

شکل ۱ باقی‌ماندن مسیر حالت درون بیضی‌گون $\mathcal{E}(L^{-1},r)$، به‌ازای شرایط اولیه گوناگون و برای همه زمان‌های آتی را نشان می‌دهد. همچنین این مسیرهای حالت پس از مدتی و برای اولین مرتبه به بیضی‌گون جذب $\mathcal{E}(L^{-1},\delta)$ همگرا شده و پس از آن درون مجموعه نامتغیر مثبت $\mathcal{E}(L^{-1},\delta')$ باقی خواهد ماند. در شکل ۲، هر یک از متغیرهای حالت و همچنین سیگنال کنترل به‌ازای شرط اولیه $x(0)=(0\quad 8.5)^T$ به صورت مجزا نمایش داده شده است. همان‌طور که دیده می شود، اندازه سیگنال کنترل از حد تعیین شده کمتر است.



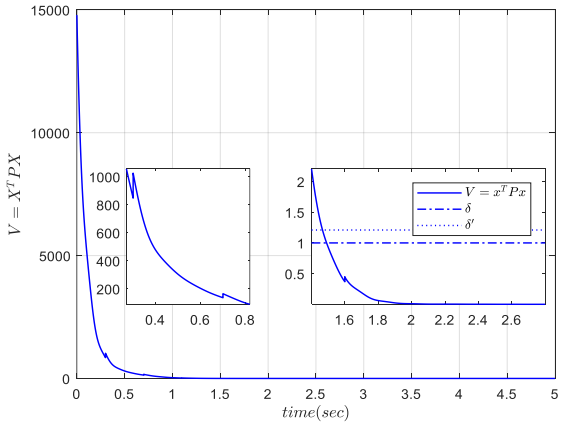
شکل ۱: (بالا) ناحیه جذب و (پایین) کران غایی در مثال ۱.

به‌عبارت دیگر، $|u| \le u_{max} = 100$ می‌باشد. علاوه‌بر این، شکل ۳ تغییرات تابع لیاپانوف را در طول زمان نشان می‌دهد. ملاحظه می شود که مقدار تابع لیاپانوف، قبل از رسیدن به ناحیه جذب، در فاصله زمانی مابین دو سوئیچ متوالی، به‌صورت نمایی کاهش داشته ولی در زمان‌های سوئیچ افزایش می‌یابد.

مثال ۲: سیستم (۱)، شامل دو زیرسیستم زیر را در نظر بگیرید:

$$A_1=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$
$$B_1=B_2=(0\quad 1)^T,\quad C_1=-C_2=-1.1\times I_{2\times 2},\qquad (۶۹)$$
$$f_{c1}(x)=0.5\begin{bmatrix}x_1x_2+x_1^2\\ x_1x_2+x_2^2\end{bmatrix},f_{c2}(x)=0.3\begin{bmatrix}x_1x_2\\ x_2^2\end{bmatrix},$$

$$D_1=D_2=\begin{bmatrix}0.1 & 0\\ 0 & 0.1\end{bmatrix},E_{a1}=E_{a2}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$
$$E_{b1}=E_{b2}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix},E_{\phi1}=E_{\phi2}=(0.1\quad 0.1)^T,\qquad (۷۰)$$
$$F(t)=\mathrm{diag}(sin(t),cos(t)).$$



شکل ۳: مقدار تابع لیاپانوف در طول زمان برای مثال ۱.

در اینجا نیز هیچ‌کدام از زیرسیستم‌ها بر روی کل فضای $\mathbb{R}^2$، شرط لیپ‌شیتز را برآورده نمی‌کند ولی می‌توان نشان داد که زیرسیستم اول بر روی زیرفضای $\mathbb{D}_1=\{x\in\mathbb{R}^2 | |x_1+x_2|\le 2\}$ و با $M_1=I$ و $N_1=0$ و زیرسیستم دوم بر روی زیرفضای $\mathbb{D}_2=\{x\in\mathbb{R}^2 | |x_2|\le 4\}$ و با $M_2=1.5\times I$ و $N_2=0$، فرض ۲ را برآورده خواهند نمود. لذا با در نظر گرفتن دو بیضی‌گون:

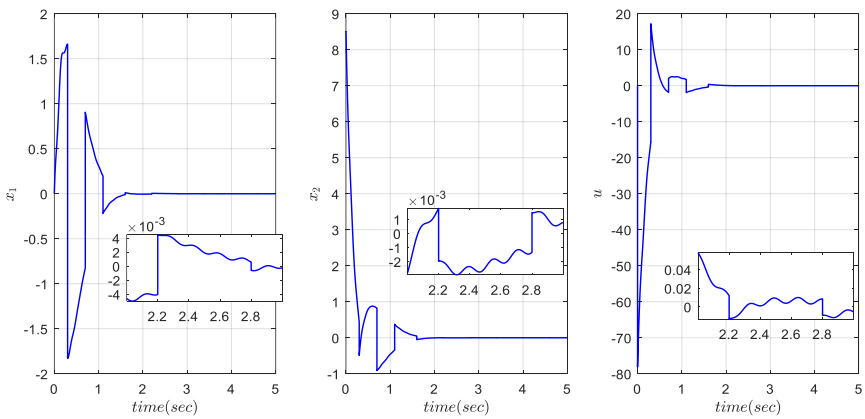
$$\mathcal{E}(Q_1^{out},1)\subset\mathbb{D}_1,\qquad \mathcal{E}(Q_2^{out},1)\subset\mathbb{D}_2 \qquad (۷۱)$$

که در آن:

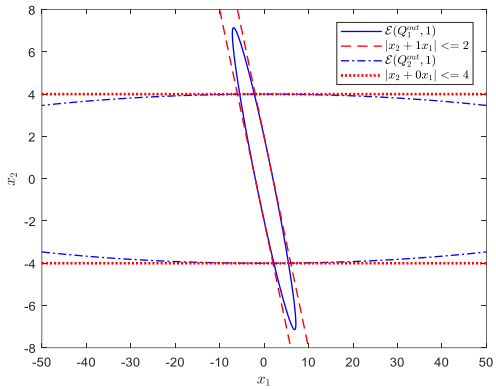
$$Q_1^{out}=\begin{bmatrix}0.2550 & 0.2450\\ 0.2450 & 0.2550\end{bmatrix},$$
$$Q_2^{out}=\begin{bmatrix}0.0001 & 0\\ 0 & 0.0625\end{bmatrix}, \qquad (۷۲)$$

می‌باشد، اقدام به طراحی کنترل‌کننده می‌شود. دو زیر فضای $\mathbb{D}_1$ و $\mathbb{D}_2$ به‌همراه بیضی‌گون‌های خارجی مطلوب در شکل ۴ نشان داده شده است. دقت نمایید که ماتریس‌های Q_1^{out} و Q_2^{out} به‌گونه‌ای انتخاب شده‌اند که تقریباً اشتراک دو زیرفضای $\mathbb{D}_1$ و $\mathbb{D}_2$ پوشش داده شود.

به‌منظور طراحی کنترل‌کننده و شبیه سازی، فرض می شود که هر زیرسیستم پس از گذشت ۰/۵ ثانیه به دیگری سوئیچ می‌نماید ($\tau_{min}=0.5$) و فضای همگرایی مطلوب $\mathcal{E}(Q_{in},1)$ نیز، مشابه مثال ۱ در نظر گرفته می شود. همچنین، به‌منظور بررسی اثر محدودکردن نُرم سیگنال کنترل، سه دیدگاه مختلف بررسی می‌گردد، (الف)



شکل ۲: (چپ و وسط) همگرایی متغیرهای حالت در مثال ۱ به نزدیکی مبدأ. (راست) سیگنال کنترل که دارای نرم تعیین شده می‌باشد.



شکل ۴: زیرفضاهای مطلوب برای هر زیرسیستم در مثال ۲.

نامحدودبودن نُرم سیگنال کنترل، (ب) محدودیت $u_{max}=20$، و (ج) محدودیت سختگیرانه $u_{max}=5$. نتایج حاصل از حل مسأله (۶۳)، برای هر یک از این سه دیدگاه، به‌ترتیب به قرار زیر است:

$$\begin{aligned} &L=\begin{bmatrix}0.0107 & -0.0089\\ -0.0089 & 0.0095\end{bmatrix},\\ &\delta'=1.2100, \quad r=1665.1002,\\ &K_1=[-79.2338 \quad -95.3655],\\ &K_2=[-39.0539 \quad -47.0369]. \end{aligned} \tag{۷۳}$$

$$\begin{aligned} &L=\begin{bmatrix}0.0377 & -0.0310\\ -0.0310 & 0.0322\end{bmatrix},\\ &\delta'=1.2149, \quad r=495.4596,\\ &K_1=[-5.8141 \quad -9.6800],\\ &K_2=[-7.3230 \quad -10.3304]. \end{aligned} \tag{۷۴}$$

$$\begin{aligned} &L=\begin{bmatrix}0.0548 & -0.0348\\ -0.0348 & 0.0385\end{bmatrix},\\ &\delta'=1.2125, \quad r=26.8931,\\ &K_1=[-4.0053 \quad -7.4266],\\ &K_2=[-4.2190 \quad -7.1102]. \end{aligned} \tag{۷۵}$$

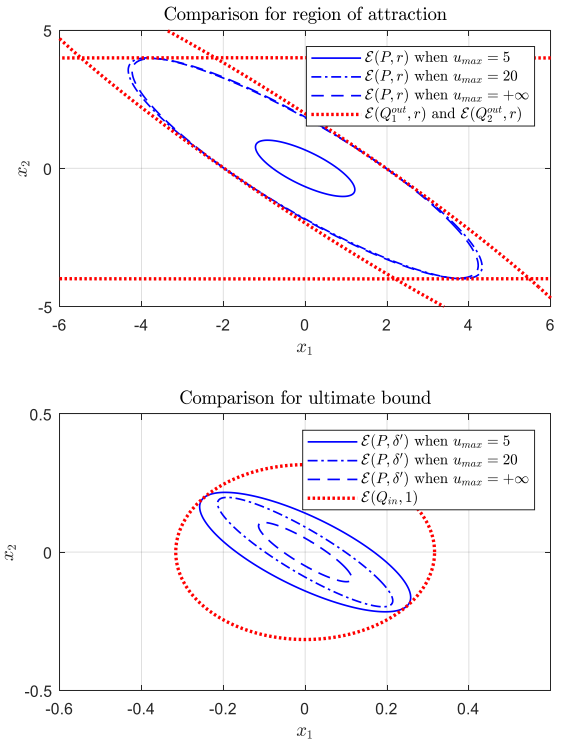
مقایسه بین ناحیه جذب و کران غایی، حاصل از اعمال این سه دیدگاه، در شکل ۵ آورده شده است. همانطور که دیده می‌شود، فضای جاذب به‌دست‌آمده در دو دیدگاه (ب) و (ج) کاملاً با یکدیگر تفاوت داشته و تأییدکننده مطلب بیان‌شده در بخش مقدمه است؛ یعنی با اعمال محدودیت بر روی نُرم سیگنال کنترل، ناحیه جذب محدودتر خواهد شد. با این اوصاف اگر به ناحیه جذب مربوط به دو دیدگاه (الف) و (ب) توجه شود، مشهود است که بر خلاف انتظار، پس از حذف محدودیت بر روی نُرم سیگنال کنترل، ناحیه جذب چندان تفاوتی ندارد. علت این موضوع، محدودشدن فضای مجاز توسط بیضی‌گون‌های $\mathcal{E}(Q_1^{out},1)$ و $\mathcal{E}(Q_2^{out},1)$ است، به‌گونه‌ای که علی‌رغم افزایش اندازه سیگنال کنترل، ناحیه جذب نمی‌تواند توسعه پیدا نماید. البته باید توجه داشت که با حذف یا کاهش محدودیت بر روی سیگنال کنترل، کران غایی می‌تواند کوچک‌تر شود. به‌هرحال در هر سه دیدگاه، کران غایی در فضای همگرایی مطلوب $\mathcal{E}(Q_{in},1)$ قرار دارد. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که در صورت کاهش فضای مطلوب $\mathcal{E}(Q_{in},1)$، به‌منظور رسیدن به ناحیه جذب وسیع‌تر، باید محدودیت بر روی سیگنال کنترل کاهش یابد.

شکل ۶ مقایسه بین سیگنال‌های کنترل در این سه دیدگاه را در یک شبیه‌سازی نشان می‌دهد، جایی که در شروع کار زیرسیستم اول فعال بوده و زیرسیستم‌ها هر ۰/۵ ثانیه به یکدیگر سوئیچ می‌نمایند. سه سیگنال کنترل، به‌ازای شرط اولیه یکسان $x(0)=(-1 \quad +1)^T$ (که در ناحیه جذب مربوط به هر سه دیدگاه قرار دارد) ترسیم شده است. مشاهده می شود که نُرم سیگنال کنترل در دیدگاه‌های (ب) و (ج) از حد تعیین‌شده کمتر است. با تحلیل دو شکل ۵ و ۶ می‌توان نتیجه گرفت که رسیدن به کران غایی کوچک‌تر به همراه ناحیه جذب وسیع‌تر مستلزم اعمال سیگنال کنترل بزرگ‌تر می‌باشد. لذا همواره در طراحی باید بین این موارد مصالحه نمود. همچنین شکل ۷ تغییرات متغیرهای حالت را در سه دیدگاه (الف)، (ب) و (ج) نشان می‌دهد. همان‌طور که دیده می‌شود، همگرایی به ناحیه کوچکی نزدیک به مبدأ رخ داده و به‌دلیل وجود نایقینی‌های صفرنشونده، همچنان نوساناتی در اطراف مبدأ وجود دارد. کنترل‌کننده‌ها با تنظیم سیگنال کنترل سعی می‌کنند تا این کران غایی را به اندازه کافی کوچک نمایند.

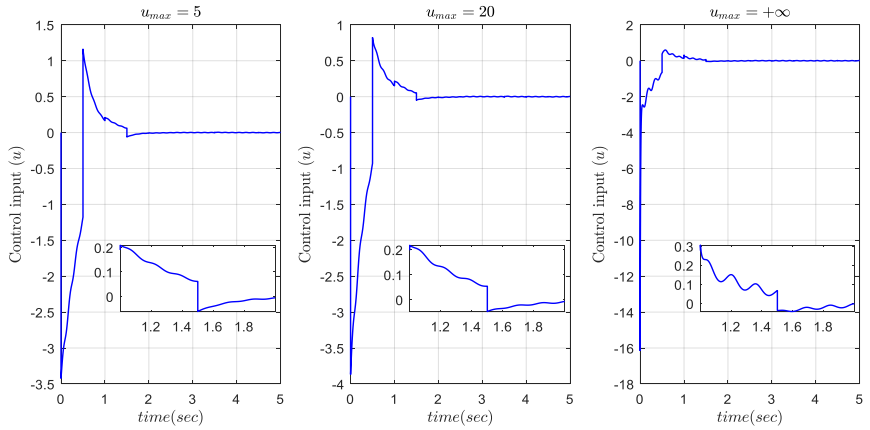
مثال ۳: در اینجا، روش معرفی‌شده به موتور جریان مستقیم با تحریک سری GE752 اعمال می شود. معادلات دینامیکی حاکم بر این موتورها، از روابط زیر تبعیت می‌نماید [۲۷، ۳۳]:

$$\begin{aligned} L\frac{di_a(t)}{dt}&=V(t)-Ri_a(t)-Ki_a(t)\omega(t)-\eta_1(t),\\ J\frac{d\omega(t)}{dt}&=Ki_a^2(t)-B_m\omega(t)-T_L-\eta_2(t), \end{aligned} \tag{۷۶}$$

که در آن، $\omega(t)$ سرعت زاویه‌ای شفت موتور، $i_a(t)$ جریان موتور، $L=L_a+L_f$ مجموع مقاومت آرمیچر و مدار تحریک، $R=R_a+R_f$



شکل ۵: (بالا) مقایسه ناحیه جذب و (پایین) مقایسه کران غایی به‌ازای محدودیت‌های مختلف بر روی نُرم سیگنال کنترل در مثال ۲.



شکل ۶: مقایسه سیگنال کنترل در سه دیدگاه مطرح‌شده در مثال ۲.

مجموع اندوکتانس آرمیچر و تحریک، J و B_m به‌ترتیب ممان اینرسی روتور و ضریب اصطکاک، $K = K_e K_f$ ضریب ثابت شامل ثابت‌های موتور و تحریک، η_1 بیان‌گر نایقینی‌هایی همانند افت ولتاژ جاروبک‌ها، η_2 بیان‌گر نایقینی‌هایی همانند گشتاور باد، T_L گشتاور بار متصل به شفت و V ولتاژ تغذیه موتور می‌باشد. با انتخاب متغیرهای کمکی:

$$x_1 = i_a - I_r, \qquad x_2 = \omega - \omega_r, \qquad u = V - V_r \tag{۷۷}$$

و اعمال آنها در (۷۶)، معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} L\dot{x}_1 &= -(R + K\omega_r)x_1 - KI_r x_2 - Kx_1x_2 + u - \eta_1, \\ J\dot{x}_2 &= 2KI_r x_1 - B_m x_2 + Kx_1^2 - \eta_2, \end{aligned} \tag{۷۸}$$

که در آن I_r، ω_r و V_r به‌ترتیب جریان، سرعت دوران و ولتاژ مرجع مورد نیاز در حالت تعادل می‌باشد. این سیستم را می‌توان به‌صورت (۱) بیان نمود. پارامترهای این سیستم عبارتند از:

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{R + K\omega_r}{L} & -\dfrac{K}{L}I_r \\ \dfrac{2K}{J}I_r & -\dfrac{B_m}{J} \end{bmatrix}, \qquad B = (-1/L \quad 0)^T \tag{۷۹}$$

$$f_c = K(-x_1x_2/L \quad x_1^2/J)$$

که در آن:

$$f_c^T f_c = K^2(x_1/J)^2 x_1^2 + K^2(x_1/L)^2 x_2^2 \tag{۸۰}$$

کران بالای f_c، بر روی فضایی که $|x_1| \le I_r$ باشد، عبارت است از:

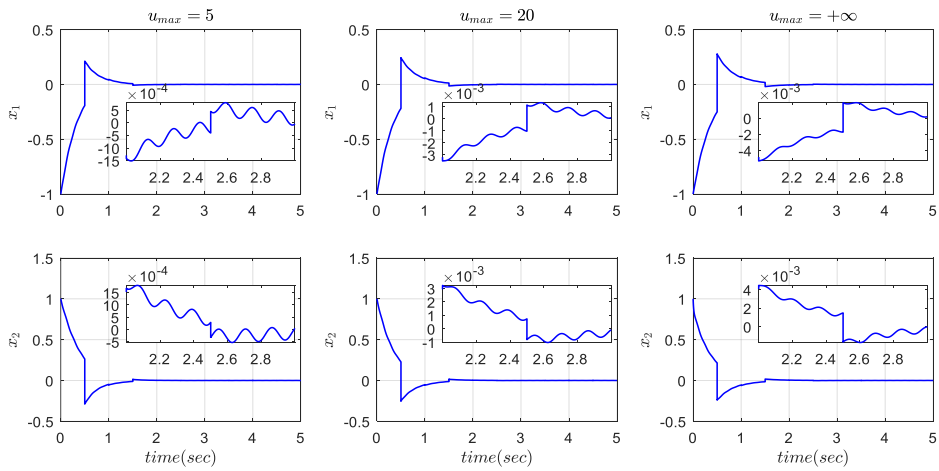
$$f_c^T f_c \le (x_1 \quad x_2) diag\left(K^2\left(\frac{I_r}{J}\right)^2, K^2\left(\frac{I_r}{L}\right)^2\right)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \tag{۸۱}$$

و بنابراین ماتریس ثوابت لیپ‌شیتز به‌صورت زیر می‌باشد:

$$M = M^T = diag(K\,I_r/J\,, K\,I_r/L), \qquad N = 0. \tag{۸۲}$$

علاوه‌بر محدودیت $|x_1| \le I_r$، عوامل دیگری نیز محدوده جستجو را کاهش می‌دهند که عبارتند از حداکثر سرعت دوران شفت و حداکثر توان مکانیکی موتور. با توجه به پارامترهای مورد نظر که در جدول ۱ آورده شده است، در این مثال $Q_{out} = diag(I_r^{-2}, \omega_r^{-2})$ در نظر گرفته می شود. همچنین برای دقت عملکرد این موتور، همگرایی مسیر حالت به کران $Q_{in} = diag(10,10)$ لحاظ می‌گردد که معادل حداکثر خطایی در حدود ۰/۳ برای هر دو پارامتر سرعت و جریان است. همچنین فرض می‌شود که تنها پارامترهای موتور که در آن‌ها نایقینی وجود دارد، ضریب اصطکاک B_m و مقاومت‌های اهمی R است. علاوه‌بر این، سایر نایقینی‌های مربوط به افت ولتاژ و نایقینی‌های مربوط به گشتاورها محدود فرض می شوند. میزان این نایقینی‌ها به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$D = 0.1 \times I_{2\times2}, E_a = I_{2\times2}, E_\phi = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, E_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{۸۳}$$



شکل ۷: مقایسه روند همگرایی متغیرهای حالت در سه دیدگاه مطرح‌شده در مثال ۲.

جدول ۱: پارامترهای موتور جریان مستقیم با تحریک سری GE752 [۳۴].

پارامتر	مقدار	پارامتر	مقدار
R	۱/۳ Ω	L	۳۳۰ mH
J	۱ $Kg.m^2$	B_m	۰/۰۵ $N.m.s$
K	۰/۰۰۵۵	$P_{mech,max}$	۷۵۲ kW
ω_{max}	۱۱۰ $rad.s^{-1}$	I_r	۲۵۰ A
ω_r	۵۰ $rad.s^{-1}$	V_r	۳۹۳/۷۵ Vdc

همچنین در این مثال فرض می شود که بار T_L به‌گونه‌ای است که در فواصل زمانی نامشخص ولی با حداقل فاصله زمانی τ_{min} برابر با ۰/۵ ثانیه، سرعت دوران را دچار جهش می‌کند، به‌گونه‌ای که در سیستم دینامیکی مورد نظر ماتریس جهش به‌صورت زیر باشد:

$$C = diag(1, -1). \tag{۸۴}$$

با اعمال روش پیشنهادی به این سیستم، پارامترهای طراحی عبارت است از:

$$L = \begin{bmatrix} 0.0963 & -0.0086 \\ -0.0086 & 0.0038 \end{bmatrix}, \quad r = 450108.05, \quad W = [-0.0870 \quad -0.0211]. \tag{۸۵}$$

نتایج شبیه سازی به‌ازای $x_0 = [-200 \quad +25]$ در شکل ۸ نشان داده شده است که بیان‌گر همگرایی سیستم به کران غایی می‌باشد.

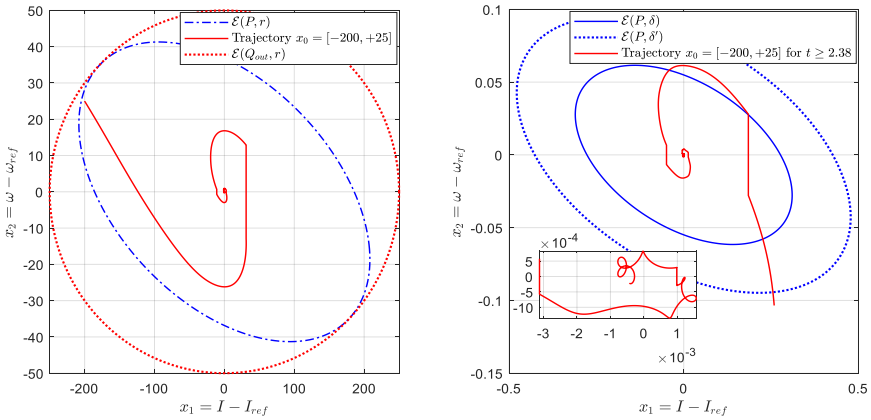
۵- نتیجه

در این مقاله، مسأله مقیدبودن نُرم سیگنال کنترل برای سیستم‌های سوئیچ ضربه‌ای در حضور انواع مختلفی از نایقینی‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. برای این‌گونه از سیستم‌ها، دستیابی به یک سیگنال کنترل سراسری، غیرممکن و یا بسیار دشوار است. لذا، این مقاله شرایط کافی پایداری را به‌صورت محلی بررسی می‌کند. برای این منظور، در ابتدا برای یک سیستم جامع‌تر، شرایط کلی برحسب یک تابع لیاپانوف مشترک بیان شده است. این شرایط نسبت به روش‌های ارائه‌شده در سایر تحقیقات مزایایی دارد که عبارت است از: (الف) درنظرگرفتن همگرایی به کران غایی که کاربرد آنها را در مواجهه با نایقینی‌های صفرنشونده غیرخطی عملی‌تر می‌نماید. (ب) درنظرگرفتن زیرفضای بیرونی که بایستی شرایط بر روی آن برقرار باشد. بدین ترتیب، این امکان فراهم می‌شود تا در هنگام توسعه به سیستم‌هایی که دینامیک‌های غیرخطی آنها شرایط موردنظر را در یک زیرفضای محدود برآورده می‌کنند، تضمین اعتبار نتایج وجود داشته باشد. (ج) محدود درنظرگرفتن جهش در کران غایی (به جای صفرشدن جهش‌ها) در هنگام همگرایی به مبدأ و در نتیجه گسترده‌ترشدن دامنه کاربرد شرایط پیشنهادی.

در گام اول هیچ پیشنهادی برای چگونگی یافتن تابع کاندیدای لیاپانوف ارائه نشده است، لذا در مرحله بعد، سیستم مورد نظر به‌گونه‌ای در نظر گرفته می‌شود که دینامیک‌های غیرخطی آن دارای شرط لیپشیتز نسبت به هر دو متغیر حالت و متغیر ورودی بوده و نایقینی‌های خطی و غیرخطی در آن صفرنشونده ولی با نُرم محدود باشد. سپس شرایط پیشنهادشده در بخش اول، به‌صورت مجموعه‌ای از نامساوی‌های ماتریسی خطی و دوخطی بازنویسی شده به‌گونه‌ای که بتوان از آنها در یک مسأله بهینه‌سازی به‌عنوان قیود استفاده نمود. لازم به ذکر است که طیف وسیعی از سیستم‌ها به‌صورت تعریف‌شده در این مقاله قابل مدل‌سازی می‌باشند.

همچنین، مسأله بهینه سازی دارای مزایایی است که عبارت است از: (الف) قیود مسأله به‌صورت خطی و دوخطی بوده و تابع هدف یک مسأله خطی است؛ لذا به کمک ابزارهای موجود به‌راحتی قابل‌حل می‌باشد. (ب) ازآنجایی‌که در جملات دوخطی، یکی از متغیرها اسکالر می‌باشد، لذا می‌توان از الگوریتم‌های مبتنی بر نامساوی‌های ماتریسی خطی نیز برای حل مسأله بهینه‌سازی پیشنهادی بهره گرفت. (ج) جنبه های مختلف کاربردی از جمله همگرایی به یک کران از پیش تعیین‌شده در این مسأله دیده شده است.

به‌عنوان گام بعدی در این تحقیق، امید است که بتوان نتایج به‌دست‌آمده را به انواع دیگری از نایقینی‌ها، توابع جهش و دینامیک‌های غیرخطی توسعه داد. به‌عنوان نمونه، با توجه به اینکه در قضیه ۱، جهش‌ها در نزدیکی مبدأ به‌صورت محدود (و نه صفرشونده) منظور شده است، به نظر می‌رسد که می‌توان در تابع جهش، نایقینی‌های



شکل ۸: (چپ) باقی‌ماندن مسیر حالت درون بیضی‌گون خارجی. این بیضی‌گون، درون کران مورد نظر قرار دارد و در نتیجه برقراری فرض ۲ تضمین می‌شود. (راست) همگرایی کران غایی و باقی ماندن درون آن برای سایر زمان‌های آتی.

خطی و یا غیرخطی صـــفرنشـــونده را نیز لحاظ نمود. همچنین در نظر گرفتن لحظات سوئیچ وابسته به متغیرهای حالت و ا ستفاده از تکنیک توابع لیاپانوف چندگانه، می‌تواند از دیگر گام‌های پیشنهادی برای ادامه این تحقیق باشد.

مراجع

[1] W.M. Haddad, V. Chellaboina and S.G. Nersesov, *Impulsive and Hybrid Dynamical Systems: Stability, Dissipativity, and Control*, Princeton University Press, 2006.

[2] J. Jiao, S. Cai and L. Chen, "Dynamics of a plankton-nutrient chemostat model with hibernation and it described by impulsive switched systems," *J. Appl. Math. Comput*., vol. 53, no. 1-2, pp. 583–598, 2017.

[3] M. Posa, M. Tobenkin and R. Tedrake, "Stability analysis and control of rigid-body systems with impacts and friction," *IEEE Trans. Automat. Contr*., vol. 61, no. 6, pp. 1423–1437, 2015.

[4] M. Barkhordari Yazdi, M.R. Jahed-Motlagh, S.A. Attia and J. Raisch, "Modal exact linearization of a class of second-order switched nonlinear systems," *Nonlinear Anal. Real World Appl*., vol. 11, no. 4, pp. 2243–2252, 2010.

[5] T. Fang and J. Sun, "Stability of complex-valued impulsive and switching system and application to the Lü system," *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.*, vol. 14, pp. 38–46, 2014.

[6] J. Li, R. Ma and G.M. Dimirovski, "Adaptive impulsive observers for a class of switched nonlinear systems with unknown parameter," *Asian J. Control.*, vol. 19, no. 3, pp. 1153–1163, 2017.

[7] Y. Tian, Y. Cai, Y. Sun and H. Gao, "Finite-time stability for impulsive switched delay systems with nonlinear disturbances," *J. Franklin Inst.*, vol. 353, no. 14, pp. 3578–3594, 2016.

[8] Y.-E. Wang, X.-M. Sun, W. Wang and J. Zhao, "Stability properties of switched nonlinear delay systems with synchronous or asynchronous switching," *Asian J. Control*., vol. 17, no. 4, pp. 1187–1195, 2015.

[۹] نصراله اعظم بالغی و محمد حسین شفیعی، «تحلیل پایداری سیستم-های سوئیچ‌شونده خطی گسسته‌زمان با درنظرگرفتن تأخیر زمانی و عدم‌قطعیت پارامترها»، *مجله کنترل دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی*، جلد ۹، شماره ۴، صفحه ۷۷-۸۵، ۱۳۹۴.

[10] X. Zhao, P. Shi, Y. Yin and S.K. Nguang, "New results on stability of slowly switched systems: a multiple discontinuous lyapunov function approach," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 62, no. 7, pp. 3502–3509, 2016.

[11] W. Xiang and J. Xiao, "Stabilization of switched continuous-time systems with all modes unstable via dwell time switching," *Automatica*, vol. 50, no. 3, pp. 940–945, 2014.

[۱۲] محمدرضا رمضانی آل، علی وحیدیان کامیاد و ناصر پریز، «کنترل بهینه سیستم‌های سوئیچ‌شونده خطی ناخودگردان: رهیافت نامساوی ماتریسی خطی»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۴، شماره ۱، شماره پیاپی ۲۷، صفحه ۱۱-۲۱ ، بهار ۱۳۹۳.

[13] L. Gao and D. Wang, "Input-to-state stability and integral input-to-state stability for impulsive switched systems with time-delay under asynchronous switching," *Nonlinear Anal. Hybrid Syst.*, vol. 20, pp. 55–71, 2016.

[14] M.S. Branicky, "Multiple Lyapunov functions and other analysis tools for switched and hybrid systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, no. 4, pp. 475–482, 1998.

[15] Hui Ye, A.N. Michel and Ling Hou, "Stability theory for hybrid dynamical systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 43, no. 4, pp. 461–474, 1998.

[16] J. Hespanha, "Uniform stability of switched linear systems: extensions of LaSalle's invariance principle," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 49, no. 4, pp. 470–482, 2004.

[17] H. Lin and P.J. Antsaklis, "Stability and stabilizability of switched linear systems: a survey of recent results," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 54, no. 2, pp. 308–322, 2009.

[18] F. Xu, L. Dong, D. Wang, X. Li and R. Rakkiyappan, "Globally exponential stability of nonlinear impulsive switched systems," *Math. Notes*, vol. 97, no. 5-6, pp. 803–810, 2015.

[19] H. Xu and K.L. Teo, "Exponential stability with L2-gain condition of nonlinear impulsive switched systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 55, no. 10, pp. 2429–2433, 2010.

[20] Y. Chen, S. Fei and K. Zhang, "Stabilization of impulsive switched linear systems with saturated control input," *Nonlinear Dyn*., vol. 69, no. 3, pp. 793–804, 2012.

[21] M.-L. Chiang and L.-C. Fu, "Robust output feedback stabilization of switched nonlinear systems with average dwell time," *Asian J. Control.*, vol. 16, no. 1, pp. 264–276, 2014.

[22] B. Wang, H. Zhang, G. Wang, C. Dang and S. Zhong, "Asynchronous control of discrete-time impulsive switched systems with mode-dependent average dwell time," *ISA Trans*., vol. 53, no. 2, pp. 367–372, 2014.

[23] X. Zhao, L. Zhang, P. Shi and M. Liu, "Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time," *IEEE Trans. Automat. Contr*., vol. 57, no. 7, pp. 1809–1815, 2012.

[24] L. Lu and Z. Lin, "Design of switched linear systems in the presence of actuator saturation," *IEEE Trans. Automat. Contr*., vol. 53, no. 6, pp. 1536–1542, 2008.

[25] A. Benzaouia, O. Akhrif and L. Saydy, "Stabilisation and control synthesis of switching systems subject to actuator saturation," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 41, no. 4, pp. 397–409, 2010.

[26] W. Ni and D. Cheng, "Control of switched linear systems with input saturation," *Int. J. Syst. Sci.*, vol. 41, no. 9, pp. 1057–1065, 2010.

[27] A. Poznyak, A. Polyakov and V. Azhmyakov, *Attractive Ellipsoids in Robust Control*, Springer International Publishing, Cham, 2014.

[28] M. Kocvara and M. Stingl, *PENNON: Software for Linear and Nonlinear Matrix Inequalities*, in: M.F. Anjos, J.B. Lasserre (Eds.), Handb. Semidefinite, Conic Polynomial Optim., Springer US, pp. 755–791, 2012.

[29] Jin Lu and L.J. Brown, "A multiple Lyapunov functions approach for stability of switched systems," *in: Proc. 2010 Am. Control Conf., IEEE*, pp. 3253–3256, 2010.

[30] H. Yang, B. Jiang and J. Zhao, "On finite-time stability of cyclic switched nonlinear systems," *IEEE Trans. Automat. Contr*., vol. 60, no. 8, pp.2201–2206, 2015.

[31] K. Derinkuyu and M.Ç. Pınar, "On the S-procedure and some variants," *Math. Methods Oper. Res*., vol. 64, no. 1, pp. 55–77, 2006.

[32] L. V. Hien and V.N. Phat, "Exponential stabilization for a class of hybrid systems with mixed delays in state and control," *Nonlinear Anal. Hybrid Syst*., vol. 3, no. 3, pp. 259–265, 2009.

[۳۳] الهه اسدیان و سعید بلوچیان، «کنترل مقاوم-تطبیقی مدل مرتبه کسری موتور سری جریان مستقیم»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۷، شماره ۳، شماره پیاپی ۸۱، صفحه ۸۱۷-۸۲۷، پاییز ۱۳۹۶.

[34] General Electric company, "High-Torque DC Drilling Motor, Vertical Drilling Motor, GEK-91584D" GE752 datasheet, 2005, http://pdfstream.manualsonline.com/3/3b063b6b-2b86-424f-8cea-3d2ac288d1aa.pdf.