مجله مهندسي مكانيك، شماره پياپي ٦٤، جلد ٢٩، شماره ١، بهار، ١٣٩٨، صفحه ٢٩٩-١١٢

شبیهسازی فرآیند صعود حباب تحت میدان الکتریکی با استفاده از روش شبکه بولتزمن

آتنا قادرى	دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
محمد حسن کیهانی	استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران
محسن نظری*	دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

چکیدہ

در این مقاله، رفتار یک حباب در سیال لزج دی الکتریک تحت اثر میدان الکتریکی یکنواخت در جریان دوفازی با استفاده از روش شبکه بولتزمن به صورت دوبعدی مدلسازی شده است. تغییر شکل حباب، بر اثر نیروی شناوری و نیروی الکتریکی ناشی از میدان الکتریکی خارجی اعمال شده، مورد بررسی قرار گرفته است. برای حل مسئله یک کد کامپیوتری توسعه داده شده که شامل بخش های حل میدان جریان و میدان الکتریکی می باشد. برای اعتبارسنجی حل میدان جریان، مدل مورد نظر توسط آزمون های معروف آزمایش لاپلاس و صعود آزاد حباب مورد امتحان قرار گرفته است. به منظور اعتبارسنجی میدان الکتریکی، تغییر شکل قطره استاتیکی در اثر میدان الکتریکی با معادله دوبعدی تیلور مقایسه شده است. مقایسه نتایج تحقیق حاضر با نتایج محققان قبلی توافق خوبی دارد. تاثیر میدان الکتریکی افقی یکنواخت بر روی فرآیند صعود حباب در راستای عمود تحت نیروی گرانش با جزئیات مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نمان می دهد که میدان الکتریکی افقی یکنواخت بر روی فرآیند صعود حباب در راستای عمود تحت نیروی گرانش با جزئیات مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نمان می دهد که میدان الکتریکی افقی یکنواخت بر روی فرآیند صعود حباب در راستای عمود تحت نیروی گرانش با جزئیات مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می دهد که میدان الکتریکی افقی یکنواخت بر روی فرآیند صعود حباب را تحت تاثیر قرار داده و کنترل کند. برای تابع تمایز مثران سرعت صعود حباب با افزایش می دهد که میدان الکتریکی میتواند شکل، سرعت و محل حباب را تحت تاثیر قرار داده و کنترل کند. برای تابع تمایز مثبت، سرعت صعود حباب با افزایش می دهد که میدان الکتریکی، کاهش می[–]یاد در رایتای عمایز منوند مشاهده می شود. افزایش میدان الکتریکی کوچکتر اتفاق میافتد. شکسته شدن حباب برای تابع تمایز مثبت میشود. شبکه بولترمن.

Simulation of RisingBubble under Electric Field using Lattice Boltzmann Method

A. Ghaderi	Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
M. H. Kayhani	Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran
M. Nazari	Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

Abstract

The behavior of a bubble in dielectric viscous fluid under electrical field is numerically studied using the lattice Boltzmann method base on the Shan-Chen model. Deformation of the bubble is considered including the effects of buoyancy and electric forces induced from the external applied electric field. A computer code is written to solve the problem, which includes solving the flow field and electric field. To validate the results of the flow field, two tests have been employed: the free-bubble rising test and the Laplace test. In order to check the results of the electric field, the deformation of static drop under electric field is compared with two-dimensional Taylor equation. The comparison of results between present study and previous researches shows that there is a good agreement between the results. The results reveal that the electric field affects and controls the shape, velocity, and location of the bubble. For positive discriminating function. In higher Eotvos numbers, the increase of electrical field causes the bubble break up for positive discriminating function. Also, larger difference function leads to bubble break up at lower electrical capillary numbers.

Keywords: Rising bubble, electric field, Lattice Boltzmann method.

آزمایش قرار دادند. آنالاند و همکارانش [۳] با استفاده از روش حجم سیال به مدلسازی سهبعدی مساله حباب پرداختند. این محققین مدلسازی خود را برای چند حالت از نمودار گریس اجرا نمودند. نتایج مدلسازی آنها تطابق خوبی با دادههای تجربی دارد.

بررسی اثر میدانهای خارجی مانند میدانهای الکتریکی روی فرآیند صعود حباب یا سقوط قطرهها از جمله پرکاربردترین موضوعات مورد بررسی در پژوهشهای دانشگاهی و پروژههای صنعتی هستند. از جمله این کاربردها میتوان فرآیند نمکزدایی^۳ [۴]، فرآیندهای متالورژی [۵]، سیستمهای خنککاری توکامک^۴ رآکتورهای گداخت هستهای [۶] و تصفیه هوا [۲] را نام برد. اعمال میدان الکتریکی، علاوه بر تأمین نیروی محرک، میتواند موجب تغییر شکل، ادغام و در شرایط ۱– مقدمه

فرآیند صعود حباب در یک سیال لزج، کاربردهای فراوانی در بسیاری از فرآیندهای مهندسی از جمله راکتورهای شیمیایی، نیروگاه-های هستهای، موتورهای احتراقی، صنایع پتروشیمی، صنایع دارویی و غیره دارند. اولین مطالعات در این زمینه توسط گریس و همکارانش [۱] انجام شده است. آنهاحرکت آزاد حباب در یک سیال لزج ساکن را بهصورت تجربی مورد مطالعه قرار دادند. آنها نتایج خود را بر روی یک نمودار، بر حسب سه عدد بی عد اتووس¹، مورتون^۲ و رینولدز نمایش دادند که به نمودار گریس معروف است. امروزه این نمودار مبنای اکثر کارهای عددی است که در زمینه حرکت حباب انجام می شود. باگا و وبر [۲] در ادامه کار گریس و همکارانش حالتهای بیشتری را مورد

³ Desalination

⁴ Tokamak

¹ Eotvos ² Morton

^{*} نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: nazari_me@yahoo.com تاریخ دریافت: ۹۵/۰۲/۳۱

مناسب متلاشی شدن قطرات شود. بنابراین، درک رفتار دینامیکی حباب تحت میدان الکتریکی، میتواند در طراحی بهینه سیستمهای دوفازی که بر پایه استفاده از میدان الکتریکی کار میکنند، بسیار تأثیر گذار باشد. برارنیا و گنجی [۸] با استفاده از روش شبکه بولتزمن به شبیهسازی فرآیند سقوط قطره که دارای رسانایی الکتریکی ضعیف مى باشد، تحت تاثير ميدان الكتريكي پرداختند.

در سالهای اخیر روش شبکه بولتزمن پتانسیل بالای خود را در شبیه سازی خط مشترک بین فازهای مجزا نشان داده است [۹]. این روش یک روش شبه مولکولی بر اساس مـدلهای معـادلات جنبشـی در سطح میکروسکوپی و مزوسکوپی میباشد که تابع توزیع مجموعه مولکولها را ردیابی میکند [۱۰]. در مجموع چهار روش عمده برای روش شبکه بولتزمن وجود دارد که می تواند جریان دوفازی را شبیه-سازی نمایند. از جمله: مدل کرومودینامیک^۳ [۱۱]، شان-چن [۱۲]، مدل های بر اساس نیروهای برهم کنش بین مولکولی^۴ [۱۳] و مدل انرژی آزاد⁴ [۱۴]. تاکادا و همکاران [۱۵] با استفاده از روش شبکه بولتزمن مدل انرژی آزاد صعود حباب را تحت نیروی گرانش شبیهسازی نمودند و نتایج کار خود را با نتایج عددی محققان دیگر مقایسه نمودند. گوپتا و کومار [18] با استفاده از روش شبکه بولتزمن مدل شان-چن صعود آزادانه یک حباب و چند حباب را مورد مطالعه قرار دادند. فخاری و رحیمیان [۱۷] با استفاده از زمان آسایش چندگانه در روش شبکه بولتزمن سقوط قطره متقارن محورى دوبعدى را شبيه سازى كردهاند. در این مطالعه با استفاده از اعداد بی بعد اتوس، مورتون و ارشـمیدس^۷، حالتهای مختلف سقوط یک قطرهی متقارن محوری و فروپاشی آن در اثر نیروی وزن مورد بررسی قرار گرفته است و نشان داده شد که در اعداد اتوس پایین قطره تغییر شکل زیادی نمی دهد و در نهایت به یک شکل پایدار میرسد. اما با افزایش عدد اتوس نرخ تغییر شکل نیز افزایش یافته و قطره ممکن است دچار فرویاشی شود انور [۱۸] به بررسی افزایش نیروی شناوری حباب به وسیله روش شبکه بولتزمن پرداخت. برای شبیه سازی افزایش نیروی شناوری حباب تحت نیروی گرانش، نیروی خارجی به مرحله برخورد اضافه نمود. زمانیان و محمد پور فرد[۱۹] از روش شبکه بولتزمن بر پایه مدل انرژی آزاد برای شبيه سازي پديده الكترووتينگ^ مواد عايق اســتفاده نمودنـد. آنهـا بـه شبیه سازی پدیده الکترووتینگ بر روی سطوح فوق آبگریز پرداختند. آنها با مقایسه نتایج خود با کارهای آزمایشگاهی، تطابق مناسبی مشاهده نمودند که نشان دهنده درستی روش شبیهسازی عددی می-باشد. امینفر و محمدپور فرد[۲۰] از روش شبکه بولتزمن بر پایه مـدل انرژی آزاد برای شبیه سازی پدیده الکترووتینگ بر روی ادغام قطرات که یکی دیگر از کاربردهای این پدیده میباشد، پرداختند. آنها پایـداری قطرات در یک سیستم محدود به روش تحلیلی و عددی را بررسی نمودند و نشان دادند پایداری قطرات به اندازه سیستم و زاویه تماس قطرات وابسته است. آنها نتيجه گرفتند برای پايداری قطرات میتوان از

اعمال ولتاژ استفادہ نمود. موسوی و ھمکاران [۲۱] بے بررسے پدیدہ جدایش و چکیدن قطره تحت نیروی گرانش به روش شبکه بولتزمن با استفاده از مدل شان و چن پرداختند. نتایج نشان میدهد که قطره از ديواره آبدوست در اعداد اتوس پايين جدا نمى شود اما جدايش قطره از دیوارهای آبگریز در تمام اعداد اتوس تست شده اتفاق میافتد.مدل شان-چن بهدلیل سادگی و قابلیت تطابق خوب، پرکاربردترین مدل چند فازی در روش شبکه بولتزمن میباشد. خارمیانی و همکاران [۲۲] برخورد همزمان دو قطره موازی بر روی لایه ی نازک مایع را با استفاده از روش شبکه بولتزمن شبیه سازی نمودند. مدل عددی توسعه داده شده در این مقاله که بر پایه مدل دوفازی تک جزئی شان و چن است، امکان دستیابی به نسبت چگالیهایی به بزرگی ۱۰۰۰، لزجتهای کـم و تنظیم مقدار کشش سطحی مستقل از نسبت چگالی را فراهم می کند.

با توجه به بررسیهای صورت گرفته، اکثر مطالعات انجام شده بر روى فرآيند سقوط قطره يا صعود حباب در غياب ميدان الكتريكي مي-باشد. اندک مطالعات انجام شدہ در این زمینے مربوط بے یک قطرہ ساکن یا سقوط قطره در حضور میدان الکتریکی میباشد که با روش-های مکانیک سیالات کلاسیک انجام شده است. بنابراین، در این مقاله از روش شبکه بولتزمن مدل شان-چن برای شبیه سازی فرآیند صعود حباب در یک سیال لـزج تحـت تـاثیر میـدان الکتریکـی یکنواخـت در راستای افقی استفاده شده است. برای اعتبارسنجی حل میدان جریان مدل مورد نظر توسط آزمونهای معروف: آزمایش لاپلاس و صعود آزاد حباب مورد امتحان قرار گرفته است. به منظور اعتبارسنجی میدان الکتریکی، تغییر شکل قطرہ استاتیکی در اثر میدان الکتریکی با معادلـه دوبعدی تیلور مقایسه شده است. در انتها فرآیند صعود حباب تحت تاثیر میدان الکتریکی یکنواخت با جزئیات مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در واقع تاثیر عدد کاییلاری الکتریکی و تابع تمایز ٔ در دو عدد اتـووس ۱ و ۵ و دو عـدد مورتـون ^{۶-}۱۰×۲/۷۵ و ^{۵-}۲۰۰×۱/۳ مـورد بررسی قرار گرفته است.

۲-روش عددی

در يژوهش حاضر، مدل شان-چن [۱۲] روش شبکه بولتزمن براي شبیه سازی جریانهای چندفازی-چندجزئی استفاده شده است. در این روش برای هر جزء سیال یک تابع توزیع تعادلی حل می شود. معادله استاندارد شبکه بولتزمن بصورت زیر می باشد:

$$f_i^{\sigma}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta t, t + \delta t) = f_i^{\sigma}(\mathbf{x}, t) - \frac{f_i^{\sigma(eq)} - f_i^{\sigma}}{\tau^{\sigma}} \tag{(1)}$$

 au^{σ} که $f_i^{\circ}({m x},t)$ تابع توزیع جزء σ ام در جهت iام سرعت است. زمان آسایش است که به لزجـت سـینماتیکی $\nu^{\sigma} = (\tau^{\circ} - 0.5)/3$ مـرتبط می شود. تابع توزیع تعادلی هر جزء که در معادلـه (۱) بـا $f_i^{\sigma(eq)}$ نشـان داده شده است، عبارت است از:

$$f_i^{\sigma(eq)} = w_i \rho^{\sigma} \left[1 + \frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u}_{eq}^{\sigma}}{c_s^2} + \left(\frac{\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{u}_{eq}^{\sigma}}{2c_s^4}\right)^2 - \frac{\boldsymbol{u}_{eq}^{\sigma} \cdot \boldsymbol{u}_{eq}^{\sigma}}{c_s^2} \right]$$
(7)

¹ Microscopic

² Mesoscopic

Chromo-dynamic

Intermolecular Interaction

⁵ Free Energy ⁶ Multiple-relation time

Archimedese Number 8 Electrowetting

⁹ Discriminating Function

س و ،*e*، به ترتیب، ضرایب وزنی و سرعت میکروسکوپی هســتند. همچنین، ^σ در معادله (۲) چگالی جزء σ-ام بوده و از رابطه زیر قابـل محاسبه است:

$$\rho^{\sigma} = \sum_{i=0}^{8} f_i^{\sigma} \tag{(7)}$$

سرعت ماکروسکوپی نیز از رابطه زیر بدست میآید: $ho^{\sigma} m{u}^{\sigma}_{eq} =
ho^{\sigma} m{u}' + au^{\sigma} m{F}^{\sigma}$ (۴)

سرعت ترکیبی u_{eq}^{σ} سرعت تعدادلی جرء σ ام است. u_{eq}^{σ} سرعت ترکیبی ماکروسکوپی است که برای تحلیل کل جریان بسیار مهم است و از رابطهی زیر به دست میآید:

$$\boldsymbol{u}' = \frac{\sum_{\sigma} \rho^{\sigma} \boldsymbol{u}^{\sigma} / \boldsymbol{\tau}^{\sigma}}{\sum_{\sigma} \rho^{\sigma} / \boldsymbol{\tau}^{\sigma}}$$
($\boldsymbol{\delta}$)

در رابطه فوق، ho^{σ} و $au^{ au}$ به ترتیب نشان دهنـده چگـالی و زمـان آسایش جزء σ -ام میباشند.

در معادله (۴) معرف نیروهای اعمال شده بر سیال جـزء σ -ام است که بصورت زیر است:

$$\boldsymbol{F}^{\sigma} = \boldsymbol{F}_{f}^{\sigma} + \boldsymbol{F}_{s}^{\sigma} + \boldsymbol{F}_{g}^{\sigma} + \boldsymbol{F}_{elec}^{\sigma} \tag{(9)}$$

Ff^ø نیروی بینمولکولی بین جزءهای مختلف سیال میباشـد و بصورت زیر تعریف میشوند:

$$\boldsymbol{F}_{f}^{\sigma}(\boldsymbol{x}) = -\psi^{\sigma}(\boldsymbol{x})G_{C}\sum_{i}\psi^{\bar{\sigma}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_{i}\,\delta t)\boldsymbol{e}_{i} \qquad (\forall)$$

G_C پارامتری برای کنترل قدرت جاذبه بینمولکولی بین جزءهای مختلف سیال میباشد.

شکل تابع پتانسیل \/ بر اساس نـوع مسـئله و فرضـیات گازهـای ایدهآل و غیر ایدهآل تعیین می گردد و معادلهی حالت اجزای مختلـف و کل جریان را مشخص می کند. در تحقیق حاضر، فاز حباب غیرایدهآل و فاز پیرامون حبـاب ایـدهآل فـرض شـده است. بـرای سـیال ایـدهآل و غیرایدهآل، تابع پتانسیل، به ترتیب، عبار تند از [۱۳]:

$$\psi(\rho^{\sigma}) = \rho^{\sigma} \tag{A}$$

$$\psi(\rho^{\sigma}) = \rho_0 (1 - \exp(\frac{-\rho^{\sigma}}{\rho_0})) \tag{(3)}$$

در معادله (۶) نیروی کشش سطحی بین هرجـزء بـا سـطح $F_s^{\,\sigma}$ جامد است و بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\boldsymbol{F}_{s}^{\sigma}(\boldsymbol{x}) = -\psi^{\sigma}G_{ads}(\boldsymbol{x})\sum_{i} w_{i}S(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{e}_{i}\delta_{i})\boldsymbol{e}_{i} \qquad (1.1)$$

Gads پارامتری برای کنترل و قدرت نیروی کشش سطحی بین سیال و سطح جامد است. لازم به ذکر است که این پارامتر برای سیال غیرترکننده ^۱ مثبت و برای سیال ترکننده ^۲ منفی است. *S* تابع اسکالر بوده که برای نقاط مجاور دیوار، یک و برای بقیه نقاط، صفر در نظر گرفته میشود.

در معادله (۶) نیرویی الکتریکی موثری است که به هر جـزء $F_{elec}{}^{\sigma}$ وارد میشود و برابر است با:

$$\boldsymbol{F}_{elec}^{\sigma} = \frac{\rho^{\sigma}}{\rho} \boldsymbol{F}_{elec} \tag{(11)}$$

² Wetting

جگالی کل است و برابـر اسـت بـا: $ho =
ho^1 +
ho^2$. بـر اسـاس معادلات ماکسول^۲، نیروی الکتریکی که به جریان سـیال تـراکم ناپـذیر وارد میشود، برابر است با [۲۳]:

$$F_{elec} = qE + -\frac{1}{2}E.E\nabla\varepsilon$$
(17)
c rately a second se

الکتریکی است. جمله اول معادله فوق، بیانگر نیروی الکتروفورتیک² است که بر بارهای آزاد در محیط سیال اثر می کند. مقدار این نیرو به چگالی بار آزاد و شدت میدان الکتریکی اعمالی وابسته است. جمله دوم در معادله فوق، نشان دهنده نیروی دی الکتروفورتیک^۷ است که در این مؤلفه در جریانهای دو یا چند فازی که مواد مختلف با ثابتهای دی الکتریک متفاوت در تماس با یکدیگر قرار می گیرند، اهمیت فراوانی دارد. جهت این نیرو در جهت خلاف افزایش ضریب گذردهی الکتریکی می باشد. به عبارت دیگر، جهت آن از ماده با ثابت دی الکتریک بیشتر به سمت ماده با گذردهی الکتریکی کمتر است. مقادیر $P \in \mathbf{Z}$ به ترتیب از معادلات (۳) و (۱۴) بدست می آیند:

$$q = \nabla . (\varepsilon E) \tag{17}$$
$$E = -\nabla U \tag{17}$$

در معادله (۱۴)، *U* پتانسیل الکتریکی میباشد. به منظور محاسـبه آن در روش شبکه بولتزمن، تابع توزیع جدیدی تعریف مـیشـود کـه از رابطه زیر سروی می کند [۲۳]:

$$h_i(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i \delta t, t + \delta t) = h_i(\mathbf{x}, t) - \frac{h_i^{eq} - h_i}{\tau^h} \tag{1}$$

توابع توزیع تعادلی برای مدل D2Q9 از رابطهی زیر به دست میآیند:

$$h_{i}^{eq} = \frac{4U}{9} \qquad i = 0$$

$$h_{i}^{eq} = \frac{U}{9} \qquad i = 1, 2, 3, 4 \qquad (17)$$

$$h_i^{cq} = rac{1}{36}$$
 $i = 5,6,7,8$
پتانسیل الکتریکی هر نقطه در دامنه محاسباتی توسط رابطهی زیر

$$U = \sum_{i=0}^{8} h_i \tag{1Y}$$

زمان آسایش تابع توزیع میدان الکتریکی (^{$$h$$}) توسط رابطه
زمان آسایش تابع توزیع میدان الکتریکی (τ^{b}) توسط رابطه
خواص دی الکتریک کل مخلوط در هر مکان از روابط زیر به دست
خواص دی الکتریک کل مخلوط در هر مکان از روابط زیر به دست
میآید [τ]:
(۱۸)
 $\lambda = \epsilon^{(b)}\rho^{(b)} + \epsilon^{(c)}\rho^{(c)}$
(۱۹)
 $\lambda = \lambda^{(b)}\rho^{(b)} + \lambda^{(c)}\rho^{(c)}$
که در این معادله^(b) $\delta^{(b)}$ $\epsilon^{(d)}$ و به ترتیب نشان دهنده ضریب
گذر دهی، رسانایی الکتریکی ⁴ و چگالی جزء تشکیل دهنده ی حیاب

³ Maxwell's Equations

⁴ Permittivity

⁵ Free Charge Density

⁶ Electrophoretic Force

⁷ Dielectrophoretic Force

⁸ Electrical Conductivity

هستند. همچنین، ^(c) د^(c) و ^(c) به ترتیب بیان گر ضریب گذردهی، رسانایی الکتریکی و چگالی جزء محیط اطراف حباب هستند.

۳- بررسی اعتبارسنجی و صحت کد کامپیوتری

از سه آزمون معروف جریانهای دوفازی شامل: آزمون لاپلاس، صعود آزاد حباب و تغییر شکل قطره استاتیکی در اثر میدان الکتریکی برای اعتبار سنجی شبیه سازی حاضر استفاده میشود.

۳-۱-آزمون لاپلاس

قانون لاپلاس بیان میکند که در غیاب اثرات نیروهای جاذبه و لزجتی و درحضور اثرات کشش سطحی و اختلاف فشار، اگر شکل یک ذره سیال، از دایره در حالت دوبعدی منحرف شود، در حالت نهایی شکل آن باید، دوباره به دایره تبدیل شود. همچنین، رابطه تحلیلی زیر، برای اختلاف فشار بین درون و بیرون یک حباب (در حالت دوبعدی) بر اثر نیروهای کشش سطحی خواهد بود:

$$\Delta P = \gamma/R \tag{(Y)}$$

در رابطه فوق γ ضریب کشش سطحی و R شعاع حباب است.

برای شبیه سازی این مسئله از میدان شبکه $M \! \times \! M$ استفاده شده است و شرط مرزی تناوبی در چهار طرف دامنه محاسباتی اعمال شده است. حل مساله در نسبت چگالی ۲ با قطرهای اولیه متفاوت برای حباب انجام شدهاست. با توجه به توضيحات پاراگراف قبل، شكل نهايي باید دایروی باشد نسبت چگالی ۲ در نهایت حفظ شده و میدان فشار از رابطه لاپلاس پیروی کند. در شکل ۱ خط با مثلث توپر چگالی داخل قطره و خطچین با دایره توپر چگالی خارج قطره در گام زمانی t=۵۰۰۰۰ را نشان میدهد. این خطوط توزیع چگالی بر روی خط ۲ مرکز میدان برای x های مختلف در $y=1 \cdots y$ را نشان میدهد. شکل اختلاف فشار بین داخل قطره و خارج آن، برای شبکه بندیهای مختلف (۱۲۰×۱۲۰، ۱۶۰×۱۶۰، ۲۰۰×۲۰۰ و ۲۴۰×۲۴۰) و برای اندازههای مختلف شعاع قطره بصورت تابعی از معکوس شعاع نشان میدهد. همانطور که دیده میشود، قاتون لاپلاس ارضا می گردد و شیب خط بصورت خطی است و شیب این خط بیانگر کشش سطحی است. با توجه بهاینکه برای شبکهی ریزتر از ۲۰۰×۲۰۰ تغییرات شیب اندک است، شبکه ۲۰۰×۲۰۰ انتخاب شده است.



شکل ۱- چگالی دو فاز در ۵/.L=۰ در گام زمانی *۲*=۵۰۰۰۰



شکل ۲- اختلاف فشار بصورت تابعی از معکوس شعاع

۲-۳- صعود آزادانه حباب

همانطور که بیان شد، نمودار گریس [۱] (شکل ۳) مبنای اعتبارسنجی اکثر کارهای عددی است که در زمینه صعود حباب انجام می شود. این نمودار تغییر شکل حباب را به دو عدد بی بعد وابسته می-سازد. محور افقی نمودار نشان دهنده عدد اتووس، محور عمودی عدد رینولدز و محوری که در درون نمودار و با مقیاس لگاریتمی نشان داده شده است، نشان دهنده عدد مورتون می باشد. مشخص است که در هر حالت تنها دو عدد از این سه عدد بی بعد مستقل از هم بوده و با انتخاب دو عدد از این سه مقدار، عدد بی بعد سوم و تغییر شکل نهایی حباب نیز بر روی نمودار مشخص می گردد. مقدار هر یک از این سه عدد بی بعد به صورت زیر تعریف می شوند:

$$Mo = \frac{g \ \mu_c^4 \ \Delta \rho}{\rho_c^2 \gamma^3}, \quad Eo = \frac{g \ \Delta \rho \ d^2}{\gamma}, \quad Re = \frac{\rho \ dV}{\mu_c} \quad (\Upsilon)$$

d در این رابطه، $\Delta \rho$ اختلاف چگالی دوفاز، μ_c لزجت فاز مایع، d قطر موثر حباب و V سرعت میانگین حباب میباشند. در واقع، عدد اتووس نشان دهنده نسبت نیروی گرانش به نیروی کشش سطحی است. عدد رینولدز نشان دهنده نیروی اینرسی به نیروی لزجت است. همچنین عدد بیبعد مورتون تنها به جنس دو سیال بستگی دارد و با تعیین نوع آنها مقدار این عدد مشخص میگردد.



شکل ۳- نمودار گریس برای بررسی تغییر شکل حباب [۱]

آتنا قادرى، محمدحسن كيهانى و محسن نظرى

برای اعتبارسنجی کار حاضر با روابط بیان شده، دامنه محاسباتی مربعی به ابعاد ۲۰۰×۲۰۰ در نظر گرفته شده است و نسبت چگلی دوفاز برابر و مقدار آن ۲ در نظر گرفته شده است. برای سیال، شرایط مرزی تناوبی در چهار طرف دامنه محاسباتی در نظر گرفته شده است. برای میدان الکتریکی پابت در سمت چپ و راست دامنه محاسباتی در نظر گرفته شده است. برای میدان الکتریکی پابت در سمت چپ و راست دامنه محاسباتی در نظر گرفته شده است. برای میدان الکتریکی پابت در سمت چپ و راست دامنه محاسباتی در نظر گرفته شده است. برای میدان الکتریکی پابت در سمت چپ و راست دامنه محاسباتی در نظر گرفته شده است. برای میدان الکتریکی پابت در سمت چپ مقدار پتانسیل دامنه محاسباتی در نظر گرفته شده است. در سمت چپ مقدار پتانسیل دامنه محاسباتی در نظر گرفته شده است. در سمت چپ، مقدار پتانسیل الکتریکی در سمت راست دامنه با معلوم بودن شدت میدان الکتریکی و با توجه به رابطه W + W میدان میدان میانگریکی در محاسباتی در معان محاسباتی در محاسباتی در محاسباتی در معلوم میگردد (W طول دامنه محاسباتی در در وران جهت میدان میدانگر میزان جهت میدان الکتریکی در مقابل کشش سطحی بین دو سیال است.

جدول ۱- تغییر شکل قطره حاصل از نتایج عددی حاضر و نتایج نظریه تیلور

ε_b	E _c	λ_b	λ_c	de	De _{drop} شبیه- سازی حاضر	De _{drop} معادله (۲۱)
۰,۰۲	۰,۰۱	·/\·	۰٬۰۵	١	•,•74	•,• ۲ ۱
۰,۰۱	۰,۰۱	•۲٫	٠, ١ ٠	۴	۰,۰۹۵	۰,۰۹۷
۰,۰۱۵	•,•) •	٠, ١ ٠	٠, ١ ٠	$-1/\Delta$	-۰ ٬۰۸۳	-• <i>،</i> • ۸ ۱
۰,۰۱۸	•,• ٢ •	۰٬۰۵	٠, ١ ٠	−۰ ٫۹۵	-• _/ ۱۸۶	-•,1 \ \T





ب) قطره به شکل دو^{کی^۲ (۵/۰=*S). شکل ۵- خطوط جریان و میدان سرعت اطراف قطره ساکن تحت میدان الکتریکی برای ۶(-e_e-د ع) و (=*A.}



۳-۳-تغییر شکل قطرہ اســتاتیکی تحــت تــاثیر میــدان الکتریکی

سویل [۲۴]، در سال ۱۹۷۷ با معرفی یک تابع تمایز شرایط مختلف تغییر شکل قطره را در اثر میدان الکتریکی محاسبه نموده است. او در تحقیق خود نشان داد که نوع شکل قطره دی الکتریک ضعیف و دوبعدی در میدان الکتریکی فقط وابسته به نسبت رسانایی الکتریکی دو سیال $(A/\lambda_c) = R^2$) و نسبت ثابت گذردهی دو سیال مورت $(S^{2}=k) - a)$ و نسبت ثابت گذردهی دو بیال مورت $(S^{2}=k) - a)$ و نسبت ثابت گذردهی دو بیال نیروهای الکتروفورتیک، فشرده شدن قطره در جهت میدان (leo) و ثر نیروهای دی الکتروفورتیک، کشیده شدن قطره در جهت میدان (de>0) است، با استفاده از علامت تابع تمایز میتوان غلبه هر یک از این اثرات را بر دیگری به دست آورد. تیلور [10] رابطهی بی بعد زیر را برای تغییر شکلهای کوچک (De_{drop}) یک قطره دوبعدی تحت تاثیر میدان الکتریکی بیان نمود:

 $De_{drop} = (de \varepsilon_b E^2 d) / (6 S^* (1 + R^{*2}) \gamma)$ (TT)

مقدار تغییر شکل قطره تحت اثر میدان الکتریکی را میتوان توسط رابطه $De_{drop}=(L-B)/(L+B)$ محاسبه نمود. L و B به ترتیب تغییر شکل قطره در راستای شکل قطره در راستای عمود بر میدان الکتریکی و تغییر شکل قطره در راستای عمود بر میدان الکتریکی میباشد.

¹ Prolate Shape

² Oblate Shape

در جدول ۱ تغییر شکل قطره استاتیکی برای نسبتهای مختلف رسانایی الکتریکی و گذردهی دو سیال محاسبهشده از معادله (۲۱) و نتایج عددی حاضر قرار داده شده است. مقادیر تغییر شکل محاسبه شده نتایج عددی حاضر، تطابق خوبی با مقادیر پیش بینی شده نظریه تیلور در تغییر شکلهای کوچک دارد. شکل ۵ خطوط جریان و بردارهای سرعت اطراف قطره ساکن تحت تاثیر میدان الکتریکی برای بردارهای سرعت اطراف قطره ساکن تحت تاثیر میدان الکتریکی برای میدهد. در مطالعات عددی تومار و همکاران [۲۶] و لین و همکاران [۲۷] پدیده هایی مانند شکل ۵ مشاهده شده است. در شکل ۶ نتایج کار لین و همکاران [۲۷] برای دو حالت در نظر گرفته شده در شکل نشان داده شده است.



سُکل ۶- نتایج عددی خطوط جریان و میدان سرعت اطراف قطره ساکن تحت میدان الکتریکی

۴– نتایج و بحث

در شکل ۷ نمایی طرحوارهای از هندسه مورد بررسی نشان داده شده است. طول (L) و عرض (W) کانال به ترتیب ۷ و ۳ برابر قظر حباب در نظر گرفته شده است. فاصله مرکز حباب از سطح پائین کانال مرزی دیوار برای سمرزهای بالا و پائین و شرایط مرزی دیوار برای سمت چپ و راست دامنه محاسباتی در نظر گرفته شده است. همچنین، پتانسیل الکتریکی ثابت در سمت چپ (ولتاژ صفر) و سمت راست (ولتاژ بالا) دامنه محاسباتی در نظر گرفته شده صفر) و سمت راست (ولتاژ بالا) دامنه محاسباتی در نظر $\mathcal{P}(\rho_{\sigma})$ است. در واقع جهت میدان الکتریکی در راستای افقی و از سمت راست راست به سمت چپ می باشد و به مدان این مدل سازی، نسبت چگالی ($\rho = \rho_{\sigma}/\rho_{b}$)

برابر ۲ در نظر گرفته شده است. همچنین زمان بی بعدی که در شـبیه سازی استفاده می گردد بصورت $t^* = t \sqrt{rac{g}{d}}$ تعریف میشود.



شک ۷- هندسه مورد بررسی.

شـكل ٨ صعود حبـاب تحـت تـاثير ميـدان الكتريكـى مختلـف در Eo=۱ و ^۲-۱۰×Mo=۲٫۷۵ برای R*=۱، ۵٬R* و تابع تمایز مثبت (de_{drop}=۱٫۵) را نشان میدهد. شکل ۸ الف) صعود حباب در زمانهای بیبعد مختلف ۱، ۵، ۸ و ۱۱ را نشان می دهد. با توجه به كوچك بودن عدد اتووس، در حالت بدون ميدان الكتريكي، حباب تغيير شكل زيادى نمى دهد. اما با اعمال ميدان الكتريكي، تغيير شكل حباب در راستای میدان افزایش می یابد. با توجه به مثبت بودن تابع تمایز در حقیقت اثرات نیروی دی الکتروفورتیک بیشتر بوده و قطره در راستای ميدان كشيده مى شود كه همين امر باعث كاهش سرعت صعود حباب می گردد.در شکل ۸ (ب) اثر میدان الکتریکی بر روی خطوط جریان اطراف حباب در ۲^{*=}۱۰ برای عدد موئینگی الکتریکی مختلف نشان داده شده است. در حالت بدون میدان الکتریکی، گردابهها در داخل حباب محبوس هستند و در اطراف حباب گردابهای وجود نداردجریان اطراف قطره كاملاً لايهاي است. با افزايش عدد موئينكي الكتريكي (Cae=•/۵)، گردابه ای در بالای قطره ایجاد می شود که به آن دنباله ی قطره می گویند. این دنباله ها منجر به آشفتگی جریان اطراف قطره می گردد. با افزایش بیشتر عدد موئینگی الکتریکی عدد اتوس (حالات ج و د) دنباله ها حاوی گردابه های بزرگتری می گردند و جریان خارجی آشفته ترمی شود. در واقع بزرگتر شدن این دنباله ها، باعث بیشتر شدن اختلاف فشار در جلو و پشت حباب شده و باعث افزایش نیروی پسا شکلی میشودو منجر به کاهش سرعت حباب میگردد.



آتنا قادرى، محمدحسن كيهانى و محسن نظرى



شکل ۹- صعود حباب تحت تاثیر میدان الکتریکی مختلف درا =E0 و ⁶⁻۲۰/۷۵×۲۰/۷۵ برای ۱۹=۲ ۲ S*=۲ و ۲ = S*=۲ الف)نمایش حباب در زمانهای بیبعد مختلف ۱۰ و ۱،۵، ۱=*۲ و ب) خطوط جریان در ۹=*۲



t*=۱، ۵، ۸ و ب) خطوط جریان در t*=۱۰

شکل ۹ صعود حباب تحت تاثیر میدان الکتریکی مختلف در $e^{-8} = 1 = 1$ و $e^{-8} = 1 = 1$ برای تابع تمایز منفی($e^{-8} = 1/2 = 1$ برای e^{-8} و $e^{-8} = 1$ برای تابع تمایز منفی($e^{-1} = 1/2$) را نشان می دهد. با توجه به منفی بودن تابع تمایز در حقیقت اثرات نیروی الکتروفورتیک بیشتر بوده و حباب تمایل به فشرده شدن در راستای عمود بر میدان دارد و در واقع به عنوان عامل کمک کننده در جهت گرانش عمل نموده و باعث افزایش سرعت حباب می گردد. همانگونه که از شکل خطوط جریان پیداست، گردابه اطراف حباب تشکیل نشده و گردابه ها در داخل حباب محبوس باقی می اند.

شکل ۱۰ شکل نمودار در حال صعود تحت تاثیر میدان الکتریکی مختلف در Eo=۵ و Mo=۱٬۳×۱۰^{-۵} برای دو تابع تمایز مثبت الف) و $R^{*=1}$ de_{drop}==٢/٢۵ (ب و $S^{*=+}/\delta$ و $R^{*=1}$) $de_{drop}=1/\delta$ S^{*}=•,۲۵) را نشان میدهد. بر هر دو حالت در نظر گرفته شده، حباب می شکند. دلیل این امر این است که نیرو گرانش تمایل به کشیدن حباب در راستای عمود بر میدان را دارد. در مقابل حباب تمایل به کشیده شدن در راستای میدان را دارد (تابع تمایز مثبت است). در نتيجه با افزايش بيشتر ميدان الكتريكي، حباب مى شكند. البته با افزایش تابع تمایز یا بعبارتی افزایش نیروی الکتروفورتیک، شکست حباب در عدد موئینگی الکتریکی کمتر صورت می گیرد. البته در شکل ۱۰ ب) برای Ca_e=۲٫۵ یک حالت خاص دیده می شود. در هنگام شکست حباب یک حباب کوچک نیز آزاد میگردد که همین حباب بدلیل اینکه قطر آن کوچک است با سرعت بیشتری حرکت میکند و سرعت صعود دو حباب دیگر در مقایسه با Ca_e=۲، نیز افزایش می-دهد. همچنین، همانطور که انتظار داریم، با افزایش میدان الکتریکی برای تابع تمایز مثبت، نیروی پسا شکلی افرایش یافته و سرعت صعود حباب كاهش مىيابد.





شکل ۱۰- صعود حباب تحت تاثیر میدان الکتریکی مختلف در Se=4 و ^{۵-}۱/۳×۱/۳(۱۰ در زمانهای بی بعد مختلف ۱، ۵، ۸، ۱۱ و (S^{*}=۰٫۷ در زمانهای بی بعد مختلف ۹(R*=۱) (R*=۱/۵ (S^{*}=۰٫۷) و ب) de_{drop}=۲٫۲۵ (R*=۱) (S^{*}=۰٫۷)

۶- نتیجهگیری

درک رفتار دینامیکی حباب تحت میدان الکتریکی، مےتواند در طراحی و بهینه سازی سیستمهای دوفازی از جمله فرآیند نمکزدایی، فرآیندهای متالورژی، سیستمهای خنککاری توکامک، رآکتورهای گداخت هستهای و تصفیه هوا که بر پایه استفاده از میدان الکتریکی کار مے کنند، بسیار تأثیر گذار باشد. در این مقاله، از روش شبکه بولتزمن مدل شان-چن برای شبیه سازی صعود حباب در سیال لزج تحت اثر ميدان الكتريكي يكنواخت استفاده شده است. براي اعتبارسنجی حل میدان جریان مدل مورد نظر توسط آزمون های معروف آزمایش لاپلاس و صعود آزاد حباب مورد امتحان قرار گرفته است. به منظور اعتبارسنجی میدان الکتریکی، تغییر شکل قطره استاتیکی در اثر میدان الکتریکی با معادله دوبعدی تیلور مقایسه شده است. مقايسه نتايج تحقيق حاضر با نتايج محققان قبلي توافق خوبي دارد. فرآیند صعود حباب در راستای عمود تحت نیروی گرانش که تحت تاثیر میدان الکتریکی یکنواخت در راستای افقی قرار گرفته است با جزئیات مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان میدهد که بـرای تابع تمايز مثبت،سرعت صعود حباب با افزايش عدد موئينگى الكتريكى، کاهش می ابد در حالیکه برای تابع تمایز منفی عکس این روند مشاهده می شود. همچنین، افزایش میدان الکتریکی در عدد اتووس بالاتر باعث شکسته شدن حباب برای تابع تمایز مثبت می شود. هرچـه تـابع تمـایز

بزرگتر باشد، شکست حباب در اعداد موئینگی الکتریکی کوچکتر اتفـاق میافتد.

۷- فهرست علائم

Ca _e	عدد کپیلاری الکتریکی
d	قطر حباب
de _{drop}	تابع تمایز بی بعد میدان الکتریکی
Detro	تغییر شکل بی بعد قطره در جهت میدان
2 • drop	الكتريكى
Е	شدت میدان الکتریکی
E ₀	شدت میدان الکتریکی خارجی
Eo	عدد اتوس
f	تابع توزيع سرعت
F	نیروی خارجی
f^{eq}	تابع توزيع تعادلى
F_{f}	نیروی برهم کنش بین ذرات
g	شتاب گرانش
G	شدت برهمکنش بین ذرات
G _{ads}	شدت برهم کنش بین جامد و سیال
h	تابع توزيع ميدان الكتريكي
hey	تابع توزيع تعادلي ميدان الكتريكي
	طول مقطع كانال
Mo	عدد مورتون
	شعاع حباب
$R^* = \lambda_b / \lambda_c$	نسبت ضریب هدایت الکتریکی دو سیال
Re	عدد رينولدز
8	تابع اسكالر
$S^* = \varepsilon_b / \varepsilon_c$	و نسبت ثابت گذردهی دو سیال
t	زمان در مقیاس شبکه
t*	زمان بی بعد
и	بردار سرعت در مقیاس شبکه
u'	سرعت تركيبى ماكروسكوپيك
U	پتانسیل الکتریکی
U _{eq}	سرعت تعادلي
U ₀	يتانسيل مربوط به الكترود با ولتاژ بالا
V	تابع پتانسیل بین ذرہ ای
w	ضريب وزنى
W	عرض مقطع كانال
x	بردار مکان در راستای افقی
У	بردار مکان در راستای عمودی
علائم يونانى	
γ	کشش سطحی
ε	ضريب گذردهی الکتریکی
\mathcal{E}_0	ضريب گذردهی الکتریکی خلأ

ویسکوزیته دینامیکی سیال μ

- ویسکوزیته سینماتیکی سیال ویسکوزیته سینماتیکی سیال ho چگالی در مقیاس شبکه ho_f چگالی بار آزاد σ_f
- تور آسایش شبکه برای سرعت ۲ ۲
- فاكتور آسايش تابع توزيع ميدان

زیر نویس ها و بالانویسها

0	0
С	مربوط به سيال اطراف قطره
d	مربوط به سيال تشكيل دهنده قطره
eff	مؤثر
ele	ناشی از میدان الکتریکی
g	ناشی از گرانش
in	درون قطره
out	بيرون قطره
S	مربوط به جامد
σ	مربوط به جزء σ
$\bar{\sigma}$	مربوط به جزء $\overline{\sigma}$

۸-مراجع

 τ^h

[1] Grace J.R., Shapes and Velocities of Bubbles Rising in Infinite Liquids, Transactions of the Institution of Chemical Engineering, Vol.51.pp.116–120, 1973.

[2] BhagaD. and Weber, M.E.,Bubbles in Viscous Liquids: Shapes, Wakes and Velocities, Journal of Fluid Mechanics, Vol.105, pp. 61-85, 1981.

[3] AnnalandM.V.S., DeenN.G. and Kuipers, J.A.M., Numerical Simulation of Gas Bubbles BehaviourUsing a Three-dimensional Volume of Fluid Method, Chemical Engineering Science, Vol. 60, No. 11, pp. 2999-3011, 2005.

[4] Sams G.W. and Warren, K. W., New Methods of Application of Electrostatic Fields, in Prepared for presentation at AICHE spring national meeting, New Orleans, Louisiana, 2004.

[5] Zhang C., Eckert S., and Gerbeth, G., Experimental Study of Single Bubble Motion in a Liquid Metal Column Exposed to a DC Magnetic Field, International Journal of Multiphase Flow, Vol. 31, pp.824-842, 2005.

[6] Arias F.J.,"Critical Heat Flux-CHF in Liquid Metal in Presence of a Magnetic Field with Particular Reference to Fusion Reactor Project", Journal of Fusion Energy, Vol. 29, pp. 146-149, 2010.

[7] Jaworek A., Krupa A. and Czech T., Modern Electrostatic Devices and Methods for Exhaust Gas Cleaning: A Brief Review, Journal of Electrostatics, Vol. 65, pp. 133–155, 2007.

[8] Baramia H. and Ganji D.D., Breakup and Deformation of a Falling Droplet under High Voltage electric Field, Advanced Powder Technology, Vol.24. pp.992–998, 2013.

[9] Succi S., The Lattice Boltzmann Equation for Fluid Dynamics and Beyond, Oxford, Clarendon Press, 2001.

[10] Chen S. and Doolen G.D., Lattice Boltzmann Method for Fluid Flows, Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 30, pp 329–364, 1998.
[11] Gunstensen A.K., Rothman D.H., Zaleski S., and Zanetti G., Lattice Boltzmann Model of Immiscible Fluids, Phys. Rev. A, Vol. 43, pp 4320-4330,1991.

[12] Shan X. and ChenH., Lattice Boltzmann Model for Simulating Flows with Multiple Phases and Components, Phys. Rev. E, Vol. 47, Pp. 1815-1819, 1993.

[13] HeX., Shan X., and Doolen G.D., A Discrete Boltzmann Equation Model for Non-ideal Gases, Phys. Rev. E, Vol. 57, R13, 1998.

[14] Swift M.R., Osborn W.R., and Yeomans J.M., Lattice Boltzmann Simulation of Nonideal Fluids, Phys. Rev. Lett., Vol.75. No. 5, pp 830-840, 1995.

[15] Takada N., Misawa M., Tomiyama A. and Hosokawa S, Simulation of Bubble Motion under Gravity by Lattice Boltzmann Method, Journal of Nuclear Science and Technology, Vol. 38, pp. 330-341, 2001.

[16] Gupta A. and Kumar R., Lattice Boltzmann Simulation to Study Multiple Bubble Dynamics, International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol. 51, pp. 5192-5203, 2008.

[17] Fakhari A., Rahimian M. H., Investigation of deformation and breakup of falling droplet using a multiple relaxation time lattice Boltzmann method, Journal of Computers and Fluids, Vol. 40, pp. 156-171, 2011.

[18] Anwar Sh., Lattice Boltzmann modeling of buoyant rise of single and multiple Bubbles, Journal of Computers and Fluids, Vol. 88, pp. 430–439, 2013.

[19] Zamzamian K, Mohammadpourfard M, Electrowetting on dielectric and superhydrophobic surface: lattice Boltzmann study, Indian Journal of Physics, Vol. 86, Issue 10, Pages 889-899, 2012.

[20] Aminfar H, Mohammadpourfard M, Droplets merging and stabilization by electrowetting: Lattice Boltzmann study, Journal of Adhesion Science and Technology, Volume 26, Issue 12-17, Pages, 1853-1871, 2012.

[21] Mousavi Tilehboni S. E., Fattahi E., Hassanza Afrouzi H., Farhadi M., Numerical simulation of droplet detachment from solid walls under gravity force using lattice Boltzmann method, Journal of Molecular Liquids, Vol. 212, pp. 544–556, 2015.

[22] Fallah Kharmiani Soroush, Passandideh Fard Mohammad, Niazmand Hamid, Modeling of simultaneous impact of two parallel drops on a thin liquid film using Lattice Boltzmann Method, Journal of Modares Mechanical Engineering, Vol. 16, pp. 373-384, 2016.

[23] Zhang J., and Kwok D.Y., A 2D lattice Boltzmann Study on Electrohydrodynamic Drop Deformation with the Leaky Dielectric Theory, Journal of Computational Physics, Vol. 206, pp. 150–161, 2005.

[24] Saville D.A., Electrohydrodynamics: the Taylor-Melcher Leaky Dielectric Model, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 29. pp. 27-64, 1997.

[25] Taylor G., Study in Electrohydrodynamics. I. The

Circulation Produced in a Drop by Electric Field, Mathematical,

Physical & Engineering Science, Vol. 291. pp. 159-167, 1996.
[26] Tomar G., Gerlach D., Biswas G., Alleborn N., and Sharma A., Two-phase Electrohydrodynamic Simulations Using a Volume-of-fluid Approach", Journal of Computational Physics,

Vol. 227, pp. 1267–1285, 2007.
[27] Lin Y., Skjetne P. and Carlson A., A Phase Field Model for Multiphase Electro-hydrodynamic Flow, International Journal of Multiphase Flow, Vol. 45, pp. 1–11, 2012.