مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۹۱، جلد ۵۰، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۹، صفحه ۳۷–۴۵ – پژوهشی - DOI: 10.22034/jmeut.2020.9352

ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی با تکیه گاه ساده بر بستر الاستیک و استفاده از نظریه جدید مرتبه بالای مثلثاتی

علی تکلو بیغش کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

علی شهرجردی* استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

چکیده

در این مقاله، ارتعاش آزاد یک ورق مستطیلی تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از نظریه جدید تغییر شکل برشی مرتبه بالای مثلثاتی بررسی می‌گردد. نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت ورق به صورت یکنواخت، متقارن و نامتقارن توزیع شده‌اند. بستر الاستیک پاسترناک یا دو پارامتری در مدل‌سازی استفاده شده و همچنین برای محاسبه خواص ورق قانون جدید مخلوط‌ها بکارگرفته شده است. معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از اصل همیلتون به‌دست‌آمده و برای یک ورق مستطیلی با شرایط مرزی چهار طرف تکیه‌گاه ساده با استفاده از روش ناویر حل‌شده‌اند. درنهایت اثر پارامترهای مختلف، مانند توزیع مختلف نانولوله‌ها، خصوصیات هندسی ورق، ثابت فنری وینکلر و ثابت برشی نوع پاسترناک، روی رفتار ارتعاشی ورق بررسی‌شده است. نتایج به دست آمده نشان می‌دهند که مقادیر فرکانس طبیعی به ازای افزایش نسبت ضخامت به عرض ورق (h/b) و کاهش نسبت طول به عرض ورق (a/b) و نیز افزایش ضرایب بستر الاستیک افزایش می‌یابد به طوری که به ازای K_w بزرگتر از 10000 و K_gبزرگتر از ۱۰۰۰ تغییرات در مقادیر فرکانس طبیعی، بسیار کاهش‌یافته و محسوس نخواهد بود، همچنین بالاترین مقادیر فرکانسی مربوط به توزیع X و پایین‌ترین مقادیر مربوط به توزیع O می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاش آزاد، نظریه جدید مرتبه بالای مثلثاتی، نانولوله‌های کربنی ، بستر الاستیک.

Free Vibration analysis of a rectangular functionally graded plate reinforced with carbon nanotubes with simply supported condition on elastic foundation and using a novel trigonometric higher-order theory

A. Takalubighash Department of Mechanical Engineering, University of Malayer, Malayer, Iran

A. Shahrjerdi Department of Mechanical Engineering, University of Malayer, Malayer, Iran

Abstract

This study explores the free vibration analysis of a functionally-graded rectangular plate which has been reinforced by carbon nano-tubes (CNT) using the novel theory of trigonometric higher-order shear deformation. Carbon nano-tubes have been distributed through the thickness direction in a linear, symmetric and non-symmetric fashion. The foundation pertaining to Pasternak , or rather duo-parameter, has been utilized in the modeling; moreover, the new mixtures rule has been used for estimating the plate properties. The governing equations have been derived using the Hamilton’s principle, and the Navier’s solution has been used for dealing with a rectangular plate boundary conditions. Lastly, the effects of diverse parameters have been examined upon the vibrational behavior of the plate, such as the different distributions of CNT and the geometric properties of the plate. The results show that the amount of natural frequencies rise in proportion with an increase in the ratio of thickness to the width of the plate (h/b); a decrease in the ratio of length to the width of the plate (a/b); as well as an increase in the coefficients of the elastic foundation, such that the changes in the amounts of natural frequencies will be tremendously decreased in proportion with K_w> 10000 and K_g> 1000, and such changes will not be tangible.Furthermore, the highest amounts of frequencies will be pertinent to the X distribution, and the lowest amounts of frequencies will be pertinent to the O distribution.

Keywords: Free vibration, Novel trigonometric higher order theory, Carbon nano tubes, Elastic foundation.

۱- مقدمه

در چند دهه گذشته کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله کاربردهای فراوانی در بخش‌های مختلف صنعت داشته‌اند و دارای برتری بیشتری نسبت به مواد معمولی مانند فولاد و مواد آلیاژی می‌باشند. موادی که با نانولوله‌های کربنی تقویت شده‌اند به شکل گسترده‌ای در شکل‌دهی بدنه اتومبیل‌ها، برج‌های خنک‌کننده و تیغه توربین بادی مورد استفاده قرار می‌گیرند. با پیشرفت سریع فنّاوری در زمینه نانو مواد، مواد مرکب تقویت شده با نانو به‌عنوان جایگزین‌های مناسبی نسبت به سایر مواد مورد استفاده قرار می‌گیرند به طوری که خواص فیزیکی کامپوزیت‌ها با درصد کسر حجمی کم از نانولوله سبب افزایش کارایی و همچنین کاهش وزن این‌گونه مواد شده است. با توجه به توسعه مواد مدرج تابعی[1] در سال‌های اخیر تحقیقات در این زمینه روزبه‌روز گسترش‌یافته است، همچنین با توجه به خواص منحصربه‌فرد نانولوله کربنی نظیر مقاومت بالا، سختی و چگالی پایین باعث شده این مواد به عنوان یک تقویت‌کننده مناسب در مواد کامپوزیتی استفاده شود.

ماتسونگا و همکاران [۱]، ارتعاش آزاد ورق مستطیلی مدرج تابعی با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه دوم را بررسی کردند. ملک‌زاده [۲]، آنالیز ارتعاش سه بعدی ورق تابعی ضخیم بر روی بستر الاستیک دو پارامتری را بررسی کرد همچنین تغییرات تدریجی کسر حجمی مواد را با استفاده از قانون توزیع توانی و نیز توزیع نمایی در

[1] Functionally graded material

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: shahrjerdi.mail@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۷/۰۱/۲۵

تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۱/۱۹

راستای ضخامت ورق در نظر گرفت و معادلات حاکم به‌دست‌آمده از نظریه الاستیسیته سه بعدی را با کمک بسط سری مثلثاتی توابع تغییر مکان‌ها به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و با استفاده از روش تربیع دیفرانسیل[1] گسسته سازی کرد. شن [۳]، برای اولین بار ایده‌ی استفاده هدفمند از نانولوله کربن در کامپوزیت‌های پلیمری را مطرح کرد او در این مقاله خمش غیرخطی ورق‌های هدفمند کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله کربن در محیط‌های حرارتی را مورد بررسی قرارداد.

یاس و سبحانی عراقی [۴]، ارتعاش آزاد ورق مستطیلی تابعی تقویت‌شده با الیاف پیوسته بر روی بستر الاستیک را بررسی کردند. حسینی هاشمی و همکاران [۵]، ارتعاش ورق حلقوی دایره‌ای مدرج هدفمند با ضخامت متغیر بر بستر الاستیک را بررسی کردند آن‌ها از روش مربعات دیفرانسیلی برای محاسبه فرکانس طبیعی ورق تحت شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده و گیردار بر اساس تئوری کلاسیک ورق استفاده نمودند. ژن ژینگ وانگ و همکاران [۶]، ارتعاش غیرخطی ورق کامپوزیتی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی در محیط حرارتی را بررسی کردند. در این مقاله دامنه بزرگ ارتعاش ورق کامپوزیتی بر بستر الاستیک موردتوجه قرار گرفت همچنین نوع توزیع نانولوله‌های کربنی توزیع یکنواخت و تابعی در نظر گرفته شد.

هدایتی و سبحانی [۷]، اثر نفوذ نانولوله‌های کربنی فشرده درجه بندی شده را در ارتعاش ورق قطاعی تقویت شده با نانولوله‌ها بر بستر الاستیک بررسی کرده‌اند. هدف از این مقاله حل الاستیسیته سه‌بعدی برای ارتعاش آزاد پیوسته ورق قطاعی حلقوی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی بر روی بستر پاسترناک بوده است. ژو و همکاران [۸]، ارتعاشات آزاد و کمانش صفحات نانو کامپوزیتی هدفمند تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی را به روش المان محدود و بر پایه نظریه برشی مرتبه اول بررسی کردند. مانتاری و همکاران [۹]، یک نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالای جدید همراه با اثر کشش را بر روی ورق تابعی مستطیلی انجام دادند.

حشمتی و یاس [۱۰]، آنالیز دینامیکی تیر کامپوزیتی پلی‌استیرن تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی چند جداره[2] تابعی تحت چند بار متحرک را بررسی کردند. پاسخ دینامیکی تیر بر اساس نظریه تیموشنکو بررسی شده است و اثرات توزیع یکنواخت[3]، متقارن و غیرمتقارن نانولوله‌ها در سراسر ضخامت تیر بر رفتار دینامیکی مطالعه شده است آن‌ها روش اجزاء محدود را برای تشریح مدل و به دست آوردن تقریب‌های عددی معادله حرکت به‌کاربرده بردند. علی بیگلو و لیو [۱۱]، رفتار خمشی ورق‌های نانوکامپوریتی هدفمند تقویت‌شده با نانولوله کربنی را تحت بارهای ترمومکانیکی به روش نظریه سه‌بعدی الاستیسیته بررسی کردند. آن‌ها برای ورق تکیه‌گاه ساده در نظر گرفتند و از بسط سری‌های فوریه و تکنیک فضا- حالت برای حل دقیق مسئله استفاده کردند. لی و همکاران [۱۳,۱۲]، ارتعاشات آزاد و کمانش صفحات نانو کامپوزیتی هدفمند تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را به روش بدون المان کی پی- ریتز[4] بررسی کردند. جم و همکاران [۱۴]، ارتعاشات آزاد پانل استوانه‌های هدفمند تقویت‌شده توسط نانولوله‌های منحنی شکل را با استفاده از نظریه سه بعدی الاستیسیته بررسی کردند. آن‌ها کسر حجمی نانولوله‌ها را در راستای شعاع، متغیر در نظر گرفتند و خواص مکانیکی آن را به واسطه یک قانون اختلاط توسعه‌یافته به دست آوردند و تأثیر ضریب منظری و انحنای نانولوله‌ها را روی رفتار ارتعاشی بررسی کردند. جم و همکاران [۱۵]، خواص الاستیک کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را با تکنیک‌های میکرومکانیکی متنوعی محاسبه کردند. آن‌ها یک نانولوله را در یک پلیمر مدل کرده و اثرات بین فازی آن را بررسی کردند. علاوه بر آن‌ها، خواص الاستیک این نانو کامپوزیت‌ها را به روش موری-تاناکا[5] دسته بندی کردند. آن‌ها تأثیرات شعاع نانولوله، ضخامت بین لایه‌ای و درجه‌ی کلوخه‌ای بودن را بر خواص مکانیکی بررسی کردند و متوجه شدند که تأثیر درصد کلوخه‌ای بودن بر خواص مکانیکی بیشتر از ضخامت بین لایه‌ای است.

فلاح و همکاران [۱۶]، تجزیه و تحلیل ارتعاش آزاد ورق تابعی ضخیم بر بستر الاستیک با استفاده از روش کانتورویچ[6] توسعه یافته را بررسی کردند. معادلات حاکم با استفاده از نظریه ورق میندلین[7] به‌دست‌آمده بود. برای معادلات حاکم یک روش نیمه تحلیلی همراه با تئوری کانتورویچ توسعه‌یافته استفاده‌شده است. هان و الیوت [۱۷]، با استفاده از شبیه‌سازی کلاسیک دینامیک مولکولی به بررسی خواص مکانیکی پلیمر تقویت‌شده با نانولوله کربن تک جداره[8] پرداختند. آن‌ها نانولوله کربن را در دو پلیمر متفاوت با درصدهای حجمی مختلف بکار بردند. نتایج شبیه‌سازی آن‌ها نشان داد که خواص مکانیکی کامپوزیت‌های پلیمری با افزایش نانولوله کربن بهبود پیدا می‌کنند.

در مقاله حاضر، ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی تابعی هدفمند تقویت شده با نانولوله کربنی که بر روی بستر الاستیک قرارگرفته‌اند با استفاده از نظریه جدید مرتبه بالای مثلثاتی برای حالت‌های توزیع مختلف نانولوله‌ها مورد بررسی قرار گرفته و طبق بررسی‌های انجام شده این تئوری برشی بر روی ورق تابعی تقویت شده با نانولوله بر بستر الاستیک در هیچ یک از ادبیات پیشین انجام نشده است. در واقع کسر حجمی نانولوله‌های کربنی در راستای ضخامت ورق به‌صورت تابعی تغییر می‌کند سپس تأثیر پارامترهای مختلف بر روی رفتار ارتعاشی ورق تابعی تقویت‌شده بر روی بستر الاستیک مورد بررسی قرارگرفته است.

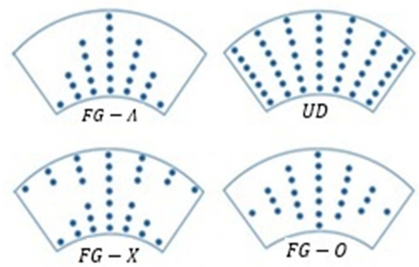
۲- تعیین خواص ماده کامپوزیت تقویت شده با نانولوله کربنی

ورق مستطیلی که با نانولوله کربنی با توزیع‌های مختلف در

[1] Differential quadrature
[2] Multi walled carbon nanotube
[3] Uniform distribution

[4] KP-Ritz
[5] Mori-Tanaka
[6] Kantorovich method
[7] Mindlin plate theory
[8] Single walled carbon nanotube

راستای ضخامت تقویت شده است دارای زمینه ارتوتروپیک[1] از جنس پلیمر می‌باشد. در این قسمت خواص ماده مؤثر مربوط به ورق تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی مورد بررسی قرار می‌گیرد. شکل ۱ انواع توزیع الیاف در راستای ضخامت را به صورت طرحواره برای یک جداره مخروطی شکل کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی[2] را نشان می‌دهد. برای نوع FG − Λ، سطح داخلی جداره غنی و سطح خارجی آن خالی از الیاف می‌باشد. در نوع FG − X، یک توزیع متقارن الیاف نسبت به صفحه میانی است، به‌طوری‌که هر دو سطح داخلی و خارجی جداره غنی هستند. نوع FG − O، نیز یک توزیع متقارن نسبت به صفحه میانی است درحالی‌که هر دو سطح داخلی و خارجی خالی از الیاف هستند.



شکل ۱- انواع توزیع الیاف درکامپوزیت تقویت شده

هر بخش خواص مکانیکی شامل مدول یانگ از کامپوزیت‌های پلیمری تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی به صورت رابطه (۱) طبق فرم جدید از قانون مخلوط‌ها[3] تخمین زده شده است [۱۰].

$$E_c = (k_l k_o k_w E_{CNT} - E_m) V_{CNT} e^{\gamma V_{CNT}} + E_m \qquad (۱)$$

که در آن

$$k_l = 1 - \frac{\tanh\varphi}{\varphi}$$
$$\varphi = \frac{2l}{d}\sqrt{\frac{-2E_m}{E_{CNT}(1-v_m)\ln V_{CNT}}}$$
$$\gamma = \frac{\ln(\beta')}{\hat{V}_{CNT}} \qquad (۲)$$
$$\beta' = \frac{\hat{E}_c - E_m}{(k_l k_o k_w E_{CNT} - E_m)\hat{V}_{CNT}}$$

که E_{CNT} و E_m مدول یانگ طولی از نانولوله‌های کربنی و پلیمر مورد نظر می‌باشند. V_{CNT} کسر حجمی از نانولوله‌های کربنی k_l، k_o و k_w پارامتر مؤثر طول، فاکتور مؤثر جهت نانولوله‌های کربنی و پارامتر موج نانولوله‌های کربنی به ترتیب می‌باشند. l و d طول و قطر نانولوله‌های کربنی و v_m ضریب پواسون پلیمراست. پارامترهای با علامت ^ باید آزمایشگاهی و از طریق تست کشش برای نانولوله‌های با درصد وزنی بالا به دست آورده شود.

همچنین دانسیته جرمی و ضریب پواسون از کامپوزیت‌های پلی-استیرن[4] تقویت شده با نانولوله‌های کربنی طبق قانون خطی از مخلوط‌ها می‌تواند به صورت رابطه (۳) محاسبه شود:

$$\rho = V_{CNT}\rho_{CNT} + V_m\rho_m$$
$$v = V_{CNT}v_{CNT} + V_m v_m \qquad (۳)$$

که ρ_{CNT} و ρ_m دانسیته جرمی از نانولوله‌های کربنی و پلیمر خالص می‌باشد.

از طرفی فرض شده که ماتریس پلی‌استیرن که با نانولوله‌های کربنی تقویت‌شده از نظر کسر حجمی به صورت رابطه (۴) بیان می‌گردد:

$$V_{CNT} + V_m = 1 \qquad (۴)$$

در جدول ۱ خواص مکانیکی از پلی‌استیرن و نانولوله‌های کربنی خالص آورده شده است[۱۰].

جدول ۱- خواص مکانیکی از پلی‌استیرن و نانولوله‌های کربنی[۱۰]

خواص مکانیکی نانولوله‌های‌کربنی	خواص مکانیکی پلی استیرن
$E_{CNT} = 900GPa,\ v_{CNT} = 0.28$	$E_m = 1.9GPa,\ v_m = 0.34$
$\rho_{CNT} = 2100kgm^{-3}$	$\rho_m = 1050kgm^{-3}$
اندازه نانولوله‌ها	
$d = 25nm,\ \ l = 60\mu m$	$k_o = 0.2,\ k_w = 0.1,\ E_c = 3.8GPa,\ V_{CNT} = 0.15$

در این مقاله فرض شده است توزیع نانولوله‌های کربن به‌صورت خطی در راستای ضخامت ورق مستطیلی صورت گیرد. به این ترتیب چند تابع برای توزیع نانولوله‌ها در راستای ضخامت در نظر گرفته‌شده است که به‌صورت زیر می‌باشند:

توزیع نامتقارن از نانولوله‌های کربن در راستای ضخامت:

$$\text{Unsymmetrical FG}: \quad V_{CNT} = (1 - \frac{2z}{h})V^*_{NT} \qquad (۵)$$

و دو نوع مختلف از توزیع خطی متقارن از کسر حجمی نانولوله‌ها در راستای ضخامت ورق به‌صورت رابطه (۶) در نظر گرفته‌شده است:

$$\text{Symmetrical FG\_I}: \quad V_{CNT} = \frac{4|z|}{h}V^*_{NT}$$
$$\text{Symmetrical FG\_II}: \quad V_{CNT} = 4(\frac{1}{2} - \frac{|z|}{h})V^*_{NT} \qquad (۶)$$

و توزیع یکنواخت از نانولوله‌ها که به‌صورت رابطه (۷) تعریف می‌شود:

$$\text{Uniform}: \quad V_{CNT} = V^*_{NT} \qquad (۷)$$

h ضخامت ورق بوده و V^*_{NT} به‌صورت رابطه(۸) تعریف می‌شود[۱۰].

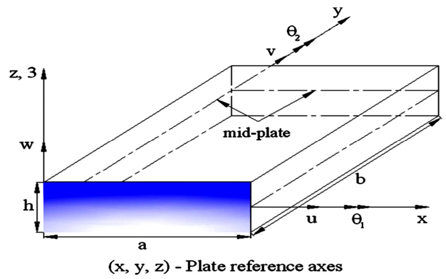
$$V^*_{NT} = \frac{w_{NT}}{w_{NT} + (\frac{\rho_{CNT}}{\rho_m}) - (\frac{\rho_{CNT}}{\rho_m})w_{NT}} \qquad (۸)$$

که w_{NT} کسر جرمی از نانولوله، ρ_{CNT} و ρ_m به ترتیب چگالی نانولوله کربن و ماتریس می‌باشند.

۳- استخراج معادلات تعادل ورق با نظریه جدید مثلثاتی

در شکل ۲ نمایی از ورق مستطیلی و دستگاه مختصات قرار داده شده روی آن ملاحظه می‌شود:

[1] Orthotropic
[2] Carbon Nanotube Reinforced Composite (CNTRC)
[3] Rule of mixture
[4] Polystyrene



شکل ۲- ورق مستطیلی و دستگاه مختصات آن

۳-۱- روابط تغییر مکان

مؤلفه‌های جابجایی طبق نظریه مرتبه بالای مثلثاتی به‌صورت روابط (۹) می‌باشد[۹]. ازآنجاکه ورق با نانولوله‌های کربنی تقویت شده است بنابراین تمامی خواص مکانیکی از قبیل مدول الاستیسیته، مدول برشی و ضریب پواسون در راستای ضخامت تابعی از Z می‌باشند.

$$\begin{aligned}\bar{u}(x,y,z) &= u(x,y) + z\left\{y*\theta_1 + y*\frac{\partial\theta_3}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial x}\right\} + \tan(mz)\theta_1\\ \bar{v}(x,y,z) &= v(x,y) + z\left\{y*\theta_2 + y*\frac{\partial\theta_3}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y}\right\} + \tan(mz)\theta_2\\ \bar{w}(x,y,z) &= w(x,y) + m\sec^2(mz)\theta_3\end{aligned} \qquad (۹)$$

که در آن:

$$y^* = -\sec^2\left(\frac{mh}{2}\right); \quad m = \frac{1}{5h^*} \qquad (۱۰)$$

که $\bar{u}$، $\bar{v}$ و $\bar{w}$ به ترتیب جابجایی در جهات x، y و z و u ، v ، w جابجایی روی صفحه میانی است و θ_1، θ_2 و θ_3 چرخش‌ها حول محور x، y و z می‌باشند.

۳-۲- روابط کرنش تغییر مکان

با استفاده از روابط خطی کرنش- جابجایی مؤلفه‌های کرنش به‌صورت رابطه (۱۱) خواهند بود:

$$\begin{aligned}&\varepsilon_x = \frac{\partial\bar{u}}{\partial x},\ \varepsilon_y = \frac{\partial\bar{v}}{\partial y},\quad \varepsilon_z = \frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\\ &\gamma_{xy} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial x},\quad \gamma_{xz} = \frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial x},\quad \gamma_{yz} = \frac{\partial\bar{v}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

با قرار دادن رابطه (۹) در رابطه (۱۱) مؤلفه‌های کرنش به دست می‌آید که برای ساده‌سازی به‌صورت رابطه (۱۲) نوشته می‌شوند:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \varepsilon^0_{xx} + z\varepsilon^1_{xx} + \tan(mz)\varepsilon^2_{xx}\\ \varepsilon_{yy} &= \varepsilon^0_{yy} + z\varepsilon^1_{yy} + \tan(mz)\varepsilon^2_{yy}\\ \varepsilon_{zz} &= 2m^2\sec^2(mz)\tan(mz)\varepsilon^4_{zz}\\ \gamma_{yz} &= \gamma^0_{yz} + m\sec^2(mz)\gamma^3_{yz}\\ \gamma_{xz} &= \gamma^0_{xz} + m\sec^2(mz)\gamma^3_{xz}\\ \gamma_{xy} &= \gamma^0_{xy} + z\gamma^1_{xy} + \tan(mz)\gamma^2_{xy}\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که پارامترهای ذکرشده به‌صورت رابطه (۱۳) تعریف می‌شوند:

$$\left\{\varepsilon^4_{zz}\right\} = \{\theta_3\},\ \left\{\begin{array}{c}\gamma^3_{yz}\\ \gamma^3_{xz}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\theta_2 + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial y}\\ \theta_1 + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial x}\end{array}\right\}, \qquad (۱۳)$$

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon^2_{xx}\\ \varepsilon^2_{yy}\\ \gamma^2_{xy}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\theta_2}{\partial y}\\ \dfrac{\partial\theta_2}{\partial x} + \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y}\end{array}\right\},\ \left\{\begin{array}{c}\varepsilon^0_{xx}\\ \varepsilon^0_{yy}\\ \gamma^0_{yz}\\ \gamma^0_{xz}\\ \gamma^0_{xy}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}\dfrac{\partial u}{\partial x}\\ \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ y^*\left(\theta_2 + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial y}\right)\\ y^*\left(\theta_1 + \dfrac{\partial\theta_3}{\partial x}\right)\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{c}\varepsilon^1_{xx}\\ \varepsilon^1_{yy}\\ \gamma^1_{xy}\end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c}y^*\left(\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x} + \dfrac{\partial^2\theta_3}{\partial x^2}\right) - \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ y^*\left(\dfrac{\partial\theta_2}{\partial y} + \dfrac{\partial^2\theta_3}{\partial y^2}\right) - \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ y^*\left(\dfrac{\partial\theta_2}{\partial x} + \dfrac{\partial\theta_1}{\partial y} + 2\dfrac{\partial^2\theta_3}{\partial x\partial y}\right) - 2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{array}\right\}$$

۳-۳- معادلات تعادل

معادلات تعادل با استفاده از اصل هامیلتون به‌صورت رابطه (۱۴) که در آن U انرژی پتانسیل کرنشی، P کار نیروی خارجی و K انرژی جنبشی می‌باشد، استخراج می‌گردد.

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta K - (\delta U + \delta P)\right]dt = 0 \qquad (۱۴)$$

تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی به صورت رابطه (۱۵) تعریف می‌گردد و با جایگذاری روابط (۱۳) در آن معادله (۱۶)حاصل می‌گردد.

$$\begin{aligned}\delta U = \int_V (&\sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz} +\\ &\sigma_{xy}\delta\gamma_{xy} + \sigma_{yz}\delta\gamma_{yz})dxdydz\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

$$\begin{aligned}\delta U = \int_V \Big\{&\sigma_x\left[\delta\varepsilon^0_{xx} + z\delta\varepsilon^1_{xx} + \tan(mz)\delta\varepsilon^2_{xx}\right] +\\ &\sigma_y\left[\delta\varepsilon^0_{yy} + z\delta\varepsilon^1_{yy} + \tan(mz)\delta\varepsilon^2_{yy}\right] +\\ &\sigma_z\left[2m^2\sec^2(mz)\tan(mz)\delta\varepsilon^4_{zz}\right] +\\ &\sigma_{xz}\left[\delta\gamma^0_{xz} + m\sec^2(mz)\delta\gamma^3_{xz}\right] +\\ &\sigma_{xy}\left[\delta\gamma^0_{xy} + z\delta\gamma^1_{xy} + \tan(mz)\delta\gamma^2_{xy}\right] +\\ &\sigma_{yz}\left[\delta\gamma^0_{yz} + m\sec^2(mz)\delta\gamma^3_{yz}\right]\Big\}dxdydz\end{aligned} \qquad (۱۶)$$

همچنین منتجه‌های تنش به‌صورت رابطه (۱۷) تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\left[N_i, M_i, P_i\right] &= \sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_i\left[1, z, \tan(mz)\right]dz, \quad (i = x, y, xy)\\ (N_i) &= \sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_i(1)dz, \quad (i = yz, xz)\\ (Q_i) &= \sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_i(m\sec^2(mz))dz, \quad (i = yz, xz)\\ (R_i) &= \sum_{k=1}^{N}\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_i(2m^2\sec^2(mz)\tan(mz))\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

با استفاده از روابط (۱۷) و جایگذاری آن‌ها در رابطه (۱۶) و همچنین استفاده از روابط کرنش-جابجایی می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
\delta U = \int_{\Omega} \Bigg\{ & N_1 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + M_1 \left[y^* \left(\frac{\partial \delta\theta_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 \delta\theta_3}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} \right] + \\
& N_2 \frac{\partial \delta v}{\partial y} + P_1 \frac{\partial \delta\theta_1}{\partial x} + M_2 \left[y^* \left(\frac{\partial \delta\theta_2}{\partial y} + \frac{\partial^2 \delta\theta_3}{\partial y^2} \right) - \right. \\
& \left. \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \right] + P_2 \frac{\partial \delta\theta_2}{\partial y} + R_3 \delta\theta_3 + N_5 \Big[y^* \left(\delta\theta_1 \right) + \\
& \frac{\partial \delta\theta_3}{\partial x} \Big) \Big] + Q_5 \left(\delta\theta_1 + \frac{\partial \delta\theta_3}{\partial x} \right) + N_6 \left(\frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) + \\
& M_6 \left[y^* \left(\frac{\partial \delta\theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \delta\theta_1}{\partial y} + 2 \frac{\partial^2 \delta\theta_3}{\partial x \partial y} \right) - 2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \right] + \\
& P_6 \left(\frac{\partial \delta\theta_2}{\partial x} + \frac{\partial \delta\theta_1}{\partial y} \right) + N_4 y^* \left(\delta\theta_2 + \frac{\partial \delta\theta_3}{\partial y} \right) + \\
& Q_4 \left(\delta\theta_2 + \frac{\partial \delta\theta_3}{\partial y} \right) - q \left[\delta w + m \sec^2(mz) \delta\theta_3 \right] \Bigg\} dxdy
\end{aligned} \tag{۱۸}
$$

تغییرات کار نیروهای خارجی به‌واسطه بستر الاستیک دو پارامتری وینکلر-پاسترناک به‌صورت رابطه (۱۹) تعریف می‌گردد:

$$
\begin{aligned}
\delta P_{elas} = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a \Bigg\{ & K_w w \delta w + K_g \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial x} \right) \right. \\
& \left. + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \right] \Bigg\} dxdy
\end{aligned} \tag{۱۹}
$$

تغییرات انرژی جنبشی سیستم به‌صورت رابطه (۲۰) تعریف می‌شود:

$$
\delta K = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \int_0^b \int_0^a \rho \delta \left[\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} \right)^2 \right] dxdydz \tag{۲۰}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta K = \int_0^b \int_0^a \Bigg\{ & I_3 Y^2 \left(\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 \delta\theta_3}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta\theta_3}{\partial x \partial t} \right) - \\
& I_3 Y \left[\left(\frac{\partial^2 \delta\theta_3}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + \left(\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} \right) + \left(\frac{\partial^2 \delta\theta_3}{\partial y \partial t} \right. \right. \\
& \left. \left. \frac{\partial w}{\partial y \partial t} \right) + \left(\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial y \partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial y \partial t} \right) \right] + I_2 Y \left[\left(\frac{\partial \delta v}{\partial t} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial y \partial t} \right) + \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta\theta_3}{\partial y \partial t} \right) + \left(\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x \partial t} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta\theta_3}{\partial x \partial t} \right) \right] - \\
& I_2 \left[\left(\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} \right) + \left(\frac{\partial \delta v}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \right) + \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y \partial t} \right) \right] + I_3 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} + + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y \partial t} \right) + \\
& I_7 \left(\frac{\partial \theta_3}{\partial t} \frac{\partial \delta\theta_3}{\partial t} \right) + I_6 \left[\left(\frac{\partial \delta w}{\partial t} \frac{\partial \theta_3}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta\theta_3}{\partial t} \right) \right] + \\
& I_4 \left(\frac{\partial \delta u}{\partial t} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta\theta_1}{\partial t} + \frac{\partial \delta v}{\partial t} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta\theta_2}{\partial t} \right) - \\
& I_5 \left[\left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial y \partial t} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial t} \frac{\partial \delta\theta_2}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \delta\theta_1}{\partial t} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right) + \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial t} \right) \right] + I_5 Y \left[\left(\frac{\partial \delta\theta_1}{\partial t} \frac{\partial^2 \theta_3}{\partial x \partial t} \right) + \right. \\
& \left. \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial t} \frac{\partial^2 \delta\theta_3}{\partial x \partial t} \right) + \left(\frac{\partial^2 \delta\theta_3}{\partial y \partial t} \frac{\partial \theta_2}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial y \partial t} \frac{\partial \delta\theta_2}{\partial t} \right) \right] + \\
& I_8 \left[\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial t} \frac{\partial \delta\theta_1}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial \theta_2}{\partial t} \frac{\partial \delta\theta_2}{\partial t} \right) \right] + \\
& I_1 \left(\frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} \frac{\partial \delta w}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} \frac{\partial \delta v}{\partial t} \right) \Bigg\} dxdy
\end{aligned} \tag{۲۱}
$$

که در رابطه (۲۱):

$$
\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \\ \tan(mz) + zy \\ z(\tan(mz) + zy) \\ m \sec^2(mz) \\ m^2 \sec^4(mz) \\ \tan^2(mz) + 2zY \tan(mz) + z^2 Y^2 \end{Bmatrix} dz \tag{۲۲}
$$

با قرار دادن روابط (۱۸)، (۱۹) و (۲۱) در رابطه (۱۴) و استفاده از روش انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء برای کاهش مرتبه دادن، معادلات تعادل برای ورق مستطیلی تابعی تقویت‌شده با نانولوله‌های کربنی بر روی بستر الاستیک به‌صورت رابطه (۲۳) استخراج می‌گردد:

$$
\begin{aligned}
\delta u: \quad & \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial N_6}{\partial y} - I_2 Y \frac{\partial^3 \theta_3}{\partial x \partial t^2} + I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - I_4 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} - \\
& I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\
\delta v: \quad & \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial N_6}{\partial x} - I_2 Y \frac{\partial^3 \theta_3}{\partial y \partial t^2} + I_2 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} - I_4 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} - \\
& I_1 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \\
\delta w: \quad & \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_6}{\partial x \partial y} - I_3 Y \left(\frac{\partial^4 \theta_3}{\partial x^2 \partial t^2} + \right. \\
& \left. \frac{\partial^4 \theta_3}{\partial y^2 \partial t^2} \right) - I_2 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial t^2} \right) + I_6 \left(\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial t^2} \right) - \\
& I_3 \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) - I_5 \left(\frac{\partial^3 \theta_2}{\partial y \partial t^2} + \frac{\partial^3 \theta_1}{\partial x \partial t^2} \right) - \\
& I_1 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) - K_w w + K_g \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \\
\delta\theta_1: \quad & y^* \frac{\partial M_1}{\partial x} + \frac{\partial P_1}{\partial x} - y^* N_5 - Q_5 + y^* \frac{\partial M_6}{\partial y} + \frac{\partial P_6}{\partial y} \\
& - I_4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial t^2} - I_5 Y \frac{\partial^3 \theta_3}{\partial x \partial t^2} - I_8 \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial t^2} = 0 \\
\delta\theta_2: \quad & y^* \frac{\partial M_2}{\partial y} + \frac{\partial P_2}{\partial y} + y^* \frac{\partial M_6}{\partial x} + \frac{\partial P_6}{\partial x} - y^* N_4 - Q_4 \\
& - I_4 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + I_5 \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial t^2} - I_5 Y \frac{\partial^3 \theta_3}{\partial y \partial t^2} - I_8 \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial t^2} = 0 \\
\delta\theta_3: \quad & - y^* \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} - y^* \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} - R_3 + \frac{\partial Q_5}{\partial x} + \\
& y^* \frac{\partial N_5}{\partial x} - 2 y^* \frac{\partial^2 M_6}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q_4}{\partial y} + y^* \frac{\partial N_4}{\partial y} + \\
& I_3 Y^2 \left(\frac{\partial^4 \theta_3}{\partial y^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4 \theta_3}{\partial x^2 \partial t^2} \right) - I_3 Y \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \right. \\
& \left. \frac{\partial^4 w}{\partial y^2 \partial t^2} \right) + I_2 Y \left(\frac{\partial^3 v}{\partial y \partial t^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right) - I_7 \left(\frac{\partial^2 \theta_3}{\partial t^2} \right) - \\
& I_6 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) + I_5 Y \left(\frac{\partial^3 \theta_1}{\partial x \partial t^2} + \frac{\partial^3 \theta_2}{\partial y \partial t^2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{۲۳}
$$

۴- حل ناویر

برای حل معادلات تعادل از روش ناویر استفاده شده است طبق این روش توابع مربوط به متغیرهای مسئله به‌گونه‌ای باید حدس زده شوند که شرایط مرزی و معادله حاکم سیستم را برآورده کنند. با فرض شرایط تکیه‌گاهی ساده می‌توان مؤلفه‌های جابجایی را به‌صورت رابطه

(۲۴) در نظر گرفت[۹]. از قرار دادن رابطه (۲۴) در معادلات تعادل برحسب مؤلفه‌های جابجایی و ساده‌سازی، معادلات دیفرانسیل تعادل تبدیل به یک دستگاه معادلات جبری شده که با محاسبه مقادیر ویژه می‌توان فرکانس طبیعی سیستم را استخراج نمود.

$$\begin{aligned}
u(x,y) &= u\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)e^{i\omega t}\\
v(x,y) &= v\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)e^{i\omega t}\\
w(x,y) &= w\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)e^{i\omega t}\\
\theta_1(x,y) &= \theta_1\cos(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)e^{i\omega t}\\
\theta_2(x,y) &= \theta_2\sin(\alpha_m x)\cos(\beta_n y)e^{i\omega t}\\
\theta_3(x,y) &= \theta_3\sin(\alpha_m x)\sin(\beta_n y)e^{i\omega t}
\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

دستگاه جبری معادلات تعادل را می‌توان به شکل رابطه (۲۵) نوشت:

$$[K]\{x\} = \omega^2[M]\{x\} \qquad (۲۵)$$

که در آن [K] ماتریس سختی و [M] ماتریس جرم هستند. همچنین ω فرکانس‌های طبیعی سیستم می‌باشند که با محاسبه مقادیر ویژه استخراج می‌گردند و بردار $\{x\}$ به‌صورت $\{u, v, w, \theta_1, \theta_2, \theta_3\}^T$ تعریف می‌شود که به‌آن بردار ویژه نیز می‌گویند.

۵- بحث و نتایج

۵-۱- اعتبار سنجی

برای اعتبار سنجی کار حاضر مقایسه‌ای بین کار حاضر و دو مرجع انجام شده است. مرجع [۴] طبق تئوری الاستیسیته سه بعدی و مرجع [۱] طبق نظریه مرتبه دوم برشی می‌باشند. فرکانس طبیعی به ازای رابطه (۲۶) بی‌بعد شده است.

$$\Omega = \omega h\sqrt{\rho_c / E_c} \qquad (۲۶)$$

نتایج ارائه شده در جدول ۲ به ازای اعداد موج مختلف m,n در راستای طولی و عرضی ورق می‌باشد. ورق از جنس مدرج هدفمند بوده که تغییرات خواص آن به صورت رابطه (۲۷) می‌باشد:

$$\begin{aligned}
C_{ij}(z) &= C_{ij}^M + (C_{ij}^C - C_{ij}^M)(z/h+0.5)^p\\
\rho(z) &= \rho^M + (\rho^C - \rho^M)(z/h+0.5)^p
\end{aligned} \qquad (۲۷)$$

در رابطه (۲۷) P توان کسر حجمی از ماده تابعی، اندیس M خواص مربوط به فلز و اندیس C خواص مربوط به سرامیک می‌باشد و برای خواص مکانیکی مواد مختلف مقادیر به شرح زیر ارائه می‌گردند:

$$E^m = 70\,\mathrm{GPa},\ E^c = 380\,\mathrm{GPa},\ v = 0.3,$$
$$\rho^c = 3800\,(\mathrm{kg/m^3}),\ \rho^m = 2702\,(\mathrm{Kg/m^3})$$

جدول ۲- نتایج کار حاضر و مرجع [۴] و [۱]، b/h=2,a/b=1

P	مود (n, m)	مرجع [۴]	مرجع [۱]	کار حاضر
۰	(۱و۰)	۰/۵۵۷۲	۰/۵۵۷۲	۰/۵۵۱۱
	(۱و۱)	۰/۹۴۰۰	۰/۹۴۰۱	۰/۹۶۶۹
	(۲و۰)	۱/۵۰۸۹	۱/۵۰۹۰	۱/۵۴۰۳
	(۲و۱)	۱/۷۴۰۶	۱/۷۴۰۶	۱/۸۰۸۶
۰/۵	(۱و۰)	۰/۴۸۲۸	۰/۴۸۳۵	۰/۴۷۵۳
	(۱و۱)	۰/۸۲۲۳	۰/۸۲۳۳	۰/۸۳۸۵
	(۲و۰)	۱/۳۳۲۶	۱/۳۳۳۹	۱/۳۴۷۲
	(۲و۱)	۱/۵۴۱۰	۱/۵۴۲۵	۱/۵۸۴۸
۱	(۱و۰)	۰/۴۳۷۳	۰/۴۳۷۵	۰/۴۳۱۴
	(۱و۱)	۰/۷۴۷۵	۰/۷۴۷۷	۰/۷۶۱۱
	(۲و۰)	۱/۲۱۶۰	۱/۲۱۶۳	۱/۲۲۷۴
	(۲و۱)	۱/۴۰۷۴	۱/۴۰۷۸	۱/۴۴۴۷
۴	(۱و۰)	۰/۳۵۷۷	۰/۳۵۷۹	۰/۳۶۵۳
	(۱و۱)	۰/۵۹۹۴	۰/۵۹۹۷	۰/۶۳۶۱
	(۲و۰)	۰/۹۵۸۷	۰/۹۵۹۱	۱/۰۱۵۴
	(۲و۱)	۱/۱۰۳۶	۱/۱۰۴۰	۱/۱۹۱۷
۱۰	(۱و۰)	۰/۳۳۱۱	۰/۳۳۱۳	۰/۳۴۱۶
	(۱و۱)	۰/۵۴۵۸	۰/۵۴۶۰	۰/۵۹۰۳
	(۲و۰)	۰/۸۵۸۴	۰/۸۵۸۸	۰/۹۳۰۷
	(۲و۱)	۰/۹۸۴۳	۰/۹۸۴۷	۱/۰۸۹۶

همان‌طور که مشاهده می‌شود در مقایسه با مراجع [۱و۴] تطابق خوبی بین نتایج کار حاضر از نظریه مثلثاتی با نظریه‌های دیگر وجود دارد.

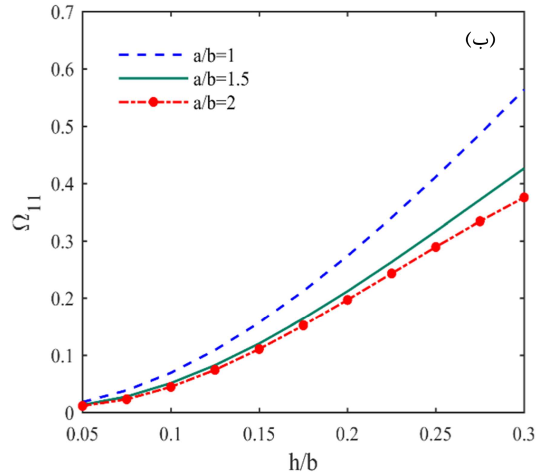
۵-۲- بررسی فرکانس طبیعی

در جدول ۳ همان‌گونه که مشاهده می‌شود مقدار فرکانس طبیعی ورق در همه حالات توزیع نانولوله‌ها با افزایش کسر حجمی نانولوله‌ها افزایش می‌یابد. به این علت می‌باشد که با افزایش کسر حجمی نانولوله‌ها مقدار نانولوله‌ها افزایش و در نتیجه سختی ورق نیز افزایش می‌یابد که منجر به افزایش فرکانس طبیعی ورق می‌گردد.

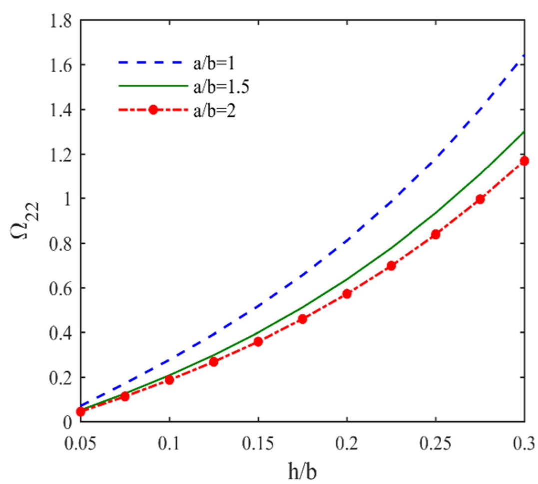
جدول ۳- فرکانس طبیعی به ازای $K_g = K_w = 0$، a/b=1, h/b=0/1

		نوع X	نوع O	نوع Λ	نوع UD
$V_{CNT} = 0.1$	Ω_{11}	۰/۰۶۴۹	۰/۰۷۲۱	۰/۰۷۲۱	۰/۰۷۲۱
	Ω_{22}	۰/۲۶۱۸	۰/۲۸۷۶	۰/۲۸۷۶	۰/۲۸۷۶
	Ω_{33}	۰/۵۲۸۸	۰/۵۷۳۲	۰/۵۷۳۲	۰/۵۷۳۲
$V_{CNT} = 0.15$	Ω_{11}	۰/۰۶۷۲	۰/۰۷۶۰	۰/۰۷۶۰	۰/۰۷۶۰
	Ω_{22}	۰/۲۷۰۹	۰/۳۰۲۱	۰/۳۰۲۱	۰/۳۰۲۱
	Ω_{33}	۰/۵۴۸۱	۰/۶۰۱۹	۰/۶۰۱۹	۰/۶۰۱۹
$V_{CNT} = 0.2$	Ω_{11}	۰/۰۶۸۵	۰/۰۷۸۲	۰/۰۷۸۲	۰/۰۷۸۲
	Ω_{22}	۰/۲۷۸۵	۰/۳۰۹۷	۰/۳۰۹۷	۰/۳۰۹۷
	Ω_{33}	۰/۵۵۸۸	۰/۶۱۷۳	۰/۶۱۷۳	۰/۶۱۷۳
$V_{CNT} = 0.3$	Ω_{11}	۰/۰۶۹۱	۰/۰۷۹۰	۰/۰۷۹۰	۰/۰۷۹۰
	Ω_{22}	۰/۲۷۸۰	۰/۳۱۲۱	۰/۳۱۲۱	۰/۳۱۲۱
	Ω_{33}	۰/۵۶۴۵	۰/۶۲۳۱	۰/۶۲۳۱	۰/۶۲۳۱

در شکل ۳ و ۴ تغییرات فرکانس طبیعی اول و دوم برحسب نسبت ضخامت به عرض به ازای نسبت‌های طول به عرض برای توزیع نوع Λ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت ضخامت به عرض فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد به این علت است که سفتی ماده بالا و به عبارتی خیز آن نیز کم می‌شود همچنین با افزایش نسبت طول به عرض فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد که به علت کاهش ضخامت ورق و درنتیجه کاهش سفتی یا افزایش الاستیسیته ورق می‌باشد.

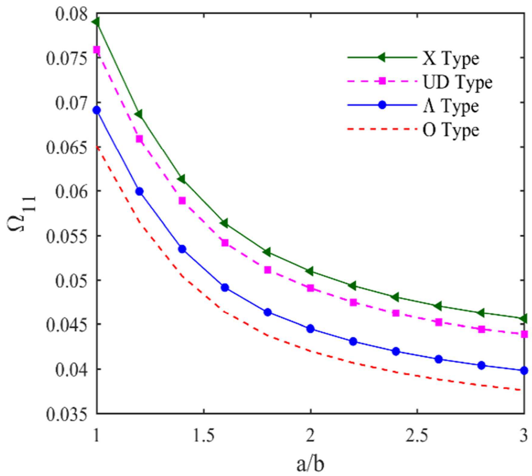


شکل ۳- تغییرات فرکانس طبیعی اول برحسب نسبت h/b به ازای نسبت‌های مختلف a/b، برای پروفیل نوع ۸



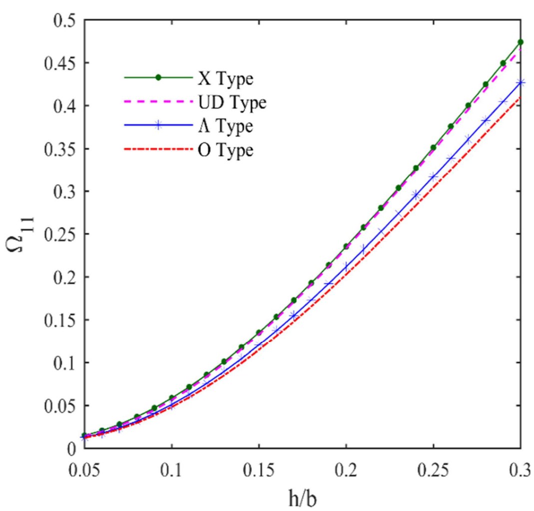
شکل ۴- تغییرات فرکانس طبیعی دوم برحسب نسبت h/b به ازای نسبت‌های مختلف a/b، برای پروفیل نوع ۸

در شکل ۵ تغییرات فرکانس طبیعی برحسب نسبت طول به عرض به ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی شامل نوع ۸، نوع X، نوع O و UD رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت طول به عرض فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد دلیل آن این است که ورق همانند تیر عمل می‌کند و سفتی آن کاهش می‌یابد.



شکل ۵- تغییرات فرکانس طبیعی برحسب نسبت a/b به ازای پروفیل‌های مختلف، h/b=0/1

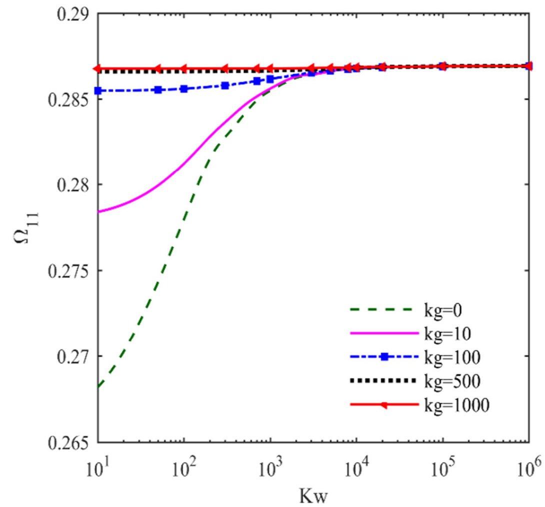
در شکل ۶ تغییرات فرکانس طبیعی برحسب نسبت ضخامت به عرض به ازای توزیع‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی شامل توزیع ۸، توزیعX، توزیعO و توزیع UD رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش نسبت ضخامت به‌عرض فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد که در هر دو حالت بالاترین بازه‌ی فرکانسی مربوط به توزیع X و پایین‌ترین مربوط به توزیع O می‌باشد. دلیل آن این است که توزیع X، یک توزیع متقارن الیاف نسبت به صفحه میانی است به‌طوری‌که هر دو سطح داخلی و خارجی جداره غنی از الیاف است ولی در توزیع O هر دو سطح داخلی و خارجی خالی از الیاف است. همچنین مقادیر فرکانسی توزیع UD بالاتر از توزیع ۸ می‌باشد.



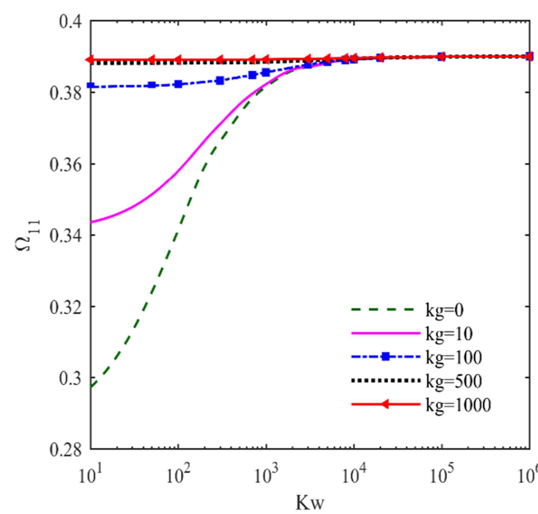
شکل ۶- تغییرات فرکانس طبیعی برحسب نسبت h/b به ازای پروفیل‌های مختلف، a/b=1/5

در شکل‌های ۷ و ۸ تغییرات فرکانس طبیعی به ازای ضرایب مختلف سختی تکیه‌گاه برای توزیع X و توزیع O رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش دو ضریب K_W و K_g فرکانس

طبیعی افزایش می‌یابد و به ازای $K_w > 10000$ و $K_g > 1000$ این تغییرات در مقادیر فرکانس طبیعی دیگر محسوس نخواهد بود. به این علت است که بستر در زیر ورق همانند فنر عمل کرده و با افزایش ضرایب فنری وبرشی بستر، سفتی ورق بالا می‌رود و منجر به افزایش فرکانس طبیعی ورق می‌گردد این افزایش تا به اندازه‌ی ادامه دارد که دیگر این تغییرات سفتی ورق تأثیری در افزایش فرکانس ندارد.



شکل ۷- تغییرات فرکانس طبیعی برحسب ضریب بستر الاستیک K_w ، به ازای K_g مختلف، برای پروفیل نوع O



شکل ۸- تغییرات فرکانس طبیعی برحسب ضریب بسترالاستیک K_w ، به ازای K_g مختلف، برای پروفیل نوع X

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، به بررسی ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی با تکیه گاه ساده بر بستر الاستیک و استفاده از تئوری جدید مرتبه بالای مثلثاتی پرداخته شده است. تئوری مرتبه بالای مثلثاتی در مقایسه با سایر نظریه‌های تغییر فرم برشی از دقت و سرعت حل قابل قبولی برخوردار است بطوریکه به عنوان مثال در نظریه مرتبه اول تغییر فرم برشی نیاز به ضریب تصحیح میباشد در حالیکه در این نظریه ضریب تصحیح حذف شده است. همچنین دقت این روش نسبت به تئوری مرتبه دوم بالاتر بوده و در مقایسه با نظریه مرتبه سوم و مرتبه بالای برشی که در این مقاله نیزجهت صحت سنجی استفاده شده است دارای دقت قابل قبولی میباشد. توجه به این نکته لازم است که بکار گیری شرایط مرزی متفاوت باعث تغییرات در فرکانس طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی میگردد به نحوی که در شرایط مرزی با تکیه گاه آزاد نتایج به حداقل خود و با تکیه گاه گیردار به بیشترین مقدار خود میرسد. در بقیه انواع ترکیبات تکیه گاه ها نتایج حد وسطی را دارا میباشند. همچنین هر ترکیبی از تکیه گاه ها در ورق نوع حل متفاوتی را دارد بطوریکه در این تحقیق تکیه گاه ساده و روش ناویر جهت حل معادلات مورد بررسی قرار گرفته است. صحت روابط استخراج شده و روش حل در نظر گرفته شده در مقایسه با نتایج موجود دقت و تطابق خوبی با نتایج کار حاضر را نشان می‌دهد. پارامترهای مختلف ابعادی ازجمله طول، عرض، ضخامت و همچنین پارامترهای مختلف مربوط به توزیع نانولوله‌های کربنی شامل پروفیل‌های U، O، X و ∧ در راستای ضخامت ورق، مورد بررسی و مطالعه قرارگرفته شده است که به‌طورکلی نتایج مهم زیر از آن‌ها برداشت می‌شود:

- با افزایش کسر حجمی نانولوله فرکانس طبیعی افزایش می‌یابد که بدلیل سختی و استحکام ورق میباشد.

- افزایش مقادیر فرکانس طبیعی به ازای افزایش نسبت ضخامت به عرض ورق (h/b) و کاهش نسبت طول به عرض ورق (a/b). این نتایج برای تمامی توزیع‌های نانولوله‌های کربنی ازجمله U، O، X و ∧ صادق می‌باشد چون به ترتیب سختی افزایش و کاهش می‌یابد.

- بالاترین مقادیر فرکانسی مربوط به توزیع X و پایین‌ترین مقادیر مربوط به توزیع O می‌باشد چون سطوح داخلی و خارجی نوع X غنی و نوع O خالی از الیاف می‌باشد.

- افزایش مقادیر فرکانس طبیعی به ازای افزایش ضرایب بستر الاستیک به‌طوری‌که به ازای $K_w > 10000$ و $K_g > 1000$ تغییرات در مقادیر فرکانس طبیعی بسیار کاهش‌یافته و محسوس نخواهد بود.

۷- مراجع

[1] Matsunaga H., Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory, Composite structures, Vol. 82, No. 4, pp. 499-512, 2008.

[2] Malekzadeh P., Three-dimensional free vibration analysis of thick functionally graded plates on elastic foundations, Composite Structures, Vol. 89, No. 3, pp. 367-373, 2009.

[3] Shen H.-S., Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, Composite Structures, Vol. 91, No. 1, pp. 9-19, 2009.

[4] Yas M., Aragh B. S., Free vibration analysis of continuous grading fiber reinforced plates on elastic foundation, International Journal of Engineering Science, Vol. 48, No. 12, pp. 1881-1895, 2010.

[5] Hosseini-Hashemi S., Es'Haghi M., Taher H. R. D., Fadaie M., Exact closed-form frequency equations for thick circular plates using a third-order shear deformation theory, Journal of Sound and Vibration, Vol. 329, No. 16, pp. 3382-3396, 2010.

[6] Z.-X. Wang, H.-S. Shen, Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite plates in thermal environments, Computational Materials Science, Vol. 50, No. 8, pp. 2319-2330, 2011.

[7] Hedayati H., Aragh B. S., Influence of graded agglomerated CNTs on vibration of CNT-reinforced annular sectorial plates resting on Pasternak foundation, Applied Mathematics and Computation, Vol. 218, No. 17, pp. 8715-8735, 2012.

[8] Zhu P., Lei Z., Liew K. M., Static and free vibration analyses of carbon nanotube-reinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory, Composite Structures, Vol. 94, No. 4, pp. 1450-1460, 2012.

[9] Mantari J., Soares C. G., A novel higher-order shear deformation theory with stretching effect for functionally graded plates, Composites Part B: Engineering, Vol. 45, No. 1, pp. 268-281, 2013.

[10] Heshmati M., Yas M., Dynamic analysis of functionally graded multi-walled carbon nanotube-polystyrene nanocomposite beams subjected to multi-moving loads, Materials & Design, Vol. 49, pp. 894-904, 2013.

[11] Alibeigloo A., Liew K., Thermoelastic analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plate using theory of elasticity, Composite Structures, Vol. 106, pp. 873-881, 2013.

[12] Lei Z., Liew K., Yu J., Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method in thermal environment, Composite Structures, Vol. 106, pp. 128-138, 2013.

[13] Lei Z., Liew K. M., Yu J., Buckling analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates using the element-free kp-Ritz method, Composite Structures, Vol. 98, pp. 160-168, 2013.

[14] Jam J., Pourasghar A., Kamarian S., Effect of the aspect ratio and waviness of carbon nanotubes on the vibrational behavior of functionally graded nanocomposite cylindrical panels, Polymer Composites, Vol. 33, No. 11, pp. 2036-2044, 2012.

[15] Jam J., Pourasghar A., Maleki S., Characterizing elastic properties of carbon nanotube-based composites by using an equivalent fiber, Polymer Composites, Vol. 34, No. 2, pp. 241-251, 2013.

[16] Fallah A., Aghdam M., Kargarnovin M., Free vibration analysis of moderately thick functionally graded plates on elastic foundation using the extended Kantorovich method, Archive of Applied Mechanics, pp. 1-15, 2013.

[17] Han Y., Elliott J., Molecular dynamics simulations of the elastic properties of polymer/carbon nanotube composites, Computational Materials Science, Vol. 39, No. 2, pp. 315-323, 2007.