مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۸۸، جلد ۴۹، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۸، صفحه ۱۴۷-۱۵۶

تحلیل کمانش استوانه مشبک کامپوزیتی با پوسته درونی و بیرونی تحت فشار خارجی

بیژن رستمی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

علی شهرجردی* استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

چکیده

در سال‌های اخیر پوسته‌های استوانه‌ای تقویت‌شده در اجزای اصلی ساختارهای هواپیمایی، موشکی و دریایی مورداستفاده قرارگرفته شده است. در این مقاله کمانش استوانه مشبک کامپوزیتی با پوسته درونی و بیرونی تحت فشار خارجی مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرد. این کار با ایجاد یک مدل تحلیلی برای تعیین پارامترهای سختی معادل یک پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت‌شده مشبک انجام‌شده است. بر اساس اصل برهم‌نهی سختی تقویت‌کننده‌ها با سختی پوسته جمع می‌گردد تا پارامترهای سختی معادل کل ساختار به دست آید. معادلات حاکم بر ساختارهای مشبک استوانه‌ای بر اساس میدان جابجایی و روابط تنش و کرنش به‌صورت ماتریسی با استفاده از نظریه کلاسیک پوسته‌ها تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده و گیردار حل می‌گردد. نتایج نشان می‌دهد افزایش پارامترهای زاویه، طول سلول مشبک و سطح مقطع باعث افزایش سختی معادل و بار بحرانی کمانش تا قبل از رسیدن به مود کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها می‌شود ولی افزایش بیشتر آن‌ها کمانش موضعی و کمانش سازه را در پی دارد؛ بنابراین می‌توان برای تمامی پارامترهای مؤثر، مقدار بهینه‌ای را در نظر گرفت و همچنین برای مؤثر بودن ساختار مشبک به تعداد محدودی تقویت‌کننده با زاویه بهینه، فاصله طولی و سطح مقطع مناسب جهت جلوگیری از کمانش موضعی و درنهایت کمانش کلی نیاز است.

واژه‌های کلیدی: ساختار استوانه‌ای مشبک، کمانش، کامپوزیت.

Buckling analysis of composite lattice cylinder whit inner and outer shell under external pressure

B. Rostami Department of Mechanical Engineering, Malayer University, Malayer, Iran.

A. Shahrjerdi Department of Mechanical Engineering, Malayer University, Malayer, Iran.

Abstract

In recently years, Stiffened cylindrical shells are used in the major components of aviation, missile and marine structures. In this study has been analyzed buckling of composite lattice cylinder with inner and outer shell under external pressure. This was accomplished by developing an analytical model for determination of the equivalent stiffness parameters of a grid stiffened composite cylindrical shell. This stiffness contribution of the stiffeners was superimposed with the stiffness contribution of the shell to obtain the equivalent stiffness parameters of the whole panel. Equations governing the cylindrical lattice structures are solved based on the displacement and stress-strain relations in the form of a matrix using classical shell theory under boundary conditions clamp supported and simply supported. The results show increase in grid cell length, angle and cross-section parameters caused increase in stiffness and critical buckling load but increase further them cause local and global buckling. Finally for all of them can be considered optimal value and for prevent local and global buckling and the effectiveness of the lattice structure to a limited number of stiffener with optimal angle, longitudinal and cross sections required.

Keywords: Lattice cylindrical, Buckling,Composite.

۱- مقدمه

سازه‌های کامپوزیتی به علت نسبت مقاومت به وزن بالا و مقاومت در برابر رطوبت و خوردگی و سایر خواص منحصربه‌فرد، در صنایع مختلف ازجمله صنایع هوایی، دریایی، موشکی و مخازن تحت فشار کاربرد زیادی دارند. در این میان پوسته‌های کامپوزیتی یکی از سازه‌های پرکاربرد هستند که از سال‌ها پیش مورد توجه طراحان بوده است. یکی از روش‌های بهبود کارایی پوسته‌های کامپوزیتی استفاده از انواع تقویت‌کننده‌ها (ریب ها)[1] است. تقویت‌کننده‌ها می‌توانند به‌صورت محیطی، محوری و یا مارپیچ مورد استفاده قرار گیرند. طبیعت ساختار شبکه‌ای موجب تغییر مسیر بارهای تخریبی در اطراف نقاط آسیب‌دیده و درنتیجه افزایش قدرت تحمل آسیب در این سازه‌ها می‌شود [۱]. همچنین ساخته‌شدن تقویت‌کننده‌ها از الیاف تک جهته احتمال بروز پدیده تورق در آن‌ها را نسبت به ساختارهای مشبک کاهش می‌دهد و این عامل به‌نوبه خود مقاومت این سازه‌ها را در برابر ضربه و خستگی افزایش می‌دهد. علاوه بر این، مجزا بودن تقویت‌کننده‌ها از یکدیگر امکان سرایت ترک از یک تقویت‌کننده به تقویت‌کننده مجاور را از بین برده و قدرت تحمل آسیب‌دیدگی سازه را نیز افزایش می‌دهد. از طرفی به دلیل ساختار باز این سازه‌ها، تأثیر رطوبت در آن‌ها ناچیز است و با توجه به استفاده از الیاف پیوسته در ساخت سازه مشبک کامپوزیتی، پتانسیل بالایی برای اتوماسیون فرایند ساخت این قبیل سازه‌ها وجود دارد. بر اساس به‌کارگیری شیوه‌های جدید اتوماسیون، قیمت این

[1] Stiffeners(Ribs)

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: alishahrjerdi2000@yahoo.com

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۶/۲۷

تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۲/۳۰

محصولات نیز کاهش چشمگیری خواهد داشت [۱]. کمانش پوسته‌ها مشبک تحت بارگذاری‌های مختلف، ازجمله بار خارجی، یکی از مهم‌ترین مودهای واماندگی آن‌هاست. به همین سبب مطالعه رفتار کمانشی آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. اولر [۲] اولین کسی بود که بر روی پدیده کمانش تحقیقاتی انجام داده و سعی نمود مدل ریاضی برای آن ارائه نماید. او در سال ۱۹۷۴ نخستین تحلیل صحیح از پایداری یک ستون را با رفتار کمانشی ارائه داد. وی با استفاده از روش تعادل خنثی یعنی تعادل ستون در حالت کمی خم‌شده توانست معادله دیفرانسیل رفتار یک عضو خطی را استخراج نماید و به حل آن بپردازد و مودهای کمانش و ضرایب بار کمانش تحت این مودها را به دست آورد. ولی این راه‌حل یک کار ریاضی محض بود و در آن زمان برای آن کاربردی مطرح نبود. در سال ۱۹۹۶ جانکی و همکارانش [۳] روشی را برای محاسبه بار کمانشی پنلهای کامپوزیتی ارائه دادند که در این روش پنلهای صفحه‌ای تقویت‌شده با استفاده از روش‌های ریاضی به پنل صفحه‌ای یکنواخت معادل که دارای سختی معادل با پنل اولیه است تبدیل می‌گردد. همچنین اثر متقابل پوسته و تقویت‌کننده‌ها با استفاده از سختی تقویت‌کننده‌ها و پوسته در ناحیه اتصال محاسبه گردیده و بار کمانش با قرار دادن سختی معادل نهایی درروش ریلی ریتز محاسبه‌شده است. ساموئل کیدان و همکارانش در سال ۲۰۰۳ [۴] مقاله‌ای را تحت عنوان تحلیل بار کمانشی در یک استوانه کامپوزیتی تقویت‌شده با ساختار شبکه‌ای کامپوزیتی ارائه دادند. فان و همکارانش [۵] در سال ۲۰۱۳ رفتار خمشی- فشاری ساندویچ پانل بامغزی مشبک تقویت‌شده با الیاف کربن را تحلیل نمودند. در این مطالعه نوع خرابی جدایش لایه‌ای و کمانش محلی بررسی‌شده است. راسینام و همکارش در سال ۲۰۱۳ [۶] تحلیل استاتیکی کمانش پوسته استوانه‌ای نازک تحت فشار خارجی را به روش اجزای محدود بررسی نمودند. آن‌ها در این تحقیق تأثیر انواع پارامترها را روی بار بحرانی کمانش بررسی نمودند. زنگ و جیانگ در سال ۲۰۱۴ [۷] خواص مکانیکی ساختارهای مشبک کامپوزیتی با تغییر نسبت پهنا را بررسی نمودند که در این تحقیق سفتی و استحکام بر پایه روش مکانیک محیط پیوسته استخراج‌شده است. سان و همکارانش در سال ۲۰۱۴ [۸] کمانش پوسته استوانه‌ای تحت فشار خارجی را با روش همیلتون و بر پایه تئوری دانل انجام دادند. نتایج نشان داد که کمینه فشار بحرانی پوسته استوانه‌ای تحت شرایط مرزی آزاد نسبت به شرایط مرزی دیگر کمتر است. سوفیو و همکارش در سال ۲۰۱۴ [۹] کمانش و ارتعاش پوسته استوانه‌ای مواد مدرج تابعی (FGM)[۱] را تحت فشار خارجی انجام دادند. آن‌ها معادلات اولیه را بر اساس نظریه دانل استخراج نموده و به روش گالرکین حل نمودند. فان و همکارانش در سال ۲۰۱۴ [۱۰] رفتار فشاری کامپوزیت‌های مشبک را بررسی نمودند. در سال ۲۰۱۵ ستوری و همکارانش [۱۱] با استفاده از نظریه مرتبه سوم تغییر شکل برشی به بررسی کمانش استوانه مواد مدرج تابعی با تقویتی طولی پرداخته‌اند، در این تحقیق اثرات بارگذاری و پارامترهای هندسی تقویت‌کننده‌های طولی و شاخص توان در تعیین خواص مواد مدرج تابعی در شرایط مرزی تکیه‌گاهی مختلف بر بار بحرانی کمانش موردمطالعه قرار گرفت و نتایج مشخص کرد که پارامترهای هندسی تقویت‌کننده‌های طولی تأثیرات مهمی بر بار بحرانی کمانش دارد. در سال ۲۰۱۵ سوفیو [۱۲] به مطالعه کمانش پوسته‌های مخروطی ناقص و کامل مواد مدرج تابعی تحت فشار خارجی در چارچوب نظریه تنش برشی پرداخته و در آن اثرات تنش برشی، مقطع مواد مدرج تابعی و مشخصات پوسته که بر روی بار بحرانی عمودی مؤثر است مورد بررسی قرار گرفت. در سال ۲۰۱۶ لاپتین و همکارانش [۱۳] روشی برای تحلیل کمانش ورق‌های مشبک غیر هم‌شکل با شرایط مرزی گیردار تحت فشار محوری ارائه داده است. در این مقاله مؤثرترین پارامترها را زاویه و جهت تقویت‌کننده‌های قطری بر بار بحرانی کمانش معرفی می‌نماید. در سال ۲۰۱۶ ترن و نیوین [۱۴] ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای مدور مواد مدرج تابعی با تقویتی‌های متعامد را مورد بررسی قرار داده‌اند که در آن تأثیرات نسبت‌های ارتفاع به پهنا تقویتی‌ها، طول به شعاع، شعاع به ضخامت پوسته و تعداد موج‌های محیطی روی فرکانس طبیعی با شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده ارزیابی‌شده است.

بامطالعه پژوهش‌های انجام‌شده، خلأهای موجود در زمینه تحقیقات صورت گرفته در حوزه کمانش ساختارهای مشبک به شرح زیر است:

مطالعه اندکی (به‌صورت روش عددی اجزاء محدود) در خصوص کمانش ساختار مشبک تحت بارمحوری انجام‌شده ولی بررسی کمانش این ساختارها تحت فشار خارجی در مراجع بررسی‌شده صورت نگرفته است. همچنین تحلیل ساختارهای مشبک با هندسه تک پوسته مطالعه و بررسی‌شده ولی تحقیقی در خصوص این ساختار با پوسته بیرونی و درونی به عمل نیامده است. تحقیقاتی نیز بر روی کمانش پوسته استوانه‌ای تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده انجام‌شده ولی مطالعه‌ای در خصوص معادلات آن تحت شرایط مرزی تکیه‌گاهی گیردار صورت نگرفته است.

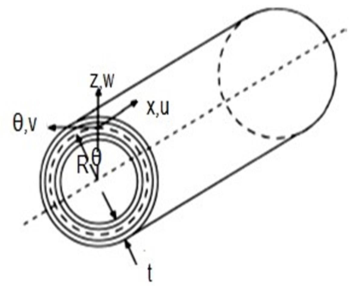
هدف از این مقاله بررسی کمانش استوانه مشبک کامپوزیتی با پوسته بیرونی و درونی تحت فشار خارجی و شرایط مرزی C-S[۲],S-S[۳] است که با استفاده از روش گالرکین بار بحرانی کمانش استخراج گردیده و تأثیرات پارامترهای هندسی بر بار بحرانی کمانش به‌صورت تحلیلی و عددی مورد بررسی قرارگرفته شده است.

۲- معادلات حاکم

در شکل ۱، پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی چندلایه با شعاع R، طول L و ضخامت t نشان داده‌شده است. u، v و w به ترتیب مؤلفه‌های تغییر مکان در جهت x، θ و z می‌باشند. همان‌طور که در این شکل نشان داده‌شده، مبدأ مختصات بر روی صفحه میانی پوسته در نظر گرفته می‌شود. مختصه x در جهت طولی، مختصه θ در جهت محیطی و مختصه z در جهت ضخامت پوسته است.

[۱] Functionally graded material

[2] Clamp support
[3] Simply support



شکل ۱- پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی و سیستم مختصات مرجع.

مؤلفه‌های کرنش و انحنا برای صفحه میانی پوسته‌ها در سیستم مختصات مماس- نرمال پوسته به‌صورت روابط (۱) است [۱۵].

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_\theta^0 &= \frac{1}{R}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{w}{R} \\
\gamma_{x\theta}^0 &= \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \\
k_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
k_\theta &= \frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \\
k_{x\theta} &= \frac{1}{R}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta}\right)
\end{aligned}
\qquad (۱)
$$

رابطه برآیندهای نیرو و ممان با مؤلفه‌های کرنش و انحنای صفحه میانی به‌صورت معادله (۲) است [۱۵]:

$$
\begin{Bmatrix} N_x \\ N_\theta \\ N_{x\theta} \\ M_x \\ M_\theta \\ M_{x\theta} \end{Bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\
A_{21} & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\
A_{61} & A_{62} & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} \\
B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\
B_{21} & B_{22} & B_{26} & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\
B_{61} & B_{62} & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix}
\qquad (۲)
$$

که در رابطه فوق ماتریس‌های A، B و D عبارت‌اند از [۱۵]:

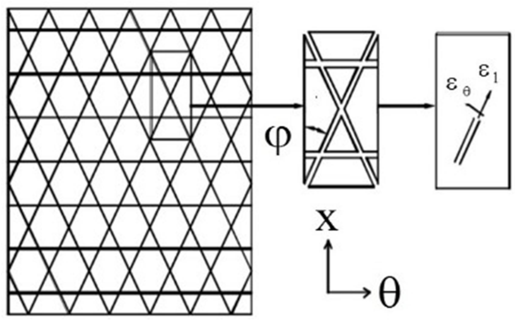
$$
\begin{cases}
A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(t_k - t_{k-1}\right) \\
B_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(t_k^2 - t_{k-1}^2\right) \qquad i,j = 1,2,6 \\
D_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \left(t_k^3 - t_{k-1}^3\right)
\end{cases}
\qquad (۳)
$$

در این روابط t_k فاصله لایه k ام از صفحه میانی و N تعداد لایه‌هاست. همچنین $\overline{Q}_{ij}$ماتریس سفتی اصلاح شده تنش صفحه ای (توضیحات در صفحه ۱۱مقاله) میباشد.

۳- محاسبه سفتی معادل ساختارهای مشبک

۳-۱- ساختارهای مشبک

یک مدل تحلیلی از ساختار مشبک در شکل شماره ۲ نمایش داده‌شده است. المان واحد طوری انتخاب می‌گردد که کل ساختار سازه با استفاده از تکرار المان واحد تولید گردد.



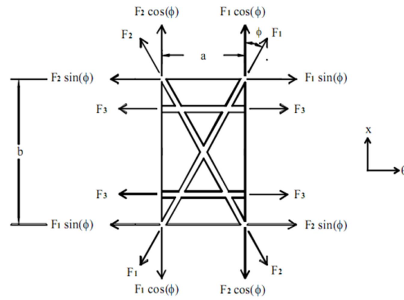
شکل ۲-ساختار مشبک به همراه المان واحد [۴].

خصوصیات سفتی یک سلول که به‌صورت تکرار ایجادشده است، نماینده سفتی کل بخش تکرارشونده است. کامپوزیت‌های تقویت‌شده با الیاف، نوعی از مواد اورتوتروپیک هستند که در آن‌ها خواص مکانیکی در یک جهت خاص قوی‌تر بوده و معمولاً از دو قسمت ماتریس و الیاف تشکیل‌شده‌اند. الیاف جزء قوی‌تر بوده و به‌واسطه آن ماده‌ی کامپوزیت در جهتی که راستای الیاف قرار دارد خواص مکانیکی قوی‌تری به خود می‌گیرد و چون زاویه الیاف در راستای محور طولی پانل استوانه‌ای بوده بنابراین خصوصیات اورتوتروپیک به‌دست‌آمده، در جهت محوری است. برای تعیین ماتریس سفتی کل پوسته تقویت‌شده لازم است که ابتدا ساختار مشبک به یک ورق پیوسته معادل شود و سپس ماتریس سفتی آن تعیین گردد [۴]. برای استخراج ماتریس سفتی فرضیات زیر در نظر گرفته‌شده است [۴]:

- مدول عرضی تقویت‌کننده‌ها خیلی کمتر از مدول طولی و همچنین ابعاد سطح مقطع عرضی کوچک‌تر در مقایسه با ابعاد طولی تقویت‌کننده‌ها است.
- کرنش در سطح مقطع عرضی تقویت‌کننده‌ها یکسان می‌باشد. ازاین‌رو تنش در سطح مقطع عرضی تقویت‌کننده‌های محیطی و مارپیچی یکسان است.
- بارها توسط نیروهای برشی بین پوسته و لایه تقویت‌کننده انتقال می‌یابد.

۳-۲- تحلیل نیرو در ساختار مشبک

کرنش سطح میانی و انحنای پوسته به ترتیب توسط متغیرهای $\varepsilon_x^\circ, \varepsilon_\theta^\circ, \varepsilon_{x\theta}^\circ$ و k_x، k_θ، $k_{x\theta}$ به دست می‌آیند. کرنش متناظر در سطح درونی پوسته (وجه مشترک تقویت‌کننده و پوسته) از شرایط کرنش سطح میانی و انحنای پوسته از معادله (۴) استخراج می‌گردد. وقتی تقویت‌کننده‌ها به پوسته می‌چسبند و یکپارچه می‌شوند به دلیل فرض دوم، کرنش در سطح مقطع تقویت‌کننده یکنواخت در نظر گرفته می‌شود. بنابراین کرنش در تقویت‌کننده‌ها از کرنش سطح روی پوسته به دست می‌آید [۴].



شکل ۳- دیاگرام آزاد نیرو برای المان واحد [۴].

با توجه به اینکه کرنش در فاصله z از صفحه میانی از رابطه $\varepsilon = \varepsilon^{\circ} + kz$ به دست می‌آید خواهیم داشت[۴]:

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \varepsilon_x^{\circ} + k_x(\frac{t}{2}) \\
\varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^{\circ} + k_\theta(\frac{t}{2}) \\
\varepsilon_{x\theta} &= \varepsilon_{x\theta}^{\circ} + k_{x\theta}(\frac{t}{2})
\end{aligned}
\tag{۴}
$$

t ضخامت پوسته است.

با توجه به شکل ۳ نیروهای محوری متناظر به نام‌های F_1، F_2 و F_3 از کرنش‌های طولی تقویت‌کننده‌ها محاسبه می‌شوند. نیروهای در واحد طول N_X، N_θ و $N_{X\theta}$ توسط تقسیم عبارات نیروی بالا به پهنای لبه متناظر المان واحد حاصل می‌شوند. ε_{lt}، ε_t و ε_l به ترتیب کرنش برشی متناظر، کرنش عمود بر جهت تقویت‌کننده و کرنش در راستای آن می‌باشند. در معادله ماتریسی زیر $c = \cos(\phi)$ و $s = \sin(\phi)$ در نظر گرفته‌شده است [۴].

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_l \\ \varepsilon_t \\ \varepsilon_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & sc \\ s^2 & c^2 & -sc \\ -2sc & 2sc & c^2-s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_{x\theta} \end{bmatrix}
\tag{۵}
$$

بر طبق فرضیات صورت گرفته [۴] اثرات کرنش عمودی ε_t و کرنش برشی ε_{lt} ناچیز هستند. کرنش طولی ε_1 از معادله (۵) به‌صورت رابطه (۶) استخراج می‌گردد [۴]:

$$
\varepsilon_l = c^2\varepsilon_x + s^2\varepsilon_\theta + sc\varepsilon_{x\theta}
\tag{۶}
$$

وقتی کرنش‌های محوری در تقویت‌کننده‌ها به وجود می‌آیند، نیروهای محوری متناظر به نام‌های F_1، F_2 و F_3 از کرنش‌های طولی محاسبه می‌شوند. معادله‌های (۷) نشان‌دهنده سه نیروی حاصل است [۴].

$$
\begin{aligned}
F_1 &= AE_l\varepsilon_l^1 = AE_l(c^2\varepsilon_x + s^2\varepsilon_\theta - sc\varepsilon_{x\theta}) \\
F_2 &= AE_l\varepsilon_l^2 = AE_l(c^2\varepsilon_x + s^2\varepsilon_\theta + sc\varepsilon_{x\theta}) \\
F_3 &= AE_l\varepsilon_l^3 = AE_l(\varepsilon_\theta)
\end{aligned}
\tag{۷}
$$

از جمع‌کردن نیروها در جهت x,θ معادله (۸) حاصل می‌گردد:

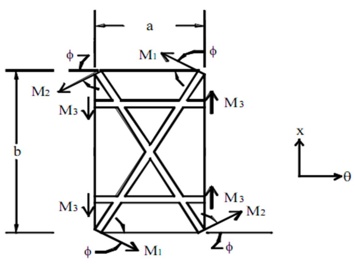
$$
\begin{aligned}
F_x &= F_1\cos(\varphi) + F_2\cos(\varphi) = AE_l(2c^3\varepsilon_x + 2s^2c\varepsilon_\theta) \\
F_\theta &= F_1\sin(\varphi) + F_2\sin(\varphi) + 2F_3 = AE_l(2sc^2\varepsilon_x + (2s^3+2)\varepsilon_\theta) \\
F_{x\theta} &= F_1\cos(\varphi) - F_2\cos(\varphi) = AE_l(2sc^2\varepsilon_{x\theta})
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

نیروهای در واحد طول $N_{x\theta}, N_\theta, N_x$ توسط تقسیم عبارات نیروی بالا به طول لبه‌ی متناظر المان واحد به دست می‌آیند.

$$
\begin{aligned}
N_x &= \frac{AE_l}{a}\left(2c^3\varepsilon_x^{\circ} + 2c^3k_x(\frac{t}{2}) + 2s^2c\varepsilon_\theta^{\circ} + 2s^2ck_\theta(\frac{t}{2})\right) \\
N_\theta &= \frac{AE_l}{b}\left(2sc^2\varepsilon_x^{\circ} + 2sc^2k_x(\frac{t}{2}) + \left(2s^3+2\right)\varepsilon_\theta^{\circ} + \left(2s^3+2\right)k_\theta(\frac{t}{2})\right) \\
N_{x\theta} &= \frac{AE_l}{b}\left[2sc^2\varepsilon_{x\theta}^{\circ} + 2sc^2k_{x\theta}(\frac{t}{2})\right]
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

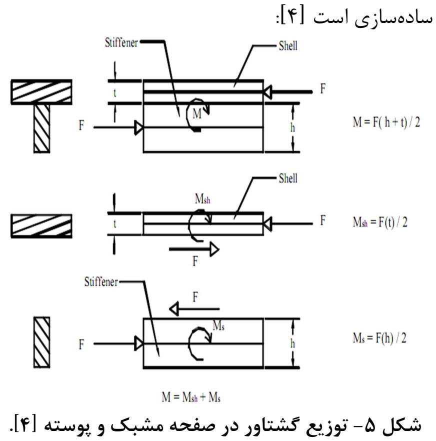
۳-۳- آنالیز گشتاور در ساختار مشبک

گشتاور توسط نیروی برشی بین وجه مشترک پوسته و تقویت‌کننده ایجاد می‌گردد. از اصل تعادل، این نیروهای برشی برابر با نیروهای تقویت‌کننده می‌باشند که در قسمت قبل محاسبه شدند. گشتاور ایجادشده توسط این نیروها روی صفحه میانی مساوی حاصل‌ضرب نیروها در نصف ضخامت پوسته است. دیاگرام آزاد در شکل نشان‌دهنده گشتاورهای متفاوت ایجادشده توسط نیروهای F است. هنگامی‌که گشتاورهای ایجادشده به دلیل نیروهای برشی پوسته باشد فقط M_{sh} موردتوجه قرار می‌گیرد. در دیاگرام آزاد شکل ۵ گشتاور خالص M از میانگین گشتاور پوسته و تقویت‌کننده بر یکدیگر قابل‌مشاهده است [۴].



شکل ۴- دیاگرام آزاد گشتاور برای المان واحد [۴].

شکل ۴ نشان‌دهنده دیاگرام آزاد گشتاور بر روی المان واحد است. M_1، M_2 و M_3 به ترتیب گشتاورهای حاصله از نیروهای F_1، F_2 و F_3 هستند. مشابه حالت آنالیز نیرو بر روی المان واحد، گشتاور حاصل جهات عمودی و افقی المان واحد محاسبه می‌شوند. گشتاورهای M_1، M_2 و M_3 توسط ضرب نیروهای برشی متناظر F_1، F_2 و F_3 در بازوی سطح ($\frac{t}{2}$) محاسبه شده اند. با جایگزینی گشتاورها و تقسیم بر طول لبه‌ها نتیجه‌ی نهایی همان مقدار گشتاورهاست. روابط (۱۲) و (۱۳) نشان‌دهنده نتیجه نهایی گشتاورها بعد از ساده‌سازی است [۴]:



شکل ۵- توزیع گشتاور در صفحه مشبک و پوسته [۴].

$$\begin{aligned}&\Rightarrow M_1=\frac{AE_1{*}t}{2}\left(c^2\varepsilon_x^\circ+c^2k_x(\tfrac{t}{2})+s^2\varepsilon_\theta^\circ+s^2k_\theta(\tfrac{t}{2})-sc\varepsilon_{x\theta}^\circ-sck_{x\theta}(\tfrac{t}{2})\right)\\&\Rightarrow M_2=\frac{AE_1{*}t}{2}\left(c^2\varepsilon_x^\circ+c^2k_x(\tfrac{t}{2})+s^2\varepsilon_\theta^\circ+s^2k_\theta(\tfrac{t}{2})-sc\varepsilon_{x\theta}^\circ-sck_{x\theta}(\tfrac{t}{2})\right)\\&\Rightarrow M_3=\frac{AE_1{*}t}{2}\left(\varepsilon_\theta^\circ+k_\theta(\tfrac{t}{2})\right)\end{aligned}\tag{۱۰}$$

$$\begin{cases}M_x=M_1\cos(\varphi)+M_2\cos(\varphi)\\M_\theta=M_1\sin(\varphi)+M_2\sin(\varphi)+2M_3\\M_{x\theta}=M_2\cos(\varphi)-M_1\sin(\varphi)\end{cases}\tag{۱۱}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}M_x=\dfrac{AE_1t}{2a}\left[2c^3\varepsilon_x^\circ+2c^3k_x(\tfrac{t}{2})+2s^2c\varepsilon_\theta^\circ+2s^2ck_\theta(\tfrac{t}{2})\right]\\M_\theta=\dfrac{AE_1t}{2b}\left[2sc^2\varepsilon_x^\circ+2sc^2k_x(\tfrac{t}{2})+(2s^3+2)\varepsilon_\theta^\circ+(2s^3+2)k_\theta(\tfrac{t}{2})\right]\\M_{x\theta}=\dfrac{AE_1t}{2b}\left[2sc^2\varepsilon_{x\theta}^\circ+2sc^2k_{x\theta}(\tfrac{t}{2})\right]\end{cases}\tag{۱۲}$$

۳-۴- سفتی معادل ساختار پوسته مشبک

با استخراج پارامترهای سفتی برای یک المان می‌توان با تعمیم آن به‌کل سازه ماتریس‌های سفتی را به دست آورد. سفتی کل سازه ساندویچی تقویت‌شده از برهم‌نهی سفتی معادل پوسته مشبک به همراه سفتی پوسته بالایی و پوسته پایینی به دست می‌آید.

برای نوشتن معادلات بر اساس میدان جابجایی از روابط تنش و کرنش که به‌صورت ماتریس کلی رابطه (۱۴) است استفاده می‌شود [۴].

$$\begin{Bmatrix}N_x\\N_\theta\\N_{x\theta}\\M_x\\M_\theta\\M_{x\theta}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}[A]&[B]\\{[B]}&[D]\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_x^0\\\varepsilon_\theta^0\\\gamma_{x\theta}^0\\k_x\\k_\theta\\k_{x\theta}\end{Bmatrix}\tag{۱۳}$$

نیرو و گشتاور کل سازه از جمع ماتریسی نیرو و گشتاور حاصل از سازه مشبک و پوسته بیرونی و درونی به دست می‌آید:

در رابطه (۱۵) بالانویس s مربوط به شبکه تقویت‌کننده‌ها و بالانویس sh مربوط به پوسته است. به‌این‌ترتیب ماتریس سفتی معادل کل سازه از حاصل جمع ماتریس سفتی پوسته بیرونی و درونی با ماتریس سفتی تقویت‌کننده‌ها به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix}N\\M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A^{sh}+A^{s}+A^{sh}&B^{sh}+B^{s}+B^{sh}\\B^{sh}+B^{s}+B^{sh}&D^{sh}+D^{sh}+D^{sh}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon^\circ\\k\end{bmatrix}\tag{۱۴}$$

۴- حل تحلیلی

۴-۱- معادلات تعادل

بر اساس نظریه کلاسیک پوسته‌ها، معادلات تعادل برای پوسته‌ها به‌صورت معادله (۱۶) میباشد [۱۶]:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{1}{R}\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial\theta}+P_x=0\\&\frac{1}{R}\frac{\partial N_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x}+\frac{1}{R}\left[\frac{1}{R}\frac{\partial M_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x}\right]+P_\theta=0\\&\frac{\partial^2M_x}{\partial x^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial^2M_{x\theta}}{\partial x\partial\theta}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2M_\theta}{\partial\theta^2}-\frac{N_\theta}{R}+P_n=0\end{aligned}\tag{۱۵}$$

برای حالتی که پوسته استوانه‌ای تنها تحت فشار هیدرو استاتیک قرار داشته باشد، $P_x = P_\theta = 0$ همچنین P_n به‌صورت معادله (۱۷) تعریف می‌گردد [۱۷]:

$$P_n=\frac{P}{R}\left\{\frac{\partial v}{\partial\theta}-\frac{\partial^2w}{\partial\theta^2}\right\}\tag{۱۶}$$

در معادله بالا P فشار هیدرو استاتیک است.

با جایگذاری معادلات (۲) و (۱۷) در معادله (۱۶) رابطه زیر استخراج می‌گردد [۱۸]:

$$\begin{aligned}&L_{11}u+L_{12}v+L_{13}w=0\\&L_{21}u+L_{22}v+L_{23}w=0\\&L_{31}u+L_{32}v+L_{33}w=0\end{aligned}\tag{۱۷}$$

که L_{ij} ها عملگرهایی هستند که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند [۱۶]:

$$\begin{aligned}&L_{11}=A_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{2A_{16}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\frac{A_{66}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\\&L_{12}=L_{21}=\left\{A_{16}+\frac{B_{16}}{R}\right\}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\\&\left\{\frac{(A_{12}+A_{66})}{R}+\frac{(B_{12}+B_{66})}{R^2}\right\}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\left\{\frac{A_{26}}{R^2}+\frac{B_{26}}{R^3}\right\}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\\&L_{22}=\left\{A_{66}+2\frac{B_{66}}{R}\right\}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\\&\left\{2\frac{A_{26}}{R}+4\frac{B_{26}}{R^2}\right\}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\left\{\frac{A_{22}}{R^2}+2\frac{B_{22}}{R^3}\right\}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\\&L_{13}=L_{31}=-B_{11}\frac{\partial^3}{\partial x^3}-3\frac{B_{16}}{R}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial\theta}-\\&\frac{B_{12}+2B_{33}}{R^2}\frac{\partial^3}{\partial x\partial\theta^2}-\frac{B_{26}}{R^3}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}+\frac{A_{12}}{R}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{A_{26}}{R^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\\&L_{23}=L_{32}=-\left\{B_{16}+\frac{D_{16}}{R}\right\}\frac{\partial^3}{\partial x^3}-\\&\left\{\frac{B_{12}+2B_{66}}{R}+\frac{D_{12}+2D_{66}}{R^2}\right\}\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial\theta}-\\&3\left\{\frac{B_{26}}{R^2}+\frac{D_{26}}{R^3}\right\}\frac{\partial^3}{\partial x\partial\theta^2}-\left\{\frac{B_{22}}{R^3}+\frac{D_{22}}{R^4}\right\}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}+\\&\left\{\frac{A_{26}}{R}+\frac{B_{26}}{R^2}\right\}\frac{\partial}{\partial x}+\left\{\frac{A_{22}}{R^2}+\frac{B_{22}}{R^3}+\frac{P}{R}\right\}\frac{\partial}{\partial\theta}\\&L_{33}=\left\{\begin{aligned}&D_{11}\frac{\partial^4}{\partial x^4}+4\frac{D_{16}}{R}\frac{\partial^4}{\partial x^3\partial\theta}+2\frac{D_{12}+2D_{66}}{R^2}\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial\theta^2}+\\&4\frac{D_{26}}{R^3}\frac{\partial^4}{\partial x\partial\theta^3}+\frac{D_{22}}{R^4}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}\end{aligned}\right\}-\\&\left\{2\frac{B_{12}}{R}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+4\frac{A_{26}}{R^2}\frac{\partial^2}{\partial x\partial\theta}+\left(2\frac{B_{22}}{R^3}+\frac{P}{R}\right)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right\}+\frac{A_{22}}{R^2}\end{aligned}\tag{۱۸}$$

۴-۲- شرایط مرزی

توابع u و v باید به نحوی تعیین گردند که شرایط مرزی موردنظر را ارضاء نمایند.

فرم کلی این توابع به‌صورت روابط (۲۰) است [۱۸]:

$$\begin{aligned}&u=U\,f_{11}(x,\theta)\\&v=V\,f_{21}(x,\theta)\\&w=Wf_{31}(x,\theta)\end{aligned}\tag{۱۹}$$

فرم کلی توابع f_{11}، f_{21} و f_{31} که به‌صورت رابطه (۲۱) است [۱۸]:

$$\begin{aligned}&f_{11}(x,\theta)=\frac{\partial\Phi_x}{\partial\theta}\cos(n\theta)\\&f_{21}(x,\theta)=\Phi(x)\sin(n\theta)\\&f_{31}(x,\theta)=\Phi(x)\cos(n\theta)\end{aligned}\tag{۲۰}$$

که $\Phi(x)$ تابع تیری مودال[1] است که به‌صورت معادله (۲۲) تعریف می‌شود [۱۸].

$$\Phi(x)=\alpha_1\cosh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right)+\alpha_2\cos\left(\frac{\lambda_m}{L}\right)-\sigma_m\left\{\alpha_3\sinh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right)-\alpha_4\sin\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right)\right\} \quad (۲۱)$$

در روابط فوق m و n به ترتیب تعداد نیم موج‌های طولی و تعداد موج‌های محیطی ایجادشده در شکل مود کمانش پوسته استوانه‌ای می‌باشند. ضرایب ثابت α_1، α_2، α_3 و α_4 و متغیرهای λ_m و σ_m با توجه به شرایط مرزی دو انتهای استوانه تعیین می‌شوند.

الف- استوانه مشبک با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده

برای شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده داریم [۱۸]:

$$\lambda_m=m\pi,\quad \sigma_m=1 \quad (۲۲)$$

همچنین ضرایب ثابت α_1، α_2، α_3 و α_4 به‌صورت روابط (۲۴) تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned}&x=0\ ,\ x=L\\&N_x=M_x=v=w=0\\&\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=0,\alpha_4=1\end{aligned} \quad (۲۳)$$

به‌این‌ترتیب تابع تیری مودال به‌صورت معادله (۲۵) خواهد بود:

$$\Phi(x)=\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \quad (۲۴)$$

ب- استوانه مشبک با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه گیردار

برای شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه گیردار ضرایب λ_m از حل معادله (۲۶) به دست می‌آیند [۱۸]:

$$\cos\lambda_m\cosh\lambda_m=1 \quad (۲۵)$$

$$\sigma_m=\frac{\cosh\lambda_m-\cos\lambda_m}{\sinh\lambda_m-\sin\lambda_m} \quad (۲۶)$$

همچنین ضرایب ثابت α_1، α_2، α_3 و α_4 به‌صورت رابطه (۲۸) تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned}&x=0\ ,\ x=L\\&u=v=w=\frac{\partial w}{\partial x}=0\\&\alpha_1=1,\alpha_2=-1,\alpha_3=1,\alpha_4=1\end{aligned} \quad (۲۷)$$

۴-۳- روش حل گالرکین

برای حل معادلات حاکم از روش گالرکین استفاده‌شده است. ضمناً استخراج بار بحرانی کمانش برای ساختار هندسی مشبک استوانه‌ای با پوسته بیرونی و درونی تحت فشار خارجی جنبه نوآوری این مطالعه است که به این روش به‌صورت زیر ارائه می‌گردد. پس از تعیین توابع u، v و w، برای حل معادلات تعادل، از روش گالرکین استفاده می‌شود [۱۸]:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\int_0^{L}(L_{11}u+L_{12}v+L_{13}w)\frac{\partial\Phi}{\partial x}dx\,d\theta=0\\&\int_0^{2\pi}\int_0^{L}(L_{21}u+L_{22}v+L_{23}w)\Phi\,dx\,d\theta=0\\&\int_0^{2\pi}\int_0^{L}(L_{31}u+L_{32}v+L_{33}w)\Phi\,dx\,d\theta=0\end{aligned} \quad (۲۸)$$

با محاسبه انتگرال‌های فوق، دستگاه معادلات (۳۰) حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}\\C_{21}&C_{22}&C_{23}\\C_{31}&C_{32}&C_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U\\V\\W\end{bmatrix}=0 \quad (۲۹)$$

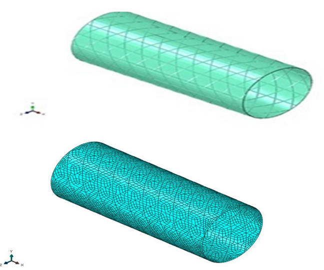
با قرار دادن $\det(C)=0$ معادله مشخصه سیستم به دست می‌آید که با حل آن می‌توان بار بحرانی کمانش را به دست آورد.

۵- مدل‌سازی عددی اجزای محدود

در شکل ۶ مدل المان محدود پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی نشان داده‌شده است:

(الف)

(ب)



شکل ۶-(الف) پوسته استوانه‌ای به همراه تقویتی‌های محیطی و مارپیچی (ب) ساختار مش بندی شده

برای حل مسائل در نرم‌افزار المان محدود ABAQUS دو روش ضمنی[2] و صریح[3] ارائه شده است. در این تحقیق برای حل از روش صریح استفاده‌شده است به دلیل اینکه در مسائل کمانش و هر مسئله دینامیکی که تغییر شکل سازه در آن منجر به تغییرات بنیادی در استحکام ماده می‌شود استفاده از این روش مناسب‌تر است. مدل اجزای محدود تهیه‌شده با استفاده از المان تیر تیموشینکو و المان پوسته مدل‌سازی گردیده بنابراین این مدل توانایی تحلیل استاتیکی و دینامیکی با تغییر ضخامت و پهنای تقویت‌کننده و یا نسبتی از این پارامترها را دارا است. مدل اجزای محدود از سه بخش پوسته، تقویتی طولی و تقویتی محیطی تشکیل‌شده است. برای پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی ترسیم‌شده، چهار لایه با زوایای الیاف متغیر و باضخامت کلی دو میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود از طرفی اگر ضخامت بیش از این باشد تقویت‌کننده‌ها دچار کمانش موضعی می‌شوند و باعث اختلاف نتایج روش تحلیلی با المان محدود می‌گردد. به علت نازکی پوسته، پوسته و مدل از نوع المان پوسته چهار گره ای[4] است و سفتی سازه نیز در حین فرایند حل انتخاب‌شده و به روش سیمپسون انتگرال‌گیری

[1] Modal beam function

[2] Implicit

[3] Explicit

[4] S4R

شده است. برای تقویت‌کننده‌ها یک دستگاه مختصات محلی به‌گونه‌ای تعریف‌شده که محور اصلی آن در امتداد مارپیچ تقویت‌کننده‌ها باشد و با چرخش تقویت‌کننده‌ها، محور دستگاه مختصات نیز دوران نماید. المان تقویت‌کننده‌ها از نوع المان تیر مرتبه اول سه‌بعدی[1] استفاده‌شده است. فشار یکنواخت خارجی معادل یک مگا پاسکال برای سازه در نظر گرفته و شرایط مرزی را برای بهترین حالت که تکیه‌گاه گیردار است انتخاب می‌شود. تحلیل خطی برای کمانش استوانه مشبک کامپوزیتی با پوسته درونی و بیرونی در نظر گرفته شده است.

در ضمن تابه‌حال مطالعه‌ای در خصوص کمانش استوانه مشبک کامپوزیتی با پوسته درونی و بیرونی تحت فشار خارجی با توجه بررسی‌های مراجع مختلف انجام نشده است.

۶- راستی آزمایی

مشخصات مکانیکی و هندسی پوسته استوانه‌ای با چهار لایه و زوایای مختلف به شرح جدول ۱ است [۱۹]. همانطور که در جداول ۲ و ۳ مشاهده میشود نتایج بدست آمده از روش تحلیلی در مقایسه با روش المان محدود و با نرم افزار ABAQUS دارای دقت قابل قبولی می‌باشد.

جدول ۱ - مشخصات پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با چهار لایه (ضخامت هر لایه 0.5mm - ضخامت استوانه t=2mm - شعاع استوانه R=0.2m - طول استوانه L=1m)

زوایای الیاف در ۴ لایه	G23 (GPa)	G12 (GPa)	ν_{12}	E2 (GPa)	E1 (GPa)
[۰٫ ۹۰٫ ۹۰٫ ۰]	5	6.9	0.3	۹	۱۳۸
[۹۰٫۹۰٫۹۰٫۹۰]	5	6.9	0.3	۹	۱۳۸
[۰٫۰٫۰٫۰]	5	6.9	0.3	۹	۱۳۸

مشخصات ساختار مشبک نیز به شرح زیر است:

$$b = (R)\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.15708\ m$$

$$a = 0.1\ m$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{a}{b} = 32.48$$

جدول ۲- نتایج بار بحرانی (pa) کمانش حاصل از روش تحلیلی و المان محدود برای استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک با پوسته بیرونی و درونی دوسرگیردار و زاویه الیاف پوسته [0/0/0/0]

شماره مد	(m,n)	المان محدود(pa)	روش تحلیلی(pa)	اختلاف%
۸	(۴و۲)	۹٫۷۵*$۱۰^{۵}$	۸٫۱۰*$۱۰^{۵}$	۱۶

جدول ۳- نتایج بار بحرانی (pa) کمانش حاصل از روش تحلیلی و المان محدود برای استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک با پوسته بیرونی و درونی دوسرگیردار و زاویه الیاف پوسته [0/90/90/0]

شماره مد	(m,n)	المان محدود(pa)	روش تحلیلی(pa)	اختلاف%
۱	(۳و۱)	۱٫۷۷*$۱۰^{۶}$	۱٫۸۳*$۱۰^{۶}$	۳
۵	(۴و۲)	۲٫۷۷*$۱۰^{۶}$	۲٫۴۴*$۱۰^{۶}$	۱۲

جدول ۴- نتایج بار بحرانی (pa) کمانش حاصل از روش تحلیلی و المان محدود برای استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک با پوسته بیرونی و درونی دوسرگیردار و زاویه الیاف پوسته [90/90/90/90]

شماره مد	(m,n)	المان محدود(pa)	روش تحلیلی(pa)	اختلاف%
۱	(۴و۱)	۷٫۹۵*$۱۰^{۵}$	۵٫۱۶*$۱۰^{۵}$	۳۵
۵	(۵و۱)	۹٫۴۸*$۱۰^{۵}$	۷٫۳*$۱۰^{۵}$	۲۲

۷- نتایج و بحث

در این بخش بار بحرانی کمانش استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک با پوسته بیرونی و درونی برای دو شرط مرزی ساده و گیردار با تغییر پارامترهای هندسی محاسبه شده است. مشخصات فیزیکی و هندسی پوسته در جدول ۱ آورده شده است. پارامترهای مؤثر روی بار بحرانی کمانش عبارت‌اند از: زاویه ریب‌ها، سطح مقطع ریب‌ها، طول سلول واحد که در ادامه به بررسی و مقایسه آن‌ها و میزان اثرگذاری آن‌ها بر بار بحرانی کمانش پرداخته می‌شود.

۷-۱- اثر زاویه ریب ها

اثر زاویه ریب‌ها (ϕ) بر روی بار بحرانی کمانش پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک به شرح زیر موردمطالعه قرارگرفته است. مشخصات شبکه تقویت‌کننده‌ها نیز به شرح زیر است:

$$a = 0.2 \qquad \phi = variable \qquad b = \frac{a}{\tan\phi}$$

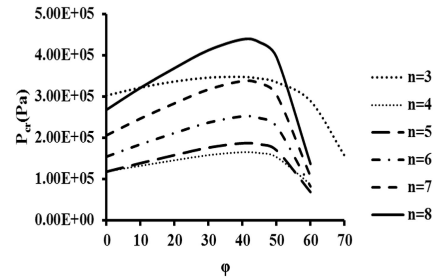
$$E_l = 138\ \ Gpa \qquad A = 30mm^2$$

در شکل‌های ۷ و ۸ تغییرات بار بحرانی کمانش با زاویه ریب‌ها برای ساختار مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده و دوسرگیردار برای شکل مودهای نظیر ۱ $= m$ و n های مختلف آورده شده است.

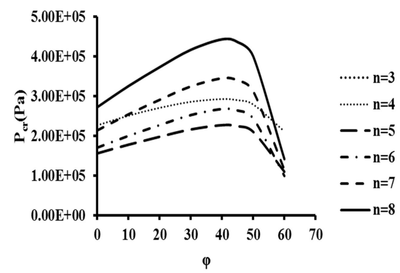
همان‌طور که مشاهده می‌شود در تمامی شکل مودها برای هر دو شرط مرزی موردنظر، حداکثر مقدار بار بحرانی کمانش به ازای $\varphi = 40°$ رخ می‌دهد. همچنین نکته دیگری که در این نمودار حائز اهمیت است محل تلاقی خطوط نمودار با یکدیگر است که نشان‌دهنده تغییر در توالی شکل مودهاست. بررسی نتایج نشان می‌دهد که برای تقویت پوسته، به تعداد حداقلی از تقویت‌کننده نیاز است که افزایش زاویه تا قبل از رسیدن به مود کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها باعث افزایش سختی معادل و بار بحرانی کمانش می‌شود و افزایش بیشتر زاویه، باعث

[1] B31

کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها و درنتیجه کاهش بار بحرانی و کمانش سازه می‌گردد؛ که همین امر باعث تغییر در توالی مدها است.



شکل ۷- تغییرات بار بحرانی کمانش با زاویه تقویت‌کننده‌ها (ϕ) برای استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده برای شکل مودهای نظیر $m=1$



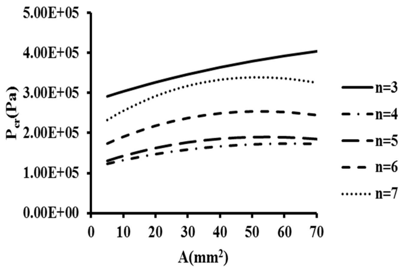
شکل ۸- تغییرات بار بحرانی کمانش با زاویه تقویت‌کننده‌ها (ϕ) برای استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه گیردار برای شکل مودهای نظیر $m=1$

۷-۲-سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها

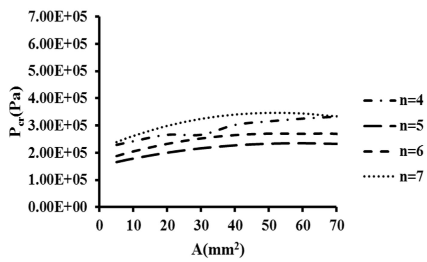
اثر سطح مقطع ریب‌ها (A) بر روی بار بحرانی کمانش استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک با پوسته بیرونی و درونی قابل‌توجه بوده و به شرح زیر مورد بررسی قرارگرفته است. اگر مشخصات شبکه تقویت‌کننده‌ها نیز به شرح زیر باشد:

$$a = 0.2 \qquad \phi = 30 \qquad b = \frac{a}{\tan\phi}$$
$$E_l = 138 \ \ Gpa \qquad A = variable$$

در شکل‌های ۹ و ۱۰ تغییرات بار بحرانی کمانش با سطح مقطع ریب‌ها برای ساختار مشبک با پوسته بیرونی و درونی بـا شـرط مـرزی دو سـر تکیه‌گاه ساده و گیردار بـرای شـکل مودهـای نظیـر $m=1$ و n هـای مختلف آورده شده است. در تمـامی شـکل مودهـا بـرای هـر دو شـرط مرزی موردنظر، یک مقدار مطلوب برای پـارامتر A وجـود دارد کـه بـه ازای آن فشار بحرانی کمانش به بیشینه مقدار خود می‌رسـد. همچنـین تغییرات پارامتر A نیز می‌تواند موجـب تغییـر در تـوالی شـکل مودهـا گردد که محل تلاقی منحنی‌ها در هر نمودار نشان‌دهنـده ایـن مسـئله است. افزایش سطح مقطع تقویت‌کننـده‌هـا بـه ازای ضـخامت یکسـان پوسته، مود کمانش سازه را به سمت کمانش پوسته سوق مـی‌دهـد. در محدوده کمانش کلی سازه و کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها، با افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها بار بحرانی افزایش می‌یابد اما اثـر آن از اثـر افزایش وزن سازه کمتر است و درنتیجه بار بحرانی ویژه سازه با کـاهش مواجه می‌شود.



شکل ۹- تغییرات بار بحرانی کمانش با سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها (A) برای استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده برای شکل مودهای نظیر $m = 1$



شکل ۱۰- تغییرات بار بحرانی کمانش با سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها (A) برای استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه گیردار برای شکل مودهای نظیر $m = 1$

۷-۳- اثر اندازه طول سلول مشبک (a)

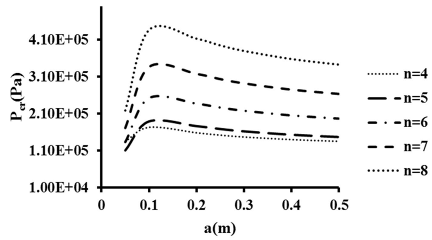
در این بخش اثر اندازه طول سلول مشبک (a) بر روی بار بحرانی کمانش استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک با پوسته بیرونی و درونی مورد بررسی قرارگرفته است. مشخصات شبکه تقویت‌کننده‌ها نیز به شرح زیر است:

$$a = variable \qquad \phi = 30 \qquad b = \frac{a}{\tan\phi}$$
$$E_l = 138 \ \ Gpa \qquad A = 30mm^2$$

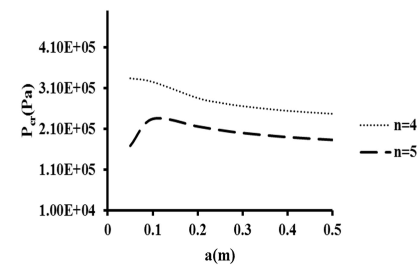
تغییرات بار بحرانی کمانش با اندازه طول سلول مشـبک بـرای سـاختار مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه سـاده و گیردار برای شـکل مودهـایی نظیـر $m=1$ در شـکل‌هـای ۱۱ و ۱۲ آورده شده است.

از نتایج بدست آمده، مشاهده می‌شود که در تمامی شکل مودهـا بـرای هر دو شرط مرزی موردنظر، با افزایش پارامتر اندازه طـول سـلول (a) بار بحرانی کمانش ابتدا افزایش‌یافته و سپس رو به کـاهش مـی‌گـذارد. درواقع می‌توان یک مقدار مطلوب برای a تعیین نمـود کـه بـه ازای آن فشار بحرانی کمانش به ماکزیمم مقدار خود می‌رسد. همچنین تغییرات پارامتر a نیز می‌تواند موجب تغییر در توالی شـکل مودهـا گـردد کـه

محل تلاقی منحنی‌ها در هر نمـودار نشـان‌دهنـده ایـن مسـئله اسـت. بررسی نتایج نشان می‌دهد که برای تقویت پوسته، به تعداد حـداقلی از تقویت‌کننده نیاز است و افزایش اندازه طول سلول تا قبل از رسیدن بـه مود کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها باعث افزایش سـفتی معـادل و بـار بحرانی کمانش می‌شود که افزایش بیشتر فاصله باعث کمانش موضـعی تقویت‌کننده‌ها و درنتیجه کاهش بار بحرانی و کمانش سازه مـی‌گـردد. همین امر باعث تغییر در توالی مدها است.



شکل ۱۱- تغییرات بار بحرانی کمانش با طول سلول مشبک (a) برای استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه ساده برای شکل مودهای نظیر $m=1$



شکل ۱۲- تغییرات بار بحرانی کمانش با طول سلول مشبک (a) برای استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی با شرط مرزی دو سر تکیه‌گاه گیردار برای شکل مودهای نظیر $m=1$

۸-نتیجه‌گیری

در این مقاله کمانش استوانه مشبک با پوسته بیرونی و درونی تحت فشار خارجی و شرایط مرزی تکیه‌گاهی ساده و گیردار به روش گالرکین و شبیه‌سازی عددی اجزای محدود بررسی گردید.
خلاصه‌ای از نتایج به شرح ذیل است:

- کم بودن اختلاف نتایج روش تحلیلی و عددی نشان می‌دهد که روش تحلیلی از دقت قابل قبولی برخوردار است.
- با افزایش زاویه تقویت‌کننده‌ها مقدار بار بحرانی کمانش در تمامی مودها در نمودارها ابتدا افزایش‌یافته و سپس با افزایش بیشتر کاهش می‌یابد و با بررسی آن مشخص می‌شود که برای تقویت پوسته، به تعداد حداقلی از تقویت‌کننده نیاز است و افزایش زاویه تا قبل از رسیدن به مود کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها باعث افزایش سفتی معادل و بار بحرانی کمانش می‌شود که با افزایش بیشتر زاویه باعث کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها و درنتیجه کاهش بار بحرانی و کمانش سازه می‌گردد.
- با افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها (A) بار بحرانی کمانش در تمامی مودها ابتدا افزایش‌یافته و سپس با افزایش بیشتر کاهش می‌یابد. افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها به ازای ضخامت یکسان پوسته مود کمانش سازه را به سمت کمانش پوسته سوق می‌دهد. در محدوده کمانش کلی سازه و کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها، با افزایش سطح مقطع تقویت‌کننده‌ها بار بحرانی افزایش می‌یابد اما اثر آن از اثر افزایش وزن سازه کمتر است و درنتیجه بار بحرانی ویژه سازه با کاهش مواجه می‌شود.
- با افزایش پارامتر طول سلول مشبک (a) بار بحرانی کمانش در تمامی مودها در نمودارها ابتدا افزایش‌یافته و سپس با افزایش بیشتر کاهش می‌یابد. درواقع می‌توان یک مقدار مطلوب برای (a) تعیین نمود که به ازای آن فشار بحرانی کمانش به بیشینه مقدار خود می‌رسد. بررسی نتایج نشان می‌دهد که برای تقویت پوسته، به تعداد حداقلی از تقویت‌کننده نیاز است و افزایش طول سلول مشبک تا قبل از رسیدن به مود کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها باعث افزایش سفتی معادل و بار بحرانی کمانش می‌شود که افزایش بیشتر فاصله باعث کمانش موضعی تقویت‌کننده‌ها و درنتیجه کاهش بار بحرانی و کمانش سازه می‌گردد.

۹-پیشنهادها

برخی پیشنهادها جهت ادامه و تکمیل کار انجام‌شده عبارت‌اند از:

- تحلیل فرکانسی ساختار به روش گالرکین
- استفاده از روشهای تحلیلی دیگر جهت حل
- اثر دما بر بار بحرانی کمانش و فرکانس طبیعی

توضیحات مربوط به ماتریس سفتی انتقال‌یافته

رابطه (*) ماتریس سفتی اصلاح شده تنش صفحه ای[1] برای یک لامینت است.

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \qquad (*)$$

$$Q_{11} = \frac{E_{11}^2}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}} \quad , \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_{11} E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_{11} E_{22}}{E_{11} - \nu_{12}^2 E_{22}} \quad , \quad Q_{66} = G_{12}$$

[1] Plane stress-reduced stiffness

$$\overline{Q_{11}}=Q_{11}\cos(\theta)^4+2(Q_{12}+2Q_{66})\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2+Q_{22}\sin(\theta)^4$$
$$\overline{Q_{12}}=\overline{Q_{21}}=Q_{12}\left(\cos(\theta)^4+\sin(\theta)^4\right)+(Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2$$
$$\overline{Q_{16}}=\overline{Q_{61}}=(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\cos(\theta)^3\sin(\theta)-(Q_{22}-Q_{12}-2Q_{66})\cos(\theta)\sin(\theta)^3$$
$$\overline{Q_{22}}=Q_{11}\sin(\theta)^4+2(Q_{12}+2Q_{66})\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2+Q_{22}\cos(\theta)^4$$
$$\overline{Q_{26}}=\overline{Q_{62}}=(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\cos(\theta)\sin(\theta)^3-(Q_{22}-Q_{12}-2Q_{66})\cos(\theta)^3\sin(\theta)$$
$$\overline{Q_{66}}=(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})\cos(\theta)^2\sin(\theta)^2+Q_{66}\left(\cos(\theta)^4+\sin(\theta)^4\right)$$

رابطه (**) ماتریس ماتریس سفتی اصلاح شده تنش صفحه ای برای یک‌چند لایه با زاویه الیاف است.

$$\overline{Q_{ij}}=\begin{bmatrix}\overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16}\\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26}\\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66}\end{bmatrix} \qquad (**)$$

۱۰-مراجع

[1] Vasiliev V. V., Barynin V. A. and Razin A. F., Anisogrid composite lattice structures–Development and aerospace applications, *Compos. Struct.*, Vol. 94, No. 3, pp. 1117–1127, 2012.

[2] A. C. Ugural, *Stresses in Plates and Shells*. McGraw-Hill, 1981.

[3] Jaunky N., Knight N. F. and Ambur D. R., Formulation of an improved smeared stiffener theory for buckling analysis of grid-stiffened composite panels, *Compos. Part B Eng.*, Vol. 27, No. 5, pp. 519–526, 1996.

[4] Kidane S., Li G., Helms J., Pang S.-S. and Woldesenbet E., Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders," *Compos. Part B Eng.*, Vol. 34, No. 1, pp. 1–9, 2003.

[5] Fan H., Yang L., Sun F. and Fang D., Compression and bending performances of carbon fiber reinforced lattice-core sandwich composites, *Compos. Part A Appl. Sci. Manuf.*, Vol. 52, pp. 118–125, 2013.

[6] Rathinam N. and Prabu B., Static buckling analysis of thin cylindrical shell with centrally located dent under uniform lateral pressure, *Int. J. Steel Struct.*, Vol. 13, No. 3, pp. 509–518, Sep. 2013.

[7] Zheng Q., Ju S. and Jiang D., Anisotropic mechanical properties of diamond lattice composites structures, *Compos. Struct.*, Vol. 109, pp. 23–30, 2014.

[8] Sun J., Xu X. and Lim C. W., Buckling of cylindrical shells under external pressure in a Hamiltonian system, *J. Theor. Appl. Mech.*, Vol. 52, No. 3, pp. 641–653, 2014.

[9] Sofiyev A. H. and Kuruoglu N., Buckling and vibration of shear deformable functionally graded orthotropic cylindrical shells under external pressures, *Thin-Walled Struct.*, Vol. 78, pp. 121–130, 2014.

[10] Fan H., Qu Z., Xia Z. and Sun F., Designing and compression behaviors of ductile hierarchical pyramidal lattice composites, *Mater. Des.*, Vol. 58, pp. 363–367, 2014.

[11] Satouri S., Kargarnovin M. H., Allahkarami F. and Asanjarani A., Application of third order shear deformation theory in buckling analysis of 2D-functionally graded cylindrical shell reinforced by axial stiffeners, *Compos. Part B Eng.*, Vol. 79, pp. 236–253, 2015.

[12] Sofiyev A. H., Buckling analysis of freely-supported functionally graded truncated conical shells under external pressures, *Compos. Struct.*, Vol. 132, pp. 746–758, 2015.

[13] V Lopatin A., Morozov E. V. and Shatov A. V., Buckling of uniaxially compressed composite anisogrid lattice plate with clamped edges, *Compos. Struct.*, vol. 157, pp. 187–196, 2016.

[14] Tu T. M. and Van Loi N., Vibration Analysis of Rotating Functionally Graded Cylindrical Shells with Orthogonal Stiffeners, *Lat. Am. J. Solids Struct.*, Vol. 13, No. 15, pp. 2952–2969, 2016.

[15] Reddy J. N., *Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis*. CRC press, 2004.

[16] Qatu M. S., *Vibration of laminated shells and plates*. Elsevier, 2004.

[17] Lopatin A. V and Morozov E. V, Buckling of the composite sandwich cylindrical shell with clamped ends under uniform external pressure, *Compos. Struct.*, Vol. 122, pp. 209–216, 2015.

[18] Lam K. Y. and Loy C. T., Influence of boundary conditions for a thin laminated rotating cylindrical shell, *Compos. Struct.*, Vol. 41, No. 3–4, pp. 215–228, 1998.

[19] www.performance-composite.com.