مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۸۷، جلد ۴۹، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۸، صفحه ۲۰۹-۲۱۷

بررسی عددی ارتعاشات اجباری غیرخطی ورق های مستطیلی مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف با در نظر گرفتن نظریه الاستیسیته سه بعدی

یوسف غلامی وسمه جانی دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

رضا انصاری خلخالی* دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه گیلان، رشت، ایران

چکیده

تحقیقات انجام شده به وسیله محققان در بررسی ارتعاشات اجباری ورق‌های مستطیلی براساس نظریه الاستیسیته سه بعدی، محدود به حل تحلیلی در شرایط مرزی ساده یا تحلیل‌های خطی است، در این تحقیق با برطرف کردن محدودیت‌های گذشته، ارتعاشات اجباری ورق‌های مدرج تابعی براساس نظریه الاستیسیته سه‌بعدی و با در نظر گرفتن جملات غیرخطی هندسی در شرایط تکیه گاهی مختلف بررسی می‌شود. مواد سازنده ورق آلومینیوم و آلومینا می‌باشد که براساس قانون توانی در جهت ضخامت ورق تغییر می‌کنند. به منظور دستیابی به معادلات حاکم و شرایط مرزی برحسب جابجایی، از رابطه گرین-لاگرانژ، تنش-کرنش و اصل همیلتون استفاده شده است. با استفاده از روش دیفرانسیلی تعمیمیافته، معادلات غیرخطی کوپل در محدوده مکان گسسته می‌شوند. سپس با استفاه از تکنیک گلرکین عددی، دسته معادلات غیرخطی حاکم به معادلات دیفرانسیلی تابع زمان نوع دافینگ تبدیل می‌شوند که با استفاده از الگوریتم طول کمان حل می‌شوند، سرانجام، اثرات هندسی، دامنه بار و نسبت میرایی بر پاسخ فرکانسی در شرایط تکیه گاهی مختلف مورد بررسی قرار می گیرد.

واژه‌های کلیدی: ورق مدرج تابعی، ارتعاشات اجباری غیرخطی، نظریه الاستیسیته سه بعدی، تحلیل عددی.

Numerical Analysis of Nonlinear Forced Vibration of Functionally Graded Rectangular Plates with Various Boundary Conditionsusing3D theory of Elasticity

Y. Gholami Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

R. Ansari Khalkhali Department of Mechanical Engineering, University of Guilan, Rasht, Iran

Abstract

Researchesdone by researchers on the forced vibration analysis of rectangular plates based on the three-dimensional elasticity theory are limited to the analytical solutions for simply-supported boundary conditions or linear analyses. In this study, by eliminating the previous limitations, the forced vibration of functionally graded rectangular plates with different boundary conditions is examined based on three-dimensional theory of elasticity and taking into account the geometrically nonlinearity.The rectangular plate is made of the aluminum and alumina in which are distributed through the thickness direction according to a power law for functionally graded materials. In order to achieve the governing equations and corresponding boundary conditions in terms of displacements, Green-Lagrange, stress-strain relations and Hamilton's principle are used. The nonlinear coupled governing equations are discretized in the space domain using the generalized differential quadrature (GDQ) method.Then, utilizing the numerical-based Galerkin scheme, one can obtain a time-varying set of ordinary differential equations of Duffing type. The arc-length method is employed to solve the vectorized form of nonlinear parameterized equations. Finally, to have a comprehensive study on the effects of geometrical parameters,forcingamplitude and damping ratio on the frequency-response curve of functionally graded rectangular plateswith different boundary conditions are examined.

Keywords: Functionally graded plate, Geometrically nonlinear force vibrations, three-dimensional theory of elasticity, Numerical solution procedure.

۱- مقدمه

در سال های اخیر، مواد مدرج تابعی اهمیت قابل توجهی در محیط هایی با دمای بالا مانند راکتورهای هسته ای و تولید مواد شیمیایی به دست آورده‌اند. مواد مدرج تابعی به عنوان یک ماده ساختاری بالقوه برای فضاپیماها با سرعت بالا در آینده در نظر گرفته خواهند شد[۱]. مواد مدرج تابعی مواد همگن میکروسکوپی هستند که به تدریج از سطحی به سطح دیگر در حال تغییر هستند. این تغییر کسر حجمی مواد تشکیل دهنده‌ی باعث تغییر خواص مواد مدرج تابعی می‌شود، این مواد جدید برای اولین بار توسط گروهی از دانشمندان در سندای ژاپن معرفی شد[۲]. به طور عمومی این مواد مخلوطی از سرامیک و فلز یا ترکیبی از فلزهای مختلف ساخته شده‌اند. مزیت استفاده از این مواد مقاومت آن‌ها به حفظ تمامیت ساختاری در مقابل تغییرات بالای دمای محیط است. مقاومت مواد سرامیکی در مقابل گرما بالا به خاطر رسانایی گرمایی پایین آن‌ها می‌باشد از طرف دیگر فلز تشکیل دهنده‌ی مواد به دلیل انعطاف‌پذیری در مقابل تنش‌های دمایی، باعث جلوگیری از شکست می‌شود، بنابراین ترکیبی از فلز و سرامیک با تغییر پیوسته کسری حجمی به راحتی می‌تواند تولید گردد[۳-۶].

ویژگی‌های ارتعاشی صفحات ضخیم ساخته شده از مواد مدرج تابعی توجه بسیاری از مهندسان را در طراحی وساخت به خود جلب کرده

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: ransari.guilan@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۶/۰۲/۰۱
تاریخ پذیرش: ۹۷/۰۷/۰۲

است. مطالعات گذشته نشان می‌دهد که در بسیاری از تحقیقات گذشته روی ارتعاشات ورق‌های مدرج تابعی با استفاده از نظریه‌های دو بعدی مانند: نظریه کلاسیک ورق‌های مستطیلی،نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی ونظریه مرتبه بالای تغییر شکل برشی انجام شده است[۷-۱۴]. به طور مثال، یانگ و شن[۷] از نظریه کلاسیک برای پاسخ دینامیکی ورق نازک مستطیلی مدرج تابعی در معرض تنش اولیه صفحه‌ای روی پایه الاستیک قرار دارد، استفاده کردند.آن‌ها نشان دادند که مواد با خصوصیات متوسط فرکانس طبیعی متوسط و پاسخ گذرا دارند. چنگ و همکارش[۸] کمانش و ارتعاشات ورق‌های ناهمگن روی پایه الاستیک را با استفاده از نظریه‌های کلاسیک و نظریه مرتبه اول برشی مورد مطالعه قرار داده‌اند.چنگ و باترا[۹] با استفاده از نظریه تغییر شکل مرتبه سوم ردی کمانش و ارتعاشات ورق مستطیلی روی بستر الاستیک را در شرایط مرزی ساده مطالعه کرده‌اند. چنگ و باترا [۱۵] به بررسی تغییر شکل ترموالاستیک سه‌بعدی یک صفحه بیضوی مدرج تابعی در شرایط مرزی گیردار پرداخته‌اند. ول و همکارانش[۱۶] ارتعاشات آزاد و اجباری خطی ورق های مستطیلی مدرج تابعی براساس تئوری الاستیسته سه بعدی با شرایط تکیه گاهی ساده با استفاده از حل تحلیلی مورد برررسی قرار داده‌اند و با مقایسه با نتایج حاصل از نظریه‌های کلاسیک صفحه‌ای، نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول و مرتبه سوم نشان داده‌اند که برای مواد مدرج تابعی نظریه تغییر شکل مرتبه اول جواب دقیق تری نسبت به نظریه مرتبه سوم استخراج می-گردد. زو و همکارش[۱۷]با حل تحلیلی به بررسی تنش و جابجایی ورق مستطیلی مدرج تابعی با تغییر ضخامت در شرایط مرزی ساده پرداخته‌اند. علی بیگو و علیزاده[۱۸] به تحلیل رفتار استاتیکی و ارتعاشات آزاد ورق‌های ساندویچی مدرج تابعی با استفاده از نظریه الاستیسته سه بعدی در شرایط تکیه گاهی ساده پرداخته‌اند. علی بیگو و عبدالله زاده [۱۹] به بررسی ارتعاشات آزاد سه‌بعدی نانو ورق‌های مستطیلی براساس نظریه الاستیسیته غیرمحلی پرداخته‌اند. بسطامی و بهجت[۲۰] حل تحلیلی کمانش و ارتعاشات نانو ورق‌های مدرج تابعی در بستر الاستیک را با در نظر گرفتن اثرات موضعی مورد بررسی قرار دادند و مشاهده کرده‌اند که افزایش طول باعث کاهش فرکانس طبیعی و بار بحرانی سیستم می‌شود. اله‌کرم و سربزدی[۲۱] به تحلیل ارتعاشات آزاد پواسته‌های نازک و نسبتا ضخیم مواد مدرج تابعی دوجهته براساس نظریه مرتبه اول برشی پرداخته‌اند. و اهمیت پوسته-های مدرج تابعی دو جهته نسبت به پوسته‌های مدرج تابعی معمولی را بیان کرده‌اند.

با مرور کارهای گذشته، مشاهده می‌گردد که مطالعات انجام شده روی رفتارهای مکانیکی (خمشی و ارتعاشی) ورق‌های مدرج تابعی با در نظر گرفتن نظریه‌های دوبعدی انجام شده است. نظریه های دوبعدی کلاسیک به دلیل صرف‌نظر از تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی قادر به پیش‌بینی درست رفتارهای ارتعاشی سازه‌های نسبتاً ضخیم به دلیل افزایش اهمیت تغییر شکل برشی با افزایش نسبت ضخامت به طول، نیست و عموماً برای پیش‌بینی رفتار سازه‌های نازک به کار می-رود. میندلین با فرض توزیع کرنش برشی ثابت در جهت ضخامت، نظریه تغییر شکل مرتبه اول را ارائه کرد و با در نظرگرفتن ضریب تصحیح برشی، خطای ناشی از تقریب یکنواخت را تصحیح کرد. این نظریه نتایج دقیق‌تری برای رفتار ارتعاشی سازه‌های ضخیم پیش‌بینی می‌کند.

به طور کلی، نظریه های دوبعدی با در نظر گرفتن فرضیات خاصی در مدل ریاضی و معادلات استخراج شده با استفاده از نظریه های سه‌بعدی به‌دست می‌آیند. ساده‌سازی در استخراج و حل معادلات، منجر به خطاهایی در پیش‌بینی رفتارهای ارتعاشی سازه‌های نسبتاً ضخیم می-گردد. به همین دلیل، نظریه های دوبعدی قادر به پیش‌بینی رفتار دقیقی از سازه‌های ضخیم و نسبتاً ضخیم نیستند. هم‌چنین، نظریه‌های سه‌بعدی درک فیزیکی بهتر و واقعی‌تری نسبت به مساله ارائه می‌کنند که با استفاده از نظریه‌های دوبعدی امکان پذیر نیست. علاوه بر این، مرور کارهای انجام شده نشان می‌دهد که مطالعات انجام شده با صرف نظر از ترم‌های غیرخطی هندسی و در شرایط تکیه‌گاهی ساده انجام شده است. هم‌چنین، تجریه و تحلیل ارتعاشات اجباری غیرخطی ورق-های مدرج تابعی برای ورق‌های ضخیم و نسبتا ضخیم در شرایط تکیه-گاهی مختلف با در نظر گرفتن نظریه الاستیسیته سه‌بعدی انجام نشده است.

در مقاله حاضر، ارتعاشات اجباری ورق‌های مدرج تابعی براساس نظریه الاستیسیته سه بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد که ابتدا با استفاده از رابطه کرنش-جابجایی گرین-لاگرانژ، رابطه تنش- کرنش و اصل همیلتون معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر به‌دست می آید برای حل معادلات ابتدا با استفاده از روش تربیع دیفرانسیل تعمیم یافته، گلرکین عددی، گسسته سازی در متناوب زمانی معادلات به فرم برداری نوشته می‌شوند سپس، از الگوریتم طول کمان برای حل پارامترهای غیرخطی استفاده می‌شود و پاسخ های فرکانسی متناظر با ارتعاشات اجباری به دست می‌آید.به منظور دستیابی به بررسی جامع اثرات نسبت طول به ضخامت، طول به عرض و شاخص کسر حجمی مورد بررسی قرار می گیرد.

۲- استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر

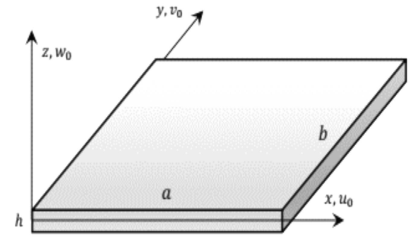
با در نظر گرفتن ورق مستطیلی مدرج تابعی و تئوری الاستیسیته سه بعدی، مواد تشکیل دهنده ی ورق، معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر به صورت زیر به دست می‌آید:

۲-۱- خواص مادی ورق مستطیلی مدرج تابعی

شکل ۱ ورق مستطیلی طول a، عرض b و ضخامت hدر سیستم مختصات دکارتی $(0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b,\ -h/2 \le z \le h/2)$را نشان می‌دهد. مواد تشکیل دهنده ورق برحسب قانون توانی برای مواد مدرج تابعی توزیع شده است که لبه پایین$(z = -h/2)$آن فلز خالص و لبه بالای آن $(z = h/2)$با سرامیک خالص غنی شده است. نحوه توزیع مواد مدرج تابعی و تغییر خواص مکانیکی به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$V_c(z) = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k, V_m(z) = 1 - \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^k \qquad (۱)$$

که V^cکسر حجمی سرامیک،V^mکسر حجمی فلز و k شاخص کسر حجمیمی‌باشد.

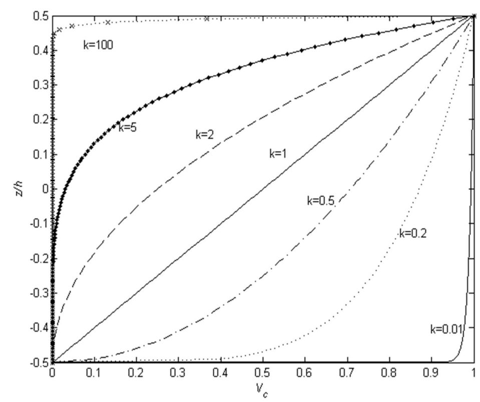


شکل ۱ - شکل طرحواره یک ورق مستطیلی مدرج تابعی

خواص مکانیکی مواد نظیر مدول یانگ E، ضریب پواسون ν و چگالی جرمی ρ به با در نظر گرفتن کسر حجمی سرامیک و فلز صورت زیر بیان می‌گردد:

$$E(z) = E_c V_c + E_m V_m, \qquad \nu(z) = \nu_c V_c + \nu_m V_m, \qquad (۲)$$
$$\rho(z) = \rho_c V_c + \rho_m V_m$$

نحوه توزیع کسر حجمی سرامیک به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۲-تغییر کسر حجمی V_c در طول ضخامت با تغییر شاخص حجمی

۲-۲- نظریه الاستیسیته سه بعدی و استخراج معادلات

با در نظر گرفتن نظریه الاستیسیته سه بعدی، میدان جابجایی در راستای جهت های x،y و z به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_x = u_0(t,x,y,z)\ ,\quad u_y = v_0(t,x,y,z), \qquad (۳)$$
$$u_z = w_0(t,x,y,z)$$

طبق روابط گرین-لاگرانژ، رابطه غیرخطی کرنش- جابجایی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_j}\right) \qquad (۴)$$

علاوه بر این، روابط بین مؤلفه‌های تنش و کرنش را می‌توان به صورت رابطه (۵)بیان کرد:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} = \lambda \varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} \qquad (۵)$$

که در آن δ_{ij} نشان‌دهنده‌ی دلتای کرونیکر و $\lambda = E\nu/[(1-2\nu)(1+\nu)]$ و $\mu = E/[2(1+\nu)]$ ثابت‌های لامه هستند که E و ν به ترتیب مدول یانگ و ضریب پواسون می‌باشند. رابطه‌ی (۵) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \qquad (۶)$$

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu,$$
$$C_{12} = C_{12} = C_{12} = \lambda$$
$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \mu$$

مطابق رابطه‌ی (۴) و میدان جابجایی (۳)، مؤلفه‌های غیرخطی کرنش-ها به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right),$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial y}\right)^2\right),$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w_0}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u_0}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)^2\right),$$
$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial y}\right), \qquad (۷)$$
$$\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial x}\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial x}\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\frac{\partial w_0}{\partial z}\right),$$
$$\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial u_0}{\partial y}\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial v_0}{\partial y}\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\frac{\partial w_0}{\partial z}\right).$$

لازم به ذکر است که با جایگذاری کرنش‌های بدست آمده در رابطه‌ی فوق در رابطه‌ی (۶)، مؤلفه‌های تنش را می‌توان بر حسب مؤلفه‌های جابجایی بدست آورد.

انرژی کرنشی برای مواد الاستیک خطی را نیزمی‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Pi_s = \frac{1}{2}\int_V (\boldsymbol{\sigma}:\boldsymbol{\varepsilon})dV = \frac{1}{2}\int_V (\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}\varepsilon_{xx})dV \qquad (۸)$$

هم‌چنین، مطابق میدان جابجایی (۳)، انرژی جنبشی ورق و انرژی پتانسیل ناشی از کار خارجی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\Pi_T = \int_A \rho\left\{\left(\frac{\partial u_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_0}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_0}{\partial t}\right)^2\right\}dA \qquad (۹\text{-الف})$$

$$\Pi_P = \int_V qw dA \qquad (۹\text{-ب})$$

حال، با استفاده از اصل همیلتون

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(\Pi_T - \Pi_s + \Pi_P)dt = 0 \qquad (۱۰)$$

با جایگذاری کرنش‌های غیرخطی (۷) در انرژی پتابسیل کرنشی (۸)، محاسبه تغییرات انرژی پتانسیل کرنشی و جنبشی و سپس استفاده از اصول اساسی حساب تغییرات، معادلات غیرخطی سه بعدی حاکم بر حرکت ورق مستطیلی به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + Z_1 = \rho\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} \qquad (۱۱\text{-الف})$$
$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} + Z_2 = \rho\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} \qquad (۱۱\text{-ب})$$
$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + Z_3 = \rho\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \qquad (۱۱\text{-ج})$$

که در آنجملات غیر خطی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Z_i = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xz}\frac{\partial u_i}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_{xy}\frac{\partial u_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\sigma_{yz}\frac{\partial u_i}{\partial y}\right) + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sigma_{jj}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right). \qquad (۱۲)$$

که $(1,2,3) = (x, y, z)$.

علاوه بر این، شرایط مرزی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\delta \mathrm{u_k} = 0 \text{ or } \left(\sigma_{\mathrm{kl}} + \sigma_{kl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)n_l = 0 \qquad (۱۳)$$

اکنون، با قرار دادن معادلات (۱۰) و (۱۲) در معادلات (۱۴) ، معادلات غیر خطی کلاسیک ورق مستطیلی برحسب جابجایی‌ها به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}&C_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + C_{12}\frac{\partial^2 v_0}{\partial x\partial y} + C_{13}\frac{\partial w_0}{\partial x\partial z}\\ &+C_{55}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z\partial x}\right) + \frac{\partial C_{55}}{\partial z}\left(\frac{\partial u_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\\ &+C_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial x}\right) + z_1 = \rho\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}\end{aligned} \qquad \text{(۱۴- الف)}$$

$$\begin{aligned}&C_{12}\frac{\partial^2 u_0}{\partial y\partial x} + C_{22}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + C_{23}\frac{\partial^2 w_0}{\partial y\partial z}\\ &+C_{66}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial C_{44}}{\partial z}\left(\frac{\partial v_0}{\partial z} + \frac{\partial w_0}{\partial y}\right)\\ &+C_{44}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial z\partial y}\right) + z_2 = \rho\frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2},\end{aligned} \qquad \text{(۱۴- ب)}$$

$$\begin{aligned}&C_{13}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial z} + C_{23}\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial z} + C_{33}\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + \frac{\partial C_{13}}{\partial z}\frac{\partial u_0}{\partial x}\\ &+\frac{\partial C_{23}}{\partial z}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial C_{33}}{\partial z}\frac{\partial w_0}{\partial z}\\ &+C_{55}\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right)\\ &+C_{44}\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y\partial z} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2}\right) + q + z_3 = \rho\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}.\end{aligned} \qquad \text{(۱۴- ج)}$$

که در آن z_1، z_2 و z_3 مؤلفه‌های غیرخطی هستند که برای رعایت اختصار در اینجا آورده نمی‌شوند.

با استفاده از رابطه‌ی (13)، ترکیبات مختلفی از شرایط مرزی را می‌توان برای ورق‌های مستطیلی در نظر گرفت. در این مطالعه، شرایط مرزی ساده (SSSS)، شرایط مرزی گیردار (CCCC) و شرایط مرزی دوسر گیردار و دو سر ساده (CSCS) در نظر گرفته شده است که به صورت زیر بیان می‌شوند:

- شرایط مرزی SSSS:

لبه‌های $x = 0, a$:

$$\sigma_{\mathrm{xx}} + \sigma_{xx}\frac{\partial u_0}{\partial x} + \sigma_{xy}\frac{\partial u_0}{\partial y} + \sigma_{xz}\frac{\partial u_0}{\partial z} = 0, v_0 = w_0 = 0$$

لبه‌های $y = 0, b$:

$$\sigma_{\mathrm{yy}} + \sigma_{xy}\frac{\partial v_0}{\partial x} + \sigma_{yy}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \sigma_{yz}\frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, u_0 = w_0 = 0$$

- شرایط مرزی CCCC:

لبه‌های $x = 0, a$:

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0$$

لبه‌های $y = 0, b$:

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0$$

- شرایط مرزی CSCS:

لبه‌های $x = 0, a$:

$$u_0 = v_0 = w_0 = 0$$

لبه‌های $y = 0, b$:

$$\sigma_{\mathrm{yy}} + \sigma_{xy}\frac{\partial v_0}{\partial x} + \sigma_{yy}\frac{\partial v_0}{\partial y} + \sigma_{yz}\frac{\partial v_0}{\partial z} = 0, u_0 = w_0 = 0$$

۳- روش حل مساله

۳-۱- گسسته سازی معادلات در حوزه مکان

معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر با استفاده از روش تربیعدیفرانسیلی تعمیم یافته گسسته می‌شوند. برطبق توزیع چبیشف گاوس-لوباتو نقاط گسسته شده در امتداد جهت های x، y وz به صورت زیر توزیع می‌شوند:

$$\begin{aligned}\zeta_i &= \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{i-1}{N-1}\right)\right), \qquad i = 1,2,\dots,N\\ \eta_j &= \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{j-1}{M-1}\right)\right), \qquad j = 1,2,\dots,M\\ \gamma_k &= \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{k-1}{P-1}\right)\right), \qquad k = 1,2,\dots,P\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

که در آن M، N وP تعداد کل نقاط گسسته شده در جهت محورهای x،y وz می‌باشد.

با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی، شکل گسسته شده معادلات (۱۴) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{KX} + \mathbf{K}_{\mathrm{nl}}(\mathbf{X}) = \mathbf{F}\mathrm{Cos}(\Omega\tau) \qquad (۱۶)$$

که در آن Ωفرکانس تحریک، $\mathbf{M}$ و $\mathbf{K}$ به ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی، $\mathbf{K_{nl}}$ بردار سختی غیرخطی،$\mathbf{X}$ بردار جابجایی و $\mathbf{F}$بردار نیرو را نشان می‌دهند.که به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\begin{aligned}&\mathbf{X} = [\mathbf{U}\quad \mathbf{V}\quad \mathbf{W}]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{N(X)} = [\mathbf{N}_{u}(\mathbf{X})\quad \mathbf{N}_{v}(\mathbf{X})\quad \mathbf{N}_{w}(\mathbf{X})]^{\mathrm{T}},\\ &\mathbf{K} = \begin{bmatrix}\mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13}\\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23}\\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33}\end{bmatrix}, \mathbf{M} = \begin{bmatrix}\mathbf{M}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_{22} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{33}\end{bmatrix}\\ &\mathbf{F_w} = [\cdots \quad ,f, \quad \cdots]_{1\times N}\mathbf{F} = [\mathbf{0}\quad \mathbf{0}\quad \mathbf{F_w}],\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\mathbf{K}_{11} &= \mathbf{C}_{11}\mathrm{I_z}\otimes\mathrm{I_y}\otimes\mathrm{D_x^{(2)}} + \mathbf{C}_{66}\mathrm{I_z}\otimes\mathrm{D_y^{(2)}}\otimes\mathrm{I_x}\\ &\quad +\mathbf{C}_{55}\mathrm{D_z^{(2)}}\otimes\mathrm{I_x}\otimes\mathrm{I_y} + \mathbf{C}_{55,z}\mathrm{D_z^{(1)}}\otimes\mathrm{I_x}\otimes\mathrm{I_y},\\ \mathbf{K}_{12} &= \mathbf{K}_{21} = (\mathbf{C}_{12}+\mathbf{C}_{66})\mathrm{I_z}\otimes\mathrm{D_x^{(1)}}\otimes\mathrm{D_y^{(1)}},\\ \mathbf{K}_{13} &= (\mathbf{C}_{13}+\mathbf{C}_{55})\mathrm{D_z^{(1)}}\otimes\mathrm{I_y}\otimes\mathrm{D_x^{(1)}} + \mathbf{C}_{55,z}\mathrm{I_z}\otimes\mathrm{I_y}\otimes\mathrm{D_x^{(1)}},\\ \mathbf{K}_{22} &= \mathbf{C}_{22}\mathrm{I_z}\otimes\mathrm{D_y^{(2)}}\otimes\mathrm{I_x} + \mathbf{C}_{66}\mathrm{I_z}\otimes\mathrm{I_y}\otimes\mathrm{D_x^{(2)}}\\ &\quad +\mathbf{C}_{44}\mathrm{D_z^{(2)}}\otimes\mathrm{I_y}\otimes\mathrm{I_x} + \mathbf{C}_{44,z}\mathrm{D_z^{(1)}}\otimes\mathrm{I_y}\otimes\mathrm{I_x},\\ \mathbf{K}_{23} &= (\mathbf{C}_{23}+\mathbf{C}_{44})\mathrm{D_z^{(1)}}\otimes\mathrm{D_y^{(1)}}\otimes\mathrm{I_x} + \mathbf{C}_{44,z}\mathrm{I_z}\otimes\mathrm{D_y^{(1)}}\otimes\mathrm{I_x},\\ \mathbf{K}_{31} &= (\mathbf{C}_{13}+\mathbf{C}_{55})\mathrm{D_z^{(1)}}\otimes\mathrm{D_x^{(1)}}\otimes\mathrm{I_x} + \mathbf{C}_{13,z}\mathrm{I_z}\otimes\mathrm{I_y}\otimes\mathrm{D_x^{(1)}},\\ \mathbf{K}_{32} &= (\mathbf{C}_{23}+\mathbf{C}_{44})\mathrm{D_z^{(1)}}\otimes\mathrm{D_y^{(1)}}\otimes\mathrm{I_x} + \mathbf{C}_{23,z}\mathrm{I_z}\otimes\mathrm{D_y^{(1)}}\otimes\mathrm{I_x},\\ \mathbf{K}_{33} &= \mathbf{C}_{33}\mathrm{D_z^{(2)}}\otimes\mathrm{I_y}\otimes\mathrm{I_x} + \mathbf{C}_{55}\mathrm{I_z}\otimes\mathrm{I_y}\otimes\mathrm{D_x^{(2)}}\\ &\quad +\mathbf{C}_{44}\mathrm{I_z}\otimes\mathrm{D_y^{(2)}}\otimes\mathrm{I_x} + \mathbf{C}_{33,z}\mathrm{D_z^{(1)}}\otimes\mathrm{I_y}\otimes\mathrm{I_x},\\ \mathbf{M}_{11} &= \mathbf{M}_{22} = \mathbf{M}_{33} = \rho\mathbf{I_z}\otimes\mathbf{I_y}\otimes\mathbf{I_x}\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

که ⊗ بیانگر ضرب تنسور کرونیکر است. لازم به ذکر است که برای رعایت اختصار، مؤلفه‌های بردارهای جابجایی و مؤلفه‌های غیرخطی و همچنین گسسته‌سازی شرایط مرزی آورده نمی‌شوند.

۳-۲- نحوه اعمال گلرکین عددی

با در نظر گرفتن حل هارمونیک به صورت $\mathrm{X} = \widetilde{\mathrm{X}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\mathrm{t}}$و برابر صفر قرار دادن جملات غیرخطی و نبرو معادله (۱۶)، مقادیر ویژه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{K}\widetilde{\mathbf{X}} = \omega^2\mathbf{M}\widetilde{\mathbf{X}}, \qquad \widetilde{\mathbf{X}} = \left\{\widetilde{\mathbf{u}}_0^{\mathrm{T}}, \widetilde{\mathbf{v}}_0^{\mathrm{T}}, \widetilde{\mathbf{w}}_{\mathbf{0}}^{\mathrm{T}}\right\}^{\mathrm{T}} \qquad (۱۹)$$

بید توجه داشت که المان‌های شرایط مرزی گسسته شده در ماتریس المان های مرتبط با مرز ماتریس های قبلی جایگزین گردد. با حل معادله (۱۹) و استخراج حالت مودهای خطی، برای حل معادله (۱۶) می‌توان فرض کرد:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q} \tag{۲۰}$$

که $\boldsymbol{\Phi}$ و $\mathbf{q}$ به ترتیب سیستم مختصات کاهش یافته و تابع پایه در روش عددی گلرکین استفاده می‌شود، که به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbf{q}^{\mathbf{T}}_{(3m)\times 1} = [\mathbf{q}^{1}_{u} \ \dots \ \mathbf{q}^{m}_{u} \ \mathbf{q}^{1}_{v} \ \dots \ \mathbf{q}^{m}_{v} \ \mathbf{q}^{1}_{w} \ \dots \ \mathbf{q}^{m}_{w}], \tag{۲۱-الف}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{(3N)\times(3m)} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_v & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}_w \end{bmatrix} \tag{۲۱-ب}$$

بردار باقیمانده با قرار دادن رابطه (۲۰) در (۱۶)، به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q} + \mathbf{K}_{\mathrm{nl}}(\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}) - \mathbf{F}\mathrm{Cos}(\Omega\tau) \tag{۲۲}$$

با ضرب هر مفادله در حالت مود نظیر و سپس انتگرال گیری در روی دامنه در روش گلرکین عددی ارائه شده، به وسیله عملگرهای ماتریسی زیر انجام می‌شود:

$$\mathbf{G} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathbf{T}}\mathbf{S} \tag{۲۳}$$

که$\mathbf{S}$ بیانگرعملگر انتگرالاستکه با استفاده از تربیع دیفرانسیلی و سری تیلور به دست می‌آید [۲۲]. با در نظر گرفتن توضیحات قبل معادلات موسوم به معادلات دافینگ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\widetilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} + \widetilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{nl}}(\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}) = \widetilde{\mathbf{F}}\mathrm{Cos}(\Omega\tau) \tag{۲۴}$$

که در آن

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \mathbf{G}\mathbf{M}\boldsymbol{\Phi}, \quad \widetilde{\mathbf{K}} = \mathbf{G}\mathbf{K}\boldsymbol{\Phi}, \quad \widetilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{nl}}(\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}) = \mathbf{G}\mathbf{K}_{\mathrm{nl}}(\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}) \quad \widetilde{\mathbf{F}} = \mathbf{G}\mathbf{F} \tag{۲۵}$$

۳-۳- حل در دامنه زمانی

ابتدا براساس عملگر ماتریس دیفرانسیلی صریح، معادله (۲۲) در دامنه زمانی گسسته می‌شود. این عملگرها برای مسائل متناوب با مشتق گیری از توابع متناوب سینوسی به عنوان توابع پایه در روش نظم طیفی بدست می‌آیند.[۲۳] با تعریف $\tau^* = \tau/\mathrm{T}$ و $\Omega = 2\pi/T$ معادله (۲۲) باز نویسی می‌گردد:

$$\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)^2 \widetilde{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)\widetilde{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{q}} + \widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{q} + \widetilde{\mathbf{K}}_{\mathbf{nl}}(\boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}) = \widetilde{\mathbf{F}}\mathrm{Cos}(2\pi\tau^*) \tag{۲۶}$$

که نقاط نشان دهنده مشتق نسبت به τ^* و $\widetilde{\mathbf{C}}$نسبت میرایی که$\widetilde{\mathbf{K}}(2\beta/\omega_l)$ که β عدد بسیار کوچکی می‌باشد.

شکلگسسته شده مربوط به q در معادله (۲۶)در دامنه زمانی به صورت زیر می‌باشد:

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^{1}_{u\times N_t} & \dots & \mathbf{q}^{m}_{u\times N_t} & \mathbf{q}^{1}_{v\times N_t} & \dots & \mathbf{q}^{m}_{v\times N_t} \\ & & \mathbf{q}^{1}_{w\times N_t} & \dots & \mathbf{q}^{m}_{w\times N_t} & \end{bmatrix} \tag{۲۷}$$

که m نشان دهنده شماره حالت مورد گلرکین و $\boldsymbol{N_t}$ تعداد نقاط گسسته شده در دامنه زمانی است، هم چنین نقاط شبکه بندی شده در دامنه زمانی به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\bar{\tau} = \frac{i}{N_t}, \qquad 0 < \bar{\tau} < 1\,, \ \ i = 1,2,\dots,N_t = 2k \tag{۲۸}$$

که در آن مقدار عددی N_t باید زوج باشد. با استفاده از معادلات (۲۶) و (۲۷)، می‌توان نوشت:

$$\left(\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\boldsymbol{2\pi}}\right)^{\mathbf{2}} \widetilde{\mathbf{M}}\mathbf{Q}\mathbf{D}_{\tau}^{(2)^{\mathbf{T}}} + \left(\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\boldsymbol{2\pi}}\right)\widetilde{\mathbf{C}}\mathbf{Q}\mathbf{D}_{\tau}^{(1)^{\mathbf{T}}} + \widetilde{\mathbf{K}}\mathbf{Q} + \widetilde{\mathbf{K}}_{\boldsymbol{nl}}(\mathbf{Q}) = \widetilde{\mathbf{F}}\mathbf{A}, \tag{۲۹}$$

$$\mathbf{A} = \left[\cos(2\pi\tilde{\tau}_1) \quad \dots \quad \cos(2\pi\tilde{\tau}_{N_t})\right]$$

سرانجام معادله (۲۶) به شکل برداری زیر بیان می‌گردد:

$$\left(\left(\frac{\Omega}{2\pi}\right)^2 (\mathbf{D}_{\tau}^{(2)} \otimes \widetilde{\mathbf{M}}) + \left(\frac{\boldsymbol{\Omega}}{\boldsymbol{2\pi}}\right)(\mathbf{D}_{\tau}^{(1)} \otimes \widetilde{\mathbf{C}}) + (\mathbf{I}_{\tau^*} \otimes \widetilde{\mathbf{K}})\right) vec(\mathbf{Q}) + vec\left(\widetilde{\mathbf{K}}_{\mathrm{nl}}(\boldsymbol{\Phi}\mathbf{Q})\right) - (\mathbf{I}_{\tau^*} \otimes \widetilde{\mathbf{F}})\mathbf{A}^{\mathbf{T}} = \mathbf{0} \tag{۳۰}$$

معادله (۳۰) به‌صورت معادلات پارامتری زیر قابل بیان است:

$$\mathbf{H}:\ \mathbb{R}^{3m+1} \to \mathbb{R}^{3m\times N_t}, \quad \mathbf{H}(vec(\mathbf{Q})\,,\Omega) = \mathbf{0} \tag{۳۱}$$

$vec(\mathbf{Q})$ شکل برداری ماتریس Q و $\mathbf{I}_{\tau^*}$ یک تنسور واحد $N_t \times N_t$ را نشان می‌دهد، روش پیوسته طول کمان [۲۴] برای تخمین ویژگی های پاسخ فرکانسی ورق مستطیلی مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف با حل معادلات جبری غیرخطی سیستم استفاده می‌شود

۴- نتایج و بحث

در قسمت های قبل معادلات حاکم غیرخطی بر ورق های مستطیلی بادر نظر گرفتن نظریه الاستیسیته سه بعدی به‌دست آمد و سپس روش حل معادلات به‌دست آمده ارائه گردید. در این قسمت به بررسی صحت نتایج به دست آمده و نتایج عددی حاصل از تغییر شرایط بارگزاری وتغییر پارامترهای هندسی برای ارتعاشات اجباری ورق مستطیلی مدرج تابعی پرداخته می‌شود.

برای ارئه نتایج به‌دست آمده، پارامترهای بی بعد به صورت زیر تعریف می گردند:

$$(x,y,z) \to \left(\frac{x}{a},\frac{y}{b},\frac{z}{h}\right),(u_0,v_0,w_0) \to \left(\frac{u_0}{h},\frac{v_0}{h},\frac{w_0}{h}\right), \quad \eta = \frac{a}{h},\ \ \kappa = \frac{a}{b},\ \ \omega_{\mathrm{L}} = \omega a\sqrt{\frac{\rho^c}{E^c}}. \tag{۳۲}$$

شرایط تکیه گاهی ورق برحسب حرف اول کلمه به صورت CSCS می باشد که به ترتیب گیردار در x = 0,a و ساده y = 0,b می باشد. نسبت پواسون$\nu = 0.3$ فرض می‌شود، خواص مواد ورق مدرج تابعی براساس قانون توانی در جهت ضخامت تغییر می‌کند، خواص مواد مدرج تابعی ترکیبی از آلومینیم و آلومینا به ترتیب با خواص $\mathrm{E^m} = 70$ GPa، $\rho^m = 2702\ \mathrm{kg/m^3}$ و $\mathrm{E^c} = 380$ GPa، $\rho^c = 3800\ \mathrm{kg/m^3}$می‌باشد. به منظور بررسی صحت نتایج، نتایج فرکانس های بی بعد $\left(\varpi = \frac{\omega b^2}{\pi^2 h}\sqrt{12(1-\nu^2)\rho^c/E^c}\right)$مودهای اول و دوم در شرایط تگیه گاهی ساده کار حاضر با مقاله‌ی[۲۵] در جدول ۱ مقایسه شده است. شاخص کسر حجمی $k = 1$ ، نسبت طول به عرض $(a/h = 10)$ و طول و عرض ورق $a = b = 10m$ می‌باشد.

جدول ۱- فرکانس های اول و دوم کار حاضر و مرجع[۲۳]

شماره مود	کار حاضر	مرجع [23]
1	1.4820	1.4818
2	3.5586	3.5586

هم چنین درجدول ۲ کار حاضر با نتایج حاصل از تئوری های دوبعدی نیز مورد بررسی قرار گرفته است که صحت نتایج و اهمیت تئوری سه بعدی را نشان می دهد. در این بررسی فرکانس طبیعی بی بعد $(\tilde{\omega} = \omega h\sqrt{2(1+\nu)\rho/E})$ مود اول ورق مستطیلی همگن با تئوری های کلاسیک، مرتبه اول برشی و مرتبه بالای برشی [۲۶] در شرایط مرزی ساده مقایسه شده است، خواص مواد مورد استفاده به صورت و $\rho = 1\ \mathrm{kg/m^3}$ و نسبت طول به ضخامت $a/h = 10$ می‌باشد.

جدول ۲- فرکانس های طبیعی بی بعد با نظریه های مرتبه دوم

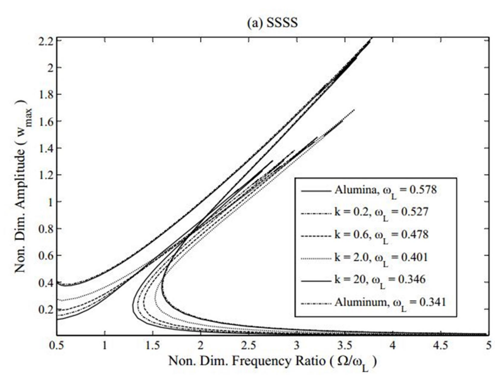
کار حاضر	مرتبه بالای برشی[24]	مرتبه اول برشی[24]	کلاسیک[24]
0.0932	0.0935	0.0930	0.0963

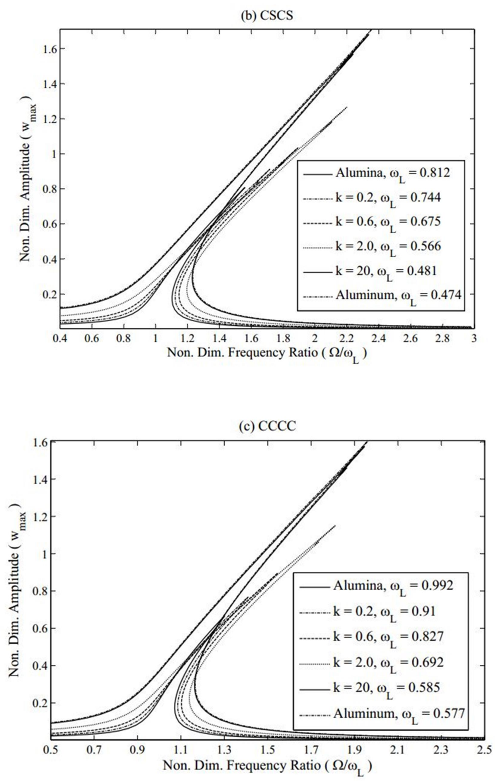
نتایج حاصل نشان می‌دهد که روش حل کار حاضر تطابق خوبی با روش های ارائه شده در مقاله‌های انتشار یافته دارد. در محاسبات انجام شده دامنه ارتعاشی بی بعد و نسبت فرکانسی ورق مستطیلی مدرج تابعی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathrm{W}_{max} = \frac{w_{max}}{h} = \frac{\text{بیشینه انحنا}}{\text{ضخامت ورق}}$$

$$\frac{\Omega}{\omega_l} = \frac{\text{فرکانس تحریک خارجی}}{\text{فرکانس طبیعی اساسی}}$$

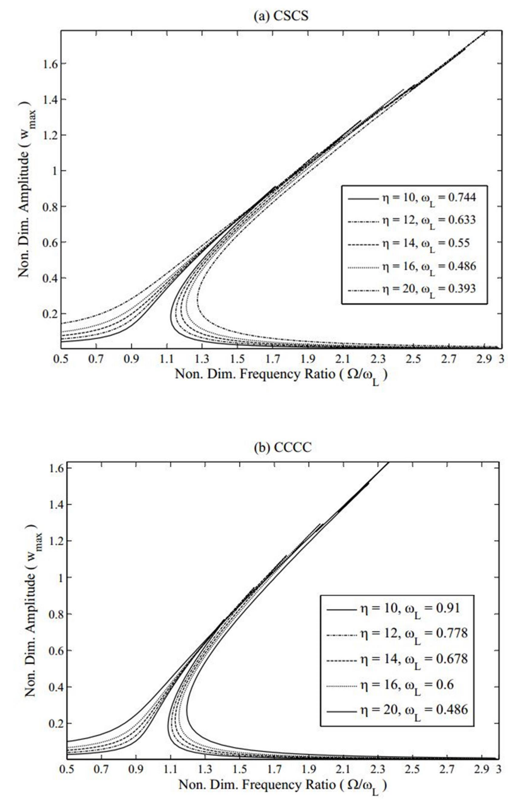
در شکل منحنی پاسخ فرکانس ورق مستطیلی مدرج تابعی که دامنه بی بعد ورق برحسب نسبت فرکانسی برای مقادیر مختلف شاخص کسر حجمی در شرایط مرزی متفاوت نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش شاخص کسر حجمی بیشینه دامنه ارتعاشات بی بعد افزایش می یابد. علاوه براین مشاهده می‌شود که در یک شاخص کسر حجمی معین با افزایش نسبت فرکانسی ، بیشینه دامنه ارتعاشی تا یک نقطه بیشینه افزایش یافته و سپس با شدت زیادی کاهش می‌یابد. این تغییر ناگهانی در نتایج پاسخ دینامیکی ناشی از ماهیت غیرخطی سیستم می‌باشد.





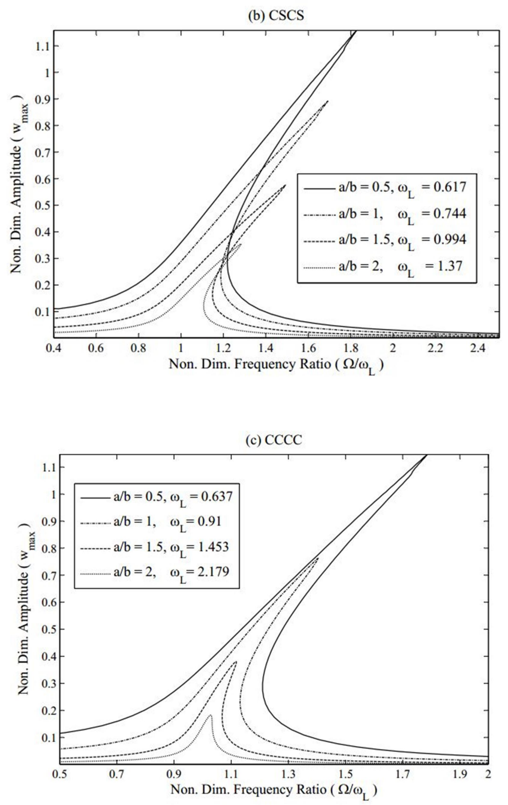
شکل ۳- اثر شاخص کسر حجمی بر نمودار پاسخ فرکانسی ورق مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف($\eta = 10, f = 0.01, c = 0.01$)

هم‌چنین برای $\frac{\Omega}{\omega_L} > 1$ پدیده جهش، یعنی یک تغییر ناگهانی در کاهش یا افزایش قابل توجه در دامنه ارتعاشات صورت می‌گیرد زمانی که فرکانس تحریک متغیر است که ناشی از سفت شوندگی غیرخطی می‌باشد[۲۷]. علاوه براین، با افزایش شاخص کسر حجمی باعث کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود و ممکن است نسبت فرکانسی سیستم کاهش یا افزایش یابد. بنابراین با افزایش شاخص کسر حجمی سفتی هندسی خطی سیستم کاهش می‌یابد. علاوه بر موارد زیر شده می توان دریافت که رفتار سفت شوندگی غیر خطی باعث می‌شود که حداکثر دامنه ارتعاش اجباری در فرکانس های تحریک بالاتری نسبت به فرکانس طبیعی رخ دهد.



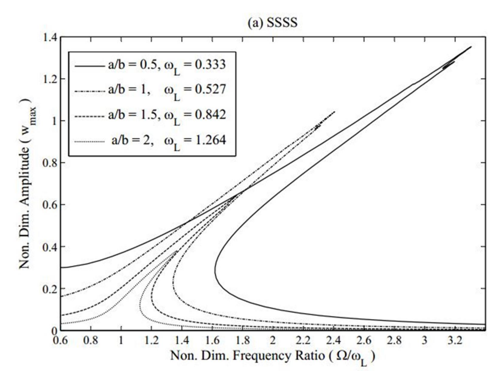
شکل۴- اثر تغییرات نسیبت طول/عرض به ضخامت بر نمودار پاسخ فرکانسی ورق مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف($\kappa = 0.2, f = 0.01, c = 0.01$)

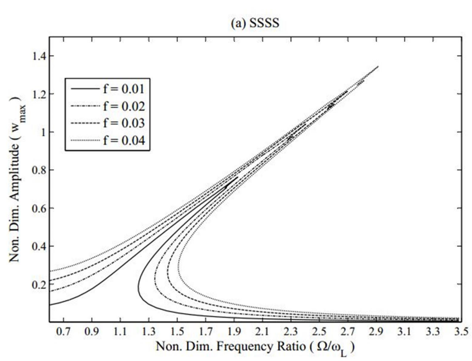
در شکل ۴ اثرات نسبت طول(عرض) به ضخامت نشان داده شده است، مشاهده می‌شود که در نسبت های طول(عرض) به ضخامت پایین تر، دارای فرکانس طبیعی بالاتر و بیشینه دامنه ارتعاشی پایین تری دارد. هم‌چنین قابل مشاهده است که با افزایشη منحنی‌ها به سمت راست انحراف پیدا می‌کنند و رفتار سفت شوندگی غیرخطی سیستم افزایش پیدا می‌کند.

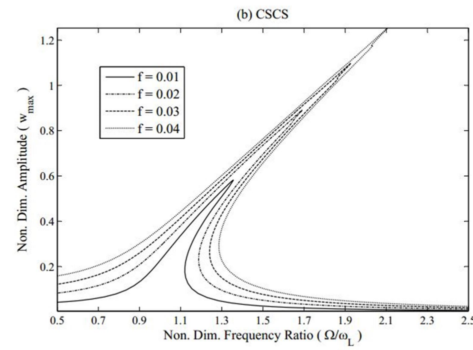


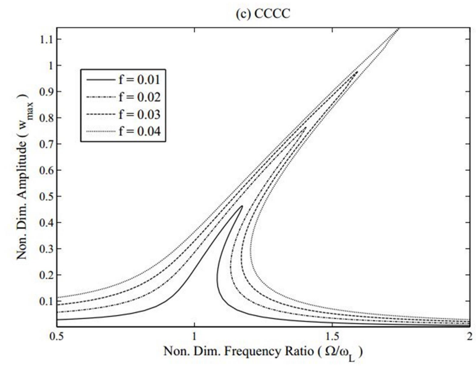
شکل۵- اثر نسبت طول به عرض بر نمودار پاسخ فرکانسی ورق مدرج تابعی در شرایط مرزی مختلف($\kappa = 0.2, f = 0.02, c = 0.02$)

شکل ۵ اثرات تغییر نسبت طول به عرض ورق را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که افزایش نسبت a/b باعث افزایش قرکانس طبیعی سیستم و کاهش نسبت فرکانسی می‌شود. هم‌چنین قابل مشاهده است که در یک نسبت معین a/b سیستم با شرایط تکیه‌گاهی گیردار سفتی بیش‌تری نسبت به دو شرایط تکیه‌گاهی دیگر دارد و انحراف نمودار نسبت فرکانسی برای شرایط مرزی ساده از بقیه شرایط مرزی‌ها بیشتر‌می‌باشد و در این شرایط مرزی رفتار سفت شوندگی غیرخطی نمایان‌تر است.



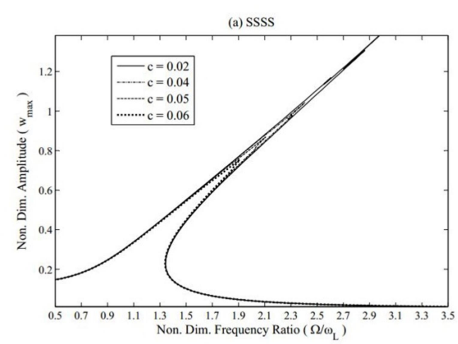


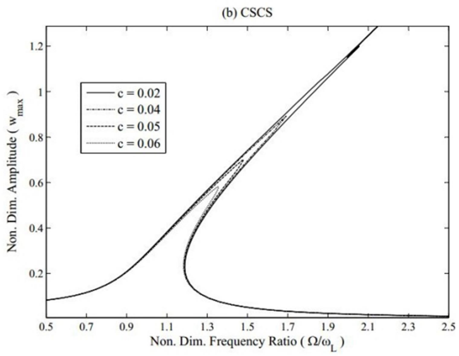


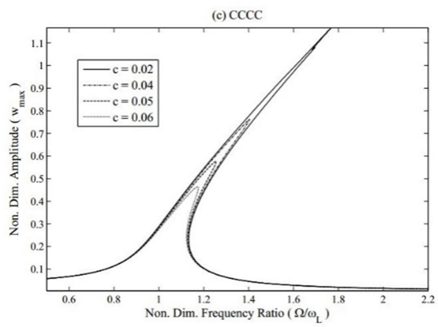


شکل۶- اثر نیروی عرضی متغییر بی‌بعد در شرایط مرزی مختلف($\boldsymbol{\kappa = 0.2, c = 0.02}$)

اثرات نیروی عرضی و پارامتر میرایی بی‌بعد مختلف بر روی دامنه ارتعاشی بی‌بعد برحسب نسبت فرکانسی ورق مستطیلی در شرایط مرزی مختلف در شکل های ۶ و ۷ نشان داده شده است. برحسب نتایج رسم شده، مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر میرایی بی‌بعد بیشینه مقدار دامنه کاهش می‌یابددر حالی‌که با افزایش نیروی عرضی بی‌بعد مقدار بیشینه دامنه ارتعاشی نیز افزایش می‌یابد و در نیروی تحریک کوچک‌تر رفتار سیستم به رفتار خطی نزدیک می‌شود. علاوه براین، برای یک نیروی عرضی یا پارامتر میرایی بی‌بعد، بیشینه دامنه در شرایط مرزی کاملا ساده نسبت دو شرایط مرزی دیگر بیشتر است.







شکل۷- اثر پارامتر میرایی متغییر بی‌بعد در شرایط مرزی مختلف($\boldsymbol{\kappa = 0.2, f = 0.02}$)

۵- نتیجه‌گیری

در این مطالعه برحسب تئوری الاستیسیته سه بعدی و با در نظر گرفتن جملات غیرخطی هندسی گرین لاگرانژ، رفتار ارتعاشات اجباری ورق‌های مستطیلی مورد بررسی قرار گرفته است. مواد ورق‌های مستطیلی مدرج تابعی بوده و درجهت ضخامت تغییر می‌کند. با به‌دست آوردن انرژی جنبشی، انرژی کرنشی،کار حاصل از نیروی خارجی و با استفاده از اصل همیلتون، معادلات دیفرانسیل پاره ای غیرخطی و شرایط مرزی متناظر به‌دست می‌آیند. با گسسته سازی معادلات حاکم و شرایط مرزی متناظر با استفاده از روش تربیع دیفرانسیلی تعمیم یافته و کاهش مرتبه آن با تکنیک گلرکین عددی،معادلات غیرخطی متغیر زمان به شکل دافینگ مرتب می‌شوند. برای حل مساله در دامنه زمانی، معادلات با از استفاده از عملگر دیفرانسیلی متناوب زمانی گسسته می‌شوند و سپس با استفاده از الگوریتم طول کمان معادلات پارامتری برداری غیرخطی حل می‌شوند.اثرات طول به ضخامت، طول به عرض، شاخص کسر حجمی، پارامتر میرایی بی بعد و نیروی عرضی بی بعد مورد بررسی قرار گرفته اند. برای همه‌ی شرایط مرزی، مشاهده شد که با افزایش شاخص حجمی، نسبت طول به ضخامت و نیروی عرضی بی‌بعد بیشینه دامنه ارتعاشی سیستم افزایش می‌یابد. اما، با افزایش نسبت طول به عرض و پارامتر میرایی بی‌بعد،بیشینه دامنه ارتعاشی کاهش پیدا می‌کند.همچنین، افزایش نسبت طول به عرض، فرکانس خطی و سفت شوندگی غیرخطی سیستم را افزایش می‌دهد اما

افزایش نسبت طول به ضخامت فرکانس خطی سیستم را کاهش و سفت شوندگی غیرخطی سیستم را افزایش می‌دهد. افزایش نیروی تحریک باعث افزایش بیشینه دامنه ارتعاشی سیستم می‌گردد.لازم به ذکر است که با میل کردن پارامتر میرایی یه سمت صفر، نقطه بیشینه ای را برای دامنه ارتعاشی نمی‌توان متصور شد.

۶- مراجع

[1] Yamanouchi M., Koizumi M., Functionally gradient materials, in *Proceeding of,* Proceeding Of The FirstInternational Symposium On Functionally Graded Materials*,* pp .1993

[2] Holt J., Koizumi M., Hirai T., Munir Z., *Ceramic transactions: Functionally gradient materials. Volume 34*, Westerville, OH (United States); American Ceramic Society, pp. 1993 .

[3] Sata N., Characteristic of SiC-TiB composites as the surface layer of SiC-TiB-Cu functionally gradient material produced by self-propagating high-temperature synthesis, 1993 .

[4] Yamaoka H., Yuki M., Tahara K., Fabrication of functionally gradient material by slurry stacking and sintering process, 1993 .

[5] Rabin B., Heaps R., Powder processing of NI-Al2O3 FGM, 1993 .

[6] Fukui Y., Fundamental investigation of functionally gradient material manufacturing system using centrifugal force, *JSME international journal. Ser. 3, Vibration, control engineering, engineering for industry,* Vol. 34, No. 1, pp. 144-148, 1991 .

[7] Yang J., Shen H.-S., Dynamic responseof initially stressed functionally graded rectangular thin plates, *Composite Structures,* Vol. 54, No. 4, pp. 497-508, 2001 .

[8] Cheng Z.-Q., Kitipornchai S., Membrane analogy of buckling and vibration of inhomogeneous plates, *Journal of engineering mechanics,* Vol. 125, No. 11, pp. 1293-1297, 1999 .

[9] Cheng Z.-Q., Batra R., Exact correspondence between eigenvalues of membranes and functionally graded simply supported polygonal plates, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 229, No. 4, pp. 879-895, 2000 .

[10] Yang J., Shen H.-S., Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 255, No. 3, pp. 579-602, 2002 .

[11] Qian L., Batra R., Chen L., Staticand dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov–Galerkin method, *Composites Part B: Engineering,* Vol. 35, No. 6, pp. 685-697, 2004 .

[12] Ferreira A., Batra R., Roque, C. Qian L., Jorge R., Natural frequencies of functionally graded plates by a meshless method, *Composite Structures,* Vol. 75, No. 1, pp. 593-600, 2006 .

[14] Roque C., Ferreira A., Jorge R., A radial basis function approach for thefree vibration analysis of functionally graded plates using a refined theory, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 300, No. 3, pp. 1048-1070, 2007 .

[۱۴] Matsunaga H., Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory, *Composite structures,* Vol. 82, No. 4, pp. 499-512, 2008 .

[15] Cheng Z.-Q., Batra R., Three-dimensional thermoelastic deformations of a functionally graded elliptic plate, *Composites Part B: Engineering,* Vol. 31, No. 2, pp. 97-106 .۲۰۰۰ ,

[16] Vel S. S., Batra R., Three-dimensional exact solution for the vibration of functionally graded rectangular plates, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 272, No. 3, pp. 703-730, 2004 .

[17] Xu Y., Zhou D., Three-dimensional elasticity solutionof functionally graded rectangular plates with variable thickness, *Composite Structures,* Vol. 91, No. 1, pp. 56-65, 2009 .

[۱۸] ا. علی بیگلو، م. علیزاده، تحلیل استاتیکی و ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی مدرج تابعی با استفاده از تئوری الاستیسیته سه‌بعدی، مهندسی مکانیک مدرس، Vol. 14, No. 10, pp. 195-204, 2014.

[۱۹] ا. علی بیگلو، ا. عبداله زاده شهر بابکی، تحلیل ارتعاشات آزاد سه بعدی نانوورق مستطیلی بر اساس تئوری الاستیسیته غیرمحلی، مهندسی مکانیک مدرس، Vol. 15, No. 11, pp. 54-62, 2015.

[۲۰] م. بسطامی، ب. بهجت، حل تحلیلی کمانش و ارتعاش نانو ورق هدفمند در محیط الاستیک با درنظرگیری اثرات غیرموضعی، مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، Vol. 46, No. 3, pp. 43-53, 2016.

[۲۱] ف. اله‌کرمی، م. قصاب زاده سریزدی، تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای نازک و نسبتاً ضخیم مدرج تابعیدو جهتی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی، مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، Vol. 46, No. 1, pp. 15-28, 2016.

[22] Ansari R., Shojaei M. F., Mohammadi V., Gholami R., Darabi M., Nonlinear vibrations of functionally graded Mindlin microplates based on themodified couple stress theory, *Composite Structures,* Vol. 114, pp. 124-134, 2014 .

[23] Trefethen L. N., *Spectral methods in MATLAB*: SIAM, 2000 .

[24] Ibrahim S., Patel B., Nath Y., Modified shooting approach to the non-linear periodic forced response ofisotropic/composite curved beams, *International journal of non-linear mechanics,* Vol. 44, No. 10, pp. 1073-1084, 2009 .

[25] Ansari R., Shahabodini A., Shojaei M. F., Nonlocal three-dimensional theory of elasticity with application to free vibration of functionally graded nanoplates on elastic foundations, *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures,* Vol. 76, pp. 70-81, 2016 .

[26] Aghababaei R., Reddy J., Nonlocal third-order shear deformation plate theory with application to bending and vibration of plates, *Journal of Sound and Vibration,* Vol. 326, No. 1, pp. 277-289, 2009 .

[27] Amabili M., *Nonlinear vibrations and stability of shells and plates*: Cambridge University Press, 2008 .