

بهبود نرخ قطبش در کدهای قطبی به وسیله یک ماتریس مولد جدید

سعید پاکروان^۱، کارشناس ارشد؛ حسن توکلی^۲، استادیار

۱- دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه گیلان - گیلان - ایران - saeidpak70@yahoo.com

۲- دانشکده فنی و مهندسی - دانشگاه گیلان - گیلان - ایران - htavakoli@guilan.ac.ir

چکیده: کدهای قطبی براساس ایده‌ای که قطبش کانال نام دارد، به‌تازگی توسط آریکان مطرح شده است. ماتریس مولدی که در کار آریکان برای طراحی کدهای قطبی در نظر گرفته شده یک ماتریس 2×2 به فرم G_2 بوده است. با این حال می‌توان کدهای قطبی را برای ماتریس‌هایی به فرم G_L که در آن L هر عدد صحیح بزرگ‌تر از ۲ است، طراحی نمود. در حالتی که ماتریس مولد یک ماتریس 3×3 است، برخلاف کار آریکان، با فرم‌های متفاوتی در انجام عمل پلاریزاسیون روبرو هستیم و همچنین انتخاب ماتریس مولدی از این بین که منجر به بهترین عملکرد شود، یک چالش اساسی در طراحی این کدها است. در این مقاله این مسئله برای ساده‌ترین حالت یعنی $L=3$ بررسی شده است. با استفاده از نتایج شبیه‌سازی حالت‌های موجود، به بررسی بهترین ماتریس برای کدهای قطبی پرداخته شده است. در نهایت به‌طور مختصر در مورد پیچیدگی و احتمال خطای این طرح نکاتی ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: قطبش کانال، ماتریس مولد، کدهای قطبی، خطای نمایی، پارامتر باتاچاریا، ظرفیت.

Improving the rate of polarization in polar codes by using new generator matrix

S. Pakravan¹, MSc; H. Tavakoli², Assistant Professor

1- Faculty of Engineering, University of Guilan, Guilan, Iran, Email: saeidpak70@yahoo.com

2- Faculty of Engineering, University of Guilan, Guilan, Iran, Email: htavakoli@guilan.ac.ir

Abstract: Polar codes were recently proposed by Arikan and are constructed based upon a phenomenon that called channel polarization. The basic polarization matrix is given as G_2 . A challenging problem related to the design of polar codes is choose a suitable generator matrix G_L , where L is an arbitrary integer and $L \geq 2$, since in this state we have several choices for, unlike G Arikan works that has only just one linear form. In this paper, we have compared status $L=3$, that is simplest case from changing matrix with Arikan's work. As carry out simulations for this schema to show that there is eventuality selection unsuitable channel for the transmission information and find the best generator matrix. Finally have been proposed a briefly on the probability of error and complexity in this schema.

Keywords: Channel polarization, generator matrice, polar code, error exponent, bhattacharyya parameter, capacity.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۵/۱۲/۰۵

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۶/۰۴/۱۴ و ۱۳۹۶/۰۵/۲۷

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۶/۲۹

نام نویسنده مسئول: حسن توکلی

نشانی نویسنده مسئول: ایران - رشت - کیلومتر ۵ جاده رشت به قزوین - دانشگاه گیلان - دانشکده فنی و مهندسی.

۱- مقدمه

کانال متقارن بدون حافظه است. در [۷] ایده پلاریزاسیون و قطبش کانال‌ها در حالت کلی برای کانال‌های دسترس چندگانه بررسی شده است و نشان داده شده است که به هنگام قطبی‌سازی یک کانال دسترسی چندگانه با یک کانال نقطه به نقطه می‌توان ناحیه نرخ بیشتری را حصول کرد. این مسئله به وسیله چندین مثال در این مقاله نشان داده شده است. این دسته از کدها کاربردهای بسیاری در مسائل مربوط به کدینگ کانال و کدینگ منبع دارا هستند [۸]. از کاربردهای این کدها می‌توان به حصول ظرفیت برای کانال‌های دسترسی چندگانه [۹] و [۱۰]، کانال پخش [۱۱-۱۳]، کران مارتن [۱۴] اشاره نمود. کدهای قطبی همچنین عملکرد بهینه‌ای برای مسائلی همچون واینر-زیو و گلفاند-پینسکر دارا است [۱۵]. یکی از مهم‌ترین کاربردهای کدهای قطبی عملکرد مناسب این کدهای در کاربردهای مربوط به ذخیره‌سازی اطلاعات است [۱۶].

در این کدها به کمک ماتریس پایه $G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ و ضرب کرونیگر، ماتریس مولد $G_2^{\otimes n}$ ساخته شده و بر روی بلوک $N = 2^n$ بیتی ورودی اعمال می‌شود. دنباله حاصل از این ضرب ماتریسی از طریق کپی‌های مستقل کانال باینری متقارن بدون حافظه که W نامیده می‌شود، ارسال می‌گردد. منظور از کپی‌های مستقل این کانال، N بار استفاده مستقل از یک کانال باینری W است. با افزایش n تعدادی از بیت‌ها با احتمال خطای نزدیک به صفر و مابقی با احتمال خطای نزدیک به یک از کانال عبور کرده و کانال‌ها توسط بیت‌های خاصی دیده می‌شوند، در نتیجه قطبش آغاز می‌گردد. در این حالت، کانال به دو کانال بدون نویز و با نویز قابل تقسیم است، به طوری که کسری از کانال‌هایی که بدون نویز هستند به ظرفیت کانال پایه میل می‌کنند. بعد از معرفی کدهای قطبی برای استفاده در کانال نقطه به نقطه باینری، سعی شده است کارایی و کاربردهای مختلف این کدها مشخص گردد و همچنین به بررسی چالش‌هایی که ممکن است در طراحی این کدها با آن‌ها روبرو شویم، پرداخته شده است. در ادامه به چند نمونه از این کارها اشاره شده است. کران بالای احتمال خطا برای این دسته از کدها به صورت دقیق در [۱۷] مورد محاسبه قرار گرفته است. در [۹] و [۱۰] کدهای قطبی روی کانال دسترسی چندگانه مورد بررسی قرار گرفته و اثبات شده است که در این کانال نیز کدهای قطبی به ظرفیت کانال می‌رسند و به عبارتی ظرفیت کانال دسترسی چندگانه به وسیله این دسته از کدها می‌تواند حصول گردد. با مطالعاتی که بر روی کدهای قطبی برای کانال‌های پخش صورت گرفته، عملکرد مناسب این کدها برای این دسته از کانال‌ها اثبات گردیده است [۱۱-۱۳]. همچنین علاوه بر تحقیقات انجام شده روی کدهای قطبی در زمینه کدگذاری کانال، مطالعاتی کدگذاری منبع صورت گرفته است [۸]. تلفیق این دسته از کدها و مسئله رمزنگاری در [۲۱-۱۹] مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجایی که مدت زیادی از معرفی کدهای قطبی نمی‌گذرد، مسئله‌های حل نشده زیادی در مورد طراحی و کاربرد این کدها وجود دارد. تغییرات بنیادی در ساختار کدهای قطبی و نحوه کدگذاری و کدبرداری یکی از این مسائل است. با توجه به [۲۲]،

قضیه کدگذاری کانال توسط شانون با استفاده از ایده کدگذاری تصادفی بیان گردیده است [۱]. یکی از نتایج جالب مربوط به این قضیه، اثبات وجود یک کد، برای کدگذاری کانال است به طوری که به ظرفیت آن نیز می‌رسد، بدون آنکه دنباله کدی را به صورت خاص معرفی نماید. طراحی و ساخت کدهایی با پیچیدگی کدگذاری و کد برداری پایین که به ظرفیت کانال نیز برسند، همواره به عنوان یکی از اهداف مورد توجه محققان و پژوهشگران مطرح بوده است. تا به امروز پیشرفت‌های بسیار در این حوزه و مسائل مربوط به آن انجام گرفته است [۲-۴].

کدهای قطبی که به تازگی توسط آریکان مطرح گردیده است [۵]، اولین دسته از کدهایی هستند که می‌توان اثبات نمود که برای هر کانال گسسته متقارن با ورودی باینری که پیچیدگی کدگذاری و کد برداری پایینی داشته است، به ظرفیت شانون خواهد رسید [۳]. پیچیدگی این نوع از کدها به صورت $O(N \cdot \log N)$ است که N بیان کننده طول بلوک کد است. شروع پیدایش کدهای قطبی، به طرح آریکان بر روی بهبود محاسباتی نرخ قطع در کانال‌ها مربوط می‌شود [۶]. در طرح آریکان قبل از ارسال اطلاعات، یک تبدیل خطی ساده بر روی ورودی‌های کانال انجام می‌شود. در خروجی یک کدبردار که به صورت پی‌درپی عمل کدبرداری را انجام می‌دهد، قرار گرفته است. اگر W کانال اصلی و W_1 و W_2 کانال‌هایی هستند که به ترتیب بیت‌های اول و دوم را می‌بینند، ارسال اطلاعات به این روش نرخ قطع متوسط (بین W_1 و W_2) بالاتری را نسبت به کانال اصلی W می‌دهد. در کدهای قطبی، فرایند بالا به صورت بازگشتی انجام می‌شود. فرایند بازگشتی معادل اعمال یک تبدیل خطی بر روی تعداد زیادی بیت در قسمت کدگذاری است. در کدبرداری، بیت‌ها به صورت پی‌درپی و با یک ترتیب خاص کدبرداری می‌شوند؛ بنابراین کانال مؤثری که برخی از بیت‌ها آن را می‌بینند، بهتر از کانال W است و کانال مؤثری که برخی دیگر از بیت‌ها آن را می‌بینند، نسبت به کانال W بدتر است. نکته مهم این است که با افزایش طول بلوک، برخی از کانال‌ها به کانال‌های نویزی کامل و برخی دیگر از کانال‌ها به کانال‌های کاملاً بدون نویز تبدیل خواهند شد. کانال‌های پاک و بدون نویز به W میل می‌کنند [۵]، [۶]. آریکان این پدیده را قطبی‌سازی کانال (پلاریزاسیون) نامیده است. این روش بیانگر ایده‌ای است که در آن، ورودی کانال‌های دارای نویز را ثابت در نظر گرفته و اطلاعات را از کانال‌های پاک و بدون نویز، به صورت مطمئن ارسال می‌کنیم. البته هنگامی این روش عملی است، که بتوان نشان داد که ارسال بازگشتی در کدگذار و حذف پی‌درپی در کدبردار را می‌توان با پیچیدگی کم پیاده‌سازی کرد. آریکان در طرح خود نشان داده است که با استفاده از تبدیلی شبیه به FFT می‌توان هر دو عمل کدگذاری و کدبرداری را با پیچیدگی $O(N \cdot \log N)$ پیاده‌سازی کرد [۵]. همان‌طور که گفته شد، کدهای قطبی جزء اولین خانواده از کدهایی است که به ظرفیت کانال رسیده و دارای پیچیدگی اندک در

برای ارسال داده‌ها استفاده می‌شود یکی از مهم‌ترین بخش‌ها در طراحی این دسته از کدها است. پلاریزاسیون کانال ایده‌ای است که در آن ورودی کانال‌های دارای نویز را ثابت در نظر گرفته و اطلاعات را از کانال‌های پاک، به صورت مطمئن ارسال کنیم. در این کدها به کمک ماتریس پایه

$$G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ و ضرب کرونیکر، ماتریس مولد} \\ G_2^{\otimes n} = \begin{bmatrix} G_2^{\otimes(n-1)} & 0 \\ G_2^{\otimes(n-1)} & G_2^{\otimes(n-1)} \end{bmatrix} \text{ ساخته شده و روی بلوک } N = 2^n \text{ بیتی} \\ \text{ورودی اعمال می‌شود [۵، ۶].}$$

دنباله حاصل از این ضرب ماتریسی از طریق کپی‌های مستقل کانال باینری متقارن بدون حافظه که W نامیده می‌شود، ارسال می‌گردد. منظور از کپی‌های مستقل این کانال، N بار استفاده مستقل از یک کانال باینری W است. با افزایش n تعدادی از بیت‌ها با احتمال خطای نزدیک به صفر و مابقی با احتمال خطای نزدیک به یک از کانال عبور کرده و کانال‌ها توسط بیت‌های خاصی دیده می‌شوند، در نتیجه قطبش آغاز می‌گردد. در این حالت، کانال به دو کانال بدون نویز و با نویز قابل تقسیم است. قطبش کانال عملگری است که با استفاده از N کپی مستقل از کانال W ، مجموعه دومی از N کانال $\{W_N^i : 1 \leq i \leq N\}$ را به صورت وابسته ایجاد می‌کند به طوری که این مجموعه N کانال دارای خاصیت قطبش‌اند. قطبش کانال به این معنی است که با افزایش N ظرفیت متقارن $I(W_N^i)$ برای کسری از i به سمت صفر و برای مابقی به سمت یک میل می‌نماید. منظور از N کانال مستقل N بار استفاده از یک کانال W است. از این ویژگی مهم برای تولید کدهای قطبی [۵] و همچنین برای افزایش نرخ قطع استفاده شده است [۶].

۲-۲- نمادگذاری

از عبارت $X \rightarrow Y$ برای بیان یک کانال گسسته بدون حافظه با ورودی باینری، دارای حروف ورودی X ، حروف خروجی Y و احتمال انتقال $(Y|X)$ استفاده شده است. الفبای ورودی X همواره به صورت $F_2 = \{0,1\}$ است و همچنین الفبای خروجی می‌تواند غیر باینری در نظر گرفته شود. W^N به معنی N بار استفاده مستقل از کانال W است؛ بنابراین احتمال گذر برای کانال $W^N : X^N \rightarrow Y^N$ به صورت زیر به دست می‌آید [۵]:

$$W^N(y_1^N | x_1^N) = \prod_{i=1}^N W(y_i | x_i) \quad (1)$$

احتمال گذر پس از اولین مرحله از قطب‌سازی دو کانال با ورودی باینری که در آن $W_2^1 : F_2 \rightarrow Y^2$ و $W_2^2 : F_2 \rightarrow F_2 \times Y^2$ است، به صورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$W_2^1(y_1^2 | u_1) = \sum_{u_2 \in \{0,1\}} \frac{1}{2} W(y_1 | u_1 \oplus u_2) W(y_2 | u_2), \quad (2)$$

$$W_2^2(y_1^2, u_1 | u_2) = \frac{1}{2} W(y_1 | u_1 \oplus u_2) W(y_2 | u_2). \quad (3)$$

می‌توان این نتیجه را گرفت که می‌توان کدهای قطبی را با ماتریس مولد جدید طراحی نمود. در [۲۳، ۲۴] به نکاتی در مورد طراحی و ویژگی‌های ماتریس مولدی که می‌تواند منجر به عملکرد بهتر شود، پرداخته شده است.

در این مقاله عملکرد کدهای قطبی از دیدگاه‌های متفاوتی همچون ظرفیت و احتمال خطا برای حالتی که ماتریس مولد یک ماتریس 3×3 است بررسی گردیده و نتایج حاصل شده با کار آریکان مقایسه شده است. همان‌طور که در کار آریکان نشان داده شده است، در حالتی که ماتریس مولد یک ماتریس 2×2 است، تنها یک فرم خطی برای انجام فرایند پلاریزاسیون وجود دارد و بعد از قطب‌سازی ما با دو کانال خوب و بد که به ترتیب برای ارسال اطلاعات و بیت‌های فروزن از آن‌ها استفاده می‌شود روبرو هستیم. اما در حالتی که ماتریس مولد یک ماتریس 3×3 است و به عبارتی سه کانال در عمل قطبش قرار می‌گیرند، با فرم‌های متفاوتی در انجام عمل پلاریزاسیون روبرو خواهیم بود. انتخاب حالتی مناسب از این حالت‌ها که باعث عملکرد بهتر کدهای قطبی و فرایند قطب‌سازی شود مسئله مهمی است که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته شده است. در کارهای پیشین نشان داده شده است که پس از پلاریزاسیون، کانال مؤثری که برخی از بیت‌ها آن را می‌بینند، بهتر از کانال W (کانال‌های خوب) و برای برخی دیگر از بیت‌ها این کانال نسبت به کانال W بدتر (کانال‌های بد) بوده است. اما در اینجا مشاهده خواهد شد که در بعضی از حالت‌ها با دسته‌ای دیگر از کانال‌ها که در مقابل عمل پلاریزاسیون بی‌تأثیر هستند روبرو هستیم. در ادامه خلاصه‌ای از آنچه در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است، بیان شده است.

در بخش دوم این مقاله به طور مختصر به معرفی کدهای قطبی و بیان ایده قطبش کانال پرداخته شده است. بخش سوم شامل ارائه روابط به دست آمده برای حالتی است که از یک ماتریس مولد جدید به منظور قطبش کانال‌ها استفاده شده است. بررسی عملکرد کدهای قطبی، آنالیز کران بالای احتمال خطا و پیچیدگی کدگذاری و کدبرداری برای این حالت در بخش چهارم صورت گرفته است. در بخش پنجم که بخش انتهایی این مقاله است نتایج حاصل از این پژوهش ارائه شده است.

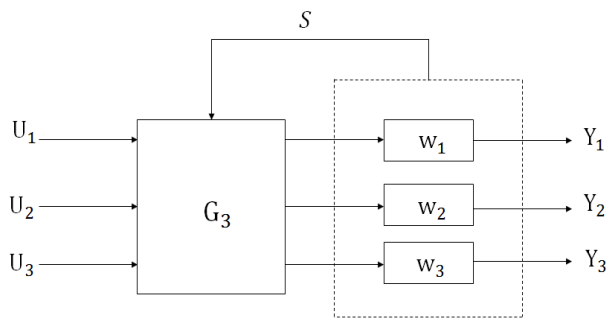
۲- کدهای قطبی

در این بخش ابتدا به طور مختصر به بیان نکاتی در مورد کدهای قطبی و ایده پلاریزاسیون کانال پرداخته شده و سپس تعدادی از پارامترها و نمادگذاری‌هایی که در ادامه کار به آن‌ها نیاز است معرفی شده است.

۲-۱- قطبش کانال

کدهای قطبی اولین دسته از کدهایی هستند که می‌توان اثبات نمود که برای هر کانال گسسته متقارن با ورودی باینری که پیچیدگی کدگذاری و کدبرداری پایینی داشته است، به ظرفیت شانون خواهد رسید [۶]. ایده اصلی که در ساخت کدهای قطبی نقش اصلی را داشته است پلاریزاسیون یا قطب‌سازی کانال نام دارد [۵]. طراحی مجموعه اطلاعات که از آن

باین حال می‌توان کدهای قطبی را برای ماتریس‌هایی به فرم G_L که در آن L می‌تواند هر عدد صحیح بزرگ‌تر از ۲ باشد، طراحی نمود. همان‌طور که مشخص است، ساده‌ترین حالت زمانی رخ می‌دهد که $L=3$ است. درحالتی که ماتریس مولد یک ماتریس 2×2 است [۶]، تنها یک فرم خطی برای انجام فرایند پلاریزاسیون وجود دارد و بعد از قطبی‌سازی ما با دو کانال خوب و بد که به ترتیب برای ارسال اطلاعات و بیت‌های فروزن از آن‌ها استفاده می‌شود روبرو هستیم؛ اما درحالتی که ماتریس مولد یک ماتریس 3×3 است و به عبارتی سه کانال در عمل قطبش قرار می‌گیرند، با فرم‌های متفاوتی در انجام عمل پلاریزاسیون روبرو هستیم. همان‌طور که در شکل زیر نشان داده شده است بسته به اینکه قصد ارسال با چه نرخ‌ی را داشته باشیم یا از چه کانال‌هایی برای ارسال اطلاعات استفاده شود ساختار ماتریس مولد به گونه‌های متفاوتی است.



شکل ۱: قطبش کانال‌ها با در نظر گرفتن اطلاعات جانبی از وضعیت کانال‌ها در کدگذار

همان‌طور که اشاره شد با داشتن اطلاعاتی از وضعیت اینکه کدام کانال‌ها به منظور ارسال اطلاعات استفاده شده و کدام یک از کانال‌ها برای ارسال بیت‌های فروزن مناسب بوده، می‌توان حالت مناسب برای ساختار ماتریس مولد را انتخاب نمود. برای طراحی کدهای قطبی با طول بلوک $N=3^n$ ، ماتریس مولد G_3 را مطابق با زیر در نظر می‌گیریم:

$$G_3 = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}$$

مقدار g_{ij} برای هر $i, j \in \{1, 2, 3\}$ برابر صفر یا یک است. در حالت کلی، با توجه به مقادیر درایه‌ها 2^9 انتخاب برای ماتریس G_3 وجود دارد، اما تمامی این حالت‌ها شرایط مورد نیاز برای قطبش کانال را فراهم نمی‌کنند. همان‌طور که در [۲۲-۲۴] بررسی شده است، یکی از اولین شرط‌هایی که ماتریس مولد باید داشته باشد یک بودن تمامی درایه‌های روی قطر اصلی و همچنین معکوس پذیر بودن ماتریس است. بنابراین تنها کافی است که قطبی‌سازی را برای ماتریس‌های به صورت زیر که شرط معکوس پذیری را دارا هستند، بررسی نماییم:

$$.G_3 = \begin{bmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & 1 & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

ظرفیت کانال متقارن که بیانگر حداکثر اطلاعات متقابل بر روی همه توزیع‌های ورودی و همچنین پارامتر باتاچاریا که بیانگر کران بالای احتمال خطا است، دو معیار مهم در بررسی کانال‌های متقارن هستند. روابط مربوط به اطلاعات متقابل و پارامتر باتاچاریا به ترتیب برای کانال متقارن به صورت زیر هستند.

$$I(W) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sum_{x \in \mathcal{X}} \frac{1}{2} W(y|x) \log \frac{W(y|x)}{\frac{1}{2} W(y|0) + \frac{1}{2} W(y|1)} \quad (4)$$

$$Z(W) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \sqrt{W(y|0)W(y|1)}. \quad (5)$$

این پارامترها به ترتیب به عنوان معیارهای نرخ و میزان اعتبار مورد استفاده قرار می‌گیرند. $Z(W)$ کران بالایی احتمال خطای حداکثر درست‌نمایی است، در زمانی که فقط برای ارسال $\{0,1\}$ از کانال استفاده می‌شود. همان‌طور که مشخص است، اگر قابلیت اطمینان کانال افزایش یابد، می‌توان با نرخ بیشتری از کانال استفاده کرد؛ بنابراین $I(W)$ و $Z(W)$ مقادیر بین $(0,1)$ را می‌گیرند و به صورت مکمل هم رفتار می‌کنند. مقادیر مربوط به $\{Z(W_N^{(i)})\}$ برای کانال‌های قطبی‌شده با توجه به روابط بازگشتی به صورت زیر محاسبه می‌شود [۵، ۶]:

$$Z(W_N^{(2i-1)}) \leq 2Z(W_{\frac{N}{2}}^{(i)}) - Z(W_{\frac{N}{2}}^{(i)})^2, \quad (6)$$

$$Z(W_N^{(2i)}) = Z(W_{\frac{N}{2}}^{(i)})^2. \quad (7)$$

حالت تساوی روابط بالا زمانی برقرار است که کانال‌های بررسی شده کانال باینری متقارن محک هستند. درحالتی که $N=2$ و کانال‌های زیرین، کانال باینری محک با پارامتر (\mathcal{E}) است، داریم:

$$Z(W_2^1) = 2\mathcal{E} - \mathcal{E}^2 \quad (8)$$

$$Z(W_2^2) = \mathcal{E}^2 \quad (9)$$

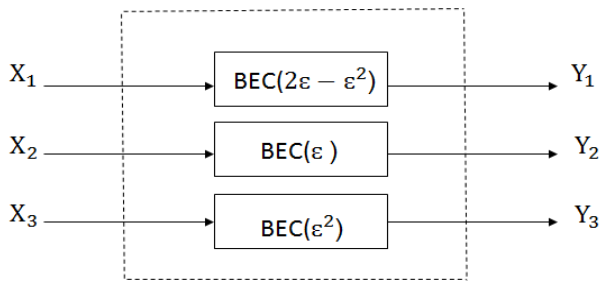
پیچیدگی کدگذاری و کدبرداری برای این کدها به صورت $O(N \cdot \log N)$ است که N بیان‌کننده طول بلوک کد است. کران بالای احتمال خطا برای کدهای قطبی برای هر $0 \leq \beta \leq 0.5$ به صورت زیر است [۵]:

$$P_e = \sum_{i \in A} Z(W_N^{(i)}) = o(2^{-2^n \beta}). \quad (10)$$

در رابطه بالا A نشان‌دهنده مجموعه اطلاعات برای کانال‌های خوبی است که از آن‌ها برای ارسال اطلاعات استفاده شده است.

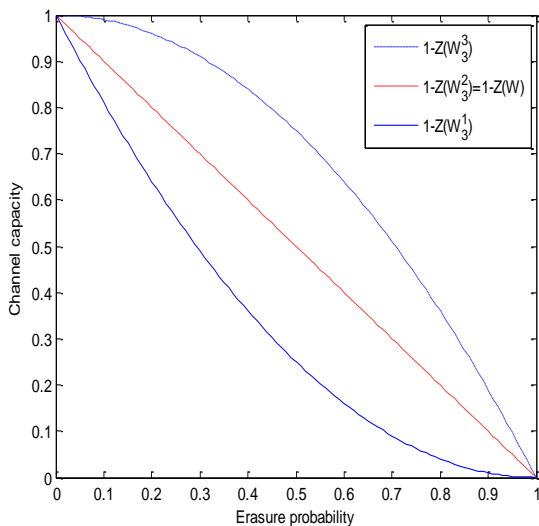
۳- قطبی‌سازی با ماتریس مولد جدید

ماتریس مولدی که در کار آریکان [۵] برای طراحی کدهای قطبی در نظر گرفته شده یک ماتریس 2×2 به فرم $G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ بوده است.



شکل ۳: پارامترهای کانال W_3

یکی از نتایجی که از بررسی ماتریس‌های در این دسته مشاهده می‌شود، این است که، برای هر سطری که دارای دو عدد ۱ است: مقدار $Z(W_N^{(i)})$ برابر با پارامتر ϵ^2 است. همچنین از آنجایی که مقدار $Z(W_3^2) = \epsilon$ است و این به این معناست که هیچ عمل پلاریزاسیونی برای این زیرکانال رخ نداده است، در نتیجه می‌توان گفت که این حالت بدترین عملکرد را نسبت به حالت‌های دیگر به منظور قطبی‌سازی کانال‌ها دارد.



شکل ۴: ظرفیت کانال‌های قطبی‌شده به وسیله ماتریس مولد G_3 برای حالت اول

شکل ۴ تغییرات مربوط به ظرفیت زیرکانال‌ها نسبت به پارامتر محک را برای هر یک از کانال‌های W_3^1, W_3^2, W_3^3 نشان می‌دهد.

حالت دوم: هنگامی که برای ماتریس G_3 بین درایه‌های ماتریس مولد رابطه $\sum_{i,j=1}^3 g_{ij} = 2$ و همچنین $\sum_{i=i_0, j=1}^3 g_{i_0j} \neq 3$ به ازای هر $i \neq j$ برقرار است، می‌توان پارامترهای باتاچارایا که شرایط اولیه برای قطبش کانال را فراهم می‌کنند بعد از عمل پلاریزاسیون برای کانال‌های باینری متقارن محک به صورت زیر محاسبه نمود:

$$Z(W_3^1) = \epsilon^3 - 3\epsilon^2 + 3\epsilon \quad (14)$$

$$Z(W_3^2) = 2\epsilon^2 - \epsilon^3 \quad (15)$$

با توجه به کاهش یافتن تعداد حالت‌ها به 2^6 انتخاب، بعد از بررسی روابط مربوط به پارامترهای باتاچارایا مشاهده می‌شود که بازم تمام حالت‌های موجود شرایط لازم برای پلاریزاسیون را فراهم نمی‌کنند. پس از بررسی حالت‌های مختلف برای ماتریس G_3 مشاهده شده است که می‌توان روابط حاصل شده را در یکی از زیربخش‌هایی که در ادامه به آن اشاره شده است دسته‌بندی نمود.

می‌دانیم که قابلیت اطمینان کانال $W_N^{(i)}$ توسط پارامتر $Z(W_N^{(i)})$ که مقدار آن با توجه به ساختار ماتریس G_3 مشخص می‌شود، به دست می‌آید. اکنون ما در اینجا پارامتر باتاچارایا برای حالت‌های مختلفی که شرایط پلاریزاسیون را فراهم می‌کنند، با توجه به رابطه‌های بازگشتی (۶) و (۷) محاسبه می‌نماییم. کانال‌هایی که در اینجا مورد بررسی قرار گرفته است، همگی کانال‌های باینری متقارن محک با پارامترهای یکسان (ϵ) هستند.

حالت اول: هنگامی که برای ماتریس G_3 بین درایه‌های ماتریس رابطه $\sum_{i,j=1}^3 g_{ij} = 1$ به ازای هر $i \neq j$ برقرار است، می‌توان پارامترهای باتاچارایا بعد از عمل قطبی‌سازی را برای کانال‌های باینری متقارن محک به صورت زیر محاسبه نمود:

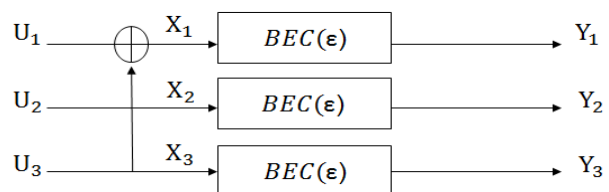
$$Z(W_3^1) = 2\epsilon - \epsilon^2 \quad (11)$$

$$Z(W_3^2) = \epsilon \quad (12)$$

و

$$Z(W_3^3) = \epsilon^2 \quad (13)$$

مثال: ماتریس $G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ که طرح پلاریزاسیون در آن برای سه زیرکانال باینری متقارن محک با پارامترهای یکسان به صورت شکل زیر رسم شده است را در نظر بگیرید:



شکل ۲: قطبی‌سازی کانال برای حالت اول

بعد از اعمال کردن مرحله به مرحله روابط (۸) و (۹) به شکل ۲، با سه زیرکانال باینری متقارن محک با پارامترهای متفاوتی که در شکل ۳ نشان داده شده است، روبرو هستیم.

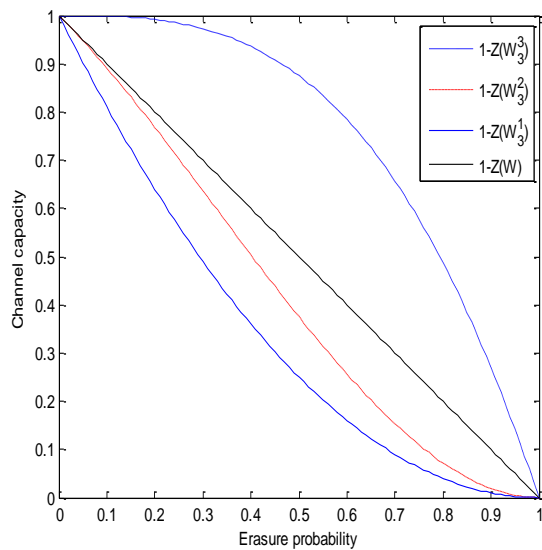
بنابراین، همان‌طور که ملاحظه شد، روابط ارائه شده برای این حالت به صورتی که در (۱۳-۱۱) آمده، صادق است.

مشابه مثال بالا می‌توان برای تمامی ماتریس‌هایی که شرط‌های مربوط به حالت اول را دارا هستند، نشان داد که همواره رابطه‌های (۱۳-۱۱) برقرار است.

در این دسته از ماتریس‌ها، برای سطری که تمامی درایه‌های آن برابر با یک است، $Z(W_N^i) = \varepsilon^3$.

مشابه حالت قبل چهار ماتریس که در زیر آورده شده است، با این که شروط مذکور برای قرارگرفتن در حالت سوم را دارا هستند، شرایط اولیه برای قطب‌سازی کانال را ندارند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



شکل ۶: ظرفیت کانال‌های قطبی‌شده به‌وسیله ماتریس مولد G_3 برای حالت سوم

تغییرات مربوط به ظرفیت برای هر یک از زیرکانال‌ها نسبت به پارامتر محک در شکل ۶ برای این حالت نشان داده شده است.

نکات و روابطی که در اینجا ارائه شده است براساس تعداد یک‌ها در هر سطر از ماتریس مولد و همچنین روابط اولیه (۸) و (۹) بوده است. همان‌طور که در کارهای پیش‌ازین بررسی شده است [۵]، هدف از پلاریزاسیون کانال بدست‌آوردن کانال‌های مناسبی با ظرفیت بیشتر به‌منظور ارسال اطلاعات بوده و پس از پلاریزاسیون، کانال مؤثری که برخی از بیت‌ها آن را می‌بینند، بهتر از W (کانال‌های خوب) و برای برخی دیگر از بیت‌ها نسبت به W بدتر (کانال‌های بد) بوده است.

اما در طرحی که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است، همان‌طور که از روابط (۱۹-۱۱) مشخص شده است، کانال W_3^2 رفتار تغییرپذیری دارد. رفتار این کانال را می‌توان به‌صورت‌های زیر دسته‌بندی نمود.

حالت اول: $Z(W_3^2) = Z(W)$

حالت دوم: $Z(W_3^2) \leq Z(W)$

حالت سوم: $Z(W_3^2) \geq Z(W)$

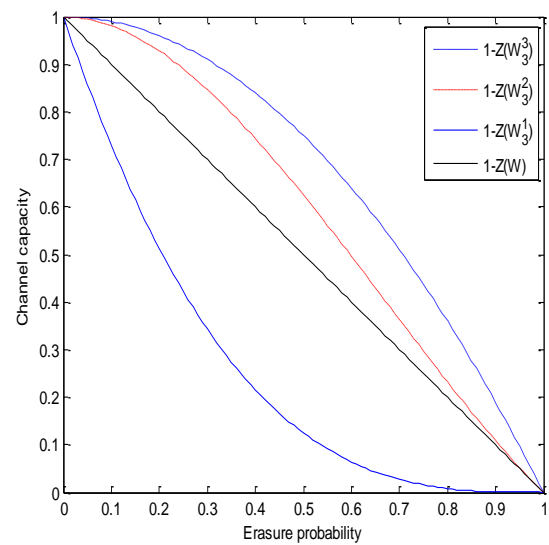
$$Z(W_3^3) = \varepsilon^2 \quad (16)$$

چهار ماتریس که در زیر آورده شده است؛ شرایط اولیه برای قطب‌سازی کانال را ندارند؛ با این که شروط مذکور برای قرارگرفتن در این حالت را دارا هستند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

در این حالت، برای سطری که یک عدد ۱ در بین سطرهای خود دارد، رابطه $Z(W_N^i) = \varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon$ برای آن سطر برقرار است.

تغییرات مربوط به ظرفیت برای هر یک از زیرکانال‌ها نسبت به پارامتر محک در شکل زیر برای این حالت نشان داده شده است:



شکل ۵: ظرفیت کانال‌های قطبی‌شده به‌وسیله ماتریس مولد G_3 برای حالت دوم

حالت سوم: هنگامی که برای ماتریس G_3 بین درایه‌های ماتریس

مولد رابطه $\sum_{i=i_0, j=1}^3 g_{ij} = 3$ برقرار است یا به عبارتی در ماتریس مولد

سطری وجود دارد که تمامی درایه‌هایش یک است، می‌توان پارامترهای باتاچاریا بعد از عمل قطب‌سازی را به‌صورت زیر محاسبه نمود:

$$Z(W_3^1) = \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon \quad (17)$$

$$Z(W_3^2) = 2\varepsilon - \varepsilon^2 \quad (18)$$

$$Z(W_3^3) = \varepsilon^3 \quad (19)$$

مثال: با استفاده از رابطه‌های (۸) و (۹) می‌توان به‌سادگی نشان داد که

برای ماتریس $G_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ که در شرط حالت سوم، یعنی

$$\sum_{i=i_0, j=1}^3 g_{ij} = 3$$

صدق می‌کند روابط (۱۷-۱۹) برقرار است.

از آنجایی که برای G_3 ماتریس‌های با پارامتر $E(G)$ متفاوتی وجود دارند، حداکثر مقدار آن با توجه به رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$E_3 = \max_{G=(0,1)^{3 \times 3}} E(G) \quad (22)$$

هر چند به دست آوردن این پارامتر نشان‌دهنده ماتریس مولد بهتر به منظور پلاریزاسیون است، ولی از آنجایی که در کاربردهای عملی با کدهایی با طول محدود روبرو هستیم، این تفاوت‌ها ناچیز است، بنابراین نمی‌تواند به تنهایی معیار مناسبی برای تصمیم‌گیری در نظر گرفته شود. هر چه مقدار L بزرگ‌تر می‌شود، ما با ماتریس‌های مولد متفاوت بیشتری برای انجام پلاریزاسیون روبرو هستیم، همچنین با افزایش L محاسبه پارامتر باتاچاریا سخت‌تر می‌شود. در نتیجه به دست آوردن بهترین ماتریس که منجر به عملکرد بهتر شود کاری سخت و دشوار از نظر محاسباتی است. برای هر ماتریس پلاریزاسیون می‌توان نشان داد که با احتمال یک، مقدار Z_{n+1} و کوچک‌تر از $3Z_n$ است ($Z_{n+1} \leq 3Z_n$) و همچنین با احتمال $\frac{1}{3}$ ، مقدار Z_{n+1} کمتر از مقدار Z_n^2 است ($Z_{n+1} \leq Z_n^2$) [۱۸]. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که برای هر ماتریس 3×3 که نرخ پلاریزاسیون آن به صورت $E(G)$ بیان می‌شود، به ازای هر $\beta \leq E(G)$ برابر است با:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[Z_n \leq 2^{-3n\beta}] = I(W) \quad (23)$$

مشخص است که به ازای n ‌های به اندازه کافی بزرگ، مجموعه A که دربرگیرنده اطلاعات بوده به اندازه $3^n R$ موجود است و در نتیجه

$$\sum_{i \in A} Z^i \leq O(2^{-3n\beta})$$

بنابراین احتمال خطا کدبرداری تحت کدبرداری پی‌درپی برای این طرح به صورت زیر است:

$$P_e = \sum_{i \in A} Z^i \leq O(2^{-3n\beta}) \quad (24)$$

سرانجام، پیچیدگی کدگذاری و کدبرداری برای کدهای قطبی به طول بلوک $N = 3^n$ برابر با $O(N \cdot \log_3^N)$ است که اثبات آن مشابه با اثبات آریکان برای حالتی است که طول بلوک $N = 2^n$ است. اکنون در جدول صفحه بعد به صورت جامع به مقایسه کار انجام‌شده در این مقاله با کار آریکان می‌پردازیم:

همان‌طور که از روابط بالا مشخص است، کانال W_3^2 در بعضی از مواقع در دسته کانال‌های خوب جهت ارسال اطلاعات، گاهی از اوقات مناسب برای ارسال بیت‌های فروزن (بیت‌هایی که پیش از ارسال در طرح آریکان ثابت بوده است) و همچنین در حالات‌هایی که $Z(W_3^2) = Z(W)$ است، می‌توان گفت این کانال خنثی بوده و در واقع در فرایند قطبی‌سازی نقشی نداشته است.

بررسی روابط مربوط به قطبش کانال و حالت‌هایی که امکان رخداد آن‌ها وجود دارد برای حالتی که L بزرگ‌تر از ۳ است، به علت تعداد زیاد ماتریس‌های موجود کاری سخت و زمان‌بر است و نیاز به الگوریتمی به این منظور است.

۴- بهبود عملکرد کدهای قطبی با ماتریس مولد جدید

همان‌طور که در قسمت ابتدایی به آن اشاره شده بود، کران بالای احتمال خطا برای کدهای قطبی برای هر $0 \leq \beta \leq 0.5$ با توجه به رابطه زیر به دست می‌آید.

$$P_e \leq o(2^{-2n\beta}) = o(2^{-N\beta}). \quad (20)$$

پارامتر β نشان‌دهنده خطای نمایی و به عبارتی حداکثر نرخ پلاریزاسیون است که از روی ماتریس مولد می‌توان آن را محاسبه نمود [۱۷]. بیشترین مقدار این پارامتر برای زمانی که ماتریس مولد برابر G_2 است برابر با 0.5 است. با توجه به نکاتی که در [۲۴] گفته شده و با توجه به رابطه (۲۰) می‌توان نتیجه گرفت هنگامی که این پارامتر افزایش یابد، عملکرد کدهای قطبی بهبود و کران بالای احتمال خطا کاهش می‌یابد. بنابراین می‌توان مقدار پارامتر β را به عنوان یکی از معیارها به منظور به دست آوردن ماتریس مولدی که بهترین عملکرد را در بین ماتریس‌ها داشته است، در حالتی که ماتریس مولد برابر با G_3 است، استفاده نمود. مقدار $E(G) = \beta$ از روی ماتریس مولد با توجه به رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$E(G) = \frac{1}{3} (\log_3^{(D_1 \times D_2 \times D_3)}) \quad (21)$$

نحوه محاسبه پارامترهای D_i که از روی ماتریس مولد قابل محاسبه هستند در [۲۴] آمده است.

جدول ۱: مقایسه عملکرد کدهای قطبی به ازای استفاده از ماتریس مولد 3×3 (ماتریس مولد جدید) با کار آریکان

نمودار مربوط به ظرفیت بعد از قطبش	پیچیدگی کدبرداری	کران بالای احتمال خطا	ماتریس مولد استثنای قطبش	پارامتر باتاچاریا بعد از قطبش
-----------------------------------	------------------	-----------------------	--------------------------	-------------------------------

<p>طرح آریکان</p>	$Z(W_2^1) = 2\varepsilon - \varepsilon^2$ $Z(W_2^2) = \varepsilon^2$	<p>ندارد</p>	$O(2^{-2^{n\beta}})$	$O(N \cdot \log N)$	
<p>حالت اول</p>	$Z(W_3^1) = 2\varepsilon - \varepsilon^2$ $Z(W_3^2) = \varepsilon$ $Z(W_3^3) = \varepsilon^2$	<p>ندارد</p>	$O(2^{-3^{n\beta}})$	$O(N \cdot \log_3^N)$	
<p>حالت دوم</p>	$Z(W_3^1) = \varepsilon^3 - 3\varepsilon^2 + 3\varepsilon$ $Z(W_3^2) = 2\varepsilon^2 - \varepsilon^3$ $Z(W_3^3) = \varepsilon^2$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$O(2^{-3^{n\beta}})$	$O(N \cdot \log_3^N)$	
<p>حالت سوم</p>	$Z(W_3^1) = \varepsilon^2 - \varepsilon^3 + \varepsilon$ $Z(W_3^2) = 2\varepsilon - \varepsilon^2$ $Z(W_3^3) = \varepsilon^3$	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	$O(2^{-3^{n\beta}})$	$O(N \cdot \log_3^N)$	

		$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$			
		$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$			

طول کدهایی به بزرگی $N=131072$ رسم گردیده‌اند. همان‌گونه که از شکل ۷ مشخص است، منحنی‌های A، B و D که در این شکل برای طول کدهای بالاتری در مقایسه با دیگر منحنی‌ها رسم گردیده‌اند، دارای عملکرد بهتری بوده‌اند و به‌ازای مقادیر نسبت سیگنال به نویزهای یکسان دچار خطای کمتری می‌شوند و به‌عبارتی می‌توان گفت که با افزایش طول بلوک کد عملکرد کدهای قطبی در طرح ارائه‌شده بهبود یافته است. از شکل بالا می‌توان نتیجه‌گرفت که با افزایش طول کد از 131072 به 1048576 بهره حاصل شده برابر با 0.5 db بوده است. همچنین پس از مقایسه این کدها با کدهای توربو در شرایط یکسان می‌توان نتیجه‌گرفت، که عملکرد این کدها بسیار بهتر از کدهای توربو است.

۵- نتیجه

در این مقاله نشان داده شده است که در کدهای قطبی هنگامی که ماتریس مولد یک ماتریس 3×3 است، با فرم‌های متفاوتی در انجام عمل پلاریزاسیون روبرو هستیم و بسته به این که قصد از سال با چه نرخ‌ی را داشته‌اشیم و یا از چه کانال‌هایی به‌منظور ارسال اطلاعات استفاده شود، ساختار ماتریس مولد به‌گونه‌های متفاوتی است. در ادامه این بخش طرح کدهای قطبی برای کدهایی به طول $N=3^n$ بررسی شده است و همچنین روابط مربوط به قطبی‌سازی کانال در سه حالت که با توجه به درایه‌های ماتریس مولد از همدیگر متمایز می‌شدند، مشخص شده است. نشان داده‌شده که احتمال خطای کدبرداری تحت کدبرداری پی‌درپی برای این طرح به‌صورت $O(2^{-3n})$ و همچنین پیچیدگی کدگذاری و کدبرداری برابر با $O(N \cdot \log_3^N)$ است.

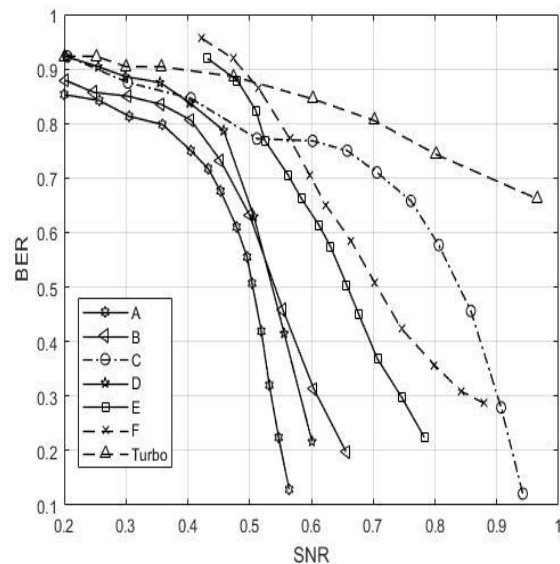
سپاسگزاری

نویسندگان این مقاله از هم‌فکری اعضای هیئت تحریریه مجله علمی-پژوهشی مهندسی برق دانشگاه تبریز و داوران محترمی که زحمت داوری این مقاله را تقبل نموده‌اند، کمال سپاسگزاری را دارند.

مراجع

- [1] Shannon, Claude E. "Communication theory of secrecy systems." *Bell Labs Technical Journal* 28, no. 4: 656-715, 1949.
- [2] احسان اولیائی ترشیزی و حسین شریفی، «ارائه دو الگوریتم دیکدینگ هیبرید جدید با عملکرد بسیار خوب و پیچیدگی بسیار کم

همان‌گونه که از روابط به‌دست‌آمده، مشخص است، با افزایش طول بلوک ورودی (استفاده از ماتریس مولد جدید) کران بالای احتمال خطا و پیچیدگی کدبرداری کاهش یافته است و همچنین روابط مربوط به پارامتر باتاچاریا در سه دسته‌بندی مختلف قرارگرفته‌اند. اکنون در قسمت انتهایی به بررسی مقایسه عملکرد این کدها و تأثیر آگاهی از اطلاعات کانال و تغییرات آن با حالت اولیه (کار آریکان) و همچنین دیگر کدها پرداخته شده است.



شکل ۷: تأثیر اطلاعات جانبی بر روی احتمال خطای بیت در کدهای قطبی

شکل ۷ تغییرات احتمال خطای بیت برای کدهای قطبی در یک کانال فیدینگ با ورودی باینری، با دانستن اطلاعاتی از شرایط کانال نسبت به میزان سیگنال به نویز را نشان می‌دهد. به‌منظور مقایسه راحت‌تر عملکرد این کدها در طول بلوک‌ها و شرایط متفاوت محور X ها در شکل ۷ نشان‌دهنده میزان سیگنال به نویز است. هرکدام از منحنی‌های مشخص شده با برچسب‌های A، B، C و ... در شکل بالا عملکرد کدهای قطبی را برای کانال فیدینگ با ورودی باینری به‌ازای نرخ کدهای هدف متفاوت در صورت آگاهی از اطلاعات کانال را نشان می‌دهد. در شکل بالا نرخ کد هدف برای منحنی A برابر با 0.5 بیت، برای B و F برابر با 0.333 بیت، برای C و F برابر با 0.1 و برای منحنی D برابر با 0.9 بیت در نظر گرفته شده است. منحنی‌های A، B و D در بالا برای طول کدهایی به بزرگی $N=1048576$ و منحنی‌های C، E و F در بالا برای

- broadcast channels using polar codes." *IEEE Transactions on Information Theory* 61, no. 2: 783-800, 2015.
- [15] Korada, Satish Babu, and Rüdiger Urbanke. "Polar codes for slepian-wolf, wyner-ziv, and gelfand-pinsker." In *Information Theory (ITW 2010, Cairo), 2010 IEEE Information Theory Workshop on*, pp. 1-5. IEEE, 2010.
- [16] Sarkis, Gabi, and Warren J. Gross. "Polar codes for data storage applications." In *Computing, Networking and Communications (ICNC), 2013 International Conference on*, pp. 840-844. IEEE, 2013.
- [17] Arikan, Erdal. "Channel combining and splitting for cutoff rate improvement." *IEEE Transactions on Information Theory* 52, no. 2: 628-639, 2006.
- [18] Arikan, Erdal. "A performance comparison of polar codes and Reed-Muller codes." *IEEE Communications Letters* 12, no. 6, 2008.
- [19] Hooshmand, Reza, Mohammad Reza Aref, and Taraneh Eghlidos. "Secret key cryptosystem based on non-systematic polar codes." *Wireless Personal Communications* 84, no. 2: 1345-1373, 2015.
- [20] Hooshmand, Reza, M. Koochak Shooshtari, and Mohammad Reza Aref. "Secret key cryptosystem based on polar codes over binary erasure channel." In *Information Security and Cryptology (ISCISC), 2013 10th International ISC Conference on*, pp. 1-6. IEEE, 2013.
- [21] محمد کنارکوهی، حسن توکلی، «ارائه روشی نوین برای تلفیق کدگذاری کانال و رمزنگاری مبتنی بر کدگذاری قطبی»، مجله علمی پژوهشی پدافند الکترونیکی و سایبری، شماره ۱: صص ۸-۱۳۹۵.
- [22] Presman, Noam, Ofer Shapira, and Simon Litsyn. "Polar codes with mixed kernels." In *Information Theory Proceedings (ISIT), 2011 IEEE International Symposium on*, pp. 6-10. IEEE, 2011.
- [23] Presman, Noam, Ofer Shapira, Simon Litsyn, Tuvi Etzion, and Alexander Vardy. "Binary polarization kernels from code decompositions." *IEEE Transactions on Information Theory* 61, no. 5: 2227-2239, 2015.
- [24] Korada, Satish Babu, Eren Sasoglu, and Rüdiger Urbanke. "Polar codes: Characterization of exponent, bounds, and constructions." *IEEE Transactions on Information Theory* 56, no. 12: 6253-6264, 2010.
- برای دیدن کدهای LDPC، «مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، دوره ۴۵، شماره ۲، صفحه ۲۷-۳۷، ۱۳۹۴.
- [3] شهرام جمالی و عرفان آفاکیاسری، «بهبود حمله مکعبی کانال با اطلاعات جانبی بر روی الگوریتم‌های بلوکی»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، جلد ۴۵، شماره ۴، صفحات ۶۹-۷۸، ۱۳۹۴.
- [4] مهدی تیموری، حمیدرضا کاکایی مطلق و مرتضی حدادی، «شناسایی کور کدهای ضربی BCH»، مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز، جلد ۴۷، شماره ۱، صفحات ۷۹-۸۵، ۱۳۹۶.
- [5] Arikan, Erdal. "Channel polarization: A method for constructing capacity-achieving codes for symmetric binary-input memoryless channels." *IEEE Transactions on Information Theory* 55, no. 7: 3051-3073, 2009.
- [6] Arikan, Erdal, and Emre Telatar. "On the rate of channel polarization." In *Information Theory, 2009. ISIT 2009. IEEE International Symposium on*, pp. 1493-1495. IEEE, 2009.
- [7] Hassan Tavakoli. "Polarization of a Point-to-Point Channel by a Multiple Access Channel: A New Method for Different channel polarization." *Iran J Sci Technol Transactions Electrical Engineering*, doi: 10.1007/S40998-017-0022-8, Online publish, 2017.
- [8] Korada, Satish Babu. "Polar codes for channel and source coding." PhD diss., Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2009.
- [9] Abbe, Emmanuel, and Emre Telatar. "Polar codes for the m-user MAC." *arXiv preprint arXiv:1002.0777*, 2010.
- [10] Abbe, Emmanuel, and Emre Telatar. "Polar codes for the \$m\$-user multiple access channel." *IEEE Transactions on Information Theory* 58, no. 8: 5437-5448, 2012.
- [11] Goela, Naveen, Emmanuelle Abbe, and Michael Gastpar. "Polar codes for the deterministic broadcast channel." In *Proceedings of the International Zurich Seminars on Communications*, pp. 51-54, 2012.
- [12] Goela, Naveen, Emmanuel Abbe, and Michael Gastpar. "Polar codes for broadcast channels." *IEEE Transactions on Information Theory* 61, no. 2: 758-782, 2015.
- [13] Chou, Rémi A., and Matthieu R. Bloch. "Polar coding for the broadcast channel with confidential messages." In *Information Theory Workshop (ITW), 2015 IEEE*, pp. 1-5. IEEE, 2015.
- [14] Mondelli, Marco, Seyed Hamed Hassani, Igal Sason, and Rüdiger L. Urbanke. "Achieving Marton's region for

زیرنویس‌ها

⁵ Error Exponent
⁶ Channel Side Information
⁷ Fading Channel
⁸ Target Code Rate

¹ Polar codes
² Polarization
³ Wyner-Ziv
⁴ Gelfand-Pinsker