

بررسی ارتعاش آزاد و پاسخ استاتیکی تیر مدرج هدفمند پیزوالکتریک براساس نظریه الاستیسیته دوبعدی

محسن ملکی

صابر محمدی*

مهرداد فروتن

دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه رازی، کرمانشاه، ایران

چکیده

در این تحقیق بر اساس نظریه الاستیسیته دو بعدی و با استفاده از روش اجزا محدود، ارتعاش آزاد و پاسخ استاتیکی تیر هدفمند مدرج پیزوالکتریک در شرایط مرزی متفاوت بررسی شده است. خواص مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی این تیر در راستای ضخامت طبق رابطه تابع توانی تیرهای مدرج هدفمند متغیر است. معادلات حاکم بر تیر با به کارگیری اصل همپلتون برای هر دو حالت حسگری و عملگری استخراج شده است و با حل معادلات به روش اجزا محدود و به کمک نظریه الاستیسیته دوبعدی فرکانس‌های طبیعی و پاسخ استاتیکی تیر ارایه شده است. شرایط مرزی مکانیکی دو انتهای تیر به صورت آزاد-گیردار، ساده-ساده و گیردار-گیردار بیان شده و شرایط مرزی الکتریکی تیر به صورت مدار باز و مدار بسته با اعمال اختلاف پتانسیل‌های متفاوت در نظر گرفته شده است. تاثیر طول به ارتفاع تیر، شرایط مرزی و نحوه توزیع خواص تیر بر روی فرکانس طبیعی و خمش تیر مورد بررسی واقع شده است. **واژه‌های کلیدی:** مواد مدرج هدفمند پیزوالکتریک، نظریه الاستیسیته دو بعدی، پاسخ استاتیکی، فرکانس طبیعی، روش اجزا محدود.

Investigating Free Vibration and Static Response of Functionally Graded Piezoelectric Beam Based on Two-dimensional Elasticity Theory

M. Maleki

Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran

S. Mohammadi

Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran

M. Foroutan

Department of Mechanical Engineering, Razi University, Kermanshah, Iran

Abstract

Free vibration and static analysis of a functionally graded piezoelectric beam is carried out by the finite element method in present study. Mechanical, electrical and electromechanical properties are estimated by the power law distribution through the thickness of the beam. Governing equations are derived using Hamilton's principle and two dimensional theory of elasticity. Convergence of the proposed finite element method is verified by several examples in free vibration and static analysis under mechanical and electrical loads with different types of boundary conditions. After validating the model, effect of different parameters are investigated on natural frequencies and static response of functionally graded piezoelectric beam.

Keywords: Functionally graded piezoelectrics material, Two dimensional elasticity theory, Static response, Natural frequency, Finite element method.

برخی معایب را در پیزوالکتریک‌های لایه‌ای فراهم می‌آورد؛ چسب یا سایر مواد مقید کننده لایه‌های پیزوالکتریک ممکن است در تغییر شکل‌های بزرگ دچار ترک شده و یا با بالا رفتن دما منجر به خزش شوند. همچنین به علت تغییر ناگهانی خواص مواد امکان ایجاد تمرکز تنش در بین لایه‌ها افزایش می‌یابد. به منظور برطرف کردن معایب مواد پیزوالکتریک لایه‌ای و با توجه به پیشرفت‌های اخیر در متالورژی و روش‌های ساخت مواد، از مفاهیم حاکم در مواد مدرج هدفمند در ساخت مواد پیزوالکتریک استفاده می‌شود [۱-۲]. تحقیقات اخیر در زمینه بهینه‌سازی عملکرد مواد پیزوالکتریک منجر به ساخت مواد مدرج هدفمند پیزوالکتریک شده است.

در سال ۱۹۹۵ ژو و منگ [۲] ساخت عملگر از جنس مواد مدرج هدفمند پیزوالکتریک را با استفاده از روش پودر زنی گزارش کردند و مشخصات مکانیکی و الکتریکی و جابجایی انتهای آزاد عملگر را به

۱- مقدمه

مواد پیزوالکتریک به علت خواص الکترومکانیکی مناسب، طراحی پذیری بالا و بازدهی مناسب در تبدیل انرژی الکتریکی و انرژی مکانیکی به یکدیگر به صورت گسترده‌ای در ساخت و کنترل حسگرها و عملگرها به کار برده می‌شوند. حسگرها و عملگرهای پیزوالکتریک در سیستم‌های میکرو الکترومکانیک^۱ به خصوص در صنایع وابسته به هوافضا و پزشکی استفاده می‌شوند. به منظور بهینه‌سازی عملکرد مواد پیزوالکتریک، سابقاً از مواد پیزوالکتریک لایه‌ای در طراحی و ساخت حسگرها و عملگرها استفاده می‌شد. تغییر مکان‌های بزرگ امکان بروز

^۱ Microelectromechanical Systems

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: saberm7@yahoo.com

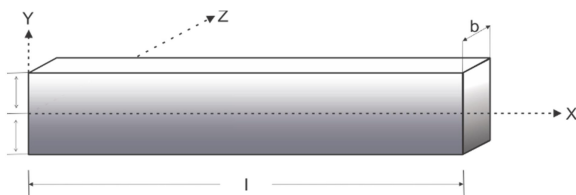
صورت تجربی اندازه گیری کردند. همچنین با تغییر ترکیب سطح مقطع تیر، تاثیر ترکیب مواد تشکیل دهنده تیر را بر رفتار ذاتی آن بررسی کردند. کروسینگ در سال ۲۰۰۰ با استفاده از ضریب الاستیسیته مدراج و به کمک نظریه اولر- برنولی مدلی تحلیلی برای یافتن پاسخ یک تیر به عنوان عملگر ارایه کرد [۳]. هم چنین در سال ۲۰۰۰ هاوک و همکارانش [۴] با ارایه نتایج تجربی، رگرسیون خطی جابجایی انتهایی تیری با ضریب پیژوالکتریک متغیر را محاسبه کردند. لی [۵] در سال ۲۰۰۵ با استفاده از روش اجزا محدود خطی، توزیع تنش و جابجایی یک تیر دو بلوره مدراج هدفمند با خاصیت پیژوالکتریک را ارایه کرد. او در این تحقیق تغییر خواص را در تیر به صورت لایه ای در نظر گرفته بود؛ به طوری که خواص مکانیکی و الکتریکی در لایه های مختلف متفاوت بودند. هسو [۶] نیز در سال ۲۰۰۵ با ترکیب روش مربعات دیفرانسیلی و اصل همیلتون رفتار الکترومکانیکی تیر مدراج هدفمند لایه ای با خاصیت پیژوالکتریک را بررسی کرد. شی و همکارانش در سال های ۲۰۰۴ تا ۲۰۰۶ با بهره گیری از الاستیسیته دو بعدی و تابع تنش ابری روابط فرم بسته برای عملگر مدراج هدفمند پیژوالکتریک به دست آوردند [۷-۸]. همچنین ژیانگ و شی [۹] در سال ۲۰۰۹ پاسخ استاتیکی تیر مدراج هدفمند را با بارگذاری مکانیکی و با استفاده از تابع تنش ابری بررسی کردند. هوانگ [۱۰] در سال ۲۰۱۰ پاسخ تحلیلی و نیمه تحلیلی یک تیر مدراج هدفمند پیژوالکتریک با خواص الکترومگنتو مکانیکی متغیر را در بارگذاری های اتفاقی به دست آورد. در سال ۲۰۱۱ دوروشی و همکارانش [۱۱] به کمک نظریه مرتبه سه تیرها ارتعاش آزاد و پاسخ دینامیکی تیر مدراج هدفمند را تحت بارهای مکانیکی، الکتریکی و گرمایی بررسی کردند. کمیچانی و همکارانش [۱۲] در سال ۲۰۱۳ تحلیل غیرخطی عملگرهای میکروسازه ای را تحت بارهای مکانیکی، الکتریکی و گرمایی با استفاده از نظریه تیر تیموشینکو انجام دادند. در سال ۲۰۱۴ رحمانی و پدرام [۱۹] اثر اندازه را در تحلیل و مدلسازی تیر مدراج هدفمند پیژوالکتریک براساس نظریه تیر تیموشینکو بررسی کردند. در سال ۲۰۱۵ لی و پن [۲۰] ارتعاش آزاد و خمشی میکرو صفحه مدراج هدفمند را بررسی کردند. در سال ۲۰۱۵ لین و همکارانش [۲۱] پاسخ الکترومکانیکی غیرخطی تیر مدراج هدفمند را بررسی کردند.

اکثر تحقیقات صورت گرفته بر روی تیرهای مدراج هدفمند با خاصیت پیژوالکتریک با استفاده از فرضیات نظریه تیرها انجام شده است. نظریه تیرها برای تبدیل یک مساله دو بعدی به یک بعدی به کار می روند و با کاهش ضریب لاغری^۱ تیر دقت آن ها کاهش می یابد [۱۴-۱۳]. به دلیل عدم استفاده از تقریب و دقت بالا در روش الاستیسیته دو بعدی، و عدم بررسی جامع ارتعاش آزاد تیرهای مدراج هدفمند با خاصیت پیژوالکتریک، در مقاله حاضر از این روش برای یافتن فرکانس طبیعی و پاسخ استاتیکی تیر مدراج هدفمند با خاصیت پیژوالکتریک تحت بار الکتریکی و مکانیکی در شرایط مختلف استفاده شده است. در تحقیق جاری، با استفاده از اصل همیلتون و رابطه ماکسول و به کمک روابط الاستیسیته و پیژوالکتریک در دو بعد، معادلات حاکم بر تیر

مدراج هدفمند با خاصیت پیژوالکتریک به دست آمده است. از روش اجزا محدود برای حل معادلات حاکم بر تیر در شرایط مرزی مکانیکی متفاوت، شامل تکیه گاه های ساده- ساده، گیردار- آزاد و گیردار - گیردار و شرایط مرزی الکتریکی شامل مدار باز و مدار بسته (با اعمال ولتاژهای متفاوت) در نظر گرفته شده است. مراحل شبیه سازی تیر به سه قسمت پیش پردازش، حل و پس پردازش تقسیم شده است. مرحله پیش پردازش با مش زدن محدوده تیر، شماره گذاری المان ها و گره ها، شروع می شود و با سرهم بندی ماتریس های هر المان، ماتریس های کلی به دست می آید. در مرحله بعد با استفاده از ماتریس جرم و ماتریس سفتی و اعمال شرایط مرزی فرکانس های طبیعی و تغییر شکل ها به دست می آیند. از آنجا که خواص الکتریکی، مکانیکی و الکترومکانیکی در راستای ضخامت متغیر است، برای محاسبه انتگرال ها از روش گوس لژاندر استفاده شده است.

۲- معادلات

شکل ۱ تیری با طول l عرض b و ارتفاع h که از مواد مدراج هدفمند با خاصیت پیژوالکتریک ساخته شده است را نمایش می دهد. بار عرضی q و اختلاف پتانسیل V_0 به تیر اعمال شده است. خواص مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی تیر در راستای ضخمات طبق تابع توانی متغیر است. این تابع توانی برای خاصیت P در رابطه (۱) آورده شده است [۱۱].



شکل ۱- هندسه تیر

$$P = P_u V_u + P_l V_l \quad (1)$$

که P_l و P_u به ترتیب خواص مکانیکی، الکتریکی و الکترومکانیکی در سطوح بالا و پایین تیر هستند. همچنین V_l و V_u نسبت حجمی خواص سطوح بالا و پایین هستند که طبق رابطه (۲) محاسبه می شوند.

$$V_u = \left(\frac{2z + h}{2h} \right)^n, \quad V_l = 1 - V_u \quad (2)$$

n ضریب نسبت حجمی است که عددی نامنفی می باشد. روابط (۳) و (۴) معادلات ساختاری حاکم بر مواد پیژوالکتریک را نمایش می دهند که در آن $\{\sigma\}$ ، $\{\varepsilon\}$ ، $\{E\}$ و $\{D\}$ به ترتیب بیانگر میدان تنش، میدان کرنش، میدان الکتریکی و جابجایی الکتریکی هستند [۱].

$$\{\sigma\} = [C^E] \{\varepsilon\} - [e]^T \{E\} \quad (3)$$

$$\{D\} = [e] \{\varepsilon\} + [k^E] \{E\} \quad (4)$$

در روابط فوق الذکر $[C^E]$ و $[k^E]$ به ترتیب ماتریس های سفتی مکانیکی و دی الکتریک می باشند که در حالت تنش صفحه ای در میدان کرنش و میدان الکتریکی ثابت اندازه گیری شده اند و $[e]$ نیز ماتریس پیژوالکتریک در حالت تنش صفحه ای می باشد. مولفه های ماتریس کرنش و میدان الکتریکی طبق روابط (۵) و (۶) وابسته به جابه جایی

¹Slender ratio

های (u,w) و پتانسیل الکتریکی Φ می‌باشند [۱۸]. مشتق توابع شکل و مقدار جابه‌جایی و پتانسیل الکتریکی استفاده می‌شود [۱۳].

$$\{\varepsilon\} = [B_{uu}] \left\{ \begin{matrix} u_w \\ w_w \end{matrix} \right\} \quad (18)$$

$$\{E\} = [B_{\phi}] \{\phi_e\} \quad (19)$$

با جایگذاری فرم اجزاء محدود عبارات معادله حاکم بر تیر و ساده‌سازی آن‌ها معادلات (۲۰) و (۲۱) به عنوان معادلات حاکم بر تیر به دست می‌آیند.

$$[M_{uu}] \left\{ \begin{matrix} \ddot{u}_w \\ \ddot{w}_w \end{matrix} \right\} + [K_{uu}] \left\{ \begin{matrix} u_w \\ w_w \end{matrix} \right\} + [K_{u\phi}] \{\phi_e\} = \{f\} \quad (20)$$

$$[K_{\phi u}] \left\{ \begin{matrix} u_w \\ w_w \end{matrix} \right\} - [K_{\phi\phi}] \{\phi_e\} = -\{q\} \quad (21)$$

معادلات (۲۰) و (۲۱) معادلات حاکم بر تیر با اعمال روابط اجزاء محدود می‌باشند. [M] ماتریس جرم، [K_{uu}] ماتریس سفتی مکانیکی، [K_{uφ}] و [K_{φφ}] نیز به ترتیب ماتریس‌های سفتی الکترومکانیکی و [K_{φu}] نیز ماتریس سفتی الکتریکی می‌باشند.

$$[M_{uu}] = \int_V [N_{uu}]^T \rho [N_{uu}] dV \quad (22)$$

$$[K_{uu}] = \int_V [B_{uu}]^T [C] [B_{uu}] dV \quad (23)$$

$$[K_{u\phi}] = \int_V [B_{uu}]^T [e] [B_{\phi}] dV \quad (24)$$

$$[K_{\phi u}] = \int_V [B_{\phi}]^T [e] [B_{uu}] dV \quad (25)$$

$$[K_{\phi\phi}] = \int_V [B_{\phi}]^T [K] [B_{\phi}] dV \quad (26)$$

یافتن پاسخ انتگرال‌های موجود در معادلات (۲۲) تا (۲۶) به روش گوس- لژاندر ممکن است. از آنجا که برای گسسته‌سازی محدوده تیر از المان مستطیلی چهار نقطه‌ای استفاده شده است، در این روش انتگرال‌گیری عددی استفاده از نه نقطه جهت یافتن پاسخ با دقت مناسب کافی است.

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\int_V (\rho \delta u^T \ddot{u} - \delta \varepsilon^T C \varepsilon + \delta e^T e^T E + \delta E^T e \varepsilon + \delta E^T k E) dV \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_S (\delta u^T f_s - \delta \phi^T q_s) ds \right) + \left(\int_V (\delta u^T f_v - \delta \phi^T q_v) dV \right) = 0 \quad (13)$$

معادلات (۲۰) و (۲۱) و اعمال شرایط مرزی به دست می‌آید. پاسخ الکترومکانیکی مستقل از زمان می‌باشد پس عبارت وابسته به زمان از معادله (۲۰) حذف می‌شود. هم‌چنین برای یافتن فرکانس‌های طبیعی باید ماتریس‌های سفتی مطرح شده در معادلات (۲۰) و (۲۱) به ماتریس سفتی معادل تبدیل شوند. ماتریس سفتی معادل از رابطه (۲۷) محاسبه می‌شود.

$$[K_{eq}] = [K_{uu}] + [K_{u\phi}] [K_{\phi\phi}]^{-1} [K_{\phi u}] \quad (27)$$

شرایط مرزی مکانیکی تیر به صورت ساده- ساده، گیردار- ساده و گیردار- گیردار مطرح می‌گردد که برای اعمال هرکدام باید بر درجات آزادی مکانیکی المان‌هایی که بر روی مرزهای محدوده تیر قرار دارند تغییرات لازم اعمال گردد. شرایط مرزی الکتریکی نیز به صورت مدار باز و مدار بسته مطرح می‌گردد. در این حالت می‌بایست تغییراتی بر روی درجات آزادی الکتریکی المان‌هایی که اختلاف پتانسیل روی آن‌ها وارد می‌شود، اعمال گردد. اگر اختلاف پتانسیل مشخصی به دو مرز تیر

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (5)$$

$$E_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, E_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (6)$$

برای به دست آوردن معادلات حاکم بر تیر نیز از اصل همپلتون استفاده می‌شود. این اصل به صورت رابطه (۷) بیان می‌گردد [۱۱].

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W dt = 0 \quad (7)$$

که L لاگرانژی و W کار خارجی می‌باشد. لاگرانژی در این معادله تنها مربوط به قسمت مکانیکی مساله نمی‌باشد بلکه قسمت الکتریکی را نیز شامل می‌شود. عبارات لاگرانژی و کار خارجی به ترتیب در روابط (۸) و (۹) بسط داده می‌شوند.

$$L = \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}^T \dot{u} - H \right) dV \quad (8)$$

$$\delta W = \int_S (\delta u^T f_s - \delta \phi^T q_s) dS + \int_V (\delta u^T f_v - \delta \phi^T q_v) dV \quad (9)$$

در روابط اخیر u بردار جابه‌جایی، H آنتالپی، f_s نیروی سطحی، q_s شارژ الکتریکی سطحی، f_v نیروی حجمی، q_v شارژ الکتریکی حجمی در واحد سطح و V و S نیز به ترتیب حجم و سطح محدوده مورد نظر می‌باشند.

$$H = P - E^T D \quad (10)$$

در رابطه (۱۰) انرژی پتانسیل با P نشان داده شده است که حاصل جمع انرژی پتانسیل الکتریکی و انرژی کرنشی تیر می‌باشد.

$$P = \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma + \frac{1}{2} E^T D \quad (11)$$

با جایگذاری روابط انرژی پتانسیل و آنتالپی در رابطه (۸)، لاگرانژی به صورت رابطه (۱۲) قابل نمایش است.

$$L = \int_V \left(\frac{1}{2} \rho \dot{u}^T \dot{u} - \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma + \frac{1}{2} E^T D \right) dV \quad (12)$$

همچنین با اعمال روابط ساختاری پیزوالکتریک‌ها رابطه همپلتون به صورت رابطه (۱۳) بازنویسی می‌شود.

۳- فرمول بندی اجزاء محدود

روش اجزاء محدود به کمک فرم ضعیف گالرکین برای حل معادلات حاکم بر سیستم به صورت عددی به کار برده می‌شود [۱۵]. با بهره‌گیری از توابع شکل چند جمله‌ای مرتبه دوم، عبارات‌های موجود در رابطه (۱۳) به صورت زیر تقریب زده می‌شوند [۱۴].

$$\left\{ \begin{matrix} u \\ w \end{matrix} \right\} = [N_u] \left\{ \begin{matrix} u_w \\ w_w \end{matrix} \right\} \quad (14)$$

$$\{\phi\} = [N_{\phi}] \{\phi_e\} \quad (15)$$

$$\{f\} = [N_{f_s}] \{f_{s,e}\} + [N_{f_v}] \{f_{v,e}\} \quad (16)$$

$$\{q\} = [N_{q_s}] \{q_{s,e}\} + [N_{q_v}] \{q_{v,e}\} \quad (17)$$

هم‌چنین برای به دست آوردن میدان کرنش و میدان الکتریکی از

مثال ۱: سه فرکانس طبیعی اول بدون بعد یک تیر مدرج هدفمند با شاخص نسبت حجمی $n=1$ و ضریب لاغری های ۲۰، ۵۰ و ۱۰۰ در شرایط مرزی ساده- ساده و گیردار- گیردار با مقادیر به دست آمده در تحقیقی که توسط الشوریگی و همکارانش [۱۵] به دست آمده مقایسه شده است.

در تحلیلی که توسط الشوریگی و همکارانش [۱۵] صورت گرفته است سطح بالایی تیر از آلومینا و سطح پایینی از فولاد تشکیل شده است که خواص فیزیکی آن‌ها در جدول ۲ بیان شده است. برای بی‌بعد کردن فرکانس طبیعی در آن تحقیق از رابطه (۳۴) استفاده شده است.

$$\Omega = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho A}{E I}} \quad (34)$$

که در آن ω فرکانس طبیعی، ρ چگالی سطح پایینی، E مدول یانگ سطح پایینی و Ω نیز فرکانس طبیعی بی بعد شده می‌باشد. در جدول ۳ مقایسه بین نتایج این مطالعه و نتایج موجود در مراجع مذکور صورت گرفته است. اختلاف بین نتایج به صورت نسبی و طبق رابطه (۳۵) می‌باشد.

جدول ۲- خواص مکانیکی آلومینا و فولاد [۱۵].

چگالی (Kg/m^3)	مدول یانگ (GPa)	ضریب پواسون	
3960	390	0.3	سطح بالایی
7800	210	0.3	سطح پایینی

$$\text{Diff} = \frac{\Omega_r - \Omega_p}{\Omega_r} \times 100 \quad (35)$$

در رابطه (۳۵) Ω_p و Ω_r به ترتیب مقدار فرکانس طبیعی موجود در مراجع و فرکانس طبیعی به دست آمده در این تحقیق می‌باشد. در جدول ۳ ستون اختلاف مربوط به درصد اختلاف نسبی می‌باشد که طبق رابطه (۳۵) محاسبه می‌گردد. در مثال اول به علت نبود خاصیت پیزوالکتریکی در مواد تشکیل دهنده تیر و هم‌چنین نزدیک بودن شیوه حل معادلات در مطالعه حاضر به شیوه حل آن مرجع [۱۶]، درصد اختلاف نسبی زیر ۱٪ است.

مثال ۲: در این مثال تیر مدرج هدفمندی با خاصیت پیزوالکتریکی با ضریب لاغری $L/h=6$ در نظر گرفته می‌شود. سطح بالای این تیر از PZT-4 و سطح پایینی از PZT-5H تشکیل شده است و شرایط مرزی تیر نیز به صورت گیردار- آزاد می‌باشد. در جدول ۴ مشخصات فیزیکی مواد پیزوالکتریک آورده شده است.

در شکل ۲ تغییرات جابه‌جایی بدون بعد لبه تیر تحت بار عرضی q نسبت به تغییرات شاخص نسبت حجمی آورده شده است و با نتایج حاصل از کار یانگ [۱۶] و کمی [۱۷] مقایسه شده است. نتایج به دست آمده در مراجع [۱۶] و [۱۷] به ترتیب بر اساس نظریه مرتبه اول و مرتبه سوم تیرها می‌باشد. از آن‌جا که نظریه مرتبه سوم دقیق‌تر از نظریه مرتبه اول است، نتایج به دست آمده بر اساس نظریه مرتبه سوم به نتایج مطالعه حاضر که بدون اعمال تقریب‌های موجود در نظریه‌ها و با استفاده از نظریه الاستیسیته دو بعدی صورت گرفته است نزدیک‌تر است.

اعمال گردد، مقدار اختلاف پتانسیل الکتریکی گره‌های موجود بر آن دو مرز در حین حل مساله ثابت و برابر همان اختلاف پتانسیل اعمال شده خواهد بود. هم‌چنین در حالت مدار باز که اختلاف پتانسیلی در راستای ضخامت به تیر اعمال نمی‌شود جابه‌جایی الکتریکی سطح بالایی و پایینی تیر برابر صفر می‌شود. در موارد استفاده پیزوالکتریک‌ها در مدارهای برداشت انرژی و کنترل نیمه‌فعال عملگرها، معمولاً شرایط مرزی به صورت مدار بسته می‌باشد؛ زیرا در این مدارها علاوه بر پیزوالکتریک‌ها اجزای دیگر مدارهای الکتریکی نیز حاضر می‌باشند که یک مدار بسته را تشکیل می‌دهند. حالات مختلف شرایط مرزی مکانیکی به صورت زیر است.

$$S-S: w = 0 \quad x = 0, L \quad (28)$$

$$C-C: \frac{\partial w}{\partial x} = 0, w = 0 \quad x = 0, L \quad (29)$$

$$C-F: \frac{\partial w}{\partial x} = 0, w = 0 \quad x = 0 \quad (30)$$

هم‌چنین شرایط مرزی مدار باز و مدار بسته نیز به صورت روابط (۳۱) و (۳۲) اعمال می‌شوند.

$$O.C: D_z \left(x, \pm \frac{h}{2} \right) = 0 \quad (31)$$

$$C.C: \phi \left(x, \frac{h}{2} \right) - \phi \left(x, -\frac{h}{2} \right) = V_0 \quad (32)$$

۴- مقایسه نتایج

در این بخش در ابتدا برخی از نتایج این تحقیق به منظور اعتبارسنجی با تحقیقات مشابه مقایسه می‌گردد. اعتبارسنجی در مثال اول در مقایسه با ارتعاش آزاد تیر مدرج هدفمند بدون خاصیت پیزوالکتریکی صورت گرفته است در حالی که در دو مثال بعد، مقایسه‌هایی با تیرهای مدرج هدفمند با خاصیت پیزوالکتریکی صورت گرفته است. در یکی از دو مثال آخر نظریه الاستیسیته دو بعدی استفاده شده است و دیگری از نظریه مرتبه سوم تیرها بهره گرفته است. در جدول ۱ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر مدرج هدفمندی متشکل از PZT-4 و PZT-5H با شاخص نسبت حجمی $n=1$ و لاغری $L/h=15$ برای تعداد متفاوت المان‌های روی یک تیر نمایش داده شده است. فرکانس‌های ارائه شده در این جدول توسط رابطه (۳۳) بی‌بعد شده است.

$$\Omega = \omega h \sqrt{\frac{\rho}{C_{11}}} \quad (33)$$

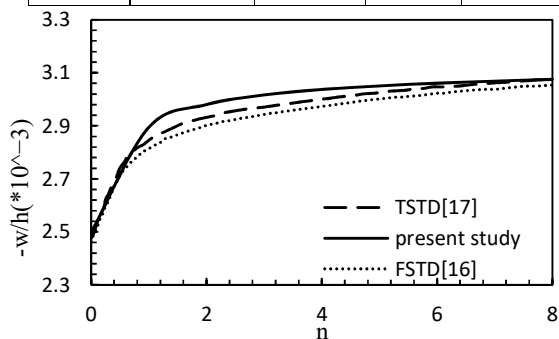
با توجه به بررسی صورت گرفته، تعداد ۱۲۰ المان برای بررسی‌های این مطالعه انتخاب شده است. لازم به ذکر است که نتایج موجود در مقایسه‌ها و بخش مطالعه پارامتری مستخرج از کدی است که توسط مولفین در نرم افزار (2012) MATLAB تهیه شده است.

جدول ۱- بررسی همگرایی تعداد المان‌ها.

تعداد المان						
140	120	100	80	60	40	
0.0187	0.0187	0.0187	0.0188	0.0188	0.0191	Ω_1
0.1099	0.1100	0.1101	0.1104	0.1110	0.1126	Ω_2
0.2024	0.2024	0.2024	0.2024	0.2024	0.2025	Ω_3
0.2831	0.2834	0.2839	0.2847	0.2866	0.2911	Ω_4
0.5034	0.5041	0.5052	0.5071	0.5113	0.5234	Ω_5

جدول ۳- فرکانس طبیعی بی‌بعد به دست آمده از مطالعه حاضر و مرجع [۱۵]

L/h=100			L/h=50			L/h=20				
درصد اختلاف	مطالعه حاضر	مرجع [۱۵]	درصد اختلاف	مطالعه حاضر	مرجع [۱۵]	درصد اختلاف	مطالعه حاضر	مرجع [۱۵]		شرایط تکیه گاهی
0.276	4.0446	4.0558	-0.003	4.0556	4.0555	0.225	4.0447	4.0537	Ω_1	ساده- ساده
0.171	8.0891	8.103	-0.128	8.1114	8.101	-0.029	8.0894	8.087	Ω_2	
0.125	12.1337	12.149	-0.203	12.168	12.143	-0.334	12.1365	12.096	Ω_3	
0.005	6.0903	6.0907	-0.246	6.1052	6.0902	0.312	6.0680	6.087	Ω_1	درگیر- درگیر
0.057	10.1102	10.116	-0.165	10.1307	10.114	0.530	10.0394	10.093	Ω_2	
0.086	14.1537	14.166	-0.142	14.1771	14.157	0.592	14.0125	14.096	Ω_3	



شکل ۲- نتایج مطالعه حاضر و نتایج موجود در مراجع [۱۶] و [۱۷]

جدول ۵ نتایج این مقایسه را برای تیری با ضریب لاغری $L/h=15$ و شرایط مرزی ساده- ساده، گیردار- آزاد و گیردار- گیردار در شاخص-های نسبت حجمی متفاوت نمایش می‌دهد. به علت بالا بودن ضریب لاغری نتایج به دست آمده از این مطالعه و آنچه که در مرجع [۱۱] آمده است به یکدیگر نزدیک هستند. بی‌بعد کردن فرکانس‌ها در این مثال طبق رابطه (۳۳) صورت گرفته است [۱۱].

۵- نتایج

در این بخش پاسخ استاتیکی و ارتعاش آزاد تیر مدرج هدفمندی با خاصیت پیزوالکتریکی بررسی می‌شود. سطح بالایی تیر از PZT-4 و سطح پایینی از $Ba_2NaNb_5O_{15}$ ساخته شده است. تاثیر شرایط مرزی، ضریب لاغری و شاخص نسبت حجمی بر روی پاسخ استاتیکی و ارتعاش آزاد بررسی خواهد شد.

پاسخ استاتیکی تیر در مقابل بار عرضی q و شرایط تکیه‌گاهی گوناگون برای ضرایب لاغری و شاخص نسبت حجمی‌های متفاوت بررسی شده است. در شکل ۳، ۴ و ۵ به ترتیب تاثیر ضریب لاغری در شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده، گیردار-گیردار و گیردار-آزاد و شاخص نسبت حجمی معین بر جابه‌جایی تار میانی تیر بررسی شده است ($q = 1.0 \cdot kN \cdot m^{-2}$) که شاخص نسبت حجمی $n=1$ می‌باشد. در این سه شکل همانطور که انتظار می‌رود با افزایش ضریب لاغری تیر جابجایی تار میانی تیر بیشتر می‌شود.

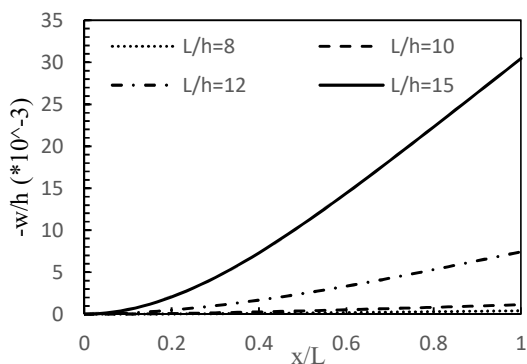
جدول ۴- مشخصات فیزیکی مواد پیزوالکتریک

PZT-4	PZT5-H	$BaTiO_3$	$Ba_2NaNb_5O_{15}$	خواص فیزیکی
139	127.20	1660	239	$c_{11}(GPa)$
77.8	80.21	770	104	$c_{12}(GPa)$
139	127.20	780	50	$c_{22}(GPa)$
74.3	84.67	1660	247	$c_{13}(GPa)$
74.3	84.67	780	52	$c_{23}(GPa)$
115	117.44	1620	137	$c_{33}(GPa)$
25.6	22.99	430	65	$c_{44}(GPa)$
25.6	22.99	430	66	$c_{55}(GPa)$
30.6	23.47	445	76	$c_{66}(GPa)$
12.7	17.03	11.6	2.8	$e_{15}(cm^{-2})$
12.7	17.03	11.6	3.4	$e_{24}(cm^{-2})$
-5.2	-6.62	-4.4	-0.4	$e_{31}(cm^{-2})$
-5.2	-6.62	-4.4	-0.3	$e_{32}(cm^{-2})$
15.1	23.24	18.6	4.3	$e_{33}(cm^{-2})$
1.306	2.771	0.112	0.196	$k_{11}(10^{-8}Fm^{-1})$
1.306	2.771	0.112	0.201	$k_{22}(10^{-8}Fm^{-1})$
1.151	3.010	0.136	0.28	$k_{33}(10^{-8}Fm^{-1})$
7500	7500	5700	5300	$\rho(Kg/m^3)$

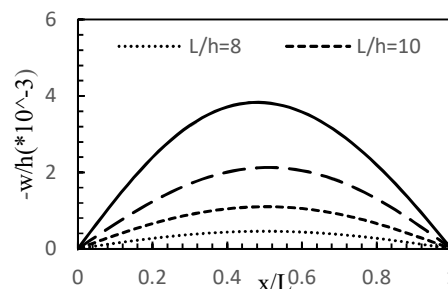
مثال ۳: در این مثال سه فرکانس طبیعی اول بدون بعد تیر مدرج هدفمندی با خاصیت پیزوالکتریکی با مشخصات مشابه مثال ۲ بررسی شده است و نتایج آن با بررسی صورت گرفته در مرجع [۱۱] مقایسه شده است.

جدول ۵- فرکانس طبیعی بی‌بعد به دست آمده از مطالعه حاضر و مرجع [۱۱]

n=10			n=1			n=0.1			n=0			شرایط تکیه گاهی
درصد اختلاف	مطالعه حاضر	مرجع	درصد اختلاف	مطالعه حاضر	مرجع	درصد اختلاف	مطالعه حاضر	مرجع	درصد اختلاف	مطالعه حاضر	مرجع [11]	
0.48	0.0111	0.0112	-1.48	0.0119	0.0117	-1.238	0.0125	0.0124	-0.74	0.0127	0.0126	Ω_1
0.08	0.0437	0.0438	-1.66	0.0465	0.0485	-1.813	0.0492	0.0483	-1.45	0.0497	0.049	Ω_2
-0.47	0.0956	0.0952	-2.1	0.1016	0.0995	-2.416	0.1017	0.1046	-2.04	0.1082	0.1061	Ω_3
0.41	0.0039	0.004	-1.03	0.0042	0.0042	-2.008	0.0045	0.0044	-0.86	0.0045	0.0045	Ω_1
0.34	0.0245	0.0246	-1.5	0.0261	0.0257	-1.709	0.0276	0.0271	-1.33	0.0279	0.0275	Ω_2
-0.14	0.0668	0.0667	-1.80	0.0709	0.0697	-2.138	0.0749	0.0733	-1.81	0.0757	0.0744	Ω_3
0.07	0.0247	0.0248	-1.76	0.0263	0.0259	-1.925	0.0278	0.0273	-1.54	0.0281	0.0277	Ω_1
-0.41	0.0662	0.0659	-2.07	0.0702	0.0688	-2.355	0.074	0.0723	-2.01	0.0748	0.0733	Ω_2
-1.02	0.1248	0.1235	-2.55	0.1321	0.1288	-2.813	0.1389	0.1351	-2.48	0.1403	0.1369	Ω_3



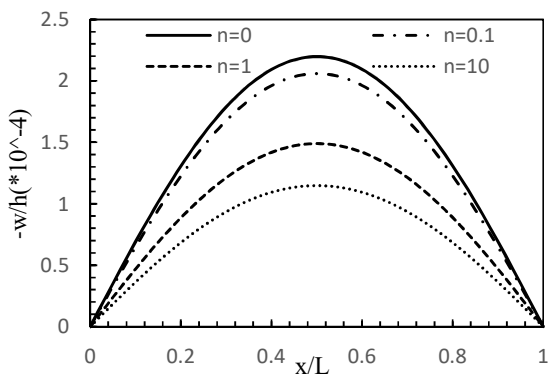
شکل ۵- تاثیر ضریب لاغری بر خمش تیر با شرایط مرزی گیردار- آزاد



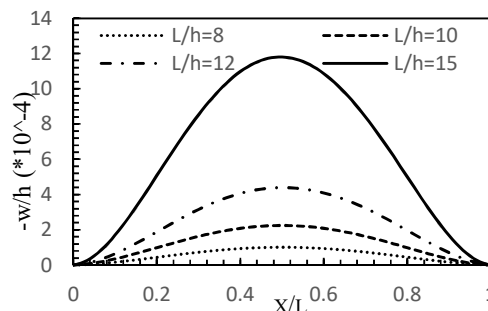
شکل ۳- تاثیر ضریب لاغری بر خمش تیر با شرایط مرزی ساده- ساده

در شکل های ۶، ۷ و ۸ که اثرات شاخص های نسبت حجمی مختلف

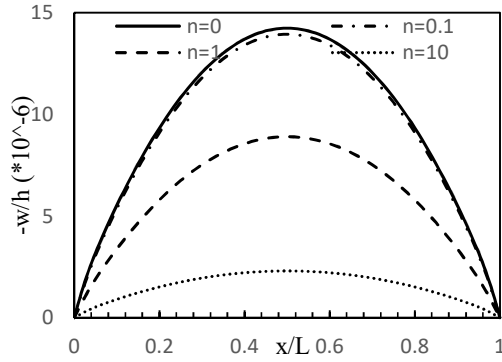
را بر جابجایی استاتیکی تیر مورد مطالعه قرار می‌گیرد که ضریب لاغری $L/h=6$ فرض شده است. در این سه شکل نیز با افزایش شاخص نسبت حجمی که به معنی افزایش نسبت حجمی $Ba_2NaNb_5O_{15}$ می‌باشد، صلبیت تیر افزایش یافته و جابه‌جایی تار میانی تیر کمتر می‌شود.



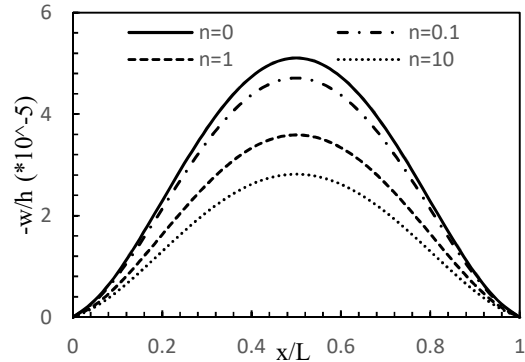
شکل ۶- تاثیر شاخص نسبت حجمی بر خمش تیر با شرایط مرزی ساده- ساده



شکل ۴- تاثیر ضریب لاغری بر خمش تیر با شرایط مرزی گیردار- گیردار



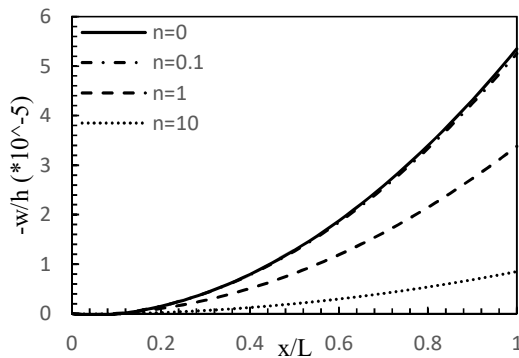
شکل ۹- تاثیر شاخص نسبت حجمی بر خمش عملگر با شرایط مرزی ساده- ساده



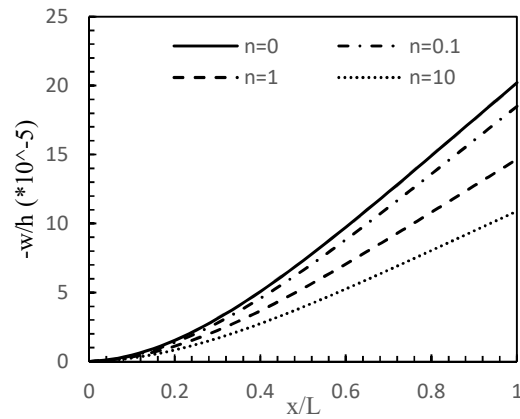
شکل ۷- تاثیر شاخص نسبت حجمی بر خمش تیر با شرایط مرزی گیردار- گیردار

جدول ۶ و جدول ۷ به ترتیب فرکانس‌های طبیعی بدون بعد تیر مدرج هدفمند متشکل از PZT-4 و PZT-5H (تیر ۱) و تیر مدرج هدفمند دیگری متشکل از $BaTiO_3$ و $Ba_2NaNb_5O_{15}$ (تیر ۲) را در ضریب لاغری $L/h=10$ شاخص‌های نسبت حجمی متفاوت و شرایط مرزی مختلف نمایش می‌دهد.

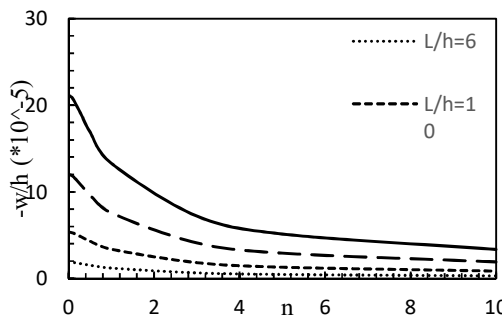
در شکل ۹ و شکل ۱۰ جابجایی تار میانی تیر با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی $60V$ بر سطح بالایی و پایینی تیر مشاهده می‌شود.



شکل ۱۰- تاثیر شاخص نسبت حجمی بر خمش عملگر با شرایط مرزی گیردار- آزاد



شکل ۸- تاثیر شاخص نسبت حجمی بر خمش تیر با شرایط مرزی گیردار- آزاد



شکل ۱۱- تاثیر شاخص نسبت حجمی و ضریب لاغری بر جابه‌جایی لبه عملگر با شرایط مرزی گیردار- آزاد

برای تیری با ضریب لاغری $L/h=20$ تاثیر تغییرات شاخص نسبت حجمی بر جابه‌جایی تار میانی بررسی شده است. با توجه به رابطه (۲۰) ماتریس الکترومکانیکی در تعیین میزان جابه‌جایی تیر اثر گذار است. در شکل ۹ و شکل ۱۰ مشاهده می‌شود با افزایش شاخص نسبت حجمی و بیشتر شدن نسبت حجمی $Ba_2NaNb_5O_{15}$ جابه‌جایی تیر در حالت عملگری کمتر می‌شود.

در شکل ۱۱ تاثیر ضریب لاغری و شاخص نسبت حجمی به صورت همزمان بر جابه‌جایی لبه تیری که به بالا و پایین آن اختلاف پتانسیل $60V$ شده است در حالت عملگری بررسی شده است. با افزایش ضریب لاغری و کاهش شاخص نسبت حجمی تیر جابه‌جایی لبه تیر افزایش می‌یابد که این روند تغییرات با معادلات حاکم بر تیر و نتایج به دست آمده از شکل‌های قبلی انطباق دارد.

جدول ۶- پنج فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده تیر ۱ در شاخص‌های نسبی مختلف

n=10	n=5	n=0.5	n=0	شرایط تکیه گاهی	
0.0243	0.0245	0.0263	0.0278	Ω_1	ساده- ساده
0.0941	0.0951	0.1021	0.01080	Ω_2	
0.2024	0.2043	0.2186	0.2319	Ω_3	
0.2646	0.2679	0.2900	0.3078	Ω_4	
0.3406	0.3440	0.3664	0.3896	Ω_5	
0.0087	0.0088	0.0094	0.0099	Ω_1	گیردار- آزاد
0.0529	0.0535	0.0574	0.0607	Ω_2	
0.1326	0.1343	0.1454	0.1541	Ω_3	
0.142	0.1434	0.1534	0.1626	Ω_4	
0.2632	0.2656	0.2832	0.3009	Ω_5	
0.0536	0.0542	0.0581	0.0614	Ω_1	گیردار- گیردار
0.141	0.1422	0.1518	0.1611	Ω_2	
0.2608	0.2630	0.2796	0.2976	Ω_3	
0.2657	0.2690	0.2911	0.3083	Ω_4	
0.4048	0.4079	0.4322	0.4612	Ω_5	

جدول ۷- پنج فرکانس طبیعی اول بی‌بعد شده تیر ۲ در شاخص‌های نسبی مختلف

n=10	n=5	n=0.5	n=0	شرایط تکیه گاهی	
0.0132	0.0143	0.0233	0.0275	Ω_1	ساده- ساده
0.0507	0.0549	0.0899	0.1063	Ω_2	
0.1075	0.1165	0.1913	0.2269	Ω_3	
0.1525	0.1718	0.2625	0.3036	Ω_4	
0.1782	0.1934	0.3183	0.3789	Ω_5	
0.0047	0.0051	0.0084	0.0099	Ω_1	گیردار- آزاد
0.0285	0.0308	0.0505	0.0598	Ω_2	
0.075	0.0814	0.1312	0.1520	Ω_3	
0.0767	0.0864	0.1344	0.1593	Ω_4	
0.1376	0.1494	0.246	0.2930	Ω_5	
0.0287	0.0312	0.0510	0.0604	Ω_1	گیردار- گیردار
0.0742	0.0806	0.1323	0.1572	Ω_2	
0.1352	0.1471	0.2419	0.2882	Ω_3	
0.1526	0.1719	0.2631	0.3043	Ω_4	
0.2068	0.2255	0.3714	0.4436	Ω_5	

همان‌طور که انتظار می‌رفت فرکانس‌های طبیعی در شرایط مرزی گیردار- گیردار از بقیه شرایط بزرگتر بوده و شرط مرزی گیردار- آزاد کوچکترین فرکانس طبیعی را دارد. هم‌چنین با افزایش شاخص نسبت حجمی در هر دو تیر، فرکانس طبیعی بی‌بعد کاهش یافته‌است. در جدول ۸ تاثیر ضریب لاغری روی تیر ۱ با شاخص نسبت حجمی $n=1$ بررسی شده‌است. همان‌طور که انتظار میرفت با افزایش ضریب لاغری تیر فرکانس طبیعی کاهش یافته‌است.

در جدول ۹ فرکانس‌های طبیعی تیر ۱ در مدار باز و بسته باز و بسته بررسی شده‌است. قرار گرفتن در مدار بسته و اعمال پتانسیل بر تار بالایی و پایینی تیر باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی شده‌است. مقدار پتانسیل اعمال شده تغییری در فرکانس طبیعی نداده است و تنها بسته بودن مدار باعث تغییر فرکانس طبیعی شده‌است. هم‌چنین با افزایش شاخص نسبت حجمی میزان اختلاف بین فرکانس‌های طبیعی مدار باز و مدار بسته کاهش یافته‌است. بیشترین اختلاف برای شرایط مرزی ساده- ساده و گیردار- آزاد به ترتیب در مد چهارم و مد سوم اتفاق افتاده‌است.

جدول ۸- بررسی تاثیر ضریب لاغری بر فرکانس طبیعی تیر ۱

L/h=25	L/h=12	L/h=7	L/h=4	شرایط تکیه گاهی	
0.0043	0.0180	0.0517	0.1513	Ω_1	ساده- ساده
0.0170	0.0702	0.1944	0.5206	Ω_2	
0.0379	0.1525	0.4019	0.7046	Ω_3	
0.0666	0.2356	0.4036	0.9920	Ω_4	
0.1026	0.2595	0.6508	1.3941	Ω_5	
0.0015	0.0064	0.0187	0.0560	Ω_1	گیردار- آزاد
0.0095	0.0394	0.1100	0.2970	Ω_2	
0.0264	0.1086	0.2024	0.3548	Ω_3	
0.0511	0.1180	0.2834	0.7016	Ω_4	
0.0566	0.2003	0.5040	1.0571	Ω_5	
0.0096	0.0399	0.1109	0.2965	Ω_1	گیردار- گیردار
0.0263	0.1060	0.2783	0.6740	Ω_2	
0.0510	0.1985	0.4054	0.7108	Ω_3	
0.0831	0.2362	0.4940	1.1189	Ω_4	
0.1133	0.3116	0.7392	1.4075	Ω_5	

جدول ۹- فرکانس‌های طبیعی تیر ۱ در مدار باز و مدار بسته

اختلاف (%)			مدار بسته			مدار باز				
n=10	n=1	n=0	n=10	n=1	n=0	n=10	n=1	n=0		شرایط تکیه گاهی
0.2003	0.3696	0.6088	0.0375	0.0397	0.0429	0.0376	0.0399	0.0432	Ω_1	ساده- ساده
0.6744	1.0779	2.0174	0.1426	0.1501	0.1615	0.1436	0.1518	0.1648	Ω_2	
1.2010	1.8568	3.5260	0.2991	0.3126	0.3344	0.3027	0.3185	0.3466	Ω_3	
4.4493	4.4721	6.0166	0.3159	0.3374	0.3615	0.3306	0.3532	0.3847	Ω_4	
1.6444	2.5133	4.7591	0.4910	0.5099	0.5433	0.4992	0.5231	0.5704	Ω_5	
0.1686	0.2908	0.3649	0.0135	0.0143	0.0155	0.0135	0.0144	0.0155	Ω_1	گیردار- آزاد
0.7103	1.0768	1.8790	0.0805	0.0847	0.0912	0.0810	0.0857	0.0929	Ω_2	
4.2109	4.2556	5.7648	0.1589	0.1695	0.1815	0.1658	0.1771	0.1926	Ω_3	
1.2654	1.8770	3.3857	0.2103	0.2200	0.2355	0.2130	0.2242	0.2437	Ω_4	
1.7533	2.5764	4.6739	0.3796	0.3946	0.4207	0.3864	0.4050	0.4431	Ω_5	

۶- نتیجه گیری

در این مقاله تلاش شده است با استفاده از نظریه الاستیسیته دو بعدی و بهره بردن از روش اجزاء محدود، پاسخ استاتیکی و ارتعاش آزاد تیر مدرج هدفمند با خاصیت پیزوالکتریکی برای شرایط مرزی الکتریکی و مکانیکی مختلف بررسی شود. عوامل موثر بر جابه‌جایی بی بعد تیر مدرج هدفمند پیزوالکتریک ابتدا تحت بار مکانیکی بررسی شده‌اند؛ سپس حالت عملگری این تیر با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی به سطوح بالا و پایین تیر بررسی شده‌است. با توجه به مشخصات الکترومکانیکی پیزوالکتریک‌ها که ارایه شده‌است، تغییر شاخص نسبت حجمی باعث تغییر پاسخ عملگری این می شود. از آن‌جا که خواص الکترومکانیکی سطح بالایی تیر قوی‌تر می‌باشد، با افزایش شاخص نسبت حجمی پاسخ عملگری محدودتر می‌گردد. هم‌چنین افزایش ضریب لاغری تیر نیز موجب افزایش دامنه پاسخ استاتیکی در حالت عملگری خواهد شد. هم‌چنین افزایش شاخص نسبت حجمی موجب کاهش فرکانس‌های طبیعی تیرهای معرفی شده گردیده است. فرکانس‌های طبیعی در حالت مدار باز و مدار بسته نشان می‌دهد که اعمال پتانسیل به سطح بالایی و پایینی تیر موجب کاهش فرکانس طبیعی تا ۷٪ می‌شود و اختلاف بین فرکانس‌های مدار باز و مدار بسته با افزایش شاخص نسبت حجمی کاهش یافته است.

مزیت استفاده از نظریه الاستیسیته دو بعدی حفظ دقت پاسخ در تمام ضرایب لاغری می‌باشد. استفاده از نظریه های تیر جهت ساده سازی معادلات حاکم می‌باشد ولی در ضرایب لاغری پایین دقت پاسخ را کاهش می‌دهند. به همین منظور در این شبیه‌سازی مستقیماً از نظریه الاستیسیته دوبعدی استفاده شده‌است.

۷- مراجع

- [1] Li Y S., Feng W J and Cai Z Y., Bending and free vibration of functionally graded piezoelectric beam based on modified strain gradient theory. *Composite Structures*, Vol 115, pp. 41- 50, 2014.
- [2] Lezgy-Nazargaha M., Vidal P and Polit O., An efficient finite element model for static and dynamic analyses of functionally graded piezoelectric beams. *Composite Structures*, Vol 104, pp. 71- 84, 2013.
- [3] Kruusing A., Analytical and Optimization of Loaded Cantilever Beam Microactuators. *Smart Materials and Structures*, Vol 9, pp. 186- 196, 2000.
- [4] Hauke T., Kouvatov A., Steinhausen R., Seifert W and Beige. Bending Behavior of Functionally Gradient Materials. *Ferroelectrics*, Vol 238, pp.195- 202, 2000.
- [5] Lee H J., Layerwise Laminate Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Bimorph Beams. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol 16, pp. 365- 371, 2005.
- [6] Hsu M H., Electromechanical Analysis of Piezoelectric Laminated Composite Beams. *Journal of Marine Science Technology*, Vol 13, pp 148- 155, 2005.
- [7] Liu T T and Shi Z F., Bending Behavior of Functionally Gradient Piezoelectric Cantilever. *Ferroelectrics*, Vol 308, pp. 43- 51, 2004.
- [8] Shi Z F, Bending Behavior of Piezoelectric Curved Actuator. *Smart Materials and Structures*, Vol 14, pp. 835- 842, 2005.
- [9] Xiang H J and Shi Z F., Static Analysis for Functionally Graded Piezoelectric Actuators or Sensors under a Combined Electro-thermal Load. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol 28, pp. 338 -346, 2009.
- [10] Huang D J., Ding H J and Chen W Q., Static Analysis of Anisotropic Functionally Graded Magneto-Electro-Elastic Beams Subjected to Arbitrary Loading. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol 29, pp. 356- 369, 2010.
- [11] Doroushi A., Eslami M. R and Komeili A., Vibration analysis and transient response of an FGPM beam under thermo-electro-mechanical loads using higher-order shear deformation theory. *J Intell Mater Syst Struct*, Vol 22, p231-43, 2011.
- [12] Komijani M, Reddy J. N, Eslami M. R., Nonlinear analysis of microstructure-dependent functionally graded

- piezoelectric material actuators. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, Vol 63, pp. 214- 227, 2014.
- [13] S.Abrate., *Impact on composite structures*. Cambridge university press, USA, 1998.
- [14] Reddy J. N., *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill Education, USA, 2006.
- [15] Alshorbagy Amal E., Eltaher M A and Mahmoud F F., Free vibration characteristics of a functionally graded beam by finite element method. *Applied Mathematical Modelling*, Vol 35, pp. 412- 425, 2011.
- [16] Yang J and Xiang H J., Thermo-electro-mechanical characteristics of functionally graded piezoelectric actuators. *Smart Materials and Structures*, Vol 16, pp. 784- 797, 2007.
- [17] Komeili A., Akbarzadeh A H and Doroushi A., and Eslami M. R. Static Analysis of Functionally Graded Piezoelectric Beams under Thermo-Electro-Mechanical Loads. *Advances in Mechanical Engineering*, 2011.
- [18] Li Yang., shi zhifei. Free vibration of a functionally graded piezoelectric beam via state-space based differential quadrature. *Composite Structures*, Vol 87, pp.257- 264, 2009.
- [19] Rahmani O., Pedram O. Analysis and modeling the size effect on vibration of functionally graded nanobeams based on nonlocal Timoshenko beam theory. *International Journal of Engineering Science*, Vol 77, pp.55- 70, 2014.
- [20] Y.S. Li., Pan E. Static bending and free vibration of a functionally graded piezoelectric microplate based on the modified couple-stress theory. *International Journal of Engineering Science*, Vol 97, pp.40- 59, 2015.
- Lin C., Muliana A. Nonlinear Electro-mechanical Responses of Functionally Graded Piezoelectric Beams. *Composites: Part B*, 2015.