مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۸۷، جلد ۴۹، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۸، صفحه ۴۱-۵۰

بررسی تاثیر نقاط چبیشف بر نرخ همگرایی پاسخ‌ها در مدل‌سازی نظری تماس الاستیک بین سنبه کروی صلب با لوله فولادی API XB

ساناز جعفری* استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران

رضا اکبری آلاشتی دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی بابل، بابل، ایران

چکیده

دراین مقاله مدل نظری از فرآیند تماس بین سنبه کروی صلب با لوله فولادیAPI XB ارائه می‌شود تا شبیه‌ساز فرورفتگی ایجاد شده بر لوله‌ها در محیط‌های کاری باشد و از نتایج آن بتوان برای تخمین توزیع تنش-کرنش و به دنبال آن عمر کاری مفید لوله در ناحیه فرورفتگی استفاده کرد. در مدل‌سازی نظری، معادلات تعادل حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک به کمک روش ناویر، بر اساس مولفه‌های تغییرمکان بیان و با روش تفاضلات محدود از مرتبه بالا به همراه روش برون‌یابی ریچاردسون حل خواهند شد و استفاده از نقاط چبیشف بر روی نرخ همگرایی پاسخ‌ها در شبکه‌بندی تفاضلات محدود مورد بحث قرار می‌گیرد. فشار تماسی بین سنبه و لوله در هر لحظه از بارگذاری به کمک نظریه‌های مکانیک تماسی تخمین زده می‌شود و به صورت بارگذاری جانبی بر مدل نظری اعمال می‌گردد. برای مقایسه نتایج از روش المان محدود استفاده خواهد شد. نهایتاً مشاهده می‌شود که نتایج دو روش با درصد خطای کمتر از ۵٪ سازگاری بسیار خوبی با هم دارند و مدل نظری قابل کاربرد برای انواع ابعاد، جنس، شرایط مرزی و بارگذاری در لوله و سنبه است.

واژه‌های کلیدی: فرو رفتگی، تغییر شکل الاستیک، مکانیک تماسی، پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک، مدل‌سازی نظری.

An investigation of effects of Chebysheve points on the convergence rate in theoretical modeling of elastic contact between the spherical rigid indenter and steel pipe API XB

S. Jafari Department of Mechanical Engineering, University of Bojnord, Bojnord, Iran

R. Akbari Alashti Department of Mechanical Engineering, Babol University of Technology, Babol, Iran

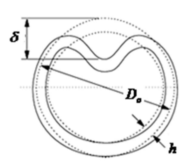
Abstract

In this paper, theoretical model of the contact between rigid spherical indenter with steel pipe API XB is presented to simulate dent on the pipes in working environments, and the results could be used to estimate the stress-strain distributions and as a result the useful life of pipes in denting area. Governing equilibrium equations for thin cylindrical shell is presented in the form of displacement components by the Navier method, which will be solved by higher order finite difference method. Richardson extrapolation technique and the effect of ChebyShev points on the convergence rate of responses in finite difference method will be discussed. Contact pressure between the pipe and indenter in each loading steps are estimated by contact mechanic theories and will be applied to the outer surface of the pipe. The finite element method will be used to compare the results. Finally, it can see that the results of two methods are in the good agreement with error less than 5% and theoretical model are applicable to variety of dimensions, material, boundary and loading conditions of pipe and indenter.

Keywords: Dent, Elastic deformation, Contact mechanics, Thin cylindrical shells, Theoretical modeling

۱- مقدمه

فرورفتگی[۱]، به عنوان مهمترین عامل ایجاد خرابی در خطوط لوله انتقال نفت و گاز شناخته می‌شود. لوله‌ها در نواحی فرورفتگی از عملکرد بهینه خود فاصله می‌گیرند و تنش‌های تماسی موضعی و در نتیجه تمرکز تنش در آن‌ها ایجاد می‌شود. از این رو پیش‌بینی سطح تغییرمکان‌ها در این نواحی از اولویت ویژه‌ای برخوردار است. مطابق با شکل ۱، در ناحیه فرورفتگی قطر لوله کاهش می‌یابد و عمق فرورفتگی (δ) به عنوان بیشینه مقدار کاهش در قطر لوله نسبت به حالت اولیه تعریف می‌شود[۱]. در این شکل D_0 قطر خارجی لوله و h ضخامت دیواره لوله می‌باشد.



شکل ۱-پارامترهای هندسی در لوله دارای فرورفتگی

برای تحلیل مسائل تماسی در کاربردهای مهندسی از نظریه هرتز استفاده می‌شود که به دنبال یافتن شکل ناحیه تماس الاستیک بین دو جسم و نحوه گسترش آن در اثر افزایش نیرو است [۲-۴]. مطالعات انجام شده در زمینه تاثیر فرورفتگی بر لوله‌ها را می‌توان به ۳ دسته مدل‌سازی‌های المان‌محدود، نظری و آزمایشات تجربی تقسیم‌بندی نمود که در مدل‌سازی نظری در مقایسه با دو روش دیگر کارهای کمتری انجام گرفته است.

[1] Dent

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: s.jafari@ub.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۵/۱۲/۰۱
تاریخ پذیرش: ۹۸/۰۱/۲۶

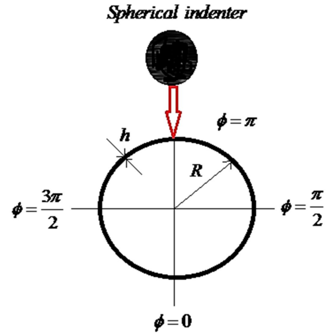
مدل‌سازی نظری لوله‌ها به کمک نظریه‌های حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای انجام می‌گیرد. پوسته را در صورتی می‌توان نازک در نظر گرفت که نسبت ضخامت به شعاع میان صفحه (h/R) بسیار کوچک باشد و در این صورت بایستی از نظریه‌های جدار نازک مانند سندرز[1]، فلوگه[2]، تیموشنکو[3]، نیردسن[4] و..... استفاده کرد [۵و۶]. مدل‌سازی‌های نظری فرورفتگی محدود به تحلیل‌های الاستیک بر مبنای تعریف توابع شکل برای هندسه فرورفتگی است و با توجه به حجیم بودن معادلات تعادل حاکم، تاکنون تحلیل نظری الاستیک-پلاستیکی از آن انجام نشده است. لین سِنگ و همکاران تحلیل الاستیکی از فرورفتگی در لوله‌های دارای فشار را با در نظر گرفتن فرضیاتی مانند آزاد بودن فرورفتگی از هر نوع قید خارجی، صرف نظر نمودن از تنش در راستای شعاعی، حالت تنش صفحه‌ای، کوچک بودن تغییرشکل‌ها و بیان روابط تنش-کرنش بر اساس نظریه سندرز انجام دادند[۷و۸]. اخیراً اکبری آلاشتی و همکاران در تحقیقات خود مدل تحلیلی برای ایجاد فرو-رفتگی بر لوله به کمک نظریه هرتز ارائه دادند و معادلات حاکم را توسط سری‌های فوریه دوگانه حل کردند و به سازگاری قابل قبولی با نتایج المان محدود رسیدند[۹].

نتایج شبیه‌سازی‌های المان محدود نشان می‌دهد که در هر لحظه از بارگذاری، تماس کاملی بین سنبه کروی و لوله وجود ندارد [۱۰-۱۷]. از پارامترهای مهم در ارزیابی تغییرات تنش و بار حدی در این لوله‌ها می‌توان به بارگذاری فشاری خارجی[۱۰]، ترکیبی از بارگذاری خمشی به همراه فشار داخلی[۱۱] و هم چنین تاثیر خواص مکانیکی مواد[۱۲] اشاره کرد. در جدیدترین تحقیقات در زمینه فرورفتگی بر لوله‌ها، اکبری آلاشتی و همکاران تاثیر آسیب[5] را وارد مدل‌سازی‌های المان محدود و تجربی کردند و نتایج بسیار خوبی به دست آوردند[۱۳-۱۷]. ایشان توانایی تحمل بار لوله‌هایی از جنس آلمینیوم و دارای فرو-رفتگی که تحت تاثیر بارگذاری فشار داخلی قرار داشتند را با در نظر گرفتن مدل‌های آسیب مواد نرم در شبیه‌سازی المان محدود بررسی کردند[۱۳]. در ادامه جعفری و همکاران مقایسه‌ای از مدل‌های شکست ویلکینز[6]، جانسون-کوک[7] اصلاح شده و ژو-ویرزبیکی[8] را در بررسی توانایی تحمل بار لوله‌های آلمینیمی دارای فرورفتگی تحت بارگذاری فشار داخلی ارائه کردند و به این واسطه پارامترهای تاثیرگذار در ایجاد مدل‌های شکست مواد نرم را به کمک شبیه‌سازی المان محدود آزمودند [۱۴]. در کار بعدی اکبری آلاشتی و همکاران تاثیر آسیب مواد نرم را در رفتار لوله‌های فولادی با فرورفتگی تحت بارگذاری فشار داخلی به کمک شبیه‌سازی‌های المان محدود بررسی کردند. ایشان برای راستی‌آزمایی شبیه‌سازی المان محدود، با در نظر گرفتن مدل شکست ژو-ویرزبیکی، یک سری از آزمایشات تجربی را بر روی لوله با فشار داخلی با بارگذاری تا حد خرابی انجام دادند[۱۵]. اکبری آلاشتی و همکاران در کار بعدی بررسی تجربی و عددی از تاثیرخرابی مواد نرم بر توانایی تحمل بار لوله‌های دارای فرورفتگی با فشار داخلی، ضخامت دیواره و قطر سنبه متفاوت ارائه کردند. ایشان نتیجه گرفتند که برای لوله در شرایط بارگذاری فشاری داخلی، با در نظر گرفتن محدودیت‌ها و معیارهای طراحی و بر اساس شرایط مرزی و بارگذاری حاکم باید تا حد امکان ضخامت دیواره لوله را بزرگتر انتخاب کرد [۱۶و۱۷].

در این مقاله مدلی نظری برای آنالیز رفتار الاستیک در فرآیند تماسی ایجاد فرورفتگی بر لوله ارائه می‌شود. فرورفتگی بر لوله از نوع صفحه‌ای و نامقید است که توسط سنبه کروی صلب از جنس VCN 200با قطر 376.5mm ایجاد می‌شود تا تغییرشکل‌هایی متقارن بر لوله ایجاد کند. این جنس از ماده دارای تنش تسلیم و تنش حد نهایی بسیار بالایی است به طوریکه در حالت ایده‌آل می‌توان آن را صلب فرض نمود. جنس لوله‌ها، فولادی از درجه API XB است و فشار داخلی لوله برابر با فشار اتمسفر است. این نوع از لوله‌های فولادی قابلیت استفاده در خطوط طولانی نفت و گاز و آب را به دلیل ارزانی دارند. از طرفی دیگر نسبت به پیشرفت ترک در خطوط لوله مقاوم هستند و می توانند در سیستم‌های ترش استفاده بشوند. مدل‌سازی لوله به کمک نظریه‌های حاکم بر پوسته‌های جدار نازک و روابط موجود در مکانیک تماسی برای تخمین اندازه، شکل ناحیه تماس و توزیع فشار تماسی بین لوله و سنبه در هر لحظه از بارگذاری انجام می‌گیرد. مولفه-های تغییرمکان در هر نقطه‌ای بر روی لوله با حل فرم ناویر معادلات تعادل حاکم به کمک روش تفاضلات محدود مرتبه بالا محاسبه می-شوند. از تکنیک برون‌یابی ریچاردسون و روابط چبیشف به منظور ایجاد گره‌ها در شبکه تفاضلات محدود استفاده می‌شود تا حجم و زمان محاسبات کاهش یابد و نرخ همگرایی پاسخ ها آزموده شود. نتایج به دست آمده از مدل سازی نظری با نتایج شبیه‌سازی المان محدود راستی آزمایی شده در مقالات پیشین مقایسه می‌شوند.

۲- معادلات حاکم

به منظور توصیف موقعیت نقاط مرجع بر لوله و در هماهنگی با آزمایشات تجربی در مقالات پیشین، امتداد های محوری و محیطی به ترتیبz و $\emptyset$ و امتداد شعاعی x در نظر گرفته می‌شود که عمود بر میان صفحه بوده و به سمت خارج مثبت می‌باشد و مبدا این دستگاه مختصاتی در یک انتهای لوله قرار می‌گیرد. با توجه به جدار نازک بودن لوله در امتداد شعاعی، مولفه‌های تغییرمکان میان صفحه در امتدادهای محوری، محیطی و شعاعی به صورت$u(z,\emptyset)$، $v(z,\emptyset)$، $w(z,\emptyset)$ تعریف می‌شوند. مطابق با شکل ۲، اولین تماس بین سنبه کروی و لوله در $z = L/2$ و $\emptyset = 180^{\circ}$روی می‌دهد.



شکل ۲- نمایی از تماس بین لوله و سنبه کروی صلب

ابعاد هندسی لوله در هماهنگی با آزمایشات تجربی به همراه خواص مکانیکی لوله فولادی به دست آمده از آزمون کشش تک محوره بر اساس استاندارد ASTM-E8 توسط نوسیندگان این مقاله، در جدول

---
[1] Sanders
[2] Flugge
[3] Niordson
[4] Timoshenko
[5] Damage
[6] Wilkins
[7] Johnson and Cook
[8] Xue and Wircbiki

۱ ارائه شده است[۱۳-۱۷].

جدول ۱- خواص مکانیکی و ابعاد هندسی لوله فولادیAPI XB

ابعاد هندسی (mm)		خواص مکانیکی	
۱۳۰۰	طول لوله	نسبت پواسان (v)	۰/۳
۴/۸	ضخامت دیواره	تنش شکست حقیقی	۹۴۰ مگا پاسکال
۲۰۹/۴	قطر داخلی	استحکام تسلیم(σ_0)	۳۶۵ مگا پاسکال
۲۱۹	قطر خارجی	مدول الاستیک(E)	۲۰۰ گیگا پاسکال
مرجع[۱۷]	آزمایش تجربی	مرجع[۱۷]	آزمایش تجربی

۲-۱- معادلات تعادل

در این تحقیق به دلیل شرایط بارگذاری و هندسی پوسته از نظریه تقریبی مرتبه دوم فلوگه و همکارانش در فرمول‌بندی عمومی استفاده می‌شود. با رسم دیاگرام آزاد یک پوسته استوانه‌ای، نوشتن روابط تعادل در سه راستای مختصاتی بر اساس برآیندهای نیرویی و خمشی به ۶ معادله خواهیم رسید که با جانشین‌کردن برآیندهای برشی عرضی و صفر در نظر گرفتن بارگذاری‌های خارجی محوری و محیطی، معادلات تعادل حاکم بر پوسته استوانه‌ای جدار نازک تحت بارگذاری روی سطح خارجی و در امتداد شعاعی ($P_x(z,\emptyset)$) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$R\frac{\partial N_z(z,\emptyset)}{\partial z}+\frac{\partial N_{\emptyset z}(z,\emptyset)}{\partial \emptyset}=0 \quad (1)$$

$$R\frac{\partial N_{z\emptyset}(z,\emptyset)}{\partial z}+\frac{\partial N_{\emptyset}(z,\emptyset)}{\partial \emptyset}-\frac{1}{R}\frac{\partial M_{\emptyset}(z,\emptyset)}{\partial \emptyset}-\frac{\partial M_{z\emptyset}(z,\emptyset)}{\partial \emptyset}=0 \quad (2)$$

$$R\frac{\partial^2 M_{z\emptyset}(z,\emptyset)}{\partial z\partial \emptyset}+R\frac{\partial^2 M_{\emptyset z}(z,\emptyset)}{\partial z\partial \emptyset}+\frac{\partial^2 M_{\emptyset}(z,\emptyset)}{\partial \emptyset^2}+R^2\frac{\partial^2 M_z(z,\emptyset)}{\partial z^2}+RN_{\emptyset}(z,\emptyset)+P_x(z,\emptyset)R^2=0 \quad (3)$$

$$RN_{z\emptyset}(z,\emptyset)-RN_{\emptyset z}(z,\emptyset)+M_{\emptyset z}(z,\emptyset)=0 \quad (4)$$

معادلات برای پوسته‌های جدار نازک، در حالت کلی $N_{\emptyset z}\neq N_{z\emptyset}$ و $M_{\emptyset z}\neq M_{z\emptyset}$ نوشته شده‌اند و دارای ۶ برآیند تنشی مجهول هستند. بنابراین مسئله مورد بررسی از نظر استاتیکی نامعین است و برای حل مسئله تغییرشکل و تغییرمکان‌های پوسته بررسی می‌شوند[۵و۶].

۲-۲- برآیندهای نیرویی و خمشی در ضخامت پوسته

در نظریه فلوگه، ترم بدون بعد x/R_i در محاسبه برآیندهای نیرویی و خمشی و روابط کرنش-تغییر مکان حفظ می‌شود. مولفه‌های تنش به صورت خطی در طول ضخامت پوسته تغییر می‌کنند و این برآیندها با انتگرال‌گیری‌هایی به شکل زیر محاسبه می‌شوند[۵و۶]:

$$\begin{Bmatrix} N_z(z,\emptyset)\\ N_{z\emptyset}(z,\emptyset)\\ M_z(z,\emptyset)\\ M_{z\emptyset}(z,\emptyset)\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\sigma_z(z,\emptyset)\\ \tau_{z\emptyset}(z,\emptyset)\\ -x\sigma_z(z,\emptyset)\\ -x\tau_{z\emptyset}(z,\emptyset)\end{Bmatrix}\left(1+\frac{x}{R}\right)dx \quad (5)$$

$$\begin{Bmatrix} N_{\emptyset}(z,\emptyset)\\ N_{\emptyset z}(z,\emptyset)\\ M_{\emptyset}(z,\emptyset)\\ M_{\emptyset z}(z,\emptyset)\end{Bmatrix}=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\begin{Bmatrix}\sigma_{\emptyset}(z,\emptyset)\\ \tau_{z\emptyset}(z,\emptyset)\\ -x\sigma_{\emptyset}(z,\emptyset)\\ -x\tau_{z\emptyset}(z,\emptyset)\end{Bmatrix}dx$$

با انجام انتگرال‌گیری، تغییرات نسبت به x حذف می‌شوند و مسئله به مدل با دو درجه آزادی از $\emptyset$ و z تبدیل خواهد شد[۵].

۲-۳- روابط تنش-کرنش

روابط تنش-کرنش در ماده الاستیک همسانگرد را می‌توان با استفاده از دو ثابت مدول الاستیک و ضریب پواسان در حالت تنش صفحه‌ای و مختصات استوانه‌ای به کمک قانون هوک بیان نمود[۵]:

$$\sigma_z(z,\emptyset)=\frac{E}{1-v^2}\left[\varepsilon_z(z,\emptyset)+v\varepsilon_{\emptyset}(z,\emptyset)\right] \quad (6)$$

$$\sigma_{\emptyset}(z,\emptyset)=\frac{E}{1-v^2}\left[\varepsilon_{\emptyset}(z,\emptyset)+v\varepsilon_z(z,\emptyset)\right] \quad (7)$$

$$\tau_{z\emptyset}(z,\emptyset)=\frac{E}{2(1+v)}\left[\gamma_{z\emptyset}(z,\emptyset)\right] \quad (8)$$

۲-۴- روابط کرنش-تغییر مکان

کرنش کلی در پوسته استوانه‌ای جدار نازک به فاصله x از میان صفحه دارای دو مولفه غشایی و خمشی است. با در نظر گرفتن نظریه کلاسیک برشی برای ارتباط دو مولفه خمشی و غشایی، کرنش‌های کلی بر اساس فاصله از میان صفحه، با در نظر گرفتن جمله x/R_i و مقادیر شعاع‌های انحنا پوسته‌های استوانه‌ای($R_1=\infty, R_2=R$)، به صورت روابط (۹-۱۱) بیان می‌شوند [۵و۶].

$$\varepsilon_z(z,\emptyset)=\left[\bar{\varepsilon}_z(z,\emptyset)+x\chi_z(z,\emptyset)\right] \quad (9)$$

$$\varepsilon_{\emptyset}(z,\emptyset)=\frac{1}{(1+x/R)}\left[\bar{\varepsilon}_{\phi}(z,\emptyset)+x\chi_{\emptyset}(z,\emptyset)\right] \quad (10)$$

$$\gamma_{z\emptyset}(z,\emptyset)=\frac{1}{(1+x/R)}\left[\bar{\gamma}_{z\emptyset}(z,\emptyset)+x\chi_{z\emptyset}(z,\emptyset)(1-\frac{x}{2}(1/R))\right] \quad (11)$$

در این روابط ترکیب فاصله تار مورد نظر از میان صفحه پوسته ($0\le x\le h/2$) با انحناهای محوری، محیطی و پیچشی ($\chi_z,\chi_{\emptyset},\chi_{z\emptyset}$) کرنش خمشی را به وجود می آورد. همان طور که مشخص است توزیع کرنش غشایی در طول ضخامت پوسته ثابت است اما کرنش خمشی به صورت خطی از سطح داخلی تا سطح خارجی پوسته تغییر می‌کند.

در نظریه‌های پوسته‌های جدار نازک عبارات یکسانی برای تعریف کرنش‌های غشایی وجود دارد. اما، بر اساس فرضیات ساده کننده و راه حل مورد استفاده عباراتی متفاوت برای کرنش‌های خمشی بیان می‌شود. در این تحقیق مطابق با جدول ۲ از فرمول‌بندی‌نیردسن برای تعریف کرنش‌های خمشی و غشایی استفاده می‌شود[۵و۶].

جدول ۲- کرنش های غشایی و انحنا بر اساس مولفه‌های تغییرمکان

روابط انحنا: فرمول بندی نیردسن[۶]	کرنش‌های غشایی
$\chi_z=-\left(\frac{\partial^2 w(z,\emptyset)}{\partial z^2}\right)$	$\bar{\varepsilon}_z=\frac{\partial u(z,\emptyset)}{\partial z}$
$\chi_{\emptyset}=-\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial^2 w(z,\emptyset)}{\partial \emptyset^2}-2\frac{\partial v(z,\emptyset)}{\partial \emptyset}+w(z,\emptyset)\right)$	$\bar{\varepsilon}_{\emptyset}=\frac{1}{R}\frac{\partial v(z,\emptyset)}{\partial \emptyset}+\frac{w(z,\emptyset)}{R}$
$\chi_{z\emptyset}=-\frac{1}{R}\left(\frac{\partial^2 w(z,\emptyset)}{\partial z\partial \emptyset}-\frac{1}{2}\frac{\partial v(z,\emptyset)}{\partial z}\right)$	$\bar{\gamma}_{z\emptyset}=\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u(z,\emptyset)}{\partial \emptyset}+\frac{\partial v(z,\emptyset)}{\partial z}\right)$

۲-۵- شرایط مرزی

مطابق با شکل۳ دو دسته شرایط مرزی بر لوله موجود است:

شکل ۳- شرایط مرزی برای لوله فولادی API XB[۱۵].

شرط مرزی اول: ابتدا و انتهای لوله ($z=0,L$) آزاد است. تنش و برآیندهای نیرویی و خمشی این مقاطع صفر می باشد.

$$\begin{cases} N_z(z,\emptyset)_{z=0,L}=0\\ N_{z\emptyset}(z,\emptyset)_{z=0,L}=0\\ M_z(z,\emptyset)_{z=0,L}=0\\ Q_z(z,\emptyset)_{z=0,L}=\left[\left(\frac{\partial M_z(z,\emptyset)}{\partial z}+\frac{1}{R}\frac{\partial M_{\emptyset z}(z,\emptyset)}{\partial \emptyset}\right)\right]_{z=0,L}=0\end{cases} \quad (12)$$

شرط مرزی دوم: به دلیل جلوگیری از حرکت جسم صلب خط طولی از ابتدا تا انتهای لوله ($0\le z\le L, \emptyset=0^{\circ}$) بسته می‌شود تا شبیه ساز بستر صلبی باشد که لوله بر روی آن قرار دارد:

$$\begin{cases} u(z,\varnothing)_{\varnothing=0^\circ}=0 \\ v(z,\varnothing)_{\varnothing=0^\circ}=0 \\ w(z,\varnothing)_{\varnothing=0^\circ}=0 \\ \left.\dfrac{\partial w(z,\varnothing)}{\partial z}\right|_{\varnothing=0^\circ}=0 \end{cases} \tag{۱۳}$$

۳- فشار تماسی در تغییرشکل‌های الاستیک

به منظور بارگذاری مدل نظری، باید توزیع فشار تماسی بین سنبه کروی صلب و لوله شبیه‌سازی شود. بر اساس نظریه هرتز دو جسم در تماس با هم دارای سطح تماس بیضوی (شعاع‌های a و b) با مرکزیت نقطه تماس اولیه می‌باشند. توزیع فشار در ناحیه تماس شبه بیضوی است که دارای مقدار بیشینهP_0 در مرکز است. بر همین اساس تابع توزیع فشار، فشار متوسط و بیشینه به صورت زیر بیان می‌شوند[۲و۳]:

$$p=p_0\left[1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2\right]^{1/2},\quad p_m=\frac{F}{\pi ab},\quad p_0=\frac{3}{2}\frac{F}{\pi ab} \tag{۱۴}$$

به علاوه مدول الاستیک موثر (E^*) که تابعی از خواص مکانیکی دو جسم در حال تماس است به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{1}{E^*}=\frac{1-\nu_1^2}{E_1}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2} \tag{۱۵}$$

اگر محورهای شعاع‌های انحنا دو سطح برخورد کننده با هم زاویهα بسازند، ثوابت تماسی (A,B) و شعاع های انحنای نسبی اصلی اول و دوم (R',R'') از روابط (۱۶ و ۱۷) محاسبه می‌شوند[۲]. در این روابط (R_1',R_1'') شعاع‌های انحنا اصلی لوله و (R_2',R_2'') برای سنبه هستند.

$$(A+B)=1/2\left(1/(R_1')+1/(R_1'')+1/(R_2')+1/(R_2'')\right) \tag{۱۶}$$

$$(A-B)=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1}{R_1'}-\frac{1}{R_1''}\right)^2+\left(\frac{1}{R_2'}-\frac{1}{R_2''}\right)^2+2\left(\frac{1}{R_1'}-\frac{1}{R_1''}\right)\left(\frac{1}{R_2'}-\frac{1}{R_2''}\right)\cos(2\alpha)} \tag{۱۷}$$

در نهایت شعاع معادل موثر تماسR_e برابر است با:

$$R_e=\sqrt{R'R''}=\frac{1}{2\sqrt{AB}} \tag{۱۸}$$

رابطه هرتز برای تخمین شعاع‌های سطح تماس بیضوی و حداکثر فشار تماسی شامل انتگرال‌های بیضوی مرتبه اول و دومی است که محاسبه آنها بسیار مشکل می‌باشد[۴]. در نتیجه طی سال‌های گذشته روش‌های تقریبی متفاوتی برای محاسبه شعاع‌های سطح تماس ارائه شده است که این روابط در جدول ۳ لیست شده‌اند [۲و۳].

جدول ۳- روابط تقریبی برای نظریه هرتز در مکانیک تماسی

نام	روابط ارائه شده	توضیحات	مرجع
جانسون	$\left\{\frac{a}{b}\approx\left(\frac{R'}{R''}\right), c=\sqrt{ab}=\left[\frac{3FR_e}{4E^*}\right]F_1\left(\frac{R'}{R''}\right)\right.$	محاسبه $F_1\left(\frac{R'}{R''}\right)$ بر اساس نمودارهای کتاب جانسون	[۲]
پرز گونزالز و همکاران	$\left\{\frac{b}{a}\left(\frac{R'}{R''}\right)^{1/2}=Q_1,\right.$ $c=\sqrt{ab}=\left[\frac{3FR_e}{4E^*}\right]Q_2$	$Q_i=1+c_1Log(q)+c_2Log(q)^2+c_3Log(q)^3$ $,i=1,2,\ q=\left(\frac{R'}{R''}\right)^{1/2}$	[۳]
گرین وود	$\left\{c=\sqrt{ab}=\left[\frac{3FR_e}{4E^*}\right], b/a\left(A/B\right)^{2/3},\right.$ $b=c\sqrt{b/a}, a=\frac{c}{\sqrt{b/a}}$	$R_e=\left(\frac{AB(A+B)}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}$	[۴]
برو و هامروک	$a=\left[\frac{3k^2\epsilon FR_e}{\pi E^*}\right]^{1/3}, b=\left[\frac{3\epsilon FR_e}{k\pi E^*}\right]^{1/3}$	$k\approx\frac{a}{b}=1.0399\left(B/A\right),$ $\epsilon=1.0003+0.5968\left(A/B\right)$	[۴]
هامروک و برو	$=\left[\frac{3k^2\epsilon FR_e}{\pi E^*}\right]^{1/3}, b=\left[\frac{3\epsilon FR_e}{k\pi E^*}\right]^{1/3}$	$k\approx\frac{a}{b}=\left(\frac{B}{A}\right)^{\frac{2}{\pi}},$ $\epsilon=1+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(\frac{A}{B}\right)$	[۴]

۴- مدل سازی المان محدود

در این تحقیق از روش مدل‌سازی المان محدودی استفاده می‌شود که در تحقیقات انجام گرفته توسط نویسندگان این مقاله با آزمایشات تجربی راستی‌آزمایی شده است [۱۳-۱۷]. مدل المان محدود لوله فولادی و سنبه کروی صلب با استفاده مشخصات هندسی لوله و سنبه مطابق با جدول ۱ در نرم افزار انسیس[1] ایجاد می‌گردد. به منظور مش-بندی، از المان پوسته‌ای ۴ گره‌ای به نام SHELL181 استفاده می‌شود که دارای ۶ درجه آزادی در هر گره است و برای تحلیل‌های غیرخطی و کرنش‌های بزرگ مناسب است. تعریف خواص مواد بر اساس رفتار واقعی ماده برای لوله فولادی API GB به دست آمده از تست کشش به کمک دستور TB, plastic,,,, miso انجام می‌پذیرد[۱۵].

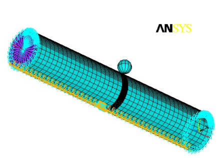
تماس بین سنبه و لوله با استفاده از تحلیل تماسی، از نوع تماس جسم انعطاف پذیر با جسم صلب با تماس سطح به سطح در نظر گرفته می‌شود. سنبه با استفاده از شکل کروی المان TARGE170 مدل‌سازی می‌شود که در فاصله‌ای مشخص نسبت به دیواره لوله قرار دارد. المان تماسی CONTA173 بر روی سطح خارجی لوله قرار می‌گیرد و محدوده آن به نحوی تعیین می‌گردد که کمی دورتر از ناحیه تماس را پوشش دهد. ضریب اصطکاک بین لوله و سنبه بیشینه۰/۳تعریف می-شود. در تماس بین دو سطح که در ابتدا با هم تماس ندارند، در اولین مرحله بارگذاری در صورت امکان، تماس اولیه کمی ایجاد می‌شود تا سطوح تماس همدیگر را درک کنند و بعد بارگذاری اصلی اعمال شود.

در مش‌بندی المان‌محدود، برای رسیدن به توزیع صحیح فشار تماسی بین سنبه و لوله بهتر است تا انتخاب گره‌ها روی لوله با فواصل غیر یکنواخت از هم انجام شود. بر اساس این الگو گره‌ها به نحوی انتخاب می‌شوند که تا حد امکان مش‌بندی در ناحیه تماس ریزتر و در مابقی نقاط از لوله درشت‌تر شکل بگیرد. با انجام این کار حجم محاسبات و زمان اجرای برنامه نسبت به شبکه‌بندی یکنواخت ریزترکاهش می‌یابد. تعداد نهایی المان‌ها در لوله بعد از مش‌بندی و انجام تست همگرایی پاسخ‌ها به دست می‌آید.

۴-۱- شرایط مرزی و بارگذاری در لوله فولادی API XB

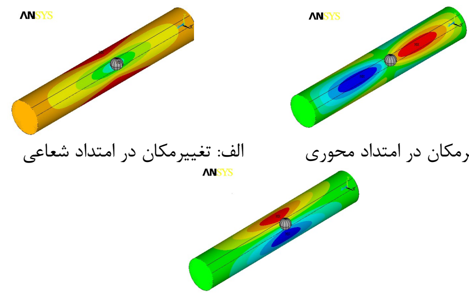
در شبیه‌سازی المان محدود، شرایط مرزی لوله مطابق با شکل ۳ است. بارگذاری به صورت تغییرمکان به سنبه در امتداد شعاعی لوله اعمال می‌شود. برای رسیدن به پاسخ مناسب، تغییرمکان مورد نظر در اندازه‌هایی کوچک و طی چندین مرحله بارگذاری اعمال می‌شود. اگر تغییرمکان به صورت یک مرحله بارگذاری اعمال شود، برای تغییر-مکان‌های شعاعی بزرگ نرم افزار قادر به همگرا نمودن تحلیل تماسی نیست وخطای تغییرشکل بیش از حد المان را خواهد داد. نمونه‌ای از مدل مش‌بندی شده به همراه شرایط مرزی در شکل ۴ آمده است.

در شکل ۵ توزیع طرحواره‌ای از تغییرمکان‌های شعاعی، محوری و محیطی در بارگذاری حد الاستیک آورده شده است. به دلیل متقارن بودن شکل سنبه و توزیع فشار تماسی بین سنبه و لوله و شرایط مرزی، توزیع تغییرمکان‌ها نسبت به نقطه آغازین تماس متقارن است.



شکل ۴- مش‌بندی، شرایط مرزی و سطح تماس به همراه سنبه

[1] Ansys



ب: تغییرمکان در امتداد محوری

الف: تغییرمکان در امتداد شعاعی

ج: تغییرمکان در امتداد محیطی

شکل ۵- طرحواره تغییر مکان ها در شبیه‌سازی المان محدود

۲-۴- مراحل ایجاد فرور فتگی بر لوله

ابتدا لوله تحت بارگذاری فشار داخلی (P) (در صورت وجود) قرار می‌گیرد و شرایط مرزی بر لوله اعمال می‌شود. فاصله بین لوله و سنبه برای ایجاد تماس تنظیم و لوله تا عمق فرورفتگی مشخص با اعمال تغییرمکان به گره مرکزی سنبه با نرخ جابه‌جایی کم بارگذاری می‌شود. بعد از اتمام بارگذاری سنبه از روی لوله برداشته شده تا پدیده بازگشت الاستیک رخ دهد. نهایتا فشار داخلی از درون لوله حذف می‌شود.

۵- مدل سازی نظریه

۵-۱- فرمول بندی ناویر معادلات تعادل

در روش ناویر معادلات تعادل بر اساس مولفه‌های تغییرمکان و مشتقات آنها بازنویسی می‌شوند که مولفه‌های تغییرمکانی از حل این معادلات به خوبی در شرایط سازگاری کرنش صدق می‌نمایند. ابتدا روابط کرنش‌های غشایی و خمشی در جدول ۲، در روابط (۹-۱۱) جایگذاری و نتیجه این کار در روابط تنش-کرنش مربوطه وارد خواهند شد. برآیندهای نیرویی و خمشی به کمک روابط انتگرالی (۵) محاسبه و وارد معادلات تعادل خواهند شد. نهایتاً به دستگاه معادلات دیفرانسیلی خطی بر اساس تغییرمکان‌های مجهول در دو راستایz و$\emptyset$ خواهیم رسید که بایستی حل همزمان شوند. فرم ناویر معادلات تعادل در حالت تغییرشکل‌های الاستیک در پیوست الف آورده شده است. همان طور که مشخص است معادلات دیفرانسیلی حاکم بر پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک به سیستمی از معادلات با مشتقات مرتبه دوم و چهارم از سه مولفه تغییرمکانی مجهول(u, v, w) کاهش می‌یابد. بردار نیرویی ناهمگن کننده معادلات تعادل مطابق با رابطه (۱۹)، دربردارنده توزیع فشار تماسی بین سنبه و لوله در هر لحظه از بارگذاری است.

$$b=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -P_x\left(z,\emptyset\right)R^2 \end{bmatrix} \qquad (۱۹)$$

۵-۲- روش تفاضلات محدود مرتبه بالا

حل معادلات تعادل حاکم بر پوسته‌های جدار نازک به روش تحلیلی امکان پذیر نیست و برای حل این معادلات بایستی از روش‌های عددی کمک گرفت. در این تحقیق از روش تفاضلات محدود مرتبه بالا استفاده می‌شود که در حل معادلات دیفرانسیل جزئی بسیار کارآمد است و شامل سه مرحله اصلی زیر است:

۱- شبکه‌بندی جسم برای ایجاد گره‌های تفاضلات محدود:

در روش تفاضلات سطح جسم با در نظر گرفتن گره‌هایی در فواصل مشخص شبکه‌بندی می‌شود که دقت حل مسئله وابسته به تعداد گره‌های در نظر گرفته شده است و این دقت با افزودن تعداد گره‌ها تا میزان مورد نظر قابل افزایش می‌باشد. اما، افزایش تعداد گره‌ها باعث افزایش حجم محاسبات نیز خواهد شد. در این تحقیق کل لوله با ابعاد واقعی در دو بعد شبکه‌بندی می‌شود و فشار تماسی در سطح کوچکی نسبت به ابعاد لوله اعمال می‌گردد. بنابراین بایستی تا حد امکان شبکه بندی را ریزتر انتخاب کرد. اندیس تقسیمات در امتدادهای z و $\emptyset$ به ترتیب i و j و تعداد گره‌ها در امتدادهای محوری و محیطی به ترتیب N و M در نظر گرفته می‌شود. فاصله بین گره‌های متوالی در راستای محیطی($\delta_{\emptyset_j}$) است که بر اساس فاصله کمانی محاسبه می‌شود و در امتداد محوری (δ_{z_i}) می‌باشد. هم چنین بر اساس شعاع‌های بیضوی سطح تماس، محدوده بارگذاری در امتداد های محوری و محیطی به ترتیب $L/2-b\le z\le L/2+b$ و $180^{\circ}-a\le\emptyset\le180^{0}+a$ است. در این تحقیق دو نوع شبکه‌بندی نامساوی نقاط مورد آزمون قرار می‌گیرد:

شبکه‌بندی (A): در این نوع از فواصل یکسان بین نقاط برای شبکه بندی لوله استفاده می‌شود. به این صورت که در محدوده بارگذاری بر لوله فواصل نقاط کمتر و در مابقی لوله فواصل نقاط بیشتر است. دلیل این انتخاب اعمال بهتر و دقیق‌تر بارگذاری بر لوله است.

شبکه‌بندی (B): شو و همکارانش[1] شبکه‌بندی نقاط بر اساس روابط چبیشف را در روش تربیع دیفرانسیلی به کار بردند و متوجه شدند که نسبت به شبکه‌بندی مساوی نقاط و حتی نسبت به شبکه-بندی نامساوی بر اساس دیگر روابط به نرخ همگرایی سریعتری دست پیدا کردند[۱۸]. نقاط چبیشف در واقع همان صفرهای چند جمله‌ای چبیشف هستند که برای درون‌یابی مورد استفاده قرار می‌گیرند. از جمله نوآوری‌های این تحقیق استفاده از شبکه‌بندی بر اساس روابط چبیشف در روش حل تفاضلات محدود است که در بخش مقایسه نتایج تاثیر آن بر افزایش نرخ همگرایی نشان داده می‌شود. انواع متفاوتی از روابط چبیشف وجود دارد که تفاوت این روابط در نحوه تنظیم فواصل گره‌ها از هم در داخل شبکه‌بندی است. در این تحقیق رابطه‌ای انتخاب شده است که فواصل نقاط در ابتدا، انتها و میانه لوله کمتر از سایر نقاط آن باشد(تعداد گره‌های بیشتر جهت برآورده شدن بهتر شرایط مرزی و اعمال صحیح فشار تماسی در ناحیه میانی) وشبکه‌بندی کاملاً متقارن نسبت به نقطه تماس اولیه ایجاد کند. نحوه اعمال رابطه چبیشف در امتداد محوری z به صورت زیر است[۱۸].

$$z_i=\frac{L}{4}\left(1-\cos\left[\pi\frac{(i-1)}{(\frac{N+1}{2}-1)}\right]\right),i=1..\frac{N+1}{2}$$

$$z_{\frac{N+1}{2}+1+i}=\frac{L}{4}\left(1-\cos\left[\pi\frac{(i-1)}{(\frac{N+1}{2}-1)}\right]\right)+L/2,i=2..\frac{N+1}{2} \qquad (۲۰)$$

۲- نوشتن فرم تفاضلات محدود معادلات برای گره‌های داخلی و شرایط مرزی برای گره‌های مرزی:

برای رسیدن به راه‌حلی صحیح و موثر از تفاضلات مرتبه چهارم ($O(h^4)$) در دو بعد(تفاضلات ۵ نقطه برای مشتقات مرتبه اول و دوم و ۷ نقطه برای مشتقات مرتبه سوم و چهارم) در این تحقیق استفاده می-شود. لی[2][۱۹] و آشک و همکاران[3][۲۰] از افرادی هستند که فرمول-هایی صریح با مرتبه خطا اختیاری را به کمک درون‌یابی لاگرانژ برای بیان تفاضلات محدود مشتقات در شبکه‌بندی نامساوی ارائه دادند. به عنوان نمونه رابطه تفاضلات مشتق اول تغییرمکان امتداد شعاعی(w) با

---

[1] Shu et al
[2] Li
[3] Ashk et al

مرتبه خطا $O(h^4)$ در پیوست ب آورده شده است. روابط تفاضلات دیگر مشتقات به کمک الگوریتم ارائه شده از مرجع [۲۰] محاسبه شده‌اند.

برای هر کدام از گره‌های داخلی در شبکه‌بندی دو بعدی لوله با اندیس خاص i و j، سه معادله تعادل پیوست الف در فرم تفاضلات محدود نوشته می‌شوند. شرایط مرزی حاکم بر لوله نیز بایستی برای گره‌های مرزی در فرم تفاضلات محدود بازنویسی شوند. هر گره داخلی در شبکه‌بندی دارای سه درجه آزادی مجهول از تغییرمکان‌ها است و در گره‌های مرزی درجه آزادی مربوط به شیب نیز به این مجهولات اضافه می‌شود. تعداد گره‌هایی که برای آنها فرم تفاضلی معادلات نوشته می‌شوند $(N-2)(M-2)$ و تعداد تغییرمکان‌های‌مجهول $3(N-2)(M-2)$ است که در نهایت با در نظر گرفتن شرایط مرزی در روابط (۱۲و۱۳)، تعداد معادلات تعادل با تعداد مجهولات مسئله برابر خواهند شد.

۳- حل دستگاه معادلات خطی

در روش تفاضلات محدود نهایتاً به دستگاه معادلات جبری خطی خواهیم رسید که با در نظر گرفتن حوزه مسئله و شرایط مرزی حل می‌شود تا مقادیر مجهول هر یک از نقاط شبکه به دست آید. دستگاه معادلات خطی در فرم ماتریس توسط رابطه (۲۱) معرفی می‌شود.

$$A_{p,q}x_q = b_p \tag{۲۱}$$

ماتریس ضرایب A مربعی و متقارن با $p = q = 3(N-2)(M-2)$ است. بردار b_p فشار تماسی برای هر گره در شبکه‌بندی لوله و بردار x_q مولفه‌های تغییرمکانی مجهول است. به منظور کاهش حجم و زمان انجام محاسبات از تقارنی تغییرمکان‌ها موجود در شکل ۶ استفاده می‌شود و فرم تفاضلات محدود معادلات تعادل فقط برای گره‌های موجود در یک چهارم از لوله ($0 \le \phi \le \pi, 0 \le z \le \frac{L}{2}$) نوشته می‌شود تا ابعاد بردار x در رابطه (۲۱) به $3^{(N-1)/2}{}^{(M-1)/2}$ کاهش یابد. تغییرمکان‌های مجهول برای این محدوده از لوله برابر $(u_{i,j}, v_{i,j}, w_{i,j})$ و برای $i=[1..(N+1)/2]$ و $j=[1..(M+1)/2]$ در نظر گرفته می‌شوند که با در نظر گرفتن فشار تماسی، شکل‌گیری بردار نیرو و حل دستگاه معادلات خطی حاکم محاسبه می‌شوند. مقدار تغییرمکان های مجهول در سایر نقاط لوله بر اساس مقادیر محاسبه شده $(u_{i,j}, v_{i,j}, w_{i,j})$ مطابق با شکل ۶ به دست‌می آیند.

روش واحد مناسبی برای حل دستگاه‌های معادلات خطی وجود ندارد و دو فاکتور مهم در انتخاب روش مناسب زمان حل مسئله و دقت حل است. با وجود تمامی امتیازات روش‌های حل غیر مستقیم در این تحقیق تصمیم گرفته شد تا از روش حل مستقیم جداسازی LU به روش دولیتل استفاده شود که جزئیات آن در مراجع موجود است [۲۱]. با استفاده از این روش معکوس ماتریس ضرایب به شکلی دقیق محاسبه و ذخیره می‌شود. برای دوری از خطای گرد کردن، محاسبات در نرم افزار فرترن بر اساس دقت ۱۶ رقم اعشار انجام می‌شود.

۵-۲-۱- شرایط مرزی حاکم بر لوله در فرم تفاضلات محدود

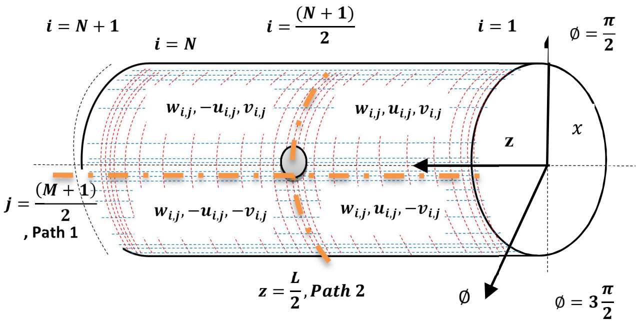
کلیه شرایط مرزی در روابط (۱۲و۱۳) به فرم تفاضلات محدود نوشته می‌شوند. در مرزهای لوله با شرایط مرزی آزاد، برای تغییرات اندیس‌های ($i = 1, N, j = [1, M]$) و برای خط گیردار لوله درست مقابل فرورفتگی($j = 1, i = [1, N]$) ۴ مجهول موجود عبارتند از:

$$i = 1 \rightarrow \begin{cases} u_{1,j} \\ v_{1,j} \\ w_{1,j} \\ \frac{\partial w}{\partial z}_{1,j} \end{cases}, i = N \rightarrow \begin{cases} u_{N,j} \\ v_{N,j} \\ w_{N,j} \\ \frac{\partial w}{\partial z}_{N,j} \end{cases}, j = 1 \rightarrow \begin{cases} u_{i,1} \\ v_{i,1} \\ w_{i,1} \\ \frac{\partial w}{\partial \varnothing}_{i,1} \end{cases} \tag{۲۲}$$

درجات آزادی شیب($\partial w/\partial z_{1,j}, \partial w/\partial z_{N,j}, \partial w/\partial \varnothing_{i,1}$)با گره‌هایی فرضی با اندیس $i = 0, N+1$ و $j = 0$ در شکل ۶، با استفاده از رابطه تفاضلات مرکزی برای مشتق اول بازنویسی شده و به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial w}{\partial z}_{1,j} = \frac{w_{2,j} - w_{0,j}}{2\delta_{z_1}}, \frac{\partial w}{\partial z}_{N,j} = \frac{w_{N+1,j} - w_{N-1,j}}{2\delta_{z_N}}, \quad \frac{\partial w}{\partial \varnothing}_{i,1} = \frac{w_{i,2} - w_{i,0}}{2\delta_{\varnothing_1}} \tag{۲۳}$$

حال می‌توان تغییرمکان‌های مجهول با اندیس $w_{0,i}$، $w_{N+1,i}$و $w_{i,0}$را به مجهولات مسئله اضافه نمود. باید دقت کرد که در رابطه (۱۲)، در امتداد مرزهایی با$z = cte$، کلیه مشتقات نسبت به$\varnothing$برابر با صفر است.



شکل ۶- فرم طرحواره ای از شبکه بندی تفاضلات محدود لوله بر اساس روابط چبیشف به همراه پارامترهای تقسیم بندی لوله

۵-۲-۲- اعمال فشار تماسی به حل تفاضلات محدود

بارگذاری به شکل مستقیم به گره‌های تفاضلات محدود اعمال شود. بنابراین رابطه توزیع فشار برای هر گره با اندیس‌های iوj با در نظر گرفتن مختصات استوانه‌ای بر لوله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$p_{i,j} = p_0[1 - \left(\frac{z_i - z_0}{b}\right)^2 - \left(\frac{\varnothing_j - \varnothing_0}{\frac{180a}{R\pi}}\right)^2]^{\frac{1}{2}} \tag{۲۴}$$

در این رابطه ($z_0 = L/2, \varnothing_0 = 180^\circ$) مکان اولین تماس بین سنبه و لوله است. برنامه حل تفاضلات محدود به زبان فرترن به گونه‌ای نوشته شده است که اگر گره مورد نظر در داخل سطح بیضوی تماس قرار داشته باشد بر اساس رابطه بالا به آن نیرو اعمال شود و در غیر این صورت مقدار نیرو برای آن صفر در نظر گرفته شود.

۵-۲-۳- برون یابی ریچاردسون

برون‌یابی ابزاری مناسب برای افزایش دقت حل‌های عددی است در حالیکه تعداد گره‌هایی کمتر و شبکه‌بندی درشت‌تر استفاده می‌شود. به منظور اعمال برون‌یابی ریچاردسون به حل تفاضلات محدود باید مراحل زیر را در نظر گرفت[۲۲]:

۱- تخمین خطای فرمول‌بندی تفاضلات محدود: مقدار خطا در این تحقیق و برای تفاضلات محدود مرتبه چهارم برابر با $O(h^4)$ است.

۲- ایجاد شبکه‌بندی درشت با فواصل نقاط h و ریزتر کردن شبکه‌بندی تا زمانیکه حل مسئله همگرا شود. تغییرات شبکه‌بندی در هر مرحله‌ای بر اساس اندیس k به صورت زیر بایستی در نظر گرفته شود:

$$h_k = \frac{h_{k-1}}{2} \rightarrow h_1 = h, h_2 = \frac{h_1}{2}, \ldots.. \tag{۲۵}$$

۳- بر اساس مقدار خطا، فرمول برون‌یابی ریچاردسون به صورت زیر اعمال می‌شود:

$$R_{k,j} = R_{k,j-1} + \frac{R_{k,j-1} - R_{k-1,j-1}}{4^{j-1} - 1}, (O(h^{2j}), j \ge 1) \tag{۲۶}$$

۶- بحث و آنالیز عددی

۶-۱- توزیع فشار تماسی در بارگذاری حد الاستیک

با در نظر گرفتن داده‌های جدول ۱ برای لوله فولادی و سنبه کروی، پارامترهای تماس الاستیک به صورت جدول ۴ لیست می‌شوند.

جدول ۴- پارامترهای مکانیک تماسی، جسم ۱: لوله فولادی درجه API-XB، جسم ۲: سنبه کروی از جنس VCN 200.

شعاع های انحنا اصلی جسم ۱ و ۲		خواص مواد جسم ۱ و ۲	
(R_1')	∞	(E_1)	۲۰۰ گیگا پاسکال
($R_1''=R_{pipe}$)	۱۰۷/۱ میلی متر	(ν_1)	۰/۳
($R_2'=R_{indenter}$)	۳۷۶/۵ میلی متر	(E_2)	∞
($R_2''=R_{indenter}$)	۳۷۶/۵ میلی متر	(ν_2)	----
E^*		۱۹/۷۸ گیگا پاسکال	

بر اساس پارامترهای جدول ۴، شعاع‌های انحنای نسبی اصلی با استفاده از روابط (۱۶) و (۱۷) محاسبه می‌شوند. با در نظر گرفتن اینکه در تماس کره با لوله، شعاع‌های انحنای اصلی با هم موازی هستند، زاویه α در رابطه (۱۷) برابر با صفر است. در نتیجه مقادیر پارامترهای R'وR'' و شعاع معادل موثرR_e به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{cases} R' = \dfrac{1}{2A} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1'}+\dfrac{1}{R_2'}} = 0.03765, R'' = \dfrac{1}{2B} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1''}+\dfrac{1}{R_2''}} = 0.02785 \\ R_e = \sqrt{R'R''} = 0.03238 \end{cases} \quad (۲۷)$$

در آنالیز عددی مقدار نیروی (F) در جدول ۳ به اندازه‌ای در نظر گرفته می‌شود که حداکثر تنش معادل فون‌میززی در ناحیه فرورفتگی برابر با تنش تسلیم ماده شود. به همین منظور پارامترهای تماس برای روابط در جدول ۳ با نتایج شبیه‌سازی المان محدود در جدول ۵ مقایسه شده‌اند تا بهترین رابطه نظری انتخاب شود.

جدول ۵- پارامترهای تماسی در بارگذاری حد الاستیک در جدول ۳

محققین	P_m گیگا پاسکال	P_0 گیگا پاسکال	b میلی متر	a میلی متر	F کیلو نیوتن
جانسون	۰/۵۴۲	۰/۸۱۳	۱/۶۶۸	۱/۳۶۷	۳/۸۸۷
گرین وود	۰/۵۴۶	۰/۸۱۹	۱/۶۶۳	۱/۳۶۰	۳/۸۸۷
برو و هامروک	۰/۳۸۲	۰/۵۷۳	۱/۹۴۷	۱/۶۶۲	۳/۸۸۷
هامروک و برو	۰/۳۳۷	۰/۵۰۶	۲/۱۰۹	۱/۷۴۲	۳/۸۸۷
انسیس	۰/۳۴	۰/۵۱۱	۲/۰۲۲	۱/۶۸۲	۳/۸۸۷

همانطور که از جدول ۵ مشخص است ابعاد سطح تماس تخمین زده شده توسط روابط هامروک و برو بسیار به نتایج حاصله از شبیه-سازی المان محدود نزدیک است و از آن برای ادامه مدل‌سازی نظری استفاده می‌شود. حال می توانه به کمک رابطه (۲۲) تابع توزیع فشار تماسی در بارگذاری حد الاستیک بر لوله را به فرم زیر بازنویسی کرد:

$$P_{i,j} = 0.50642\times10^9\times[1-3.3052\times10^5(z_i-0.65)^2-0.7869(\varnothing_j-180)^2]^{1/2}$$

۶-۲- تست همگرایی مدل نظری در حد الاستیک

در نتیجه مدل‌سازی نظریه فرورفتگی بر لوله، مدلی ارائه شده است که می‌تواند با دقت بالا برای هر نوع توزیع فشار، سطح تماس، شرایط مرزی و شبکه‌بندی نامساوی نقاط در پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک به کار برده شود. در این بخش تست همگرایی پاسخ‌ها در بارگذاری حد الاستیک برای هر دو نوع شبکه‌بندی (A) و (B) انجام می‌گیرد. تعداد نقاط بهینه در هر شبکه‌بندی برای رسیدن به همگرایی با استفاده از روش سعی و خطا تعیین می‌شود. نتایج برای تغییرمکان شعاعی و محوری در امتداد Path1 ($\varnothing=180^\circ, 0\le z\le L$) رسم شده اند که در این امتداد ماکزیمم مقدار خود را دارند. بر هیمن اساس تغییرمکان محیطی در امتداد Path2 ($90^\circ\le\varnothing\le270^\circ, z=L/2$)رسم شده‌اند.

۶-۲-۱- تست همگرایی بر اساس شبکه بندی (A)

در شکل ۷ تست همگرایی تغییرمکان‌ها برای شبکه‌بندی (A) آمده است. با افزایش تعداد گره‌های تفاضلات محدود بر روی لوله، مقادیر تغییرمکان‌ها به سرعت به سمت همگرایی پیش می‌روند. در نتیجه نمودار مربوط تعداد گره‌های کمتر از شکل ۷ حذف شده است. مشخص است که بیشینه مقدار تنش فون‌میززی در نقطه اولیه تماس رخ می‌دهد که از لحاظ مقدار تقریباً برابر تنش حد تسلیم ماده لوله در جدول ۱ است. بنابراین تعداد نقاط $N=M=125$ می‌تواند به عنوان شبکه‌بندی همگرا کننده نهایی در نظر گرفته شود. به ازاء $N=M=125$ ابعاد ماتریس ضرایب برای مدل یک چهارم $A_{11532,11532}$ است و مدت زمان معکوس‌گیری از آن ماتریس ضرایب برای یک سیستم کامپیوتر با پردازنده Core i7 و RAM 16GB تقریباً برابر با ۴۸ ساعت می‌باشد. اگر خواص تقارنی تغییرمکان‌ها به ماتریس ضرایب اعمال نمی‌شد $A_{46128,46128}$ بود که معکوس‌گیری از آن غیر ممکن می‌شد.

۶-۲-۲- اعمال برون یابی ریچاردسون به شبکه بندی (A)

پاسخ‌های حل الاستیک نشان داد که ریز کردن بیش از حد شبکه‌بندی در ناحیه اعمال بار منجر به عدم همگرایی مسئله می‌شود. این عدم همگرایی را می‌توان به بالا رفتن مقادیر خطای محاسبات در نقاط با فواصل کم ارتباط داد. برای اطمینان یافتن از همگرایی نهایی پاسخ‌ها، افزایش دقت حل مسئله و هم چنین کاهش زمان و حجم محاسبات از روش برون‌یابی ریچاردسون سه مرحله‌ای استفاده می‌شود. تعداد گره‌ها در امتدادهای محوریz و محیطی$\varnothing$ مطابق با جدول ۶ به نحوی انتخاب شده‌اند که رابطه (۲۳) برقرار باشد.

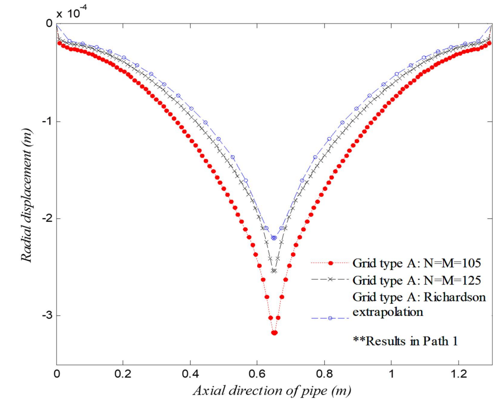
جدول ۶- تعداد گره ها دربرون یابی ریچاردسون شبکه بندی نوع (A)

$\Delta\varnothing$ (Radian)	Δz (m)	تعداد کل گره ها در مدل یک چهارم	M: نقاط در امتداد $\varnothing$	N: نقاط در امتدادz
۰/۰۲۱۶	۰/۰۴۱۶	۸۶۷	۳۵	۳۵
۰/۰۱۰۷	۰/۰۲۰۸	۳۰۷۲	۶۵	۶۵
۰/۰۰۵۴۲	۰/۰۱۰۴	۱۱۵۳۲	۱۲۵	۱۲۵

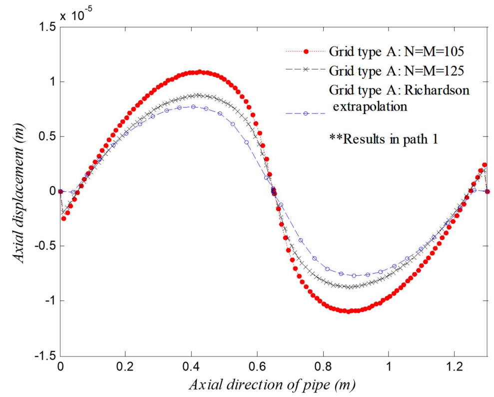
نحوه کاربرد رابطه (۲۴) برای تغییرمکان شعاعی لوله ($w_{i,j}$) در زیر آورده شده است:

$$\begin{aligned} (w_{i,j})_1 &= [w_{i,j}]_{N=M=65} + \frac{[w_{i,j}]_{N=M=65}-[w_{i,j}]_{N=M=35}}{4^{3-1}-1}, O(h^6) \\ (w_{i,j})_2 &= [w_{i,j}]_{N=M=125} + \frac{[w_{i,j}]_{N=M=125}-[w_{i,j}]_{N=M=65}}{4^{3-1}-1}, O(h^6) \\ w_{i,j} &= (w_{i,j})_2 + \frac{(w_{i,j})_2-(w_{i,j})_1}{4^{4-1}-1}, O(h^8) \end{aligned} \quad (۲۸)$$

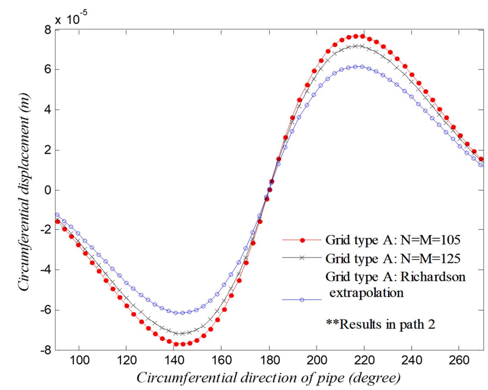
بعد از برون‌یابی، مرتبه خطای موجود در محاسبات تفاضلات محدود از ۴ به ۸ افزایش می‌یابد. مقایسه‌ای از نتایج بین شبکه‌بندی $N=M=125$ و نتایج برون‌یابی در شکل ۷ انجام شده است. با مقایسه نمودارها می‌توان اطمینان حاصل کرد که با انجام برون‌یابی پاسخ‌ها به سوی همگرایی نهایی پیش رفته‌اند. به علاوه مقدار تنش معادل فون-میززی در شکل ۷ برای حل برون‌یابی ۳۶۵ مگا پاسکال است که این مقدار دقیقاً همان تنش تسلیم برای جنس انتخابی لوله است و نشان می‌دهد که پاسخ‌ها به خوبی در بارگذاری حد الاستیک همگرا شده‌اند.



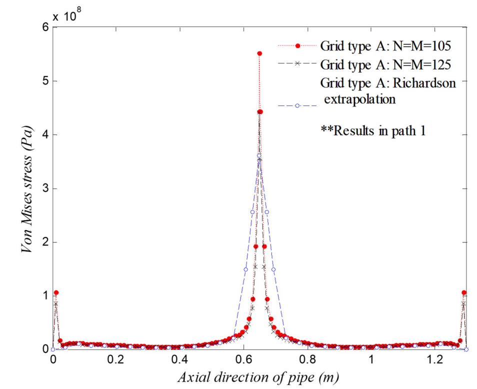
الف: تغییر مکان در امتداد شعاعی



ب: تغییر مکان در امتداد محوری



ج: تغییر مکان در امتداد محیطی

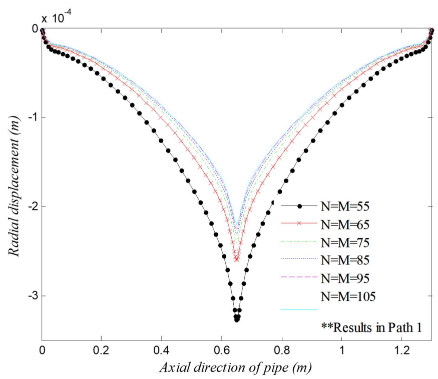


د: تنش معادل فون میزز

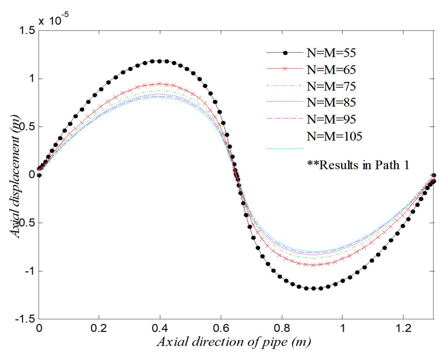
شکل ۷ تست همگرایی نتایج برای شبکه بندی نوع (A)

۶-۲-۳- تست همگرایی بر اساس شبکه بندی (B)

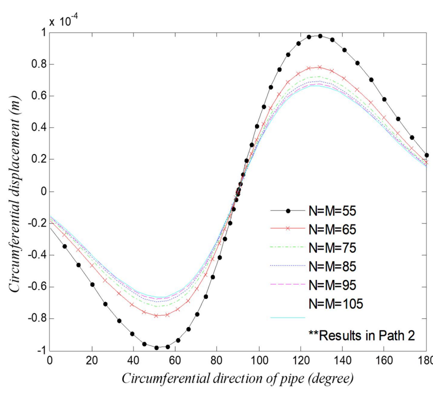
در شکل ۸ تست همگرایی به ازاء مقادیر متفاوت گره‌ها برای شبکه-بندی (B)رسم شده است. نتایج در این شکل با در نظر گرفتن گره‌ها روابط چبیشف و بدون تکنیک برون‌یابی به دست آمده‌اند. با ریزتر نمودن شبکه تفاضلات محدود بر روی لوله مقادیر تغییرمکان‌ها به سرعت و با نرخی بیشتر از شبکه‌بندی (A) به سمت همگرایی پیش می‌روند و تفاوت مقدار تغییرمکان‌ها میان فاصله‌گذاری درشت‌تر و ریزتر بسیار زیاد است. همان طور که مشخص است دقت نتایج و توزیع تغییرمکان‌ها نسبت به شبکه‌بندی (A) بسیار بهبود یافته است در حالیکه فاصله‌گذاری شبکه درشت‌تر است و به ازاء تعداد نقاط $N=M=105$ پاسخ‌ها همگرای پاسخ ها شده‌اند. برای این تعداد گره، ابعاد ماتریس ضرایب برای مدل یک چهارم برابر با $A_{8427,8427}$ است و مدت زمان معکوس‌گیری از آن ۲۰ساعت می‌باشد. مقایسه شکل‌های ۷ و ۸ نشان می‌دهد که شرایط مرزی در شکل ۸ بهتر برآورده شده‌اند.



الف: تغییر مکان در امتداد شعاعی



ب: تغییر مکان در امتداد محوری

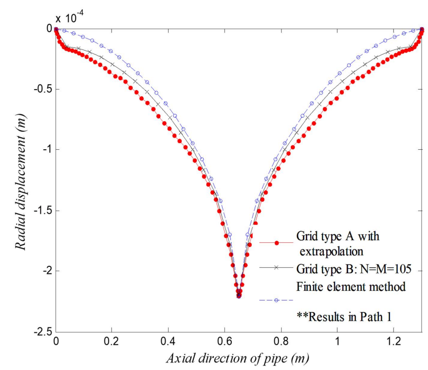


ج: تغییر مکان در امتداد محیطی

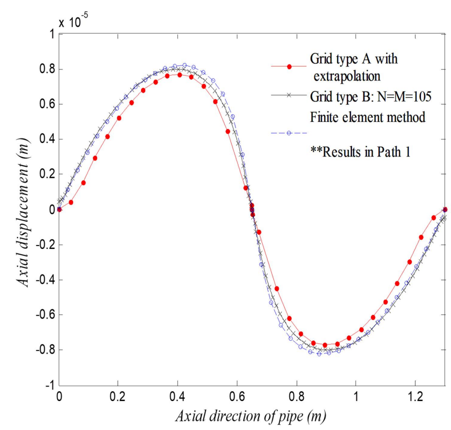
شکل ۸ تست همگرایی نتایج برای شبکه بندی نوع (B)

۶-۲-۴- مقایسه مدل‌های نظری و المان محدود

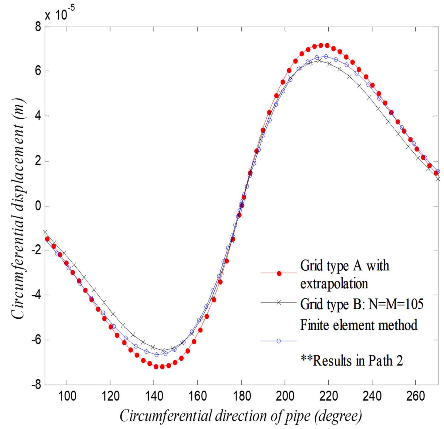
در شکل ۹ مقایسه‌ای از نتایج دو روش مدل‌سازی المان محدود و نظری بر اساس شبکه‌بندی‌های (A) و (B) انجام شده است. نتایج شبکه‌بندی (B) بسیار به نتایج المان محدود نزدیک است و انتخاب گره‌های تفاضلات بر اساس نقاط چبیشف باعث شده است تا سازگاری نتایج نسبت به شبکه‌بندی (A) بسیار بهتر شود. برای شبکه‌بندی (B)، علاوه بر تغییرمکان شعاعی، تغییرمکان در دو امتداد محوری و محیطی نیز در ناحیه فرورفتگی به خوبی پیش‌بینی شده‌اند و توزیع صحیح‌تری از تنش و شرایط مرزی در ناحیه فرو رفتگی بر لوله به دست آمده است. از بررسی توزیع تغییرشکل‌ها و تنش فون‌میزز در شکل ۹ می‌توان نتیجه گرفت که نقطه اولیه تماس بین سنبه و لوله دارای بیشترین مقدار تنش در طی تمامی مراحل بارگذاری است و بنابراین موثرترین کار تخمین صحیح مولفه تغییرمکانی در راستای شعاعی لوله در اطراف این نقطه می‌باشد. زیرا مولفه‌های تغییرمکانی محوری و محیطی در این نقطه دارای مقدار بسیار کم و تقریباً برابر با صفر هستند که باعث می‌شود تاثیر آنها در محاسبات به شدت کاهش یابد. با در نظر گرفتن شرایط حاکم بر مسئله مانند وجود مشتقات مرتبه بالا در دستگاه معادلات حاکم، تعداد متغیرهای مجهول هر گره، تخمین صحیح فشار تماسی، حل دستگاه معادلات خطی حاکم با ابعادی بسیار بزرگ و هم چنین زمان و هزینه زیاد محاسبات حداکثر مقدار خطای ۵٪ به دست آمده در شکل ۹ قابل قبول است. با در نظر گرفتن نتایج می‌توان نتیجه گرفت که شبکه‌بندی(B) توزیع مناسبی از تغییرمکان‌ها و به دنبال آن کرنش و تنش در لوله را ارائه می‌دهد و می‌توان از آن به عنوان شبکه‌بندی بهینه در تغییرشکل‌های پلاستیک فرورفتگی استفاده کرد.



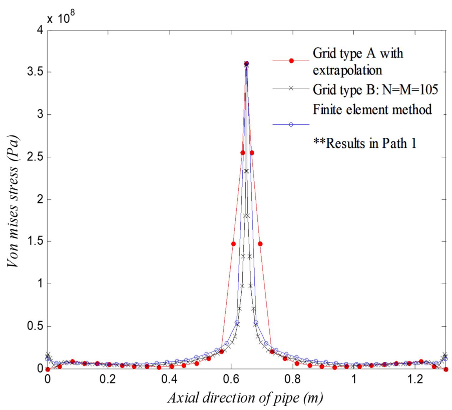
الف: تغییر مکان در امتداد شعاعی



ب: تغییر مکان در امتداد محوری



ج: تغییر مکان در امتداد محیطی



د: تنش معادل فون میزز

شکل ۹ نتایج روش‌های نظری، المان محدود در حد الاستیک

۷- نتیجه گیری

در این مقاله تماس الاستیک بین سنبه کروی صلب با لوله فولادی با استفاده از مدل‌سازی به روش‌های نظری و المان محدود مورد بررسی قرار گرفت. نتایج به دست آمده از آنالیز عددی مدل نظری سازگاری بسیار خوبی را با نتایج شبیه‌سازی المان محدود نشان می‌دهد و به خوبی رفتار تغییرمکانی لوله در اثر بارگذاری تماسی برای ایجاد فرورفتگی را پیش‌بینی می‌نماید. به علاوه دو نوع متفاوت از مکان‌یابی گره‌ها بر روی لوله جهت ایجاد شبکه تفاضلات محدود آزموده شد. برای شبکه‌بندی (A) نشان داده شد که تکنیک برون‌یابی ریچاردسون می‌تواند به حل مسئله با زمان و هزینه کمتر کمک کند. اما، نرخ همگرایی پاسخ‌ها با استفاده از شبکه‌بندی (B) دربردارنده نقاط چبیشف در مقایسه با نوع (A) بسیار بهبود یافت و شرایط مرزی نیز به خوبی برآورده شدند. به علاوه مشخص شد که فرمول‌بندی کرنش-تغییرمکان نیردسن به خوبی رفتار تغییر شکلی در پوسته‌های استوانه‌ای جدار نازک تحت بارگذاری فشاری خارجی را پیش‌بینی می‌نماید. هم چنین، اولین نقطه تماس بین سنبه و لوله دارای بیشینه مقدار تنش معادل فون‌میززی در لوله است و احتمال آغاز پدیده خرابی و به دنبال آن شکست مواد نرم در آن ناحیه وجود دارد. این مدل را می‌توان به انواع مختلفی از ابعاد لوله و سنبه، بارگذاری های پیچیده و ترکیبی مانند تاثیر همزمان فشار و گشتاور خمشی گسترش داد.

پیوست الف: معادلات تعادل حاکم بر پوسته در فرم ناویر

۱

$$\frac{1}{12}\frac{Eh}{(1-v^2)}[-\frac{\partial^3 w(z,\varnothing)}{\partial z^3}h^2+12\frac{\partial^2 u(z,\varnothing)}{\partial z^2}R+12\frac{\partial^2 v(z,\varnothing)}{\partial z\partial\varnothing}v$$
$$+12\frac{\partial w(z,\varnothing)}{\partial z}]+\frac{E}{2(1+v)}[\frac{\partial^3 w(z,\varnothing)}{\partial z\partial\varnothing^2}(RLn\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-h)+$$
$$+\frac{\partial^2 u(z,\varnothing)}{\partial\varnothing^2}Ln\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)+\frac{\partial^2 v(z,\varnothing)}{\partial z\partial\varnothing}h]=0$$

۲

$$\frac{Eh}{24(1-v^2)}[-12\frac{\partial^2 v(z,\varnothing)}{\partial z^2}\left(R^2v+\frac{1}{4}h^2v-R^2-\frac{1}{4}h^2\right)+\frac{\partial^3 w(z,\varnothing)}{\partial z^2\partial\varnothing}$$
$$\left(h^2v-3h^2\right)+12\frac{\partial^2 u(z,\varnothing)}{\partial z\partial\varnothing}(Rv+R)+24\frac{\partial^2 v(z,\varnothing)}{\partial\varnothing^2}+24\frac{\partial w(z,\varnothing)}{\partial\varnothing}]=0$$

۳

$$\frac{Eh}{24(1+v)}[12\frac{\partial^4 w(z,\varnothing)}{\partial z^2\partial\varnothing^2}\left(R^3Ln\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-12R^2h+\frac{1}{4}h^3\right)+$$
$$+12\frac{\partial^3 u(z,\varnothing)}{\partial z\partial\varnothing^2}\left(R^2Ln\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-Rh\right)-3\frac{\partial^3 v(z,\varnothing)}{\partial z^2\partial\varnothing}h^3]+$$
$$\frac{E}{(1-v^2)}[\frac{\partial u(z,\varnothing)}{\partial z}Rhv-\frac{\partial v(z,\varnothing)}{\partial\varnothing}\left(RLn\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-2h\right)+$$
$$w(z,\varnothing)\left(2RLn\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-h\right)+\frac{\partial^2 w(z,\varnothing)}{\partial\varnothing^2}\left(-RLn\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)+h\right)$$
$$+\frac{\partial^3 v(z,\varnothing)}{\partial\varnothing^3}\left(RLn\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-h\right)-\frac{\partial^4 w(z,\varnothing)}{\partial\varnothing^4}\left(RLn\left(\frac{h+2R}{2R-h}\right)-h\right)$$
$$-\frac{1}{12}\frac{\partial^4 w(z,\varnothing)}{\partial z^2\partial\varnothing^2}h^3v]+\frac{Eh^3}{12(v^2-1)}[-\frac{\partial^4 w(z,\varnothing)}{\partial z^4}R^2-\frac{\partial^2 w(z,\varnothing)}{\partial z^2}v$$
$$+\frac{\partial^3 u(z,\varnothing)}{\partial z^3}R+2\frac{\partial^3 v(z,\varnothing)}{\partial z^2\partial\varnothing}v-\frac{\partial^4 w(z,\varnothing)}{\partial z^2\partial\varnothing^2}v]+P_x(z,\varnothing)R^2=0$$

پیوست ب:الگوریتم تفاضلات محدود در شبکه بندی نامساوی

به عنوان نمونه رابطه تفاضلات برای مشتق اول تغییرمکان شعاعی(w) با در نظر گرفتن $n=5$و مرتبه خطا $O(h^4)$ آورده شده است:

$$\frac{\partial w(z,\varnothing)}{\partial z}=\frac{\left(\delta_{z_i}+\delta_{z_{i+1}}\right)\delta_{z_{i-1}}\delta_{z_i}w_{i-2,j}}{\delta_{z_{i-2}}\left(\delta_{z_{i-2}}+\delta_{z_{i-1}}\right)\left(\delta_{z_{i-2}}+\delta_{z_{i-1}}+\delta_{z_i}\right)\left(\delta_{z_{i-2}}+\delta_{z_{i-1}}+\delta_{z_i}+\delta_{z_{i+1}}\right)}$$
$$-\frac{\left(\delta_{z_{i-2}}+\delta_{z_{i-1}}\right)\delta_{z_i}\left(\delta_{z_i}+\delta_{z_{i+1}}\right)w_{i-1,j}}{(\delta_{z_{i-2}}\delta_{z_{i-1}}(\delta_{z_{i-1}}+\delta_{z_i})(\delta_{z_{i-1}}+\delta_{z_i}+\delta_{z_{i+1}})}$$
$$+\frac{(-\delta_{z_i}{}^2\delta_{z_{i-2}}-2\delta_{z_i}{}^2\delta_{z_{i-1}}+2\delta_{z_i}\delta_{z_{i-2}}\delta_{z_{i-1}}-\delta_{z_i}\delta_{z_{i-2}}\delta_{z_{i+1}})w_{i,j}}{\left(\delta_{z_i}\left(\delta_{z_{i-2}}+\delta_{z_{i-1}}\right)\left(\delta_{z_i}+\delta_{z_{i+1}}\right)\delta_{z_{i-1}}\right)}$$
$$+\frac{(2\delta_{z_i}\delta_{z_{i-1}}{}^2-2\delta_{z_i}\delta_{z_{i-1}}\delta_{z_{i+1}}+\delta_{z_{i-2}}\delta_{z_{i-1}}\delta_{z_{i+1}}+\delta_{z_{i-1}}{}^2\delta_{z_{i+1}})w_{i,j}}{\left(\delta_{z_i}\left(\delta_{z_{i-2}}+\delta_{z_{i-1}}\right)\left(\delta_{z_i}+\delta_{z_{i+1}}\right)\delta_{z_{i-1}}\right)}$$
$$+\frac{\left(\delta_{z_{i-2}}+\delta_{z_{i-1}}\right)(\delta_{z_i}+\delta_{z_{i+1}})\delta_{z_{i-1}}w_{i+1,j}}{\left(\delta_{z_{i-2}}+\delta_{z_{i-1}}+\delta_{z_i}\right)\left(\delta_{z_{i-1}}+\delta_{z_i}\right)\delta_{z_i}\delta_{z_{i+1}}}$$
$$-\frac{\left(\delta_{z_{i-2}}+\delta_{z_{i-1}}\right)\delta_{z_i}\delta_{z_{i-1}}w_{i+2,j}}{\left(\delta_{z_{i-2}}+\delta_{z_{i-1}}+\delta_{z_i}+\delta_{z_{i+1}}\right)\left(\delta_{z_{i-1}}+\delta_{z_i}+\delta_{z_{i+1}}\right)(\delta_{z_i}+\delta_{z_{i+1}})\delta_{z_{i+1}}}$$

۸- مراجع

[1] Cosham A and Hopkins P., The effect of dents in pipelines-guidance in the pipeline defect assessment manual, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, p. p.127–139, 2004.

[2] Johnson K. L, Contact mechanics, 1985.

[3] Perez-Gonzalez A., Fenollosa-Esteve C., Sanchez-Marın F and Vergara M., A modified elastic foundation contact model for application in 3D models of the prosthetic knee, *Medical Engineering & Physics*, Vol. 30, p. p. 387–398, 2008.

[4] Greenwood J. A., Analysis of elliptical hertzian contact, *Tribology International*, Vol. 30, p. p. 235-237, 1997.

[5] Flugge W., Stresses in shells, *Springer*, 1973.

[6] Niordson F., Shell theory, *Elsevier Science Publication*, 1985.

[7] seng O and wing C., the elastic analysis on a dent of pressurized pipe, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 38, p. p. 369-383, 1989.

[8] seng O., derivation of stresses associated with a long axial dent in a pressurized cylinder, *International journal of mechanical science*, Vol. 33, p. p. 115–123, 1991.

[9] Akbari Alashti R and Jafari S., Analytical hertz model of indentation on pipes by rigid spherical indenters.*ISME2013*.

[10] Bachut J and Iflefel I.B., Collapse of pipes with plain or gouged dents by bending moment, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 84, p. p. 560–571, 2007.

[11] Bachut J and Iflefel I.B., Experimental and Numerical Investigation of Plain and Gouged Dents in Steel Pipes Subjected to Pressure and Moment Loading, *ASME*, Vol. 130, 2008.

[12] Iflefel I.B, MoffatD. G and Mistry J., The interaction of pressure and bending on a dented pipe, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, p. p. 761–769, 2005.

[13] Akbari Alashti R., Jafari S and Hosseinipour S. J., Load bearing capacity of a dented aluminum pipe subjected to internal pressure considering the effect of ductile damage, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 12 p. p. 355-384, 2015.

[14] Jafari S., Akbari Alashti R and Hosseinipour S. J., Comparison of Ductile Fracture Models on Load Bearing Capacity of a Dented Aluminum Pipe Subjected to Internal Pressure, *Arabian journal for science and engineering*, Vol. 39, p. p. 8031–8049, 2014.

[15] Akbari Alashti R., Jafari S and Hosseinipour S. J., Experimental and numerical investigation of ductile damage effect on load bearing capacity of a dented API XB pipe subjected to internal pressure, *Engineering Failure Analysis*, Vol. 47,p. p. 208–228, 2015.

[16] Akbari Alashti R., Jafari S., Hosseinipour S. J and Gorji A. H., Experimental and numerical investigation of ductile damage effect on load bearing capacity of dented pipe with different internal pressure, wall thickness and indenter diameter. *Modares Mechanical Engineering,* Vol. 13, pp. 74-85, 2013. (in Persian).

[17] Akbari Alashti R and Jafari S., The effect of ductile damage on plastic behavior of a rotating disk with variable Thickness subjected to mechanical loading, *Scientia Iranica B*, Vol. 23, p. p. 174-193, 2016.

[18] Shu C., Differential quadrature and its Application in Engineering, *Springer*, 2000.

[19] Li J., General explicit difference formulas for numerical differentiation, *J. Comput. Appl. Math,* p. p. 29–52, 2005.

[20] Ashok K and Singh S. B., Finite Difference Formulae for Unequal Sub- Intervals Using Lagrange's Interpolation Formula, *International Journal of Mathmatic Analysis*, Vol. 3, p. p. 815 – 827, 2009.

[21] Vismor T., Matrix Algorithms, 2012.

[22] Ma Y., Ge Y. and A Y., high order finite difference method with Richardson extrapolation for 3D convection diffusion equation, *Applied Mathematics and Computation*, Vol. 2, p. p. 3408–3417, 2010.