

بهبود کارایی بهینه‌سازی تکاملی دو جهتی سازه‌ها برای سازه‌های پیوسته

معصومه خواجه‌بوی قرایی

محمد حسین ابوالبشری*

کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

استاد، گروه مهندسی مکانیک، مرکز پژوهشی مهندسی تولید ناب، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده

اخیراً روش جدیدی برای فرایند حذف و اضافه کردن المان در روش بهینه‌سازی تکاملی دو جهتی سازه‌ها (BESO) توسط بعضی پژوهشگران پیشنهاد شده که فرایند با یک پارامتر سیگنالی که نسبت حجم یا وزن حذفی نام دارد انجام می‌شود. با این همه به دلیل یکسان بودن نسبت‌های حذف و اضافه، روش BESO بهبود یافته آنان در بعضی موارد بعد از چند تکرار، حتی با افزایش نسبت حجم حذفی، به دلیل یکنواخت شدن سختی سازه، فرایند حذف و اضافه کند شده و یا حتی متوقف می‌شود. در این پژوهش، روش BESO به شکلی بهبود می‌یابد که محدودیت‌های قبلی را ندارد. به بیان دیگر روش پیشنهادی در زمان کمتر طرح‌های بهتری را نتیجه می‌دهد. با ارائه چند مثال در زمینه بهینه‌سازی ساختار یک صفحه در دو حالت الاستیک و الاستوپلاستیک با دو معیار تنش و سختی، نتایج این بهبود با روش بهینه‌سازی تکاملی سازه‌ها (ESO) و الگوریتم پیشنهادی دیگر پژوهشگران مقایسه و برتری آن نشان داده می‌شود. از مثال‌های انجام شده می‌توان نتیجه گرفت که مقدار بیشینه تنش و شاخص عملکرد بهتر می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی تکاملی سازه‌ها، بهینه‌سازی تکاملی دو جهتی سازه‌ها، سختی، تنش معادل.

Modified bidirectional evolutionary structural optimization for continuum structures

M. Khajooei-Gharaei

M. H. Abolbashi

Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Department of Mechanical Engineering, Lean Production Engineering Research Center, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Abstract

Recently, some researchers proposed a new algorithm for the bidirectional evolutionary structural optimization (BESO) in which adding and removing of elements is controlled by a signal parameter of removal ratio of volume (or weight). Nevertheless, their BESO improvement suffers from some restrictions like premature stopping of the iterative process due to the closeness of the adding and removing coefficients. In this study, the BESO method is modified such that eliminates the previous restrictions and increase its efficiency significantly. Several examples are presented for structural optimization of a plate in two states of elastic and elasto-plastic with stiffness and stress criteria. From the three examples, one can conclude that the modified BESO algorithm is more robust than the ESO and BESO algorithm previously proposed. It is also concluded the maximum stress and the performance index are improved in comparison with the case when the signal parameter is the same. Overall, the proposed modification prevent the premature termination of the optimization process when the optimization process is based on the hard kill method with both adding and removing the elements.

Keywords: Evolutionary structural optimization, Bidirectional evolutionary structural optimization, Stiffness, Equivalent stress.

دارای چند بارگذاری [۷] و در مسایل دینامیک [۸]، از روش ESO استفاده کردند. پس از آن، روش ESO در طراحی کامپوزیت‌ها توسط ریسپلر و استیون [۹] و طراحی قطعات تعمیری هواپیما توسط استیون و همکاران [۱۰] استفاده شد. سپس چاو و همکاران [۱۱] از قید سختی به عنوان معیار بهینگی در روش ESO استفاده کردند. با گذشت زمان، کاربرد ESO در مسایل کمانش توسط مائیکاراچاو همکاران [۱۲]، مرزهای متحرک توسط استیون و همکاران [۱۳]، جابجایی فرکانس طبیعی توسط ژائو و همکاران [۱۴-۱۵] و رفتار غیر خطی سازه با روش ESO توسط کوثرین [۱۶] و با روش BESO توسط هانگ [۱۷] بهینه‌سازی توپولوژی بر اساس قابلیت اطمینان توسط اوم و همکاران [۱۸] و همچنین ساختارهای ترک خورده توسط شبیری [۱۹]، مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. روش ESO می‌تواند با جستجو در فضای طراحی هم به کمینه‌های محلی و هم به کمینه مطلق دست یابد [۲۰]، ولی به دلیل ویژگی تکاملی آن، هنگام برخورد به یک نقطه کمینه محلی توقف نخواهد کرد؛ بلکه برای رسیدن به پاسخ بهتر فرایند را ادامه می‌دهد [۴]. نخستین بار کوثرین در تحقیقات خود، صحت ریاضی روش ESO را به عنوان یک روش منطقی بهینه‌سازی سازه‌ها

۱- مقدمه

هدف بهینه‌سازی ساختاری حذف یا باز توزیع ماده در دامنه اولیه سازه و رسیدن به یک ساختار بهین می‌باشد. این روش، یک روش چرخه‌ای بوده که به طور معمول همراه با تاریخچه‌ای از ساختارهای میانی می‌باشد و آن‌ها نیز در فرایند طراحی قابل استفاده می‌باشند. توسعه و گسترش روش‌های بهینه‌سازی سازه‌ها منجر به معرفی روش‌ها و نظریه‌های مختلفی برای یافتن ساختار بهین شده است. در سال ۱۹۹۲ روش جدیدی توسط ژای و استیون [۱-۳] ارائه گردید که بهینه‌سازی تکاملی سازه‌ها نامیده شد. پایه این روش حذف تدریجی المان‌های کم تنش یا غیرضروری از دامنه‌ی ماکزیمم اولیه سازه بود. محصول نهایی این روش، سازه‌ای با توزیع تنش یکنواخت می‌باشد. از آن زمان تا کنون کاربردهای روش ESO به شدت افزایش یافته است. گام‌های اولیه توسعه روش ESO برای اثبات کارایی این روش، با تحلیل مسایل کلاسیک دارای یک بارگذاری صورت گرفت. پس از اثبات کارایی و دقت روش توسط ژای و استیون [۱-۵] و هینتون و سینز [۶]، از آن در مسائل متداول‌تر استفاده شد. ژای و استیون در مسایل

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: abolbash@um.ac.ir

به اثبات رساند [۲۰]. روش بهینه‌سازی تکاملی سازه‌ها از اصولی بسیار ساده و در عین حال پایدار پیروی می‌کند. مقدار ماده حذفی با دو پارامتر کنترل می‌شود. یکی نسبت حذف RR^1 است و کاربرد آن میرا کردن و به تأخیر انداختن فرآیند حذف المان می‌باشد که با مقادیر کوچکی شروع می‌شود و دیگری نرخ تکاملی ER^2 که باعث رشد آرام نسبت حذف می‌شود تا بدین وسیله اطمینان حاصل شود که تنها تعداد اندکی المان در هر تکرار حذف می‌شوند و دامنه طراحی حاصل از هر چرخه تفاوت بسیار زیادی نسبت به چرخه پیشین ندارد. یکی از ایراداتی که به روش ESO کلاسیک وارد می‌شود این است که در این روش اگر المانی حذف شود، قابلیت بازگشت مجدد به ساختار سازه را نخواهد داشت، در حالی که ممکن است المان حذف شده در مراحل بعد دوباره و در ساختار بهینه مورد نیاز باشد. به منظور برطرف نمودن این اشکال، روش جدیدی به نام ESO دو جهتی یا BESO ارائه گردید. در این روش اجازه داده می‌شود که المان‌های حذف شده در صورت نیاز به ساختار سازه بازگردند. چون در روش BESO امکان بازگرداندن المان‌های حذف شده نیز وجود دارد، در مقایسه با روش ESO کارا تر است [۲۱]. در این روش مقدار ماده‌ای که باید در هر مرحله حذف یا اضافه شود به ترتیب با نسبت حذف و نسبت اضافه تعیین می‌شوند. دامنه فیزیکی اولیه برای آغاز فرآیند BESO می‌تواند همان حداکثر دامنه در روش ESO و یا شامل حداقل تعداد المان‌هایی که نیروها را به تکیه‌گاه‌ها متصل می‌کنند باشد. وقتی BESO با حداقل دامنه‌ی اولیه آغاز می‌شود، حجم سازه تا رسیدن به حجمی بیشتر از حجم هدف به طور تدریجی زیاد می‌شود و سپس به طور تدریجی شروع به کم کردن حجم می‌کند. فرآیند BESO وقتی متوقف می‌شود که سازه برای اولین یا دومین بار به حجم مورد نظر برسد. روشن است که این روش در مواردی مانند اضافه شدن عضو با انرژی کرنشی پایین و یا صفر که قبلاً حذف شده دچار مشکل می‌شود. به همین دلیل پارامترهای تکاملی باید خیلی کوچک انتخاب شوند تا جوابی که با روش BESO به دست می‌آید قابل قبول باشد. بنابراین بازده محاسباتی کم و زمان اجرای برنامه طولانی می‌شود. برای غلبه بر این مشکل در سال ۲۰۰۶ هانگ و همکاران [۲۲] روشی جدید برای انجام فرآیند BESO پیشنهاد کردند و فرآیند حذف و اضافه کردن المان را با یک پارامتر سیگنالی که نسبت حجم یا وزن حذفی RRV^3 نام داشت انجام دادند. آن‌ها با انجام چندین مثال با هدف بهینه‌سازی سازه و با فرض الاستیک بودن ماده، مستقل بودن طرح بهین نهایی را از انتخاب طرح اولیه برای فرآیند BESO و بهتر بودن نتایج به دست آمده با این روش را نسبت به روش ESO و BESO اولیه اثبات کردند. با این همه یکی از مشکلاتی که ضمن اجرای این روش BESO به وجود می‌آید این است که چون عدد حساسیت آستانه برای فرآیند حذف و اضافه کردن یکسان در نظر گرفته می‌شود در بعضی موارد بعد از چند تکرار چرخه‌ی بهینه‌سازی، حتی با افزایش نسبت حجم حذفی، به دلیل یکنواخت شدن سختی سازه، فرآیند حذف و اضافه کند شده و یا حتی متوقف می‌شود. در این صورت اگر از حداقل دامنه طراحی شروع به انجام فرآیند بهینه‌سازی

شده باشد، امکان رسیدن به حجم بیشتر و یا در صورتی که از حداکثر دامنه شروع شده باشد، امکان رسیدن به یک حجم کمتر وجود ندارد و یا در صورت امکان، اجرای فرآیند بسیار طولانی می‌شود. برای غلبه بر این مشکل، در این پژوهش برای فرآیند حذف و اضافه، نسبت حذف و اضافه‌ی حجمی به صورت مجزا در نظر گرفته شده و با انجام تغییرات دیگر در الگوریتم پیشنهادی هانگ کارایی این روش بهبود می‌یابد. در روش پیشنهادی همزمان مشکل طولانی شدن فرآیند بهینه‌سازی و بهبود طرح‌های نتیجه شده از نظر معیار بهینه‌سازی و شاخص عملکرد حاصل شده است. برای اثبات کارایی روش پیشنهادی، یک صفحه با سه شرط تکیه‌گاهی مختلف در دو حالت الاستیک و الاستوپلاستیک با دو معیار سختی و تنش معادل بهینه می‌شود. نتایج به دست آمده با دو روش BESO، یکی با در نظر گرفتن نسبت حذف و اضافه یکسان (روش مرجع [۲۲]) و دیگری با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی متفاوت و همچنین با روش ESO مقایسه و روی نتایج بحث می‌شود. در ادامه ابتدا مسئله بهینه‌سازی و عدد حساسیت تعریف می‌شوند و سپس عدد حساسیت آستانه برای فرآیند حذف و اضافه المان‌ها بیان می‌شود. آنگاه شاخص عملکرد تعریف می‌شود. در بخش بعدی روش بهینه‌سازی تکاملی سازه‌ها تشریح می‌شود و به دنبال آن چندین مثال مطرح و از روش پیشنهادی حل می‌شوند و در نهایت در بخش نتیجه‌گیری جمع بندی پژوهش حاضر مطرح می‌شود.

۲- مسئله بهینه‌سازی و عدد حساسیت

بعد از تقسیم‌بندی اجزای محدود دامنه طراحی، اعمال تمامی قیود مرزی، حل استاتیکی سازه و تعیین معیار مورد استفاده برای بهینه‌سازی، باید در هر مرحله، متناظر با هدف بهینه‌سازی، المان‌هایی حذف و یا اضافه شوند. در بسیاری از سازه‌ها، هدف بهینه‌سازی سختی سازه که معادل با کمینه‌سازی کامپلیانس است می‌باشد. در سال ۱۹۹۸ لی و همکاران [۲۳] ثابت کردند که در فرآیند بهینه‌سازی تکاملی سازه‌ها در حالتی که رفتار ماده الاستیک باشد معیار حذف تنش معادل ون‌میسز و سختی معادل‌اند. در بخش بعدی چگونگی به دست آوردن عدد حساسیت برای هر دو معیار ارائه می‌شود.

۲-۱- معیار حذف تنش

تنش معادل ون‌میسز در حالت دو بعدی به صورت رابطه (۱) می‌باشد

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2} \quad (1)$$

که در آن σ_1 و σ_2 به ترتیب تنش‌های اصلی در جهت‌های ۱ و ۲ می‌باشند.

در هر چرخه از فرآیند بهینه‌سازی، المان‌هایی که عدد حساسیت آن‌ها از حد آستانه‌ی پایین کمتر باشد حذف می‌شوند و در صورتی که عدد حساسیت برای یک المان از آستانه‌ی بالا بیشتر باشد فرآیند اضافه کردن المان در اطراف آن انجام می‌شود. تابع هدف و قید حجمی به صورت روابط (۲) و (۳) می‌باشند:

¹ Rejection ratio
² Evolutionary rate
³ Removal Ratio of Volume

تأمین المان به صورت انرژی کرنشی تقسیم بر حجم المان طبق رابطه (۱۰) تعریف می‌شود.

$$\Delta C_i = \frac{1}{2} \frac{\{u^i\}^T [k_i] \{u^i\}}{V_i} \quad (10)$$

۳- تعیین عدد حساسیت آستانه برای فرایند حذف و اضافه کردن المان‌ها

بعد از تعیین عدد حساسیت المان‌ها طبق رابطه (۶) برای معیار تنش معادل یا سختی، المان‌هایی که عدد حساسیت آن‌ها رابطه‌ی (۱۱) را برآورده کنند از سازه حذف می‌شوند.

$$\alpha_e^* \leq \alpha_{th}^V \quad (11)$$

و اگر عدد حساسیت المانی در رابطه زیر صدق کند در اطراف آن المان اضافه می‌شود.

$$\alpha_e^* > \alpha_{th}^I \quad (12)$$

که در این روابط α_{th}^V و α_{th}^I به ترتیب اعداد حساسیت آستانه برای فرایند حذف و اضافه کردن المان می‌باشند و به کمک نسبت‌های حذف حجمی (RRV_i) و اضافه حجمی^۳ (RRI_i) فعلی به دست می‌آیند. برای مثال اگر در یک چرخه، سازه ۱۰۰۰ المان داشته باشد فعلی $RRV_i = 0.8$ باشد و طراح بخواهد طرحی با ۰/۸ حجم فعلی $RRV_i = 0.8$ به دست آورد، آنگاه $\alpha_{th}^V = \alpha_{th}^I$ و به همین ترتیب وقتی $RRI_i = 0.8$ باشد $\alpha_{th}^I = \alpha_{th}^V$.

چرخه‌ی اجزای محدود و حذف و اضافه کردن المان تا وقتی که هیچ المانی از سازه حذف یا به سازه اضافه نشود با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی فعلی ادامه می‌یابد تا وقتی که حل همگرا شود. سپس یک نرخ تکاملی (ER) (به نسبت‌های حذف و اضافه حجمی (روابط (۱۳) و (۱۴)) اضافه می‌شود. چرخه‌ها تا وقتی که یک طرح بهین دیگر به دست آید با این نسبت‌های حذف و اضافه‌ی جدید تکرار می‌شود. فرایند BESO وقتی متوقف می‌شود که افزون بر رسیدن به حجم مورد نظر، معیار توقف که در بخش (۴-۱) در مورد آن توضیح داده می‌شود برآورده شود.

$$RRV_{i+1} = RRV_i + ER, \quad i = 1, 2, \dots \quad (13)$$

$$RRI_{i+1} = RRI_i + ER, \quad i = 1, 2, \dots \quad (14)$$

۴- تعیین شاخص عملکرد (PI)

شاخص عملکرد برای مقایسه دو یا چند سازه با قيود، مرزها و بارگذاری‌های یکسان ولی شکل‌های بهینه (محلی) متفاوت مورد استفاده قرار می‌گیرد. شاخص عملکرد باید توانایی مقایسه پاسخ‌های گوناگون یک مسئله‌ی خاص را داشته باشد؛ بدین طریق که سازه‌ی بهینه در بین ساختارهای موجود با انتخاب سازه‌ای با بهترین مقدار PI مشخص می‌گردد. بنابراین شاخص عملکرد انتخابی برای هر معیار بهینه‌سازی باید به تابع هدف مربوط باشد و برای معیار سختی و تنش

$$f(x) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i \sigma_{in} V_i}{FL}, X_i \in \{0, 1\} \quad (2)$$

$$g \equiv V^* - \sum_{i=1}^n V_i X_i = 0 \quad (3)$$

که در این روابط n ، σ_{in} ، V_i ، F ، L و V^* به ترتیب نشان دهنده‌ی تعداد المان‌ها، تنش معادل ون‌میسز، حجم المان‌ها، کل نیروی وارد بر سازه، طول نامی و حجم کل سازه‌ی بهین می‌باشند. عدد حساسیت‌تأمین المان به صورت رابطه زیر می‌باشد:

$$\alpha_i = \frac{\sigma_{in}}{V_i} \quad (4)$$

با به کار بردن الگوی پیش‌گیری از شطرنجی شدن^۱ معرفی شده توسط لی و همکاران [۲۴]، در ابتدا عدد حساسیت برای هر گره به صورت میانگین عدد حساسیت المان‌های متصل به گره طبق رابطه (۵) محاسبه می‌شود.

$$\alpha_k = \frac{\sum_{i=1}^m V_i \alpha_i}{\sum_{i=1}^m V_i} \quad (5)$$

که m معرف تعداد المان‌های متصل به گره k ام و α_k عدد حساسیت k امین گره می‌باشد. در نهایت عدد حساسیت متعادل‌شده‌ی تأمین المان با میانگین‌گیری عدد حساسیت المان‌های همسایه آن المان طبق رابطه (۶) به دست می‌آید. در این رابطه N تعداد کل گره‌های متصل به e امین المان می‌باشد.

$$\alpha_e = \frac{\sum_{i=1}^N \alpha_i}{N} \quad (6)$$

۲-۲- معیار سختی

بیشینه سازی سختی سازه معادل با کمینه سازی کامپلیانس^۲ آن است [۱۱]. بنابراین توابع هدف و قید حجمی طبق روابط (۷) و (۸) می‌باشند:

$$c = \frac{1}{2} (F)^T (U), X_i \in \{0, 1\} \quad (7)$$

$$g \equiv V^* - \sum_{i=1}^n V_i X_i = 0 \quad (8)$$

که C کامپلیانس، $\{F\}$ بردار نیرو، $\{U\}$ بردار تغییرمکان، V_i حجم المان i ام و V^* حجم سازه می‌باشد. وقتی که تأمین المان از سازه حذف می‌شود تغییر در کامپلیانس، معادل با انرژی کرنشی المان i ام است که در رابطه (۹) نشان داده شده است [۱۱].

$$\Delta C_i = \frac{1}{2} \{u^i\}^T [k_i] \{u^i\} \quad (9)$$

که در آن $\{u^i\}$ نشان دهنده‌ی بردار تغییر مکان گره‌های المان i ام و $[k_i]$ ماتریس سختی این المان می‌باشد. بنابراین عدد حساسیت

³ نسبت اضافه حجمی

¹ Checker board

² Compliance

متفاوت است.

۶- محاسبه عدد حساسیت برای گره‌های موجود طبق معادله (۵).
۷- محاسبه عدد حساسیت متعادل‌شده برای همه‌ی المان‌های موجود به کمک معادله (۶).

۸- حذف المان‌هایی که در رابطه (۱۱) صدق می‌کنند و اضافه کردن المان در مرزهای آزاد المان‌هایی که رابطه‌ی (۱۲) را برآورده می‌کنند.
۹- اگر معیار همگرایی در معادله (۱۶) برآورده شود یک طرح بهین به دست می‌آید و فرایند بهینه‌سازی به مرحله ۱۱ و در غیر این صورت به مرحله بعدی می‌رود.

۱۰- اگر به یک حالت نوسانی برخورد شود یعنی به یک طرح بهین رسیده و به مرحله بعدی می‌رود، در غیر این صورت مراحل ۵ تا ۱۰ تا رسیدن به یک طرح بهین تکرار می‌شوند.

۱۱- افزایش نسبت‌های حذف و اضافه به ترتیب طبق روابط (۱۳) و (۱۴) و تکرار مراحل ۴ تا ۹ تا رسیدن به یک طرح بهین دیگر.
در مراحل بالا اگر هدف به دست آوردن فقط یک حجم خاص باشد معیار همگرایی بعد از همان حجم بررسی می‌شود که این باعث کاهش زمان فرایند طراحی می‌شود.

۶- مثال‌ها

برای اثبات کارایی و دقت الگوریتم پیشنهادی، سه صفحه با فرض تنش صفحه‌ای در دو حالت الاستیک و الاستوپلاستیک با شرایط تکیه‌گاهی مختلف بهینه‌سازی می‌شوند. عمل بهینه‌سازی بر روی این صفحات در دو حالت مختلف، یکی با فرض یکنواخت‌سازی تنش (معیار تنش معادل)، و دیگری با فرض بیشینه‌سازی سختی (معیار سختی) انجام می‌شود. عمل بهینه‌سازی افزون بر روش جدید، با روش BESO که توسط هانگ معرفی شد و ESO هم انجام می‌شود و بهتر و کاراتر بودن روش جدید نسبت به این دو روش نشان داده می‌شود. به دلیل تقارن، تنها نیمی از سازه تحلیل شده و نتایج طرح بهین هم برای همان نیمه نشان داده شده‌اند. برای تحلیل اجزای محدود سازه از نرم‌افزار ANSYS 5.4 [۲۵] و برای نوشتن کد بهینه‌سازی از نرم‌افزار Matlab 6.5 [۲۶] استفاده شده است. المان استفاده شده برای تحلیل اجزای محدود در هر سه مثال Plane42 در نظر گرفته شده است.

۱-۶ مثال ۱

در این مثال فرایند بهینه‌سازی روی یک صفحه که شرایط تکیه‌گاهی و بارگذاری آن در شکل (۱) و خواص ماده و نوع المان به کار رفته برای تحلیل اجزای محدود آن در جدول (۱) نشان داده شده انجام می‌شود.

جدول ۱- خواص ماده مثال ۱ و ۲

مدول یانگ [MPa] (E)	۳۰
مدول سختی پلاستیک [Pa] (Eh)	۱۰۰
تنش تسلیم [MPa] (σ_y)	۰.۲۴
ضریب پواسون ν	۰

بهینه‌سازی با دو معیار سختی و تنش در دو حالت مختلف الاستیک و

۴-۱- معیار تنش

در این حالت شاخص عملکرد به صورت رابطه (۱۵) بیان می‌شود که یک کمیت بی‌بعد است. طرحی که شاخص عملکرد آن کمینه است به عنوان طرح نهایی بهین پذیرفته می‌شود [۲۰].

$$PI = \frac{\sum_{i=1}^n \sigma_{v_i} V_i}{FL} \quad (15)$$

در فرایند چرخه‌ای وقتی که معیار همگرایی تعریف شده در رابطه (۱۶) برآورده شود، برای نسبت حذف و اضافه‌ی کنونی یک طرح بهین به دست می‌آید. در این رابطه ERR_i خطای عملکرد چرخه‌ام و ERR بیشینه خطای مجاز است که توسط طراح تعیین می‌شود [۲۴].

$$ERR_i = \frac{|PI_i - PI_{i-1}|}{PI_i} \leq ERR \quad (16)$$

۴-۲- معیار سختی

با توجه به اینکه هدف از مسئله بهینه‌سازی در این حالت بیشینه سازی سختی است، شاخص عملکرد به صورت سختی بر واحد حجم در نظر گرفته می‌شود که به صورت رابطه‌ی (۱۷) نشان داده شده و واحد آن $[N^{-1}mm^{-4}]$ می‌باشد [۲۴].

$$PI = \frac{1}{CV} \quad (17)$$

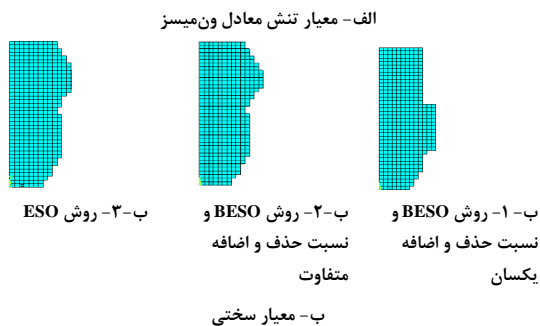
که C و V به ترتیب معرف کامپلیانس میانگین و حجم طرح بهین می‌باشند. بنابراین یک طرح با بالاترین سختی، بالاترین شاخص عملکرد را نیز دارد.

در حالت خاصی که گروهی از المان‌ها (یا حتی یکی از آن‌ها) به طور پیوسته در چرخه‌های متوالی حذف و اضافه شوند، سازه فرایند تکاملی را طی نخواهد کرد و طراح می‌تواند فرض کند که برای نسبت‌های حذف و اضافه‌ی کنونی یک طرح بهین به دست آمده هرچند که ممکن است معیار همگرایی برآورده نشود.

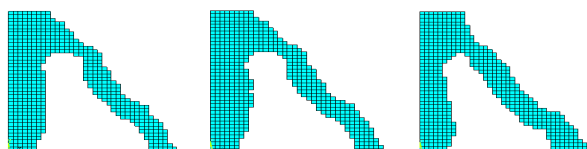
۵- فرایند بهینه‌سازی تکاملی سازه‌ها

فرایند بهینه‌سازی تکاملی سازه‌ها را می‌توان به شکل مراحل زیر خلاصه نمود:

- ۱- تقسیم‌بندی اجزای محدود فشرده‌ای که همه دامنه طراحی سازه را پوشش دهد.
- ۲- اعمال تمامی قیود مرزی سینماتیک، بارگذاری‌ها، خواص المان‌ها و غیره.
- ۳- تعیین معیار مورد استفاده برای بهینه‌سازی، مثلاً تنش ون میسز یا سختی.
- ۴- تحلیل اجزای محدود سازه.
- ۵- محاسبه عدد حساسیت برای همه‌ی المان‌های موجود طبق معادله (۴) یا (۱۰).

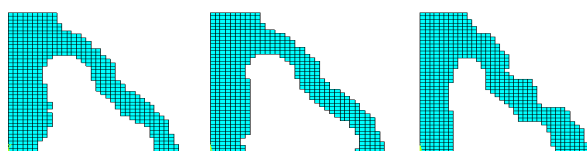


شکل ۲- شکل‌های بهین در حالت الاستیک مثال ۱



الف-۱- روش BESO و نسبت حذف و اضافه یکسان
الف-۲- روش BESO و نسبت حذف و اضافه متفاوت
الف-۳- روش ESO

الف- معیار تنش معادل ون میسر



ب-۱- روش BESO و نسبت حذف و اضافه یکسان
ب-۲- روش BESO و نسبت حذف و اضافه متفاوت
ب-۳- روش ESO

ب- معیار سختی

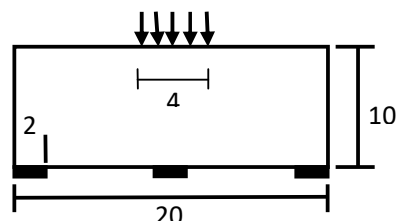
شکل ۳- شکل‌های بهین در حالت الاستوپلاستیک مثال ۱

زمان لازم برای رسیدن به این طرح‌ها در این سه روش به ترتیب ۴۸۰، ۹۰۰ و ۴۲۰ ثانیه می‌باشد که می‌توان نتیجه گرفت مدت زمان لازم در روش جدید حدود نصف روش BESO با ضرایب حذف و اضافه‌ی یکسان است، اگرچه زمان لازم در فرایند ESO کمتر از روش پیشنهادی جدید است ولی با دقت بیشتر می‌توان دید که بیشینه تنش و شاخص عملکرد آن از هر دو روش BESO (با نسبت‌های حذف و اضافه یکسان و متفاوت) در وضعیت بدتری قرار دارد.

۲-۶- مثال ۲

در این مثال که ساختار آن در شکل (۴) نشان داده شده، از همان خواص مثال (۱) استفاده شده است، تمام روش‌های مثال (۱) در اینجا نیز اعمال شده و نتایج طرح‌های بهین برای دو حالت الاستیک و الاستوپلاستیک با دو معیار مختلف در شکل‌های (۵) و (۶) نشان داده شده‌اند. برخلاف مثال قبلی که نتایج طرح بهین در حالت‌های الاستیک و الاستوپلاستیک کاملاً با هم فرق داشتند، در اینجا نتایج از لحاظ ظاهری تقریباً شبیه هم هستند. حجم نهایی در هر دو حالت الاستیک و الاستوپلاستیک ۳۵٪ حجم اولیه، نسبت‌های حذف و اضافه، بیشینه خطای مجاز و ضریب تکاملی به ترتیب ۰/۹، ۰/۳، ۰/۰۱ و ۰/۰۱ در

الستوپلاستیک با فرض کار سختی همسانگرد ماده، به کمک روش‌های ESO و BESO در دو حالت مختلف یکی با نسبت حذف و اضافه یکسان [۲۲] و دیگری با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی مختلف انجام می‌شود. هدف رسیدن حجم نهایی به ۳۰٪ حجم اولیه برای حالت الاستیک و به ۳۵٪ حجم اولیه برای حالت الاستوپلاستیک است. داده‌های دیگر به شکل $RRV_f = 0.8$ ، $RRF_f = 0.3$ ، $ERR = 0.001$ و $ER = 0.01$ در نظر گرفته شده‌اند. نتایج طرح‌های به دست آمده از حالت‌های مختلف برای مصالح الاستیک و الاستوپلاستیک به ترتیب در

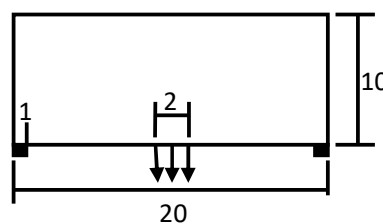


شکل ۱- ساختار شکل مثال ۱

شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند. در جدول‌های ۲ و ۳ بیشینه تنش، شاخص عملکرد و زمان لازم برای رسیدن به طرح بهین (به حجم هدف در اولین مرتبه) به ترتیب برای حالت الاستیک و الاستوپلاستیک آورده شده است. از مقایسه‌ی شکل‌ها در هر دو روش الاستیک و الاستوپلاستیک پیداست که نتایج به دست آمده از لحاظ ظاهری در هر سه روش و هر دو معیار شبیه هم هستند. با مقایسه‌ی اعداد جدول‌ها می‌بینیم که برای هر دو حالت الاستیک و الاستوپلاستیک، طرح بهین به دست آمده در روش BESO با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی متفاوت به دلیل کمتر بودن شاخص عملکرد در معیار تنش معادل، بیشتر بودن شاخص عملکرد در معیار سختی و کمتر بودن بیشینه تنش در هر دو معیار از دو روش دیگر بهتر می‌باشد. کم بودن زمان لازم برای انجام فرایند بهینه‌سازی در این روش نسبت به حالتی که فرایند BESO با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی یکسان بکار برده شود قابل ملاحظه است. مثلاً در حالت الاستیک با فرض معیار تنش معادل، بیشینه تنش و شاخص عملکرد در حالتی که روش BESO با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی متفاوت انجام می‌شود به ترتیب 0.6373MPa و 1.003×10^{-1} است که این مقادیر برای حالتی که این نسبت‌ها یکسان فرض می‌شوند و روش ESO به ترتیب 0.6393MPa و 1.006×10^{-1} و 0.6801MPa و 1.0218×10^{-1} به دست آمده‌اند که نشان می‌دهد بیشینه تنش و شاخص عملکرد در الگوریتم جدید از هر دو روش دیگر در وضعیت بهتری است.



نظر گرفته شده‌اند. نتایج بهینه‌سازی در جدول‌های (۴) و (۵) آورده شده‌اند. با مقایسه‌ی اعداد جدول‌ها، کمتر بودن شاخص عملکرد در معیار تنش معادل، بیشتر بودن شاخص عملکرد در معیار سختی و کمتر بودن بیشینه تنش در روش جدید نسبت به دو روش دیگر در هر دو معیار مشاهده می‌شود. مثلاً در حالت الاستوپلاستیک با فرض معیار سختی اگرچه بیشینه تنش در طرح بهین برای هر سه روش یکسان به دست آمده ولی شاخص عملکرد و زمان لازم برای رسیدن به این طرح‌ها در روش جدید به ترتیب $3-E-0.90$ و $S-2340$ ، در روش BESO با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی یکسان به ترتیب $3-E-0.5335$ و $S-4860$ و در روش ESO به ترتیب $3-E-0.5335$ و $S-1800$ به دست آمده‌اند. شاخص عملکرد در الگوریتم جدید از هر دو روش دیگر بیشتر و زمان لازم برای رسیدن به این طرح تقریباً نصف حالت BESO با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی یکسان است.



شکل ۴- ساختار شکل مثال ۲

جدول ۲- نتایج طرح بهین در حالت الاستیک مثال ۱

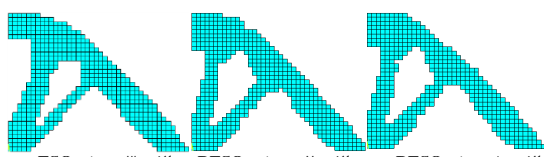
زمان [S]	شاخص عملکرد	تنش بیشینه [MPa]	معیار تنش	
			روش BESO	نسبت حذف و اضافه یکسان
۹۰۰	$0.1006E+1$	۰/۶۳۹۳	روش BESO	نسبت حذف و اضافه یکسان
۴۸۰	$0.1003E+1$	۰/۶۳۷۳	روش BESO	نسبت حذف و اضافه متفاوت
۴۲۰	$0.2018E+1$	۰/۷۷۰۱	روش ESO	
۱۸۰۰	$0.7408E-3$	۰/۶۵۰۹	روش BESO	نسبت حذف و اضافه یکسان
				نسبت حذف و اضافه متفاوت
				روش ESO
۷۸۰	$0.9407E-3$	۰/۶۸۵۳	روش ESO	

۳-۶- مثال ۳

موقعیت و خواص مادی صفحه‌ی این مثال به ترتیب در شکل (۷) و جدول (۶) نشان داده شده است. نتایج ساختاری و عددی مربوط به انجام سه روش بهینه‌سازی در حالت‌ها و معیارهای مختلف به ترتیب در شکل‌های (۸) و (۹) و جدول‌های (۷) و (۸) آورده شده است. حجم نهایی و ثابت‌های الگوریتم مشابه مثال (۲) فرض شده‌اند. با مقایسه‌ی اعداد جدول، مانند دو مثال دیگر کاراتر بودن الگوریتم جدید نسبت به

جدول ۳- نتایج طرح بهین در حالت الاستوپلاستیک مثال ۱

زمان [S]	شاخص عملکرد	تنش بیشینه [MPa]	معیار تنش	
			روش BESO	نسبت حذف و اضافه یکسان
۹۰۰	$0.1029E+1$	۰/۲۴	روش BESO	نسبت حذف و اضافه یکسان
۴۲۰	$0.1004E+1$	۰/۲۴	روش BESO	نسبت حذف و اضافه متفاوت
۴۲۰	$0.3230E+1$	۰/۲۴	روش ESO	
۶۰۰	$0.6109E-3$	۰/۲۴	روش BESO	نسبت حذف و اضافه یکسان
				نسبت حذف و اضافه متفاوت
				روش ESO
۵۴۰	$0.3031E-3$	۰/۲۴	روش ESO	



الف-۱- روش BESO و الف-۲- روش BESO و الف-۳- روش ESO
نسبت حذف و اضافه و نسبت حذف و اضافه متفاوت یکسان

الف- معیار تنش معادل ون میسر



ب-۱- روش BESO و ب-۲- روش BESO و ب-۳- روش ESO
نسبت حذف و اضافه و نسبت حذف و اضافه متفاوت یکسان

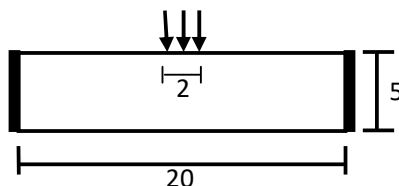
ب- معیار سختی

شکل ۵- شکل‌های بهین در حالت الاستیک مثال ۲

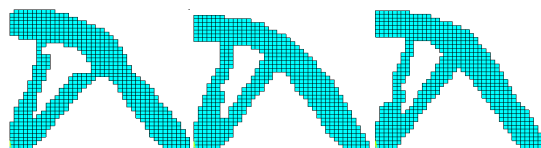
لازم برای رسیدن به این طرح‌ها در روش جدید حدود ۰/۸ روش BESO با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی یکسان است. اگر بخواهیم از بین این سه طرح، طرحی که علاوه بر زمان کم، شاخص عملکرد بالایی را داشته باشد انتخاب کنیم، طرح بهین در روش جدید بهترین است. به عنوان مثال دیگر، در حالت الاستوپلاستیک و معیار تنش، شاخص عملکرد و زمان برای رسیدن به این طرح‌ها در روش جدید به ترتیب $0.2112E+1$ و $0.960S$ ، در روش BESO با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی یکسان به ترتیب $0.2326E+1$ و $0.2100S$ و روش ESO به ترتیب $0.5416E+1$ و $0.720S$ به دست آمده‌اند. شاخص عملکرد در الگوریتم جدید حدود نصف روش ESO و زمان لازم در این روش حدود نصف حالت BESO با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی یکسان است. اگرچه زمان لازم در فرایند ESO کمتر از روش جدید است ولی بیشینه تنش و شاخص عملکرد آن از هر دو روش BESO بیشتر است.

جدول ۵- نتایج طرح بهین در حالت الاستوپلاستیک مثال ۲

زمان [S]	شاخص عملکرد	تنش بیشینه [MPa]	معیار تنش	
			روش BESO	نسبت حذف و اضافه یکسان
2400	$0.1319E+1$	0.24	روش BESO	نسبت حذف و اضافه یکسان
1260	$0.1220E+1$	0.24	روش BESO	نسبت حذف و اضافه متفاوت
960	$0.2521E+1$	0.24	روش ESO	
4860	$0.8917E-3$	0.24	روش BESO	نسبت حذف و اضافه یکسان
			روش BESO	نسبت حذف و اضافه متفاوت
			روش ESO	
2340	$0.9050E-2$	0.24	روش ESO	
1800	$0.5235E-4$	0.24	روش ESO	

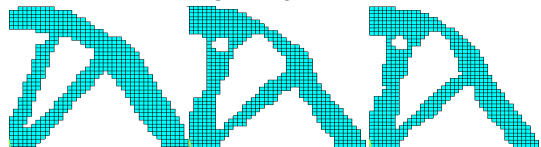


شکل ۷- ساختار شکل مثال ۲



الف-۱ روش BESO و الف-۲ روش BESO و الف-۳ روش ESO
نسبت حذف و اضافه و نسبت حذف و اضافه متفاوت یکسان

الف- معیار تنش معادل ون میسرز



ب-۱ روش BESO و ب-۲ روش BESO و ب-۳ روش ESO
نسبت حذف و اضافه و نسبت حذف و اضافه متفاوت یکسان

ب- معیار سختی

شکل ۶- شکل‌های بهین در حالت الاستوپلاستیک مثال ۲

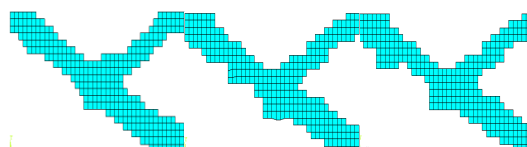
جدول ۴- نتایج طرح بهین در حالت الاستیک مثال ۲

زمان [S]	شاخص عملکرد	تنش بیشینه [MPa]	معیار تنش	
			روش BESO	نسبت حذف و اضافه یکسان
1860	$0.1179E+1$	0.4422	روش BESO	نسبت حذف و اضافه یکسان
920	$0.1163E+1$	0.4390	روش BESO	نسبت حذف و اضافه متفاوت
600	$0.3979E+1$	0.6538	روش ESO	
4260	$0.3195E-4$	0.5623	روش BESO	نسبت حذف و اضافه یکسان
			روش BESO	نسبت حذف و اضافه متفاوت
			روش ESO	
2100	$0.3220E-4$	0.5583	روش ESO	
1200	$0.2126E-3$	0.6923	روش ESO	

دو روش دیگر آشکار می‌شود. مثلاً در حالت الاستیک و معیار سختی، بیشینه تنش، شاخص عملکرد و زمان برای رسیدن به این طرح‌ها در روش جدید به ترتیب 0.9103 MPa ، $0.1700E-2$ و $0.1920S$ ، در روش BESO با نسبت‌های حذف و اضافه یکسان به ترتیب 0.9514 MPa ، $0.3215E-3$ و $0.2400S$ و در روش ESO به ترتیب 1.3421 MPa ، $0.3493E-4$ و $0.840S$ به دست آمده‌اند. برای این حالت شاخص عملکرد در الگوریتم جدید حدود ۵ برابر روش BESO با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی یکسان و ۴۸ برابر روش ESO است. زمان

جدول ۶- خواص ماده مثال ۳

۱۸۰	مدول یانگ [MPa] (E)
۱۰۰	مدول سختی پلاستیک [Pa] (Eh)
۰/۳۶	تنش تسلیم [MPa] (σ_y)
۰	ضریب پواسون (ν)

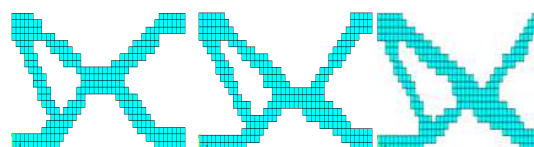


الف-۱- روش BESO و الف-۲- روش BESO و الف-۳- روش ESO نسبت حذف و اضافه و نسبت حذف و اضافه متفاوت یکسان



الف- معیار تنش معادل ون میسر
ب-۱- روش BESO و ب-۲- روش BESO و ب-۳- روش ESO نسبت حذف و اضافه و نسبت حذف و اضافه متفاوت یکسان
ب- معیار سختی

شکل ۸- شکل‌های بهین در حالت الاستیک مثال ۳



الف-۱- روش BESO و الف-۲- روش BESO و الف-۳- روش ESO نسبت حذف و اضافه و نسبت حذف و اضافه متفاوت یکسان



الف- معیار تنش معادل ون میسر
ب-۱- روش BESO و ب-۲- روش BESO و ب-۳- روش ESO نسبت حذف و اضافه و نسبت حذف و اضافه متفاوت یکسان

ب- معیار سختی

شکل ۹- شکل‌های بهین در حالت الاستوپلاستیک مثال ۳

جدول ۷- نتایج طرح بهین در حالت الاستیک مثال ۳

زمان [s]	شاخص عملکرد	تنش بیشینه [MPa]	نسبت حذف و اضافه یکسان	معیار تنش
۲۷۰۰	۰/۲۳۱۲E+۱	۰/۸۹۲۴	نسبت حذف و اضافه یکسان	روش BESO
۱۴۴۰	۰/۲۲۹۲E+۱	۰/۸۲۷۸	نسبت حذف و اضافه متفاوت	روش BESO
۱۱۴۰	۰/۴۳۰۲E+۱	۱/۲۱۸۲	روش ESO	روش ESO
۲۴۰۰	۰/۳۲۱۵E-۳	۰/۹۵۱۴	نسبت حذف و اضافه یکسان	روش BESO
۱۹۲۰	۰/۱۷۰۰E-۲	۰/۹۱۰۳	نسبت حذف و اضافه متفاوت	روش BESO
۸۴۰	۰/۳۴۹۳E-۴	۱/۳۴۲۱	روش ESO	روش ESO

جدول ۸- نتایج طرح بهین در حالت الاستوپلاستیک مثال ۳

زمان [s]	شاخص عملکرد	تنش بیشینه [MPa]	نسبت حذف و اضافه یکسان	معیار تنش
۲۱۰۰	۰/۲۳۲۶E+۱	۰/۳۶	نسبت حذف و اضافه یکسان	روش BESO
۹۶۰	۰/۲۱۱۲E+۱	۰/۳۶	نسبت حذف و اضافه متفاوت	روش BESO
۷۲۰	۰/۵۴۱۶E+۱	۰/۳۶	روش ESO	روش ESO
۳۴۲۰	۰/۱۲۱۵E-۲	۰/۳۶	نسبت حذف و اضافه یکسان	روش BESO
۱۵۶۰	۰/۱۱۸۰E-۱	۰/۳۶	نسبت حذف و اضافه متفاوت	روش BESO
۶۰۰	۰/۴۹۳۵E-۳	۰/۳۶	روش ESO	روش ESO

- Multidisciplinary Optimization*, Goslar, Germany, published by Pergamon, edited by N Olhoff and G I N Rozvany, pp. 213-218, May 28 - June 2, 1995.
- [14] Zhao C., Steven G.P. and Xie Y.M., Evolutionary natural frequency optimization of thin plate bending vibration problems, *Journal of Structural Optimization*, No.11, pp 244-251, 1996.
- [15] Zhao C., Steven G.P. and Xie Y.M., Evolutionary optimization of maximizing the difference between two natural frequencies of a vibrating structure, *Journal of Structural Optimization*, 13(2-3), pp. 148-154, 1996.
- [16] Querin O.M., Steven G.P. and Xie Y.M., Topology optimization of structures with material and geometric nonlinearities, *Proc. of the 6th AIAA/USAF/NASA/ISSMO symposium on multidisciplinary analysis and optimization*, Bellevue, Washington, USA, AIAA -96-4116-CP, 1812-1818, September 4-6, 1996.
- [17] Hung X., and Xie Y.M., Bidirectional Evolutionary Topology Optimization for Structures with Geometrical and Material Nonlinearities, *AIAA*, 45(1), 2007.
- [18] Eom Y.S., Yoo K.S., Park J.Y., Han S.Y., Reliability-based topology optimization using a standard response surface method for three-dimensional structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 43(2), pp. 287-295, 2011.
- [19] Shobeiri V., The topology optimization design for cracked structures. *Engineering Analysis with Boundary Elements* 58: pp. 26-38, 2015.
- [20] Querin O.M., Evolutionary structural optimization: stress based formulation & implementation, *PhD Dissertation, department of Aeronautical engineering*, university of Sydney, Australia, 1997.
- [21] Querin, O.M., Young V., Steven G.P. and Xie Y.M., Computational efficiency and validation of bi-directional evolutionary structural optimization, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 189(2), pp. 559-573, 2000.
- [22] Huang X., Xie Y.M. and Burry M.C., A new algorithm for Bi-Directional Evolutionary structural optimization, *JSME International Journal. C* 49.4, pp. 1091-1099, 2006.
- [23] Li Q., Steven G.P. and Xie Y.M., on equivalence between stress criterion and stiffness criterion evolutionary structural optimization *Structural Optimization. Structural and Multidisciplinary Optimization*, 18(1), pp. 67-73, 1999.
- [24] Li Q., Steven G.P. and Xie Y.M., A simple checkerboard suppression algorithm for evolutionary structural optimization, *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 22, pp. 230-239, 2001.
- [25] ANSYS(R), Swanson Analysis System, Inc. Released 5.4UP19970828.
- [26] MATLAB, the Math Works, Inc. Version6.5.0.180913a (R13) June18, 2002.

۷- نتیجه گیری

با توجه به طرح‌های بهین در مثال‌های انجام شده با روش‌های ESO و BESO می‌توان نتیجه گرفت که هر چند نتایج بهین در هر دو معیار تنش و سختی با سه روش، از لحاظ ظاهری کم و بیش مشابه هم هستند ولی مقدار بیشینه تنش و شاخص عملکرد برای وقتی که فرایند بهینه‌سازی با نسبت‌های حذف و اضافه‌ی متفاوت انجام شود هم در حالت الاستیک و هم الاستوپلاستیک از هر دو روش ESO و BESO (با در نظر گرفتن نسبت‌های حذف و اضافه‌ی حجمی مساوی) بهتر می‌باشند. همچنین زمان لازم برای رسیدن به یک حجم مشخص در فرایند بهینه‌سازی، وقتی که نسبت‌های حذف و اضافه‌ی حجمی یکسان باشد به ویژه در حالت الاستوپلاستیک از روش‌های دیگر خیلی بیشتر است که این می‌تواند در طرح‌های بزرگ‌تر مهم و قابل ملاحظه باشد. نتایج به دست آمده از این پژوهش، معادل بودن دو معیار سختی و تنش در هر دو حالت الاستیک و الاستوپلاستیک را نیز تأیید می‌نماید.

۸- مراجع

- [1] Xie Y.M. and Steven G.P., Shape and layout optimization via an evolutionary procedure. *Int'l conference on Computational Engineering Science*, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong, pp. 471, December 17-22, 1992.
- [2] Xie Y.M. and Steven G.P., A simple evolutionary procedure for structural optimization. *Computers & Structures*, 49 (5), pp. 885-896, 1993.
- [3] Steven, G.P., and Xie, Y.M., Evolutionary structural optimization with FEA. *Computational Mechanics*, Vol. 1, pp. 27-34, 1993.
- [4] Xie Y.M. and Steven G.P., *Evolutionary structural optimization*, Springer, London, 1997.
- [5] Xie Y.M. and Steven G.P., Optimal design of multiple load case structures using an evolutionary procedure, *Engineering computations*, Vol. 11, pp. 295-302, 1994.
- [6] Hinton E. and Siens J., Fully stressed topological design of structures using an evolutionary procedure, *Engineering Computations*, Vol. 12, pp.229-244, 1995.
- [7] Xie Y.M. and Steven G.P., Optimal Design of multiple load case structures using an evolutionary procedure, *Engineering Computations*, Vol. 11, pp. 295-302, 1994.
- [8] Steven G.P. and Xie Y.M., Evolutionary structural optimization applied to problems in structural dynamics, *3rd world congress on computational mechanics*, Chiba, Japan, paper H2-2, 1994.
- [9] Rispler A. and Steven G.P., Shape optimization of metal inserts in composite bolted joints, *Proceedings of the Second Pacific International Conference on Aerospace Science and Technology*, Melbourne, Australia, pp. 225-229, March 20-23, 1995.
- [10] Steven G.P., Querin O.M. and Xie Y.M., Analysis of Aircraft Patch Repairs Using ESO, *Proceedings of the Second Pacific International Conference on Aerospace Science and Technology*, Melbourne, Australia, pp. 683-688, March 20-23, 1995.
- [11] Chu D.N., Xie Y. M., Hira A. and Steven, G.P., Evolutionary structural optimization for problems with stiffness constraints, *Finite elements in analysis and design*, Vol. 21, pp. 239-251, 1996.
- [12] Manickarajah D., Xie Y.M. and Steven G.P., A simple method for the optimization of columns, frames and plates against buckling, *Structural Stability and Design*, S Kitipornchai et al. (eds.), A.A Balkema Publishers, Rotterdam, pp. 175-180, October, 1995.
- [13] Steven G.P., Querin O.M. and Xie Y.M., Multiple Constraint Environments for Evolutionary Structural Optimisation, *Proceedings of the First World Congress on Structural and*