

## تحلیل حرارتی - مکانیکی استوانه‌های جدار ضخیم با پوشش داخلی از جنس مواد تابعی با در نظر گرفتن تنش‌های پسماند حرارتی

رحمت الله قاجار      استاد دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی مکانیک،  
آزمایشگاه خواص مکانیکی مواد  
سعید مهربانی      دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، دانشکده مهندسی  
مکانیک، آزمایشگاه خواص مکانیکی مواد

### چکیده

تحلیل حرارتی- مکانیکی استوانه جدار ضخیم با پوشش داخلی از جنس مواد تابعی تحت بار حرارتی و مکانیکی با در نظر گرفتن تنش‌های پسماند حرارتی انجام می‌شود. با استفاده از مدل استوانه چندلایه، با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی در محل اتصال لایه‌ها و شرایط تعادل در راستای محور استوانه، مقادیر نیروی محوری هر لایه و فشار در محل اتصال لایه‌ها و در نتیجه توزیع تنش‌های پسماند حرارتی در استوانه و پوشش بدست می‌آیند. به منظور تحلیل ترموالاستیسیته با استفاده از مدل استوانه جدار ضخیم چند لایه، معادلات انتقال حرارت و ناویر برای هر لایه بصورت جداگانه حل و میدان تنش‌های حرارتی گذرا در استوانه و پوشش بر حسب زمان بدست می‌آیند.

کلمات کلیدی: استوانه پوشش‌دار، مواد تابعی، ترموالاستیسیته، تنش‌های حرارتی گذرا، تنش‌های پسماند حرارتی

## Thermo-Mechanical Analysis of Thick Cylinders with Internal Functionally Graded Coating with Consideration of Thermal Residual Stresses

R. Ghajar      Faculty of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of  
Technology, Mechanical Properties Research Laboratory (MPRL)  
S. Mehrabiani      M.S. Student of Mechanical Engineering, K. N. Toosi University of  
Technology, Mechanical Properties Research Laboratory (MPRL)

### Abstract

Thermo-mechanical analysis of a thick-walled cylinder with internal functionally graded (FGM) coating under thermal and mechanical loading along with the consideration of the effect of thermal residual stresses is carried out. Using multilayer assumption for the coating, and applying the continuity and equilibrium conditions at the interfaces, the axial forces and pressures at the interfaces and thermal residual stress in the cylinder and its coating are obtained. In order to perform a thermoelastic analysis using multilayer assumption, heat conduction and Navier equations are solved at each layer, and the transient thermal stress distributions in the cylinder and its coating are obtained.

**Key words:** Cylinder with Coating, Functionally Graded Material (FGM), Thermoelasticity, Transient Thermal Stresses, Thermal Residual Stresses

## ۱- مقدمه

قطعات صنعتی بسیاری نظیر قطعات موتورهای احتراق داخلی، قطعات توربین‌های گازی، تجهیزات فضایی، نیروگاه‌های هسته‌ای و ... وجود دارند که تحت شرایط دمایی بالا و گرادیان‌های شدید دمایی قرار دارند. برای تحمل این شرایط، در کنار توسعه استفاده از آلیاژها و سوپراآلیاژهای مقاوم به حرارت، استفاده از پوشش‌های محافظ حرارتی<sup>۱</sup> نیز یکی از اصلی‌ترین راهکارهای افزایش راندمان و عمر کاری قطعات است. اما استفاده از پوشش‌های محافظ همگن، عمدتاً با مشکل عمده جدایش پوشش از فلز پایه مواجه هستند.

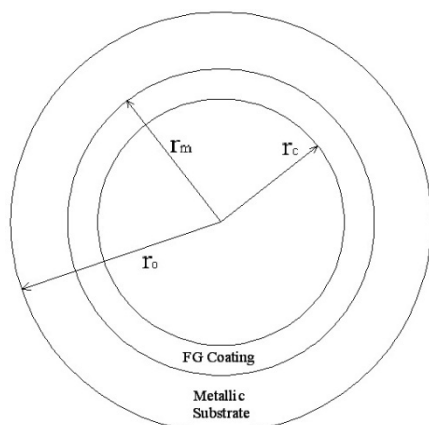
وجود ناپیوستگی در تنش‌های حرارتی که در محل اتصال پوشش به فلز پایه وجود می‌آید، ناشی از اختلاف خواص حرارتی و مکانیکی پوشش و فلز پایه است که ممکن است که به جدایی پوشش از فلز پایه منجر شود. بهترین راهکار، استفاده از پوشش‌هایی از جنس مواد تابعی است. این مواد، ناهمگن هستند و خواص حرارتی و مکانیکی در آن‌ها به طور پیوسته در یک یا چند جهت تغییر می‌کنند. عموماً سطحی که در معرض دمای بالا قرار دارد و باید مقاوم در برابر حرارت و خوردگی باشد، سرامیک و سطح دیگر که باید دارای استحکام ساختاری باشد از فلز است. اختلاف خواص مکانیکی و حرارتی پوشش و فلز پایه علاوه بر ایجاد ناپیوستگی در توزیع تنش، منجر به ایجاد تنش‌های پسماند حرارتی در فرایند پوشش‌دهی نیز می‌شود.

تحقیقات متنوعی بر روی تحلیل حرارتی پوشش‌های محافظ حرارتی انجام شده است. به منظور بررسی کارایی ایزوله‌سازی پوشش‌های از جنس مواد تابعی، پژوهشی تجربی بر روی یک دیسک در سال ۲۰۰۵ انجام گرفته و تاثیر ضخامت پوشش بر روی جدایش پوشش و ترک‌های ایجاد شده در آن بررسی شده است [۱]. توسط روش تفاضلات محدود، پاسخ گذرای یک استوانه دولایه را بصورت یک‌بعدی [۲] و سه بعدی [۳] تحت بارگذاری حرارتی بدست آمده است. توسط بسط توابع دما و جایجایی توسط سری‌های توانی، تحلیل حرارتی و مکانیکی استوانه‌ای جدار ضخیم ساخته شده از مواد تابعی توسط شائو و همکاران [۴] انجام شده است. تحلیل حرارتی لوله تفنگ با پوشش همگن تحت شار داخلی نیز توسط لی و همکاران [۵] انجام شده و توزیع دما و ضریب انتقال حرارت جایجایی در سال ۲۰۰۹ بر روی پوشش بدست آمده است. تحقیقات متنوعی نیز به منظور تحلیل حرارتی استوانه‌های تابعی توسط جباری و همکاران انجام شده است [۶ و ۷]. حسینی و همکاران نیز تحلیل حرارتی - مکانیکی استوانه‌های جدار ضخیم تابعی را تحت

بارگذاری حرارتی و مکانیکی انجام داده‌اند [۸ و ۹]. در سال ۲۰۰۰ تأثیر یک لایه میانی اکسیدی بر روی تنش‌های پسماند حرارتی با استفاده از یک مدل دایره‌ای سه لایه، توسط سوئه و همکاران [۱۰] بررسی شده است. ژانگ و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۰۷ با در نظر گرفتن یک صفحه تخت، تأثیر مثبت یک لایه میانی از جنس مواد تابعی بین پوشش همگن و فلز پایه در کاهش تنش‌های پسماند حرارتی را اثبات کرده‌اند. در سال ۲۰۱۰ نیز بوچافا و همکاران [۱۲] مدلی تحلیلی برای محاسبه تنش‌های پسماند حرارتی یک صفحه ساخته شده از مواد تابعی را ارائه داده‌اند و ثابت کرده‌اند که تأثیر خواص متغیر با دمای الاستیک و ضریب انبساط حرارتی بر روی تنش پسماند ناچیز است. با توجه به بررسی‌های انجام شده، تحقیقاتی بر روی تحلیل حرارتی استوانه‌های پوشش‌دار از جنس مواد تابعی مشاهده نشده است ضمن اینکه تأثیر تنش‌های پسماند حرارتی ناشی از فرایند پوشش‌دهی نیز بر روی توزیع تنش‌های اعمالی انجام نشده است. در این مقاله با استفاده از مدل استوانه‌های چندلایه‌ای، توزیع تنش پسماند حرارتی و تأثیر آن بر روی توزیع تنش‌های حرارتی بررسی شده است.

## ۲- معرفی مسئله و فرمول‌بندی

استوانه‌ای جدار ضخیم با طول نامحدود با شعاع داخلی  $r_i$  و شعاع خارجی  $r_o$  با پوششی از جنس مواد تابعی بر روی سطح داخلی مطابق شکل ۱ فرض می‌شود. شعاع داخلی پوشش نیز  $r_i$  در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۱- استوانه با پوشش داخلی از جنس مواد تابعی

خواص پوشش بجز ضریب پواسون بصورت پیوسته از سطح داخلی تا سطح خارجی آن تغییر می‌کند. تغییرات خواص

<sup>1</sup> Thermal Barrier coating

$$F_i = \pi(r_{i+1}^2 - r_i^2) \times (\sigma_{zz})_i; \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

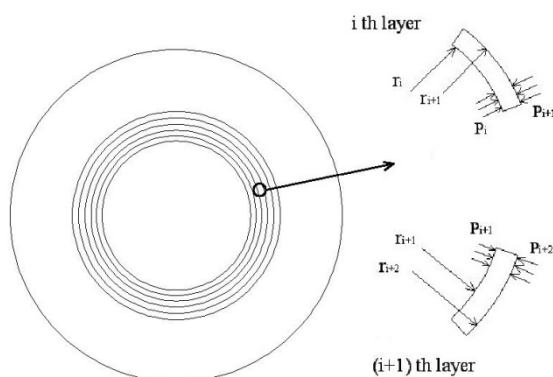
$$F_s = \pi(r_{n+2}^2 - r_{n+1}^2) \times (\sigma_{zz})_s \quad (6)$$

که  $(\sigma_{zz})_i$  تنش محوری در لایه  $i$  ام و  $(\sigma_{zz})_s$  تنش محوری در فلز پایه است. برای هر لایه از پوشش می توان از روابط استوانه های جدار ضخیم استفاده کرد. با توجه به این که در حین فرایند پوشش دهی فشار داخلی و خارجی در استوانه وجود ندارد و با در نظر گرفتن شرایط تقارن محوری، تنش های حرارتی در هر لایه بصورت زیر بدست می آیند:

$$(\sigma_{rr})_i = \begin{cases} \frac{r_1^2 r_2^2 (P_2)}{(r_2^2 - r_1^2) r^2} + \frac{-r_2^2 P_2}{r_2^2 - r_1^2} & \text{inner layer} \\ \frac{r_i^2 r_{i+1}^2 (P_{i+1} - P_i)}{(r_{i+1}^2 - r_i^2) r^2} + \frac{r_i^2 P_i - r_{i+1}^2 P_{i+1}}{r_{i+1}^2 - r_i^2} & i = 2, \dots, n \\ \frac{r_{n+1}^2 r_{n+2}^2 (-P_{n+1})}{(r_{n+2}^2 - r_{n+1}^2) r^2} + \frac{r_{n+1}^2 P_{n+1}}{r_{n+2}^2 - r_{n+1}^2} & \text{outer layer} \end{cases} \quad (7)$$

$$(\sigma_{\theta\theta})_i = \begin{cases} -\frac{r_1^2 r_2^2 (P_2)}{(r_2^2 - r_1^2) r^2} + \frac{-r_2^2 P_2}{r_2^2 - r_1^2} & \text{inner layer} \\ -\frac{r_i^2 r_{i+1}^2 (P_{i+1} - P_i)}{(r_{i+1}^2 - r_i^2) r^2} + \frac{r_i^2 P_i - r_{i+1}^2 P_{i+1}}{r_{i+1}^2 - r_i^2} & i = 2, \dots, n \\ -\frac{r_{n+1}^2 r_{n+2}^2 (-P_{n+1})}{(r_{n+2}^2 - r_{n+1}^2) r^2} + \frac{r_{n+1}^2 P_{n+1}}{r_{n+2}^2 - r_{n+1}^2} & \text{outer layer} \end{cases} \quad (8)$$

در روابط بالا  $i$  بیانگر شماره لایه پوشش است که تحت فشار داخلی  $-P_i$  و فشار خارجی  $-P_{i+1}$  قرار دارد و بنابراین مطابق شکل ۲،  $P_i$ ، بیانگر فشار در شعاع  $r_i$  است.



شکل ۲- استفاده از مدل استوانه چندلایه ای برای مدلسازی پوشش تابعی

پوشش، بصورت مدل کسر حجمی تعریف می شود که از طریق رابطه زیر و بر حسب مختصه شعاعی  $r$ ، قابل بیان است:

$$Pr = Pr_c + (Pr_m - Pr_c) \left( \frac{r - r_c}{r_s - r_c} \right)^m \quad (1)$$

که در آن زیر نویس  $c$  و  $m$  به ترتیب مربوط به خواص سرامیک و فلز و  $Pr$  نیز یک خاصیت ماده است.  $m$  توان تغییرات خواص است که عددی مثبت بین صفر و بینهایت می باشد. خواص ترمو-الاستیک پوشش شامل مدول الاستیسیته، ضریب هدایت حرارتی، ضریب انبساط حرارتی و ضریب پخش حرارتی می باشند که مطابق رابطه ۱ از خواص سرامیکی بر روی سطح داخلی تا خواص فلزی بر روی سطح خارجی پوشش تغییر می کنند.

به منظور شبیه سازی استوانه از مدل استوانه جدار ضخیم چندلایه ای استفاده می شود، بطوری که پوشش به  $n$  لایه همگن (تعدادی دلخواه) تقسیم می شود. بنابراین خواص هر لایه را می توان از طریق رابطه زیر بدست آورد:

$$Pr_i = Pr_c + (Pr_m - Pr_c) \left( \frac{r_i - r_c}{r_s - r_c} \right)^m \quad (2)$$

که در آن  $r_i$  از رابطه زیر بدست می آید:

$$r_i = r_c + (i - 1) \left( \frac{r_s - r_c}{n} \right) \quad (3)$$

به منظور مدلسازی تنش های پسماند حرارتی ناشی از فرایند پوشش دهی، فرض می شود که فرایند پوشش دهی در دمای  $T_c$  انجام شده و در این دما، در استوانه و پوشش تنشی وجود ندارد. با سرد شدن استوانه و پوشش تا دمای محیط ( $T_0$ )، به علت اختلاف خواص حرارتی و مکانیکی استوانه و پوشش، تنش هایی به عنوان تنش های پسماند حرارتی ایجاد می شود. با توجه به استفاده از مدل استوانه چند لایه ای و تقسیم پوشش به  $n$  (مقداری دلخواه) لایه همگن، استوانه از  $n+1$  لایه تشکیل خواهد شد. تعداد لایه مورد نیاز برای شبیه سازی پوشش، به شدت تحت تأثیر ضخامت و اختلاف خواص فلزی و سرامیکی پوشش است، به طوری که با زیاد شدن ضخامت پوشش و اختلاف خواص، تعداد لایه های مورد نیاز افزایش خواهد یافت. با استفاده از مدل استوانه چند لایه ای، برای فراهم کردن شرایط تعادل، مجموع نیروهای طولی در استوانه و پوشش برابر صفر در نظر گرفته می شود که همان شرایط کرنش صفحه ای تعمیم یافته است [۱۳]:

$$\sum_{i=1}^n F_i + F_s = 0; \quad i = 1, \dots, n \quad (4)$$

$F_i$  و  $F_s$  به ترتیب نیروی محوری در لایه  $i$  ام از پوشش و فلز پایه هستند که توسط روابط زیر بیان می شوند:

که معادلات انتقال حرارت تحت شرایط شبه استاتیکی حل شوند. با توجه به استفاده از مدل استوانه چند لایه‌ای معادله توزیع دما برای هر لایه بصورت زیر است:

$$\frac{\partial^2 T_i(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial r} = \frac{1}{\kappa_i} \frac{\partial T_i(r, t)}{\partial t}; \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (12)$$

که در آن  $T_i(r, t)$  تابع توزیع دما و  $\kappa_i$  ضریب پخش حرارتی مربوط به لایه  $i$  ام و  $t$  نیز معرف زمان می‌باشند. شرایط مرزی حرارتی برای استوانه نیز در حالت کلی زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$T_i(r, 0) = 0; \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (13)$$

$$C_{11} \frac{\partial T_1(r, t)}{\partial r} + C_{12} T_1(r, t) = C_{13} T_{\infty 1} \quad \text{at } r = r_c \quad (14)$$

$$T_{i-1}(r_i, t) = T_i(r_i, t); \quad i = 2, \dots, n + 1 \quad (15)$$

$$k_{i-1} \frac{\partial T_{i-1}(r_i, t)}{\partial r} = k_i \frac{\partial T_i(r_i, t)}{\partial r}; \quad i = 2, \dots, n + 1 \quad (16)$$

$$C_{21} \frac{\partial T_{n+1}(r, t)}{\partial r} + C_{22} T_{n+1}(r, t) = C_{23} T_{\infty 2}; \quad (17) \\ \text{at } r = r_o$$

که در آن  $T_{\infty 1}$  و  $T_{\infty 2}$  نیز دمای محیط در داخل و خارج استوانه و  $k_i$  ضریب هدایت حرارتی لایه  $i$  ام است. با انتخاب مناسب ضرایب  $C_{ij}$  می‌توان شرایط مرزی دما ثابت، شار معین و انتقال حرارت جابجایی را مدلسازی کرد. برای مثال اگر  $C_{11}$ ، ضریب هدایت حرارتی خاصیت سرامیکی پوشش و  $C_{12}$  و  $C_{13}$  ضریب انتقال حرارت جابجایی بر روی سطح داخلی پوشش در نظر گرفته شوند، شرایط مرزی بیانگر انتقال حرارت جابجایی بر روی سطح داخلی پوشش است؛ و یا اگر  $C_{11}$  صفر باشد، می‌توان با انتخاب اعداد مناسب برای  $C_{12}$  و  $C_{13}$ ، شرط مرزی دما ثابت را بر روی مرز داخلی پوشش اعمال کرد. با توجه به استفاده از مدل استوانه چندلایه‌ای و فرض اتصال کامل بین هر لایه، مقادیر دما و شار حرارتی بین هر لایه مساوی خواهند بود. با استفاده از تبدیل لاپلاس نسبت به متغیر زمان، معادله انتقال حرارت و شرایط مرزی به صورت زیر تبدیل می‌شوند:

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial r} = \frac{s}{\kappa_i} \bar{T}_i; \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (18)$$

$$C_{11} \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial r} + C_{12} \bar{T}_1 = \frac{C_{13} T_{\infty 1}}{s}; \quad \text{at } r = r_c \quad (19)$$

$$\bar{T}_{i-1} = \bar{T}_i; \quad \text{at } r = r_i \quad i = 2, \dots, n + 1 \quad (20)$$

$$k_{i-1} \frac{\partial \bar{T}_{i-1}}{\partial r} = k_i \frac{\partial \bar{T}_i}{\partial r}; \quad \text{at } r = r_i \quad i = 2, \dots, n + 1 \quad (21)$$

شرایط پیوستگی بین لایه‌های پوشش ایجاب می‌کند که کرنش‌های محیطی و محوری در محل تماس بین لایه‌ها برابر باشند که منجر به روابط زیر می‌گردند:

$$F_i \left( \frac{1}{E_i \pi (r_{i+1}^2 - r_i^2)} \right) + F_{i+1} \left( \frac{-1}{E_{i+1} \pi (r_{i+2}^2 - r_{i+1}^2)} \right) + P_i \left( \frac{-2v_i r_i^2}{E_i (r_{i+1}^2 - r_i^2)} \right) + P_{i+1} \left( \frac{2v_{i+1} r_{i+1}^2}{E_i (r_{i+1}^2 - r_i^2)} \right) + \frac{2v_{i+1} r_{i+1}^2}{E_{i+1} (r_{i+2}^2 - r_{i+1}^2)} + P_{i+2} \left( \frac{-2v_{i+1} r_{i+2}^2}{E_{i+1} (r_{i+2}^2 - r_{i+1}^2)} \right) + (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \Delta T = 0; \quad i = 1, \dots, n \quad (9)$$

$$F_i \left( \frac{-v_i}{E_i \pi (r_{i+1}^2 - r_i^2)} \right) + F_{i+1} \left( \frac{v_{i+1}}{E_{i+1} \pi (r_{i+2}^2 - r_{i+1}^2)} \right) + P_i \left( \frac{2r_i^2}{E_i (r_{i+1}^2 - r_i^2)} \right) + P_{i+1} \left( \frac{-(r_{i+1}^2 + r_i^2)}{E_i (r_{i+1}^2 - r_i^2)} \right) - \frac{(r_{i+2}^2 + r_{i+1}^2)}{E_{i+1} (r_{i+2}^2 - r_{i+1}^2)} + \frac{v_i}{E_i} - \frac{v_{i+1}}{E_{i+1}} + P_{i+2} \left( \frac{2r_{i+2}^2}{E_{i+1} (r_{i+2}^2 - r_{i+1}^2)} \right) + (\alpha_i - \alpha_{i+1}) \Delta T = 0; \quad i = 1, \dots, n \quad (10)$$

که  $E_i$ ،  $\alpha_i$  و  $v_i$  به ترتیب مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی و ضریب پواسون لایه  $i$  ام و میزان تغییرات دمایی از دمای پوشش‌دهی تا دمای محیط است. همانطور که مشخص شد، با فرض اینکه  $n$  تعداد لایه‌های پوشش باشد، به تعداد  $n + 1$  نیروی محوری  $F_i$  مجهول، و به تعداد سطح تماس یعنی  $n$  فشار مجهول  $P_i$  داریم، بنابراین تعداد مجهولات برابر  $2n + 1$  است که برابر با تعداد رابطه‌های موجود است. فرم ماتریسی معادلات را نیز می‌توان به صورت معادله ۱۱ نمایش داد:

$$[f_{ij}] \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \\ F_{n+1} \\ P_2 \\ \vdots \\ P_n \\ P_{n+1} \end{bmatrix} = \Delta T \begin{bmatrix} (\alpha_2 - \alpha_1) \\ (\alpha_3 - \alpha_2) \\ \vdots \\ (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ (\alpha_2 - \alpha_1) \\ (\alpha_3 - \alpha_2) \\ \vdots \\ (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

با جایگذاری مقادیر  $F_i$  و  $P_i$  در روابط ۵ الی ۸، توزیع تنش‌های پسماند حرارتی در استوانه و پوشش بدست خواهد آمد. به منظور بدست آوردن توزیع تنش‌های حرارتی گذرا در استوانه و پوشش تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی، لازم است

$$[b_{ij}] \begin{bmatrix} A'_1 \\ B'_1 \\ A'_2 \\ B'_2 \\ \vdots \\ A'_{n+1} \\ B'_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{2n+2} \end{bmatrix} \quad (28)$$

معادله ناویر برای هر لایه از استوانه‌ها بصورت زیر بدست تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u_i(r,t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_i(r,t)}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_i(r,t) - \frac{1+v}{1-v} \alpha(r) \frac{\partial T_i(r,t)}{\partial r} = 0; \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (29)$$

با توجه اینکه رابطه بالا یک معادله دیفرانسیل مرتبه دو است، دارای جواب عمومی زیر برای هر لایه همگن خواهد بود:

$$u_i(r,t) = \frac{(1+v_i)}{E_i} \left\{ \frac{\alpha_i E_i}{(1-v_i)r} \int_{r_i}^r (rT(r,t)) dr + (1-2v_i)C_i r - \frac{D_i}{r} \right\}; \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (30)$$

برای بدست آوردن ضرایب مجهول  $C_i$  و  $D_i$  نیز شرایط مرزی کلی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\sigma_{rr} = -P_{in} \quad \text{at } r = r_c \quad (31)$$

$$u_{i-1}(r,t) = u_i(r,t) \quad \text{at } r = r_i \quad i = 2, \dots, n+1 \quad (32)$$

$$\sigma_{rr_{i-1}}(r,t) = \sigma_{rr_i}(r,t) \quad \text{at } r = r_i \quad i = 2, \dots, n+1 \quad (33)$$

$$\sigma_{rr} = -P_{out} \quad \text{at } r = r_o \quad (34)$$

در فصل مشترک لایه‌ها جابجایی و تنش شعاعی برابر است.  $P_{in}$  و  $P_{out}$  به ترتیب مقادیر فشار در داخل و خارج استوانه و نوعی بار مکانیکی به شمار می‌رود. با توجه به تابع جابجایی شعاعی، توابع توزیع تنش نیز در حالت کرنش صفحه‌ای، از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\sigma_{rr_i}(r,t) = \frac{-\alpha_i E_i}{(1-v_i)} \int_{r_i}^r (rT_i(r,t)) dr + C_i + \frac{D_i}{r^2}; \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (35)$$

$$\sigma_{\theta\theta_i}(r,t) = \frac{\alpha_i E_i}{(1-v_i)} \int_{r_i}^r (rT_i(r,t)) dr + C_i - \frac{D_i}{r^2} - \frac{\alpha_i E_i}{(1-v_i)} T_i(r,t); \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (36)$$

$$C_{21} \frac{\partial \bar{T}_{n+1}}{\partial r} + C_{22} \bar{T}_{n+1} = \frac{C_{23} T_{\infty 2}}{s}; \quad \text{at } r = r_o \quad (22)$$

تبدیل لاپلاس نیز بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{T}_i(r,s) = \int_0^\infty T_i(r,t) e^{-st} dt \quad (23)$$

جواب عمومی معادله انتقال حرارت، بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{T}_i(r,s) = \frac{\bar{A}_i J_0(\beta_i \omega r) + \bar{B}_i Y_0(\beta_i \omega r)}{s \Delta}; \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (24)$$

$$\omega^2 = -s, \quad \beta_i^2 = \frac{1}{\kappa_i} \quad (25)$$

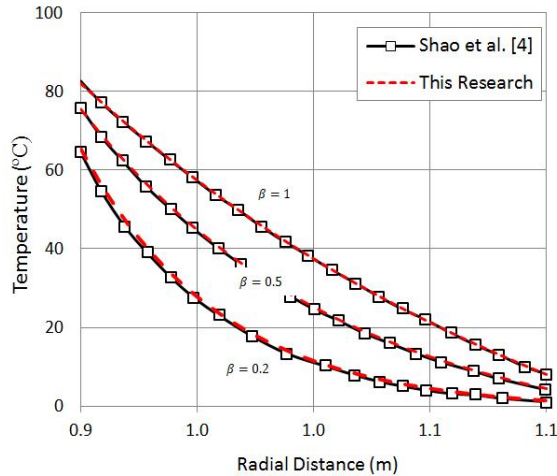
$J_0(\beta_i \omega r)$  تابع بسل نوع اول از مرتبه صفر،  $Y_0(\beta_i \omega r)$  تابع بسل نوع دوم از مرتبه صفر و ضرایب  $\bar{A}_i = A_i(s\Delta)$  و  $\bar{B}_i = B_i(s\Delta)$  نیز با توجه به شرایط مرزی تعیین خواهند شد.  $\Delta$  دترمینان ماتریس ضرایب مربوط به شرایط مرزی، رابطه (۲۶)، است. با جایگذاری معادله دما در شرایط مرزی، دستگاه معادلاتی برای بدست آوردن ضرایب مجهول  $A_i$  و  $B_i$  بدست خواهد آمد:

$$[a_{ij}] \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \\ \vdots \\ A_{n+1} \\ B_{n+1} \end{bmatrix} = \frac{1}{s} \begin{bmatrix} c_{11} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{2n+2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

به منظور بدست آوردن وارون تبدیل لاپلاس، از تئوری باقیمانده‌ها استفاده می‌شود و بنابراین رابطه توزیع دمای گذرا بصورت زیر قابل حصول است:

$$T_i(r,t) = A'_i + B'_i \ln r + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2e^{-\omega_j^2 t}}{\omega_j \Delta'_j(\omega_j)} \{ \bar{A}_i(\omega_j) J_0(\beta_i \omega_j r) + \bar{B}_i(\omega_j) Y_0(\beta_i \omega_j r) \}; \quad i = 1, \dots, n+1 \quad (27)$$

که  $\omega_j$  ریشه‌های مثبت  $\Delta = 0$  است و ضرایب  $A'_i$  و  $B'_i$  از حل دستگاه معادلات مربوط به شرایط مرزی حالت پایدار، مطابق رابطه ۲۸ بدست خواهند آمد:



شکل ۳- توزیع دما در طول ضخامت استوانه برای مقادیر مختلف  $\beta$

همانطور که ملاحظه می‌شود تطابق بسیار خوبی بین نتایج این تحقیق با نتایج مرجع [۴] وجود دارد.

در این تحقیق، استوانه‌ای فلزی و جدارضخیم با پوشش داخلی از جنس مواد تابعی را تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی در نظر می‌گیریم. جنس استوانه فلزی NiCrAlY است و سطح داخلی پوشش نیز دارای خاصیت سرامیکی  $Cr_2O_3$  می‌باشد که خواص آن با استفاده از مدل کسر حجمی، به خواص فلزی مربوط به NiCrAlY در سطح خارجی خود می‌رسد. شعاع داخلی پوشش ۴۲٫۵ میلی‌متر، شعاع خارجی استوانه ۴۸٫۵ میلی‌متر و ضخامت پوشش نیز ۰٫۶ میلی‌متر است. خواص مورد استفاده در استوانه فلزی و پوشش تابعی مطابق جدول ۱ می‌باشد:

جدول ۱- خواص فلزی و سرامیکی پوشش تابعی [۱۵]

NiCrAlY (Metal)	$Cr_2O_3$ (Ceramic)	خواص
۵٫۵	۵	چگالی ( $gr/cm^3$ )
۱۰	۲٫۶	ضریب هدایت حرارتی (W/mK)
۰٫۴۵	۰٫۵۹	ظرفیت گرمایی (kJ/Kg K)
۱۹۵	۱۱۰	مدول الاستیسیته (GPa)
$14 \times 10^{-6}$	$7.4 \times 10^{-6}$	ضریب انبساط حرارتی (1/K)
۰٫۳۱	۰٫۲۱	ضریب پواسون
$4.04 \times 10^{-6}$	$0.881 \times 10^{-6}$	ضریب پخش حرارتی ( $m^2/s$ )

سطح داخلی و خارجی استوانه از دمای صفر ناگهان به ترتیب به  $300^\circ C$  و  $80^\circ C$  می‌رسد. فشار داخلی ۶۰ بار و فشار خارجی صفر در نظر گرفته می‌شود. با توجه به این که پوشش به روش پاشش پلاسما ایجاد می‌شود، اختلاف دمای فرایند پوشش‌دهی و دمای محیط ( $\Delta T$ ) برابر  $400^\circ C$  است.

$$\sigma_{zz_i}(r, t) = 2\nu_i C_i - \frac{\alpha_i E_i}{(1 - \nu_i)} T_i(r, t); \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (37)$$

با در نظر گرفتن شرایط مرزی جابجایی، برای بدست آوردن ضرایب مجهول  $C_i$  و  $D_i$  دستگاه معادلات زیر باید حل شود:

$$[d_{ij}] \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \\ C_2 \\ D_2 \\ \vdots \\ C_{n+1} \\ D_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_{11} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ e_{2i-2} & 1 \\ e_{2i-1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ e_{2n+2} & 1 \end{bmatrix} \quad (38)$$

با جمع معادلات تنش‌های حرارتی ۳۵ الی ۳۷، با معادلات تنش‌های پسماند ۵ الی ۸، توزیع تنش‌های حرارتی با در نظر گرفتن تنش‌های پسماند حرارتی بدست می‌آیند.

### ۳- بحث و بررسی نتایج

در این بخش نتایج مربوط به استوانه پوشش‌دار تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی ارائه می‌گردد. به منظور صحت‌سنجی محاسبات تنش‌های حرارتی از نتایج مرجع [۴] استفاده می‌شود. استوانه‌ای طویل و جدارضخیم را با شعاع داخلی ۰٫۹ میلی‌متر و شعاع خارجی ۱٫۱ میلی‌متر از مواد تابعی در نظر بگیرید. خواص ترموالاستیک استوانه از روابط ۳۹ بدست می‌آید:

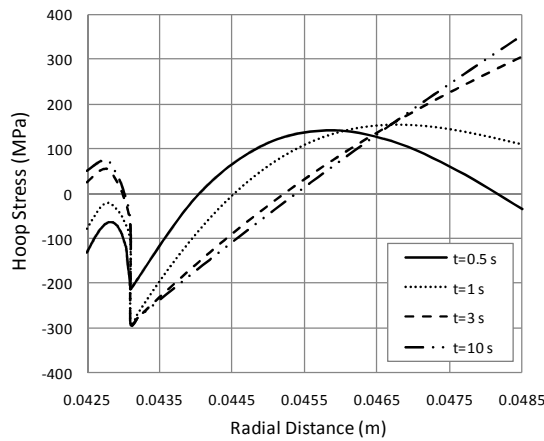
$$E(r) = E_c e^{j_1 \left(\frac{r-r_c}{r_m}\right)}; \quad \alpha(r) = \alpha_c e^{j_2 \left(\frac{r-r_c}{r_m}\right)} \quad (39)$$

$$k(r) = k_c e^{j_3 \left(\frac{r-r_c}{r_m}\right)}; \quad \kappa(r) = \kappa_c e^{j_4 \left(\frac{r-r_c}{r_m}\right)}$$

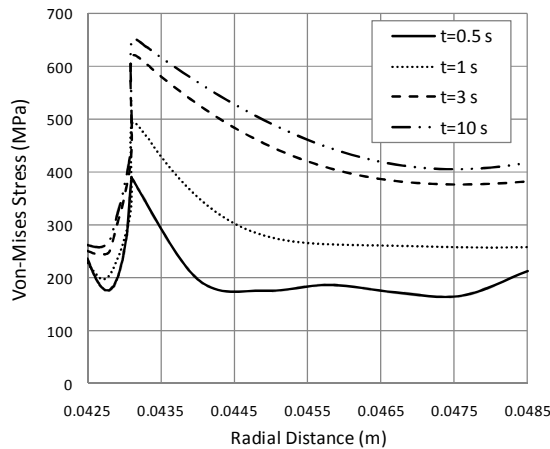
که خواص داخلی و خارجی استوانه به ترتیب مالیت و مولیبدین در نظر گرفته شده است.  $E_c, \alpha_c, k_c, \kappa_c$  به ترتیب برابر  $225 (GPa), 4.8 \times 10^{-6} (1/^\circ C), 5.9 (W/m^\circ C)$  و  $1 \times 10^{-5} (m^2/s)$  و  $0.3$  است. ضرایب  $j_i$  توان مربوط به تغییرات نمایی خواص است و با توجه به خواص سرامیک و فلز در نظر گرفته شده، طبق روابط زیر تعریف می‌شوند:

$$j_1 = 1.91\beta, \quad j_2 = 0.1\beta, \quad j_3 = 15.76\beta, \quad j_4 = 15.57\beta, \quad 0 \leq \beta \leq 1 \quad (40)$$

دمای اولیه استوانه، صفر درجه است. سطح داخلی و خارجی در محیط‌هایی با ضرایب انتقال حرارت جابجایی به ترتیب  $h_1 = 177 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$  و  $h_2 = 30 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C}$  و دماهای ۱۰۰ و صفر درجه سانتیگراد قرار می‌گیرد. شکل ۳ توزیع دما را در استوانه نشان می‌دهد:



شکل ۶- توزیع تنش محیطی در طول ضخامت استوانه پوشش‌دار در زمان‌های مختلف با توان تغییرات خواص  $m=3$



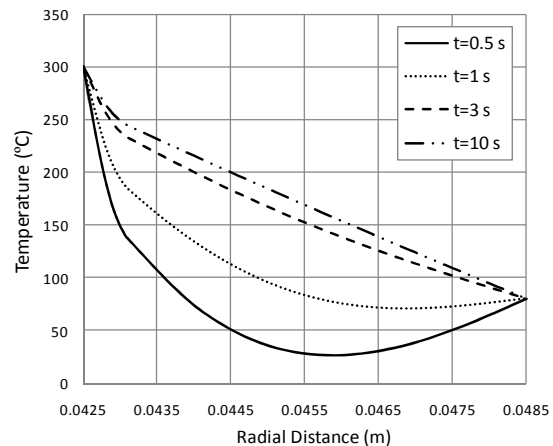
شکل ۷- توزیع تنش فون-مایز در طول ضخامت استوانه پوشش‌دار در زمان‌های مختلف با توان تغییرات خواص  $m=3$

ابتدا به بررسی تأثیر تنش‌های پسماند حرارتی بر روی توزیع تنش‌های حرارتی ناشی از بارگذاری‌های حرارتی و مکانیکی در استوانه با پوشش همگن می‌پردازیم، سپس تأثیر تنش‌های پسماند را بر روی استوانه با پوشش تابعی بررسی خواهیم کرد. به منظور بررسی تأثیر تنش‌های پسماند حرارتی در استوانه با پوشش همگن، تغییرات تنش‌های حرارتی شعاعی، محیطی و محوری در طول ضخامت استوانه و پوشش، با و بدون در نظر گرفتن تنش‌های پسماند حرارتی در شکل‌های ۸ الی ۱۰ رسم شده است. مطابق شکل ۸، در استوانه با پوشش همگن، با در نظر گرفتن تنش‌های پسماند حرارتی، مقادیر تنش شعاعی در کل ضخامت استوانه و پوشش افزایش می‌یابد و استوانه تحت شرایط فشاری بیشتری قرار خواهد گرفت.

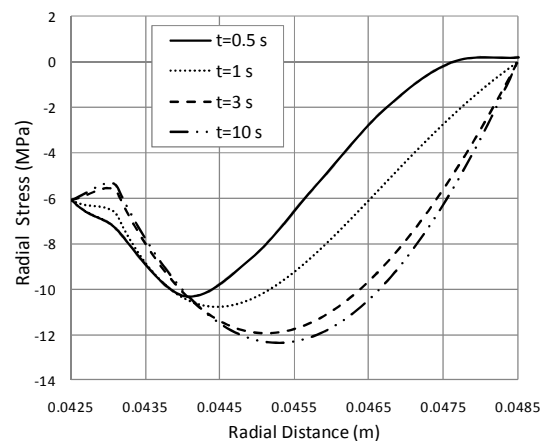
با توجه به شکل‌های ۹ و ۱۰، تنش‌های حرارتی محیطی و محوری با افزایش فاصله از سطح داخلی استوانه افزایش می‌یابند

شکل‌های ۴ الی ۷ توزیع دما و تنش‌های حرارتی گذرا را در طول ضخامت استوانه با پوشش تابعی با توان نمایی  $m = 3$  در زمان‌های مختلف نشان می‌دهند. همانطور که از شکل ۴ مشخص است با افزایش زمان، دما افزایش می‌یابد تا به میزان پایدار خود برسد. شکل ۵ نشان می‌دهد که مقادیر تنش شعاعی در طول ضخامت استوانه منفی است و این بدان معناست که تنش فشاری در طول ضخامت استوانه وجود دارد.

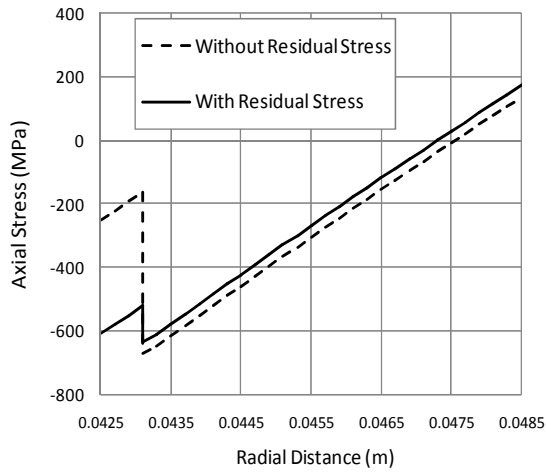
مطابق شکل ۶، با افزایش زمان، تنش محیطی در پوشش و سطح خارجی استوانه با زمان افزایش می‌یابند، تا به مقدار پایدار خود برسند. مقادیر تنش فون-مایز نیز در تمام ضخامت استوانه و پوشش مطابق شکل ۷ با زمان افزایش می‌یابد. توجه شود که زمان  $t = 10\text{ s}$  آغاز زمان رسیدن مقادیر دما و تنش‌های حرارتی به مقادیر پایدار خود است و بنابراین برای بررسی تأثیر تنش‌های پسماند حرارتی از این مقادیر در زمان  $t = 10\text{ s}$  استفاده خواهد شد.



شکل ۴- توزیع دما در طول ضخامت استوانه پوشش‌دار در زمان‌های مختلف با توان تغییرات خواص  $m=3$



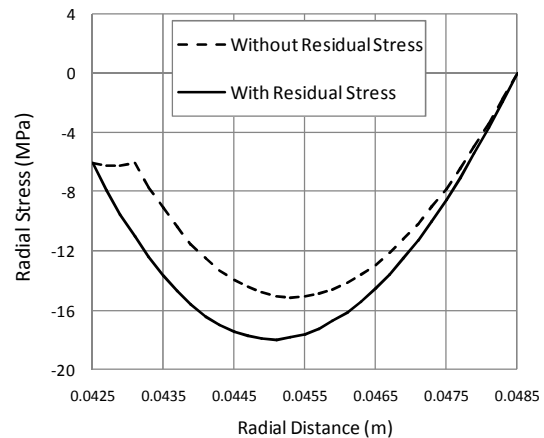
شکل ۵- توزیع تنش شعاعی در طول ضخامت استوانه پوشش‌دار در زمان‌های مختلف با توان تغییرات خواص  $m=3$



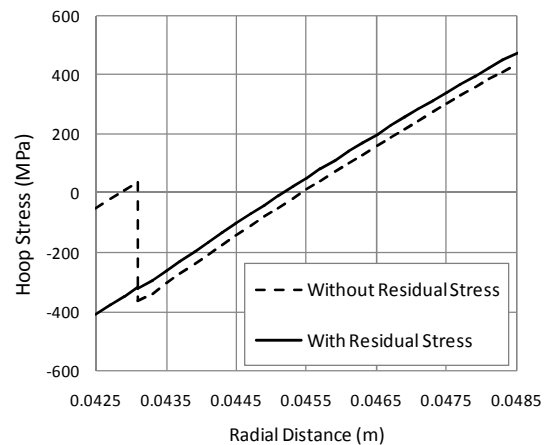
شکل ۱۰- تأثیر تنش پسماند حرارتی بر روی توزیع تنش فون- مایز در طول ضخامت استوانه با پوشش همگن در زمان  $t=10\text{ s}$

تأثیر وجود تنش‌های پسماند حرارتی ناشی از فرایند پوشش‌دهی بر روی توزیع تنش‌های حرارتی در استوانه با پوشش تابعی در شکل‌های ۱۱ الی ۱۳ نشان داده شده است. مقادیر تنش در استوانه با پوشش تابعی با توان تغییرات  $m = 3$  و در زمان  $t = 10\text{ s}$  رسم شده‌اند. مطابق شکل ۱۱، همانند استوانه با پوشش همگن، با در نظر گرفتن تنش‌های پسماند حرارتی، مقادیر تنش شعاعی فشاری در کل ضخامت استوانه و پوشش بیشتر خواهد شد. همانطور که در شکل ۱۲ مشخص است، با در نظر گرفتن تنش‌های پسماند حرارتی، مقادیر جبری تنش محیطی در پوشش کمتر ولی در فلز پایه بیشتر خواهد شد که باعث نزدیک شدن مقادیر تنش در استوانه و پوشش می‌شود و احتمال جدایش پوشش از فلز پایه را کاهش می‌دهد. مقادیر مثبت تنش محیطی فقط نزدیکی سطح خارجی استوانه ایجاد می‌شوند. شکل ۱۳ نیز توزیع تنش محوری تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی را با و بدون در نظر گرفتن تنش‌های پسماند ناشی از فرایند پوشش‌دهی نشان می‌دهد. با توجه به شکل‌های ۱۲ و ۱۳، توزیع تنش‌های محیطی و محوری بسیار شبیه یکدیگر ولی دارای مقادیری متفاوت هستند. تنش محیطی دارای مقادیر بیشتری نسبت به تنش محوری است بطوری‌که تنش محیطی در سطح خارجی استوانه  $510\text{ MPa}$  است درحالی‌که تنش محوری در همین نقطه  $179\text{ MPa}$  است که حدود  $331\text{ MPa}$  اختلاف دارند. با در نظر گرفتن تنش‌های پسماند حرارتی در استوانه با پوشش تابعی، مقادیر تنش‌های حرارتی محیطی و محوری در فلز پایه  $31\text{ MPa}$  افزایش می‌یابد در حالی‌که در پوشش، مقادیر تنش‌های حرارتی محیطی و محوری کاهش خواهند یافت.

اما در محل اتصال پوشش به فلز پایه، افتی در این مقادیر بوجود می‌آید که ناشی از خواص متفاوت حرارتی و مکانیکی پوشش و فلز اصلی می‌باشد. میزان افت در مقادیر تنش‌های حرارتی محیطی و محوری با در نظر گرفتن تنش‌های پسماند کاهش می‌یابد و این کاهش در تنش محیطی بسیار محسوس‌تر است. اگر بجای بار حرارتی گرمایی، بار حرارتی بصورت سرمایشی اعمال شود، میزان ناپیوستگی در مقادیر تنش‌های حرارتی محیطی و محوری در محل اتصال پوشش به فلز اصلی افزایش خواهد یافت. وجود ناپیوستگی در مقادیر تنش‌های حرارتی در محل اتصال پوشش همگن به فلز پایه که مهمترین عامل جدایش پوشش از فلز پایه می‌باشد با استفاده از پوشش‌های محافظ حرارتی تابعی از بین رفته و احتمال جدایش پوشش را از بین می‌برد.



شکل ۸- تأثیر تنش پسماند حرارتی بر روی توزیع تنش شعاعی در طول ضخامت استوانه با پوشش همگن در زمان  $t=10\text{ s}$



شکل ۹- تأثیر تنش پسماند حرارتی بر روی توزیع تنش محیطی در طول ضخامت استوانه با پوشش همگن در زمان  $t=10\text{ s}$

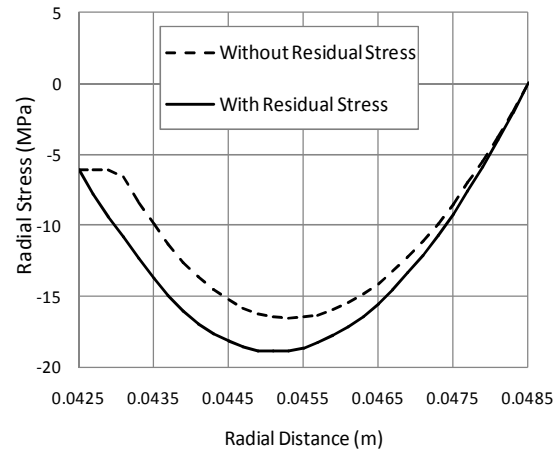


۴- نتیجه‌گیری و جمع‌بندی

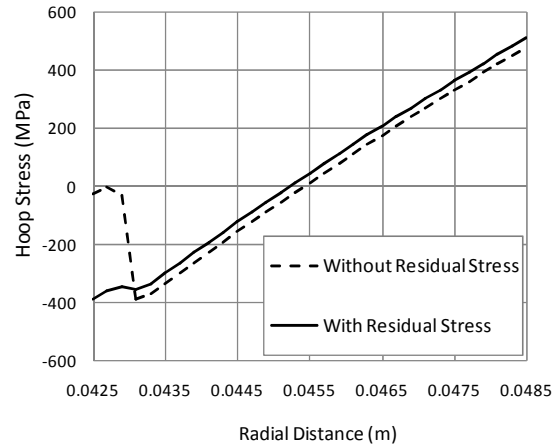
در این مقاله تحلیل حرارتی- مکانیکی استوانه با پوشش داخلی از جنس مواد تابعی و با در نظر گرفتن تنش‌های پسماند حرارتی ناشی از فرایند پوشش‌دهی انجام شد. با استفاده از مدل استوانه‌ای چند لایه، تنش‌های پسماند حرارتی ناشی از فرایند پوشش‌دهی، توزیع دما و تنش‌های حرارتی گذرا در استوانه برای دو حالت استوانه با پوشش همگن و استوانه با پوششی از جنس مواد تابعی بدست آمد. ناپیوستگی مقادیر تنش محیطی و محوری در محل اتصال پوشش به فلز پایه با استفاده از پوششی از جنس مواد تابعی، از بین رفته و به توزیعی پیوسته تبدیل می‌شود. با در نظر گرفتن تنش‌های پسماند حرارتی، توزیع تنش‌های حرارتی در پوشش و فلز اصلی تغییر می‌کنند، بطوری‌که شاهد افت میزان ناپیوستگی در محل اتصال پوشش به فلز پایه در استوانه با پوشش همگن و همچنین افت میزان تنش‌های حرارتی در استوانه با پوشش تابعی خواهیم بود.

مراجع

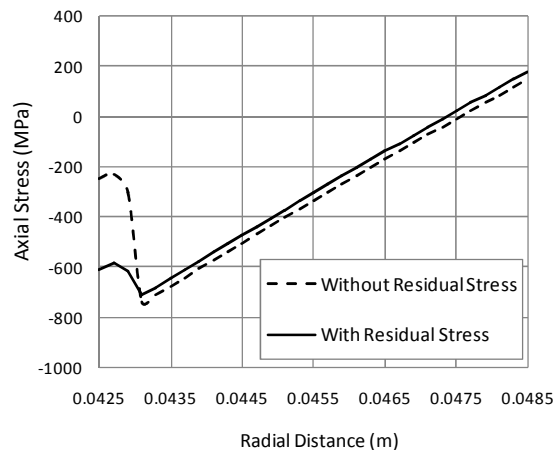
[1] Xiong, H.P., Kawasaki, A., Kang, Y.S., Watanabe, R., "Experimental study on heat insulation performance of functionally graded metal/ceramic coatings and their fracture behavior at high surface temperatures", Surface & Coating Technology, Vol. 194, pp. 203-214, 2005.  
 [2] Yang, Y.C., Chu, S.S., Lee, H.L., Lin, S.L., "Hybrid numerical method applied to transient hygrothermal analysis in an annular cylinder", Int. Comm. in Heat and Mass Transfer, Vol. 33, pp. 102-111, 2006.  
 [3] Lee, Z.Y., "Hybrid numerical method applied to 3-D multilayered hollow cylinder with periodic loading conditions", Applied Mathematics and Computation, Vol. 166, pp. 95-117, 2005.  
 [4] Shao, Z. S., Wang, T. J., Ang, K. K., "Transient thermo-mechanical analysis of functionally graded hollow thick cylinders", J. Therm. Stresses, Vol. 30, pp. 81-104, 2007.  
 [5] Lee, H.L., Yang, Y.C., Chang, W.J., Wu, T.S., "Estimation of heat flux and thermal stresses in multilayer gun barrel with thermal contact resistance", Applied Mathematics and Computation, Vol. 209, pp. 211-221, 2009.  
 [6] Jabbari, M., Sohrabpour, S., Eslami M.R., "Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads", Int. J. Pres. Vess. Pip., Vol. 79, pp. 493-497, 2002.  
 [7] Jabbari M., Bahtui A., Eslami M.R., "Axisymmetric mechanical and thermal stresses in thick Long FGM cylinders", J. Therm. Stresses, Vol. 29, pp. 643-663, 2006.



شکل ۱۱- تأثیر تنش پسماند حرارتی بر روی توزیع تنش شعاعی در طول ضخامت استوانه با پوشش تابعی با توان تغییرات خواص  $m=3$  در زمان  $t=10$  s



شکل ۱۲- تأثیر تنش پسماند حرارتی بر روی توزیع تنش محیطی در طول ضخامت استوانه با پوشش تابعی با توان تغییرات خواص  $m=3$  در زمان  $t=10$  s



شکل ۱۳- تأثیر تنش پسماند حرارتی بر روی توزیع تنش فون- مایرز در طول ضخامت استوانه با پوشش تابعی با توان تغییرات خواص  $m=3$  در زمان  $t=10$  s

- [8] Hosseini, S. M., Akhlaghi, M., Shakeri, M., "Transient heat conduction in functionally graded thick hollow cylinder (by analytical method)", *Heat Mass Transfer*, Vol. 3, pp. 669-675, 2007.
- [9] Hosseini, S. M., Akhlaghi, M., "Analytical solution in transient thermo-elasticity of functionally graded thick hollow cylinders (Pseudo-dynamic analysis)", *Math. Meth. Appl. Sci.*, Vol. 32, pp. 2019-34, 2009.
- [10] Hsueh, C.H., Fuller, E.R., "Analytical modeling of oxide thickness effects on residual stresses in thermal barrier coatings", *Scripta Mater.*, Vol. 42, pp. 781-787, 2000.
- [11] Zhang, X. C., Xu, B.S., Wang, H.D., Jiang, Y., Wu, Y.X., "Application of functionally graded interlayer on reducing the residual stress discontinuities at interfaces within a plasma-sprayed thermal barrier coating", *Surface & Coatings Technology*, Vol. 201, pp. 5716-5719, 2007.
- [12] Bouchafa, A., Benzair, A., Tounsi, A., Draiche, K., Mechab, I., Bedia, E.A.A., "Analytical modeling of thermal residual stresses in exponential functionally graded material system", *Materials and Design*, Vol. 31, pp. 560-563, 2010.
- [13] Hettrnski, R. B. Eslami, M. R., "Thermal stresses-Advanced theory and applications, Springer Press, 2009.
- [14] Carslaw, H. S., Jaeger, J. C., "Conduction of heat in solids", 2nd ed., Oxford Press, Clarendon, 1959.
- [15] Schneider, S.J., "Engineered materials handbook", Vol. 4, ASM International Press, 1991.