مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۸۴، جلد ۴۸، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۷، صفحه ۸۷-۹۵

تحلیل ارتعاش آزاد نانوتیرتیموشنکو باریک شونده دورانی بر روی بستر الاستیک به کمک روش مربع‌سازی دیفرانسیلی

فرید داودی دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

علیرضا آریایی* استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

چکیده

در این مقاله ارتعاش آزاد نانو تیر دوار با سطح مقطع متغیر بر روی بستر الاستیک به روش مربع‌سازی دیفرانسیلی مورد بررسی قرار می‌گیرد. به منظور افزایش دقت، از مدل تیر تیموشنکو استفاده می‌شود که عبارات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی را در نظر می‌گیرد. ابتدا نظریه الاستیسیته غیرمحلی ارینگن به صورت اجمالی بررسی و سپس معادلات نانو تیر تیموشنکو با توجه به تأثیرات مقیاس نانو، سطح مقطع متغیر و دورانی بودن نانو تیر استخراج می‌شود. پس از بی‌بعد سازی معادلات با استفاده از پارامترهای بی‌بعد معرفی شده، معادلات به فرم مورد نظر در روش مربع‌سازی دیفرانسیلی بازنویسی و با بهره‌گیری از روش ذکر شده حل می‌شود و فرکانس‌های طبیعی استخراج می‌گردند. برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی، حالت‌های مختلفی در نظر گرفته می‌شود که در آن تأثیر پارامتر نانو، سرعت دورانی، شعاع توپی، ضریب تغییر سطح مقطع و سختی بستر الاستیک مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای اعتبارسنجی نتایج، با صرف‌نظر از بعضی عبارات، مسأله مورد پژوهش با نتایج مسائل ساده‌تر ارائه شده در سایر مقالات مقایسه می‌شود که در هر مورد تطابق قابل قبولی مشاهده می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: نانوتیر، نظریه تیموشنکو، روش مربع‌سازی دیفرانسیلی، تیردوار، بستر الاستیک.

Free Vibration Analysis of a Rotating Tapered Timoshenko Nano-Beam on Elastic Foundation using Differential Quadrature Method

F. Davoudi Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

A. Ariaei Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

Abstract

The free vibration of a rotating Timoshenko nanobeam with a variable cross section on elastic foundation is investigated using the differential quadrature method. For more accuracy, the Timoshenko beam theory is applied where the effects of the shear deformation and rotary inertia are considered. First, the Eringen nonlocal elasticity theory is investigated briefly and the governing differential equations of motion of a Timoshenko nanobeam are derived considering the nonlocal scale parameter, variable cross section and rotation of the nanobeam. Then, by applying the nondimensional parameters, the equations are obtained in the nondimensional form and then, they are rewritten in the differential quadrature form. Finally, by solving these equations, the natural frequencies of the system are obtained. A number of parametric studies are conducted to assess the effects of the nonlocal scaling parameter, rotational speed, hub radius, and the stiffness coefficients of the elastic foundation on the natural frequencies of the system. By neglecting some parameters to reach a simpler model, the results are validated against those reported in the literature where a reasonably good agreement is observed.

Keywords: Nano-beams, Timoshenko theory, Differential quadrature method, Rotating beams, Elastic foundation.

۱- مقدمه

باتوجه به سرعت پیشرفت علم و افزایش نیاز بشر به ابزارها، دستگاه‌ها و ماشین آلات، این انتظار می‌رود که آن‌ها روز به روز سبک‌تر و کوچک‌تر شود و در عین حال کارایی آن‌ها افزایش یابد. از این‌رو استفاده از قطعاتی در ابعاد نانو در کاربردهای مختلف به ویژه درصنعت نانو الکترومکانیک مطرح می‌شود که مستلزم انجام محاسباتی برای فرمول‌بندی و علمی کردن این بهره‌وری است. از آن‌جا که این قطعات اکثراً به صورت دینامیکی یا به طورکلی حرکتی به کار برده می‌شوند لازم است برای طراحی هرچه بهتر به خصوصیات و ویژگی‌های ارتعاشی این قطعات دست یافت.

در چند سال اخیر به دلایل ذکر شده مدل کردن ساختارهای نانو محققین بسیاری را به خود جذب کرده است. برخی از زمینه‌های مورد پژوهش، زمینه‌های مکانیک و مکاترونیک است [۱] و از کاربردهای آن می‌توان موتور نانوربات‌ها و نانوتوربین‌ها را نام برد [۲و۳]. این‌گونه مسائل به طور گسترده‌ای در علوم دیگر نیز همچون شیمی، الکترونیک و مسائل حرارتی به چشم می‌خورند[۴].

دراین زمینه به‌دلیل وجود اثرات مقیاس کوچک، علم مکانیک محیط‌های پیوسته کلاسیک نمی‌تواند کاربردی داشته باشد. با وجود برخی تلاش‌های پراکنده با استفاده از معادلات محیط پیوسته و الاستیسیته با مشتقات مرتبه بالاتر در قرن ۱۹ و در نیمه اول قرن ۲۰ اثرات نانو ساختارها تا آن زمان به‌دست نیامد. از سال ۱۹۶۰ یک اتفاق بزرگ رخ داد و آن آثار انتشار یافته بسیاری در زمینه میکروساختارها بود که زمینه‌ساز مطالعات بر روی نانوساختارها گردید [۵ الی ۱۱]. پس از آن ارینگن (Eringen) یک نظریه ساده به نام شیب تنش به‌دست آورد [۱۲]. در اوایل سال ۱۹۹۰، آیفانتیس (Aifantis) و همکارانش با استفاده

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: ariaei@eng.ui.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۹/۰۳
تاریخ پذیرش: ۹۶/۰۲/۱۸

از لاپلاس روابط ساختاری الاستیک خطی را برای کرنش گسترش دادند [۱۳و۱۴]. اسکس و گیتمن (Askes & Gitman) نشان دادند که نظریه آنها با نظریه ارینگن و آیفانتیس (Eringen & Aifantes) یک نظریه واحد است [۱۵]. تکامل تاریخی نظریه الاستیسیته غیرمحلی و همچنین استخراج معادلات آن در یک مقاله توسط اسکس و آیفانتیس (Askes & Aifantis) گردآوری شده است [۱۶]. ارینگن و همکارانش نظریه مکانیک محیط‌های پیوسته غیرمحلی را بیان کردند [۱۷و۱۸]. این نظریه در میان نظریه‌های محیط‌های پیوسته وابسته به اندازه به طور گسترده درتحلیل بسیاری از مسائل از جمله در انتشار امواج، جابه‌جایی و نقاط تکین ترک مورد استفاده قرار گرفته است [۱۹].

امروزه تلاش زیادی برای تجزیه و تحلیل ارتعاش نانوتیر و نانو تیوب دوار با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلی ارینگن صورت گرفته است. پرادهان و مورمو (Pradhan & Murmu) با به کار بردن یک مدل تیر غیرمحلی توانستند ویژگی‌های ارتعاش خمشی نانوتیر یکنواخت دوار را به‌دست آورند. آن‌ها فرکانس طبیعی نانوتیر غیرمحلی را با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی (DQM) تعیین و اثرات مقیاس کوچک، سرعت زاویه‌ای و شعاع توپی را بر ویژگی‌های ارتعاشی نانوتیر بررسی کردند [۲۰]. مورمو و ادهیکاری (Murmu & Adhikari) به بررسی ویژگی‌های ارتعاشی مسئله مشابهی پرداختند، با این تفاوت که دیواره کربنی برای آن در نظر گرفته شده است [۲۱]. نارندار و گوپالاکریشنان (Narendar & Gopalakrishnan) رفتار انتشار امواج را در تیرهای اویلر برنولی به عنوان مدل نانو لوله‌های یکنواخت دوار مورد بررسی قرار دادند [۲۲]. لویا و رویز (Loya & Ruiz) به بررسی ویژگی‌های ارتعاشی خمشی یک نانوتیر دوار غیریکنواخت پرداختند و نشان دادند در مرجع [۲۱] شرایط مرزی مربوط به سرآزاد نانوتیر به درستی انتخاب نشده است [۲۳].

در مطالعاتی که در چند سال اخیر بر روی نانو تیرها انجام شده است، به صورت عمده از نظریه اویلر برنولی در استخراج معادلات استفاده گردیده است. تفاوت مطالعه حاضر با دیگر کارهای مشابه استفاده از نظریه تیموشنکو و دورانی بودن تیر به صورت همزمان است. از دیگر وجوه تمایز مطالعه حاضر، می‌توان به وجود سطح مقطع متغیر و قرار گرفتن نانوتیر بر روی بستر الاستیک اشاره نمود.

۲-تئوری الاستیسیته غیرمحلی ارینگن

نظریه غیر محلی در محیط‌های پیوسته در مواردی که نیروهای بین ملکولی اهمیت می‌یابند و یا به عبارت دیگر رفتار یک نقطه از ماده تحت تأثیر حالت تمامی نقاط آن قرار می‌گیرد کاربرد دارد. مسائل زیادی در حوزه فیزیک و مکانیک محیط‌های پیوسته وجود دارند که با استفاده از نظریه کلاسیک قابل تحلیل نیستند که از آن جمله می‌توان به شکست قطعات جامد و میدان تنش در نابجایی‌ها در نوک ترک اشاره کرد. همچنین در نانو ساختارها، فرضیات پیوستگی محیط مادی اعتبار ندارد. بنابراین توجیه استفاده از نظریه‌های مبتنی بر مکانیک محیط پیوسته‌ی کلاسیک برای مدل‌سازی نانو ساختارها که بر فرض پیوستگی استوار است، زیر سؤال می‌رود. به عبارت دیگر باید به جای محیط پیوسته کلاسیک از نظریه‌های محیط پیوسته غیرکلاسیک بهره برد که می‌توانند تأثیرات ابعاد کوچک و ناپیوستگی ذاتی ریز ساختارها را در نظر بگیرند.

در الاستیسیته کلاسیک، تانسور تنش σ در نقطه مادی x، تابعی از تانسور کرنش ε در همان نقطه مادی است. این در حالی است که در نظریه الاستیسیته غیرمحلی ارینگن، تانسور تنش σ در نقطه x از محیط مادی Ω، توسط یک معادله انتگرالی به تانسور کرنش ε تمام محیط مادی بستگی دارد. به عبارت دیگر معادله ساختاری الاستیسیته غیرموضعی به صورت انتگرالی زیر بیان می‌شود [۲۴]:

$$\sigma(x) = \iiint_{\Omega} \alpha(|x' - x|, \tau) C(x') d(x') \tag{۱}$$

در رابطه بالا $\alpha(|\acute{x} - x|, \tau)$ تابعی است که به مدول غیر محلی مشهور است و در واقع نوعی تابع وزنی برای معادله انتگرالی محسوب می‌شود. $|\acute{x} - x|$ فاصله نقطه محلی x و نقطه غیر محلی $\acute{x}$ و C تانسور مرتبه چهار الاستیسیته می‌باشد.

τ پارامتری است که با نسبت طول مشخصه‌ی داخلی نانو ساختار a و طول مشخصه‌ی خارجی L تعیین می‌شود و میزان اهمیت مقیاس‌های کوچک را در معادله ساختاری انتگرالی نظریه الاستیسیته غیرمحلی مشخص می‌کند. τ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau = \frac{e_0 a}{L} = \frac{\mu}{L} \tag{۲}$$

در رابطه (۲)، e_0 یک پارامتر مادی است که با تطابق نظریه الاستیسیته غیرمحلی با نتایج آزمایش یا شبیه سازی تعیین می‌شود و پارامتر $\mu = e_0 a$ به پارامتر ابعاد کوچک یا پارامتر غیر محلی مشهور است.

در معادله انتگرالی ساختاری وقتی τ به سمت صفر میل کند اثر انتگرال و تابعیت غیر محلی بودن تنش و کرنش از بین می‌رود و معادله به رابطه ساختاری کلاسیک $\sigma = C\,\varepsilon$ نزدیک می‌شود. بنابراین مدول غیر محلی $\alpha(|\acute{x} - x|, \tau)$ باید به‌گونه‌ای باشد که با به سمت صفر میل کردن τ، به دلتای کرونیکر میل کند؛ به عبارت دیگر:

$$\lim_{\tau \to 0} \alpha(|x' - x|, \tau) = \delta(|x' - x|) \tag{۳}$$

همچنین تابع α باید حداکثر مقدار خود را در نقطه‌ی محلی x اختیار کند. با تعریف مدول غیرمحلی مناسب که در تمام شرایط لازم صدق کند، می‌توان فرم دیفرانسیلی معادله ساختاری الاستیسیته غیرمحلی را از شکل انتگرالی آن به‌دست آورد:

$$\left(1 - \mu^2 \nabla^2\right)\sigma = C$$

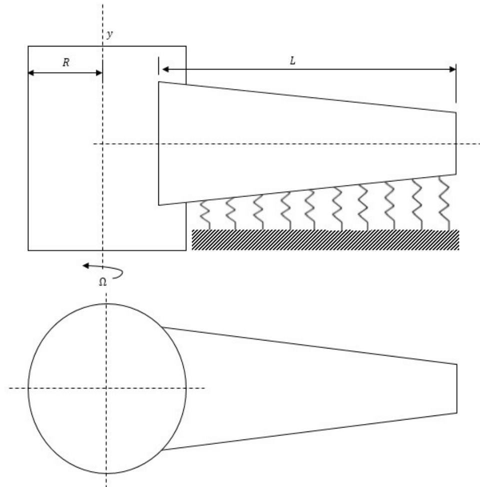
در رابطه بیان شده ∇^2 اپراتور لاپلاس است. بدین ترتیب میدان تنش غیرمحلی برحسب کرنش‌ها به‌دست می‌آید.

۳-معادلات حاکم بر نانو تیر تیموشنکو دوار با سطح مقطع متغیر بر روی بستر الاستیک

همان‌گونه که در شکل ۱ مشاهده می‌شود یک نانوتیر به طول L در نقطه O به یک توپی صلب به شعاع R متصل شده است. انتهای دیگر نانوتیر آزاد و توپی مرکزی با سرعت دورانی Ω درحال چرخش است. دراین بخش با استفاده از نظریه الاستیسیته غیرمحلی و نظریه تیر تیموشنکو معادلات حاکم بر نانوتیر تیموشنکو دوار با سطح مقطع متغیر بر روی بستر الاستیک بیان می‌شود. معادلات نهایی نانوتیر تیموشنکو دوار بر روی بستر الاستیک را می‌توان مطابق روابط زیر نوشت:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}(T(x)\frac{\partial w}{\partial x})-K\,w=-\rho A(x)\omega^2 w \quad (۵)$$

$$\rho I(x)\Omega^2\Phi+\frac{\partial M}{\partial x}+Q=-\rho I(x)\omega^2\Phi \quad (۶)$$



شکل ۱- نانو تیر تیموشنکو دوار با سطح مقطع متغیر بر روی بستر الاستیک

در روابط فوق، w جابجایی عرضی، Φ شیب خط عمود بر مقطع نانو تیر، T نیروی مرکزگرا، K سختی بستر الاستیک، A و I به ترتیب سطح مقطع و گشتاور دوم سطح، ρ چگالی و ω فرکانس طبیعی نانو تیر است. معادلات ممان و نیروی برشی غیرمحلی برای تیر تیموشنکوی دوار طبق نظریه الاستیسیته غیر محلی ارینگن به صورت زیر خواهد بود:

$$M-(e_0a)^2\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}=EI(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x} \quad (۷)$$

$$Q-(e_0a)^2\frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}=GK_sA(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\Phi\right) \quad (۸)$$

که E مدول یانگ، G مدول برشی، K_s ضریب تصحیح برش و e_0a پارامتر غیر محلی است. توابع مساحت سطح مقطع و گشتاور دوم سطح برای سطح مقطع متغیر استفاده شده در مسأله با روابط زیر بیان می‌شود:

$$A(x)=A_g(1-\frac{Cx}{L}) \quad (۹)$$

$$I(x)=I_g(1-\frac{Cx}{L})^3 \quad (۱۰)$$

ضریب C در روابط فوق نرخ باریک شوندگی است. حال با مشتق‌گیری و جایگذاری روابطی که بیان شد می‌توان معادلات نانو تیر تیموشنکو دوار با سطح مقطع متغیر بر روی بستر الاستیک را استخراج کرد:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left[GK_sA(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\Phi\right)+(e_0a)^2\right.\\&\left.\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\rho A(x)\omega^2 w\right)+K\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}-\frac{\partial^3}{\partial x^3}(T(x)\frac{\partial w}{\partial x})\right]\right]\\&+\frac{\partial}{\partial x}(T(x)\frac{\partial w}{\partial x})-K\,w+\rho A(x)\omega^2 w=0\end{aligned} \quad (۱۱)$$

$$\begin{aligned}&\rho I(x)\Omega^2\Phi+\frac{\partial}{\partial x}\left(EI(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)+(e_0a)^2\\&\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(T(x)\frac{\partial w}{\partial x})-K\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho A(x)\omega^2 w\right)\right.\\&\left.-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\rho I(x)\Omega^2\Phi\right)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\rho I(x)\omega^2\Phi\right)\right]\\&+GK_sA(x)\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\Phi\right)\\&+(e_0a)^2\left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho A(x)\omega^2 w\right)+K\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}(T(x)\frac{\partial w}{\partial x})\right]\\&+\rho I(x)\omega^2\Phi=0\end{aligned} \quad (۱۲)$$

۴- روش مربع‌سازی دیفرانسیلی

در این بخش ابتدا به کمک پارامترهای بی‌بعد بیان شده در جدول ۱، معادلات حاکم بی‌بعد تعیین و سپس با استفاده از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی حل می‌شوند.

جدول ۱- پارامترهای بی‌بعد سازی

عنوان	فرم اصلی	پارامتر بی‌بعد	فرم بی‌بعد
طول	x	$\frac{x}{L}$	ξ
جابجایی عرضی	w	$\frac{w}{L}$	W
سرعت دورانی	Ω	$\frac{\rho A_g\Omega^2L^4}{EI_g}$	η^2
شعاع توپی	R	$\frac{R}{L}$	δ
فرکانس طبیعی	ω	$\frac{\rho A_g\omega^2L^4}{EI_g}$	μ^2
عبارت غیرمحلی	$(e_0a)^2$	$\left(\frac{e_0a}{L}\right)^2$	τ^2
عبارت اینرسی دورانی	r^2	$\frac{I_g}{A_gL^2}$	r^2
عبارت تغییر شکل	s^2	$\frac{EI_g}{K_sA_gGL^2}$	s^2
ضریب سختی بستر	K	$\frac{KL^4}{EI_g}$	$\overline{K}$

۴-۱-کلیات روش مربع‌سازی دیفرانسیلی

روش مربع‌سازی دیفرانسیلی، DQM، یک روش انتگرال‌گیری عددی است. ایده اساسی روش، تخمین مقدار انتگرال معین با استفاده از گروهی از گره‌ها است. در روش DQM ضرایب وزنی برای تقریب مشتقات با یک عبارت ساده جبری به‌دست می‌آیند؛ به این صورت که با داشتن مشتق مرتبه mام تابع W(x)، بازنویسی مشتق مرتبه mام به فرم DQM به صورت معادله (۱۳) خواهد بود:

$$\frac{\partial^m W\left(x_i,t\right)}{\partial x^m}=\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(m)}W\left(x_j,t\right) \tag{۱۳}$$

در معادله بالا، $C_{ij}^{(m)}$ ضرائب وزنی مشتق مرتبه mام هستند و $W(x_j,t)$ مقدار تابع در نقطه x_j می‌باشد. روابط زیر برای محاسبه ضرائب وزنی بیان می‌شود:

$$\begin{cases} C_{ii}^{(m)}=-\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}C_{ij}^{(m)} \\ i=1,2,\cdots,N\ ,\ i\neq j\ ,\ m=2,3,\cdots,N-1 \end{cases} \tag{۱۴}$$

$$\begin{cases} C_{ij}^{(1)}=\dfrac{M^{(1)}\left(x_i\right)}{\left(x_i-x_j\right)M^{(1)}\left(x_j\right)} \\ C_{ij}^{(m)}=m\left(C_{ii}^{(m-1)}-\dfrac{C_{ij}^{(m-1)}}{\left(x_j-x_i\right)}\right) \\ i,j=1,2,\cdots,N\ ,i\neq j\ ,m=2,3,\cdots,N-1 \end{cases} \tag{۱۵}$$

$M(x)$ چند جمله‌ای درون‌یاب لاگرانژ است و با روابط زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{cases} M\left(x\right)=\prod_{j=1}^{N}\left(x-x_j\right) \\ M^{(1)}\left(x\right)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(x_i-x_j\right) \end{cases} \tag{۱۶}$$

جهت اطمینان از همگرا بودن پاسخ، توزیع شبکه نقاط باید با فواصل غیریکنواخت صورت پذیرد که در این حالت، توزیع چبیشف تعریف شده است که به حالت بهینه نزدیک است.

$$\begin{cases} x_i=\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\left(\dfrac{i-1}{N-1}\pi\right)\right) \\ i=1,2,\cdots,N \end{cases} \tag{۱۷}$$

۴-۲- بازنویسی روابط به شکل DQM

در ادامه روند حل مسأله، معادلات (۱۱) و (۱۲) به صورت روابط (۱۸) و (۱۹) به فرم مربع‌سازی دیفرانسیلی بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} &-C\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(1)}W_j+C\Phi_i+\left(1-C\xi_i\right)\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(2)}W_j-\left(1-C\xi_i\right)\\ &\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(1)}\Phi_j-s^2\tau^2\mu^2\left[-2C\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(1)}W_j+(1-C\,\xi_i)\right.\\ &\left.\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(2)}W_j\right]+s^2\tau^2\bar{K}\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(2)}W_j-s^2\tau^2\eta^2\\ &\left[2C\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(1)}W_j+3\left(-1+C\delta+2C\xi_i\right)\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(2)}W_j\right.\\ &+3\left(-\delta-\xi_i+C\delta\xi_i+C\xi_i{}^2\right)\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(3)}W_j+\left(\delta+\frac{1}{2}-\frac{C}{2}\delta\right.\\ &\left.\left.-\frac{C}{3}-\delta\xi_i-\frac{\xi_i{}^2}{2}+\frac{C}{2}\delta\xi_i{}^2+\frac{C}{3}\xi_i{}^3\right)\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(4)}W_j\right]\\ &+s^2\eta^2\left(-\delta-\xi_i+C\delta\xi_i+C\xi_i{}^2\right)\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(1)}W_j\\ &+s^2\eta^2\left(\delta+\frac{1}{2}-\frac{C}{2}\delta-\frac{C}{3}-\delta\xi_i-\frac{\xi_i{}^2}{2}+\frac{C}{2}\delta\xi_i{}^2+\frac{C}{3}\xi_i{}^3\right)\\ &\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(2)}W_j-s^2\bar{K}W_i+s^2\mu^2(1-C\,\xi_i)W_i=0 \end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$\begin{aligned} &(1-C\,\xi_i)\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(1)}W_j+s^2\left(1-C\xi_i\right)^3\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(2)}W_j\\ &+\left(6s^2r^2\tau^2\eta^2\left(1-C\xi_i\right)^2-3Cs^2\left(1-C\xi_i\right)^2\right)\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(1)}\Phi_j\\ &+\left(s^2r^2\tau^2\eta^2\left(1-C\xi_i\right)^3\right)\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(2)}\Phi_j\\ &+\left(s^2r^2\eta^2\left(1-C\xi_i\right)^3-6s^2r^2\tau^2\eta^2C^2\left(1-C\xi_i\right)-\left(1-C\xi_i\right)\right)\\ &\Phi_i=\left(-6s^2r^2\tau^2\mu^2C^2\left(1-C\xi_i\right)-s^2r^2\mu^2\right.\\ &\left.\left(1-C\xi_i\right)^3\right)\Phi_i-6s^2r^2\tau^2\mu^2C\left(1-C\xi_i\right)^2\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(1)}\Phi_j\\ &+s^2r^2\tau^2\mu^2\left(1-C\xi_i\right)^3\sum_{j=1}^{N}C_{ij}^{(2)}\Phi_j \end{aligned} \tag{۱۹}$$

بردارهای جابجایی و دوران به شکل زیر تعریف می‌گردند:

$$\{W\}=\{W_1\quad W_2\quad \cdots\quad W_{N-1}\quad W_N\}^T \tag{۲۰}$$

$$\{\Phi\}=\{\Phi_1\quad \Phi_2\quad \cdots\quad \Phi_{N-1}\quad \Phi_N\}^T \tag{۲۱}$$

معادلات (۱۸) و (۱۹) را می‌توان به فرم ماتریسی نوشت:

$$\begin{aligned}&\left(-C-2Cs^2\tau^2\eta^2+s^2\eta^2\left(-\delta-\xi_i+C\delta\xi_i+C\xi_i^2\right)\right)[A]\{W\}\\&+\Big((1-C\xi_i)+s^2\tau^2\bar{K}-3s^2\tau^2\eta^2\left(-1+C\delta+2C\xi_i\right)+s^2\eta^2\\&\left(\delta+\frac{1}{2}-\frac{C}{2}\delta-\frac{C}{3}-\delta\xi_i-\frac{\xi_i^2}{2}+\frac{C}{2}\delta\xi_i^2+\frac{C}{3}\xi_i^3\right)\Big)[B]\{W\}\\&-3s^2\tau^2\eta^2\left(-\delta-\xi_i+C\delta\xi_i+C\xi_i^2\right)[C]\{W\}-s^2\tau^2\eta^2\\&\left(\delta+\frac{1}{2}-\frac{C}{2}\delta-\frac{C}{3}-\delta\xi_i-\frac{\xi_i^2}{2}+\frac{C}{2}\delta\xi_i^2+\frac{C}{3}\xi_i^3\right)[D]\{W\}\\&-s^2\bar{K}[I]\{W\}-(1-C\xi_i)[A]\{\Phi\}+C[I]\{\Phi\}=-\mu^2\\&\Big[s^2(1-C\xi_i)[I]\{W\}+2Cs^2\tau^2[A]\{W\}-s^2\tau^2\\&(1-C\xi_i)[B]\{W\}\Big]\end{aligned}\qquad(۲۲)$$

$$\begin{aligned}&(1-C\xi_i)[A]\{W\}+s^2(1-C\xi_i)^3[B]\{W\}-3s^2C\\&(1-C\xi_i)^2[A]\{\Phi\}+6s^2r^2\tau^2\eta^2(1-C\xi_i)^2[A]\{\Phi\}\\&-s^2r^2\tau^2\eta^2(1-C\xi_i)^3[B]\{\Phi\}+s^2r^2\eta^2(1-C\xi_i)^3\\&[I]\{\Phi\}+6s^2C^2r^2\tau^2\eta^2(1-C\xi_i)[I]\{\Phi\}-(1-C\xi_i)\\&[I]\{\Phi\}=-s^2\mu^2r^2(1-C\xi_i)^3[I]\{\Phi\}+6C^2\mu^2s^2r^2\tau^2\\&(1-C\xi_i)[I]\{\Phi\}-6Cs^2\mu^2r^2\tau^2(1-C\xi_i)[A]\{\Phi\}\\&+s^2r^2\mu^2\tau^2(1-C\xi_i)^3[B]\{\Phi\}\end{aligned}\qquad(۲۳)$$

با تعریف بردار $\{u\}$، روابط (۲۲) و (۲۳) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{cases}\{u\}=\{W_1\ \ldots\ W_N\ \ \Phi_1\ \ldots\ \Phi_N\}\\ \{u\}=\{u_1\ \ldots\ u_N\ \ u_{N+1}\ \ldots\ u_{2N}\}\end{cases}\qquad(۲۴)$$

$$[K]\{u\}-\mu^2[M]\{u\}=\{0\}\qquad(۲۵)$$

۴-۳- اعمال شرایط مرزی

شرایط مرزی در ابتدا و انتهای نانوتیر یکسر آزاد و یکسر گیردار به شرح زیر است:

$$\begin{cases}\xi=0\rightarrow W(0)=0,F(0)=0\\ \xi=1\rightarrow M(1)=0,Q(1)=0\end{cases}\qquad(۲۶)$$

شرایط مرزی طبیعی پس از ساده‌سازی، بی‌بعد سازی و نوشتن به فرم مربع‌سازی دیفرانسیلی به شکل ماتریسی زیر قابل بیان هستند:

$$M(1)=0\rightarrow[Q_1]\{u\}-\mu^2[R_1]\{u\}=\{0\}\qquad(۲۷)$$

$$Q(1)=0\rightarrow[Q_2]\{u\}-\mu^2[R_2]\{u\}=\{0\}\qquad(۲۸)$$

اینک سطرهای اول و N+1 ماتریس‌های [K] و [M] در رابطه (۲۵) با توجه به این نکته که معادله دیفرانسیل حاکم در روش DQM تنها برای نقاط غیرمرزی نوشته می‌شود، حذف می‌شوند و ماتریس‌های سختی و جرم تصحیح شده به‌دست می‌آیند. شرایط مرزی طبیعی با قرار گرفتن در این ماتریس‌ها به معادلات مسأله وارد خواهند شد.

$$[\bar{K}]\{u\}-\mu^2[\bar{M}]\{u\}=\{0\}\qquad(۲۹)$$

$$\begin{bmatrix}\bar{K}\\Q_1\\Q_2\end{bmatrix}\{u\}-\mu^2\begin{bmatrix}\bar{M}\\R_1\\R_2\end{bmatrix}\{u\}=\{0\}\qquad(۳۰)$$

$\bar{K}$ و $\bar{M}$ ماتریس‌های سختی و جرم تصحیح شده هستند. در نهایت برای ورود شرایط مرزی هندسی به مسأله، سطر و ستون اول (جابجایی در ابتدا صفر) و N+1ام (شیب در ابتدا صفر) حذف می‌شوند.

$$\begin{cases}\xi=0\rightarrow W(0)=0,F(0)=0\\ \xi=1\rightarrow M(1)=0,Q(1)=0\end{cases}\qquad(۳۱)$$

اینک فرکانس‌های طبیعی سیستم از معادله مقدار ویژه زیر به راحتی قابل استخراج است که در آن فرکانس‌های طبیعی مقادیر ویژه ماتریس D می‌باشند. در معادله (۳۲) ماتریس جرم فاقد مقدار ویژه صفر است و می‌توان از معکوس‌پذیری آن اطمینان داشت.

$$[M']^{-1}[K']\{\bar{u}\}=\mu^2\{\bar{u}\}\qquad(۳۲)$$

$$[D]\{\bar{u}\}=\mu^2\{\bar{u}\}\qquad(۳۳)$$

۵-نتایج عددی

برای استخراج فرکانس‌های طبیعی نانو تیرتیموشنکو دوار با سطح مقطع متغیر بر روی بستر الاستیک، ابتدا صحت برنامه نوشته شده در نرم افزار متلب (MATLAB) با مقایسه با حالات ساده‌تر اعتبارسنجی خواهد شد؛ پس از اطمینان از صحت نتایج، سیستم بیان شده در این پژوهش با در نظر گرفتن کلیه فرضیات مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۵-۱-اعتبار سنجی نتایج

برای اعتبار سنجی نتایج، ابتدا با در نظر گرفتن مقدار صفر برای عبارت غیرمحلی، سختی بستر و ضریب غیر یکنواختی سطح مقطع و در نظر گرفتن سرعت دورانی بی بعد ۰، ۱، ۲ و ۳، سه فرکانس طبیعی اول تیر تیموشنکو دوار استخراج می‌شود که در جدول ۲ قابل مشاهده است. مقایسه نتایج با مرجع [۲۵] دقت بالای نتایج را نشان می‌دهد.

جدول ۲- فرکانس‌های تیر تیموشنکو دوار
($\tau=0$ ،$C=0$ ،$s=0.0583$ ،$\delta=1$ ،$r=\frac{1}{30}$)

η	شماره مود	فرکانس طبیعی بی بعد - کار حاضر	فرکانس طبیعی بی بعد - مرجع [۲۵]	درصد اختلاف
۰	۱	۳٫۴۷۹۸	۳٫۴۷۹۸	۰
	۲	۲۰٫۵۸۹۲	۲۰٫۵۸۹۲	۰
	۳	۵۳٫۳۳۹۸	۵۳٫۳۳۹۸	۰
۱	۱	۳٫۸۵۱۶	۳٫۸۵۱۶	۰
	۲	۲۰٫۹۳۶۴	۲۰٫۹۳۶۴	۰
	۳	۵۳٫۷۱۲۸	۵۳٫۷۱۲۸	۰
۲	۱	۴٫۷۹۱۹	۴٫۷۹۱۹	۰
	۲	۲۱٫۹۴۳۳	۲۱٫۹۴۳۳	۰
	۳	۵۴٫۸۱۳۰	۵۴٫۸۱۳۰	۰
۳	۱	۶٫۰۳۰۶	۶٫۰۳۰۶	۰
	۲	۲۳٫۵۲۰۴	۲۳٫۵۲۰۴	۰
	۳	۵۶٫۵۸۸۳	۵۶٫۵۸۸۳	۰

در ادامه، با در نظر گرفتن مقدار صفر برای عبارت غیرمحلی و سختی

بستر الاستیک، فرکانس‌های طبیعی تیر تیموشنکو دوار با سطح مقطع متغیر به ازای سرعت‌های دورانی بی‌بعد ۰، ۵ و ۱۰، تعیین و با نتایج مرجع [۲۶] مقایسه می‌شود. همانگونه که در جدول ۳ مشاهده می‌شود نتایج از تطابق بالایی برخوردار هستند.

جدول ۳- فرکانس‌های تیر تیموشنکو دوار با سطح مقطع متغیر
($\tau = 0$ ،$C = 0.5$ ،$s = 0.1399$ ،$\delta = 0$ ،$r = 0.08$)

η	شماره مود	فرکانس طبیعی بی بعد		درصد اختلاف
		کار حاضر	مرجع [۲۶]	
۰	۱	۳٫۶۵۰۰	۳٫۶۵۰۰	۰
	۲	۱۵٫۰۲۲۷	۱۵٫۰۲۱۸	۰٫۰۰۶
	۳	۳۲٫۷۸۶۷	۳۲٫۷۸۴۰	۰٫۰۰۸
۵	۱	۶٫۴۷۱۲	۶٫۴۷۱۱	۰٫۰۰۲
	۲	۱۸٫۷۴۳۴	۱۸٫۷۴۴۰	۰٫۰۰۳
	۳	۳۷٫۲۲۵۰	۳۷٫۲۲۲۶	۰٫۰۰۶
۱۰	۱	۱۰٫۹۹۰۶	۱۰٫۹۹۰۵	۰٫۰۰۱
	۲	۲۶٫۹۲۸۵	۲۶٫۹۲۸۰	۰٫۰۰۲
	۳	۴۷٫۸۸۴۲	۴۷٫۸۸۲۷	۰٫۰۰۳

در مرحله بعد، با در نظر گرفتن مقدار صفر برای عبارات مربوط به تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی، فرکانس‌های طبیعی نانو تیر اویلر برنولی دو سر مفصل بر روی بستر الاستیک به‌دست می‌آید و با مقادیر ارائه شده در مراجع [۲۴] و [۲۷] مقایسه و تطابق قابل قبولی مشاهده می‌شود (جدول ۴).

جدول ۴- فرکانس‌های طبیعی نانو تیر اویلر برنولی دوسر مفصل بر روی بستر الاستیک ($\tau = 0.5$ ، $\eta = 0$)

$\overline{K}$	فرکانس طبیعی اول بی بعد		
	$r, s \to 0$ کار حاضر	مرجع [۲۴]	مرجع [۲۷]
۰	۵٫۲۹۱۸	۵٫۳۲۳۵	۵٫۳۲۳۵
۱۰	۶٫۱۶۴۹	۶٫۱۶۲۲	۶٫۱۶۲۲
۲۰	۶٫۹۲۹۳	۷٫۰۱۶۴	۷٫۰۱۶۴
۳۰	۷٫۶۱۶۷	۷٫۶۷۰۴	۷٫۶۷۰۴
۴۰	۸٫۲۴۶۴	۸٫۳۳۲۲	۸٫۳۳۲۲
۵۰	۸٫۸۳۲۵	۸٫۸۷۰۸	۸٫۸۷۰۸
۱۰۰	۱۱٫۳۱۳۷	۱۱٫۳۶۳۹	۱۱٫۳۶۳۹

اینک، نتایج پژوهش حاضر با صفر در نظر گرفتن ضریب سطح مقطع، سرعت دورانی بی‌بعد و سختی بستر الاستیک با مسأله نانو تیر تیموشنکو مقایسه می‌شود. فرکانس‌های طبیعی به همراه نتایج به‌دست آمده در مرجع [۲۸] در جدول ۵ ارائه شده است. در مرجع [۲۸] برای حل مسأله از مقادیر قطر $d = 0.678$ nm، طول $L = 10d$، مدول یانگ $E = 5.5$ Tpa، ضریب پواسون $\nu = 0.19$ و ضریب تصحیح برش $K_s = 0.563$ استفاده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود نتایج از تطابق قابل قبولی برخوردار هستند.

جدول ۵- فرکانس‌های نانو تیر تیموشنکو یکسر آزاد یکسر گیردار

τ	شماره فرکانس	کار حاضر	مرجع [۲۸]
۰	فرکانس اول	۱٫۸۶۱۱	۱٫۸۶۱۰
	فرکانس دوم	۴٫۴۷۳۵	۴٫۴۷۳۳
	فرکانس سوم	۷٫۱۰۷۹	۷٫۱۰۷۲
۰٫۱	فرکانس اول	۱٫۸۶۴۷	۱٫۸۶۴۹
	فرکانس دوم	۴٫۳۳۱۰	۴٫۳۵۰۶
	فرکانس سوم	۶٫۴۶۰۱	۶٫۶۰۹۱
۰٫۲	فرکانس اول	۱٫۸۷۷۴	۱٫۸۹۹۰
	فرکانس دوم	۳٫۹۷۴۲	۳٫۶۵۹۴
	فرکانس سوم	۵٫۱۰۵۸	۵٫۰۷۶۲

۵-۲-نانو تیر تیموشنکو دوار با سطح مقطع متغیر برروی بستر الاستیک

پس از اعتبارسنجی نتایج، فرکانس‌های طبیعی نانو تیر تیموشنکو دوار با سطح مقطع متغیر بر روی بستر الاستیک با در نظر گرفتن مقادیر مختلف برای پارامترهای مسأله، تعیین می‌گردد. به غیر از مواردی که خلاف آن ذکر شده باشد، مقادیر در نظر گرفته شده برای سیستم مورد بررسی عبارتند از $r = \frac{1}{30}$، $s = 0.3193$، $\tau = 0.1$، $\eta = 1$، $\overline{K} = 50$ و C=0.5. تعداد المان‌های در نظر گرفته شده $N = 25$ است که این تعداد برای اطمینان از همگرایی مسأله در نظر گرفته شده است.

در جدول‌های ۶ و ۷، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد نانو تیر تیموشنکو دوار با سطح مقطع متغیر به ازای مقادیر مختلف سرعت دورانی و شعاع توپی به ترتیب بدون در نظر گرفتن سختی بستر الاستیک و با در نظر گرفتن آن نشان داده شده است. همان‌گونه که انتظار می‌رود در سرعت دورانی صفر، تغییر شعاع توپی تأثیری بر فرکانس‌های طبیعی ندارد اما افزایش سرعت دورانی بر تأثیر آن می‌افزاید. در این جداول مشاهده می‌شود که با افزایش سرعت دورانی و شعاع توپی بر مقدار فرکانس‌های طبیعی افزوده می‌شود. مطابق انتظار مقایسه نتایج جدول ۶ با ۷ نشان می‌دهد در نظر گرفتن بستر الاستیک منجر به افزایش در مقدار فرکانس‌های طبیعی می‌شود و شدت این افزایش در شکل مودهای پایین‌تر بیشتر است.

در جدول ۸ فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد اول تا سوم به ازای سرعت دورانی ثابت $\eta = 1$ و مقادیر متفاوت شعاع توپی و عبارت غیر محلی نانو بیان گردیده است. مطابق این جدول مشاهده می‌شود که افزایش عبارت غیر محلی نانو موجب افزایش فرکانس اول می‌شود ولی تأثیر آن بر فرکانس‌های دوم و سوم چندان قابل پیش‌بینی نیست به گونه‌ای‌که در بعضی از مقادیر پارامتر غیر محلی، باعث کاهش و در بعضی مقادیر باعث افزایش این فرکانس‌ها می‌گردد.

جدول ۶- تأثیر سرعت دورانی بر فرکانس‌های نانو تیر تیموشنکو دوار بدون در نظر گرفتن بستر الاستیک

η	شماره مود	فرکانس طبیعی بی بعد		
		$\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 3$
۰	۱	۳٫۷۵۳۴	۳٫۷۵۳۴	۳٫۷۵۳۴
	۲	۱۶٫۲۰۸۱	۱۶٫۲۰۸۱	۱۶٫۲۰۸۱
	۳	۳۵٫۰۸۳۶	۳۵٫۰۸۳۶	۳۵٫۰۸۳۶
۱	۱	۴٫۱۶۳۶	۴٫۳۸۱۶	۴٫۵۸۹۸
	۲	۱۶٫۷۱۸۶	۱۷٫۰۰۲۰	۱۷٫۲۸۲۵
	۳	۳۵٫۷۱۸۳	۳۶٫۰۷۵۵	۳۶٫۴۳۱۳
۲	۱	۵٫۲۱۱۰	۵٫۸۹۵۴	۶٫۵۱۶۲
	۲	۱۸٫۲۰۱۰	۱۹٫۲۶۹۶	۲۰٫۳۰۷۹
	۳	۳۷٫۶۰۵۳	۳۹٫۰۰۸۱	۴۰٫۳۹۸۴

جدول ۷- تأثیر سرعت دورانی بر فرکانس‌های نانو تیر تیموشنکو دوار

η	شماره مود	فرکانس طبیعی بی بعد		
		$\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 3$
۰	۱	۹٫۹۰۳۶	۹٫۹۰۳۶	۹٫۹۰۳۶
	۲	۱۸٫۲۹۵۷	۱۸٫۲۹۵۷	۱۸٫۲۹۵۷
	۳	۳۶٫۰۵۳۲	۳۶٫۰۵۳۲	۳۶٫۰۵۳۲
۱	۱	۱۰٫۰۸۰۱	۱۰٫۱۷۹۰	۱۰٫۲۷۷۲
	۲	۱۸٫۷۶۹۸	۱۹٫۰۳۳۰	۱۹٫۲۹۴۲
	۳	۳۶٫۶۸۲۸	۳۷٫۰۳۶۹	۳۷٫۳۸۹۹
۲	۱	۱۰٫۵۹۷۰	۱۰٫۹۷۷۰	۱۱٫۳۴۹۶
	۲	۲۰٫۱۶۰۵	۲۱٫۱۶۹۸	۲۲٫۱۵۸۱
	۳	۳۸٫۵۶۰۱	۳۹٫۹۵۷۴	۴۱٫۳۴۵۷

جدول ۸- تأثیر عبارت غیر محلی بر فرکانس‌های نانو تیر تیموشنکو دوار

τ	شماره مود	فرکانس طبیعی بی بعد		
		$\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 3$
۰٫۱	۱	۱۰٫۰۸۰۱	۱۰٫۱۷۹۰	۱۰٫۲۷۷۲
	۲	۱۸٫۷۶۹۸	۱۹٫۰۳۳۰	۱۹٫۲۹۴۲
	۳	۳۶٫۶۸۲۸	۳۷٫۰۳۶۹	۳۷٫۳۸۹۹
۰٫۲	۱	۱۲٫۵۳۴۵	۱۲٫۶۱۸۶	۱۲٫۷۳۴۰
	۲	۱۷٫۵۱۵۷	۱۸٫۷۶۷۴	۱۹٫۸۸۴۹
	۳	۲۹٫۱۷۳۷	۳۱٫۲۴۶۳	۳۲٫۴۵۱۶
۰٫۳	۱	۱۴٫۱۸۲۴	۱۴٫۱۳۲۸	۱۴٫۱۳۹۷
	۲	۱۹٫۸۱۸۱	۲۰٫۰۰۹۸	۲۰٫۲۸۲۹
	۳	۲۶٫۸۰۸۹	۲۶٫۹۷۸۷	۲۷٫۳۲۲۲

تأثیر ضریب غیر یکنواختی سطح مقطع بر فرکانس‌های طبیعی نانوتیر تیموشنکو با سطح مقطع متغیر در جدول ۹ بررسی شده است که در آن افزایش این ضریب باعث افزایش فرکانس اول و کاهش فرکانس-های دوم و سوم شده است.

جدول ۹- تأثیر ضریب غیر یکنواختی سطح مقطع بر فرکانس‌های نانو تیر تیموشنکو دوار

C	شماره مود	فرکانس طبیعی بی بعد		
		$\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 3$
۰٫۲۵	۱	۸٫۸۶۸۳	۸٫۹۷۱۰	۹٫۰۷۲۷
	۲	۱۹٫۸۶۴۴	۲۰٫۱۱۵۱	۲۰٫۳۶۳۲
	۳	۴۱٫۲۸۵۱	۴۱٫۶۱۹۸	۴۱٫۹۵۲۳
۰٫۵	۱	۱۰٫۰۸۰۱	۱۰٫۱۷۹۰	۱۰٫۲۷۷۲
	۲	۱۸٫۷۶۹۸	۱۹٫۰۳۳۰	۱۹٫۲۹۴۲
	۳	۳۶٫۶۸۲۸	۳۷٫۰۳۶۹	۳۷٫۳۸۹۹
۰٫۷۵	۱	۱۲٫۴۳۱۱	۱۲٫۵۲۴۹	۱۲٫۶۱۹۵
	۲	۱۸٫۴۴۱۴	۱۸٫۸۰۳۹	۱۹٫۱۶۵۱
	۳	۳۱٫۲۶۹۳	۳۱٫۸۰۴۳	۳۲٫۳۴۶۸

در جدول ۱۰ تأثیر اینرسی دورانی بر فرکانس‌های طبیعی نانو تیر تیموشنکو بررسی و مشاهده می‌شود که کاهش اینرسی دورانی منجر به افزایش در فرکانس‌های طبیعی می‌شود.

جدول ۱۰- تأثیر اینرسی دورانی بر فرکانس‌های نانو تیر تیموشنکو دوار

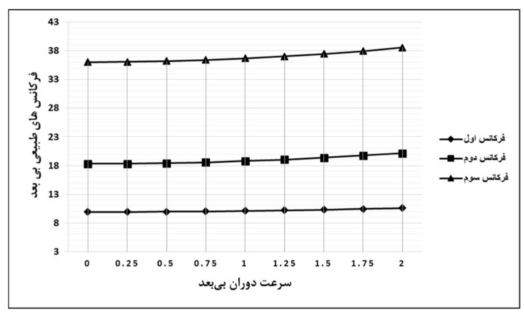
r	شماره مود	فرکانس طبیعی بی بعد		
		$\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 3$
۰/۱	۱	۹٫۸۸۵۴	۹٫۹۷۸۶	۱۰٫۰۷۱۵
	۲	۱۵٫۶۰۵۹	۱۵٫۸۸۰۳	۱۶٫۱۵۱۸
	۳	۳۴٫۳۸۰۴	۲۶٫۱۸۷۸	۲۶٫۶۰۹۳
۰/۰۵	۱	۱۰٫۰۴۵۰	۱۰٫۱۴۲۸	۱۰٫۲۴۰۰
	۲	۱۸٫۰۷۵۴	۱۸٫۳۳۹۲	۱۸٫۶۰۱۰
	۳	۳۳٫۷۵۵۳	۳۴٫۱۱۹۱	۳۴٫۴۸۱۴
۰/۰۳۳	۱	۱۰٫۰۸۰۱	۱۰٫۱۷۹۰	۱۰٫۲۷۷۲
	۲	۱۸٫۷۶۹۸	۱۹٫۰۳۳۰	۱۹٫۲۹۴۲
	۳	۳۶٫۶۸۲۸	۳۷٫۰۳۶۹	۳۷٫۳۸۹۹

در نهایت تأثیر ضریب سختی بستر بر فرکانس‌های طبیعی بررسی می‌شود که مطابق انتظار افزایش آن منجر به افزایش در فرکانس‌های طبیعی می‌گردد (جدول ۱۱).

جدول ۱۱- فرکانس‌های نانو تیر تیموشنکو دوار با سطح مقطع متغیر

$\bar{K}$	شماره مود	فرکانس طبیعی بی بعد $\delta = 1$	$\delta = 2$	$\delta = 3$
۴۰	۱	۹٫۱۸۹۷	۹٫۲۹۶۹	۹٫۴۰۳۱
	۲	۱۸٫۳۷۴۷	۱۸٫۶۴۱۲	۱۸٫۹۰۵۶
	۳	۳۶٫۴۹۱۴	۳۶٫۸۴۶۱	۳۷٫۱۹۹۵
۵۰	۱	۱۰٫۰۸۰۱	۱۰٫۱۷۹۰	۱۰٫۲۷۷۲
	۲	۱۸٫۷۶۹۸	۱۹٫۰۳۳۰	۱۹٫۲۹۴۲
	۳	۳۶٫۶۸۲۸	۳۷٫۰۳۶۹	۳۷٫۳۸۹۹
۶۰	۱	۱۰٫۹۰۴۹	۱۰٫۹۹۷۲	۱۱٫۰۸۹۰
	۲	۱۹٫۱۵۸۵	۱۹٫۴۱۸۷	۱۹٫۶۷۷۲
	۳	۳۶٫۸۷۳۵	۳۷٫۲۲۷۱	۳۷٫۵۷۹۷

در ادامه به منظور بررسی بیشتر، فرکانس‌های طبیعی سیستم به صورت نمودارهایی با مقادیر پیش فرض $r = \frac{1}{30}$، $s = 0.3193$، $\delta = 1$، $\bar{K} = 50$، $\tau = 0.1$، $\eta = 1$ و $C = 0.25$ در شکل‌های ۲ تا ۸ آورده شده‌اند. در شکل ۲ تأثیر سرعت دورانی بر فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم تیر مورد بررسی قرار گرفته است که در آن افزایش فرکانس‌های طبیعی با افزایش سرعت دورانی قابل مشاهده است.

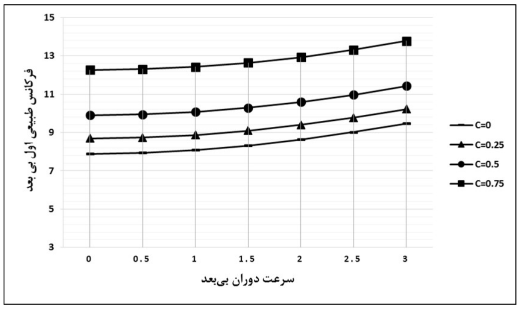


شکل ۲- فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم

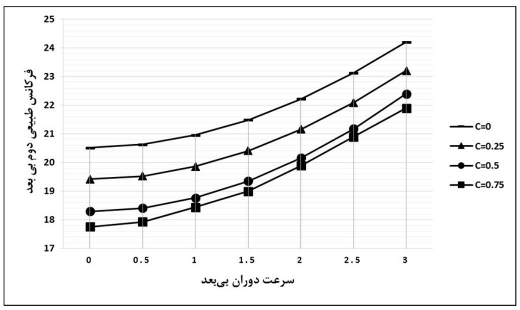
در شکل‌های ۳، ۴ و ۵ تأثیر تغییرات ضریب باریک شوندگی سطع مقطع و سرعت دورانی بی‌بعد به ترتیب بر فرکانس طبیعی اول، دوم و سوم بررسی شده است. مطابق انتظار افزایش سرعت دورانی منجر به افزایش در مقدار هر سه فرکانس شده است؛ اما همانگونه که مشاهده می‌شود افزایش ضریب باریک‌شوندگی سطع مقطع در شکل ۳ منجر به افزایش فرکانس اول و در شکل‌های ۴ و ۵ منجر به کاهش در مقادیر به ترتیب فرکانس‌های دوم و سوم شده است.

شکل ۶ تأثیر ضریب سختی بستر و سرعت دورانی و شکل ۷ تأثیر شعاع توپی و سرعت دورانی را بر فرکانس طبیعی اول نشان می‌دهد. می‌توان مشاهده کرد که فرکانس طبیعی اول با افزایش سرعت دورانی، سختی بستر و شعاع توپی افزایش می‌یابد.

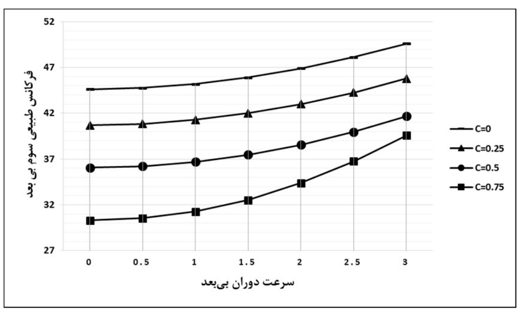
در نهایت شکل ۸ فرکانس طبیعی اول را بر حسب تغییرات ضریب سرعت دورانی و عبارت غیر محلی نانو بیان می‌کند که افزایش هر کدام از این دو پارامتر موجب افزایش فرکانس طبیعی اول می‌گردد.



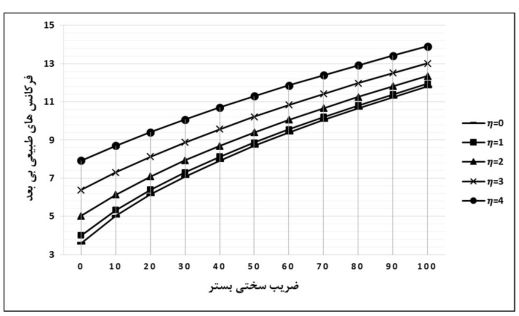
شکل ۳- فرکانس طبیعی اول بر حسب سرعت دورانی و ضریب باریک‌شوندگی سطح مقطع



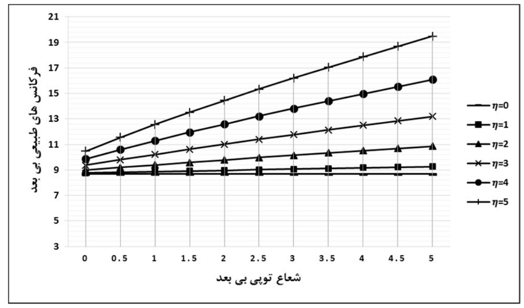
شکل ۴- فرکانس طبیعی دوم بر حسب سرعت دورانی و ضریب باریک‌شوندگی سطح مقطع



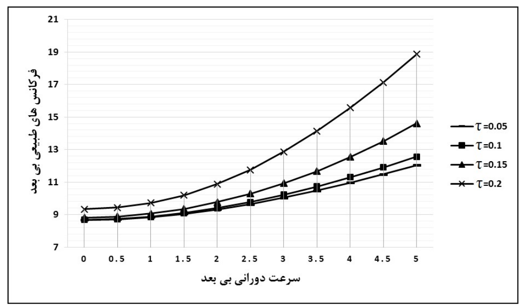
شکل ۵- فرکانس طبیعی سوم بر حسب سرعت دورانی و ضریب باریک‌شوندگی سطح مقطع



شکل ۶- فرکانس طبیعی اول بر حسب سرعت دورانی و ضریب سختی بستر



شکل ۷- فرکانس طبیعی اول بر حسب سرعت دورانی و شعاع توپی بی‌بعد



شکل ۸- فرکانس طبیعی اول بر حسب سرعت دورانی و عبارت غیر محلی نانو

۶-نتیجه گیری

در این مقاله فرکانس‌های طبیعی نانو تیر تیموشنکو دوار با سطح مقطع متغیر بر روی بستر الاستیک به‌دست آمد. جهت حل معادلات از روش مربع‌سازی دیفرانسیلی استفاده شد و با بهره‌گیری از روش ذکر شده فرکانس‌های طبیعی استخراج گردید. برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی، حالت‌های مختلفی در نظر گرفته شد که در آن تغییرات شعاع توپی، سرعت دورانی، تغییر شکل برشی، اینرسی دورانی، عبارت‌های بی‌بعد نانو و ضریب سختی بستر الاستیک مورد بررسی قرار گرفت. با مقایسه نتایج با مقادیر ارائه شده در مقالات دیگر تطابق قابل قبولی بین آنها مشاهده شد. همچنین مشاهده گردید که افزایش سرعت دورانی، ضریب سختی بستر الاستیک و شعاع توپی منجر به افزایش در فرکانس‌های طبیعی و افزایش در ضریب سطح مقطع منجر به افزایش فرکانس اول و کاهش فرکانس دوم و سوم می‌شود. همچنین با افزایش در پارامتر غیر محلی نانو، فرکانس اول افزایش می‌یابد ولی رفتار فرکانس‌های دوم و سوم چندان قابل پیش‌بینی نیست.

۷-مراجع

[1] Sumio I., Helical microtubules of graphitic carbon. *Nature*, Vol. 354, No. 6348, pp. 56–58, 1991.

[2] Ebbesen T., *Carbon Nanotubes: Preparation and Properties*. CRC Press, New York, 1997.

[3] Eugene D., *Trends in nanotechnology research*. Nova Publishers, 2004.

[4] Shih-Chung F., Chang W. and Wang Y., Computation of chirality- and size-dependent surface Young's moduli for single-walled carbon nanotubes. *Physics Letters A*, Vol. 371, pp. 499–503, 2007.

[5] Mindlin R. and Tiersten H., Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, pp. 415–448, 1962.

[6] Kröner E., On the physical reality of torque stresses in continuum mechanics. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 1, pp. 261–278, 1963.

[7] Toupin R., Elastic materials with couple-stresses. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 11, pp. 385–414, 1962.

[8] Toupin R., Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 17, pp. 85–112, 1964.

[9] Green A. and Rivlin R., Multipolar continuum mechanics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, Vol. 17, pp. 113–47, 1964.

[10] Mindlin R. and David R., Second gradient of strain and surface-tension in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 1, pp. 417–438, 1965.

[11] Mindlin R., David R. and Eshel N., On first strain-gradient theories in linear elasticity. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 4, pp. 109–124, 1968.

[12] Eringen A., On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves. *Journal of Applied Physics*, Vol. 54, pp. 4703–4710, 1983.

[13] Aifantis E., On the role of gradients in the localization of deformation and fracture. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 30, pp. 1279–1299, 1992.

[14] Altan S. and Aifantis E., On the structure of the mode III crack-tip in gradient elasticity. *Scripta Metallurgica et Materialia*, Vol. 26, pp. 319–324, 1992.

[15] Askes H. and Gitman I., *Review and critique of the stress gradient elasticity theories of Eringen and Aifantis, Mechanics of generalized continua*. Springer, New York, pp. 203–210, 2010.

[16] Askes H., Elias C. and Aifantis E., Gradient elasticity in statics and dynamics: an overview of formulations, length scale identification procedures, finite element implementations and new results. *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 48, pp. 1962–1990, 2011.

[17] Eringen A., Linear theory of nonlocal elasticity and dispersion of plane waves. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 10, pp. 425–435, 1972.

[18] Eringen A., Nonlocal polar elastic continua. *International journal of engineering science*, Vol. 10, pp. 1–16, 1972.

[19] Peddieson J., George R. and Richard P., Application of nonlocal continuum models to nanotechnology. *International Journal of Engineering Science*, Vol. 41, pp. 305–312, 2003.

[20] Pradhan S. and Murmu T., Application of nonlocal elasticity and DQM in the flapwise bending vibration of a rotating nanocantilever. *Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures*, Vol. 42, pp. 1944–1949, 2010.

[21] Murmu T. and Adhikari S., Scale-dependent vibration analysis of prestressed carbon nanotubes undergoing rotation. *Journal of Applied Physics*, Vol. 108, p. 123507, 2010.

[22] Narendar S. and Gopalakrishnan S., Nonlocal wave propagation in rotating nanotube. *Results in Physics*, Vol. 1, pp. 17–25, 2011.

[23] Aranda-Ruiz J., Loya J. and Fernández-Sáez J., Bending Vibrations of Rotating Nonuniform Nanocantilevers using the Eringen Nonlocal Elasticity Theory. *Composite Structures*, Vol. 94, pp. 2990–3001, 2012.

[24] Murmu T. and Adhikari S., Nonlocal transverse vibration of double-nanobeam-systems. *Journal of Applied Physics*, Vol. 108, p. 083514, 2010.

[25] Kaya M, Free vibration analysis of a rotating Timoshenko beam by differential transform method. *Aircraft engineering and aerospace Technology*, Vol. 78, pp. 194– 203, 2006.

[26] Ghafarian M. and Ariaei A., Free vibration analysis of a system of elastically interconnected rotating tapered Timoshenko beams using differential transform method. *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 107, pp. 93-109, 2016.

[27] Ghafarian M. and Ariaei A., Free vibration analysis of a multiple rotating nano-beams system based on the Eringen nonlocal elasticity theory. *Journal of Applied Physics*, Vol. 120, p. 054301, 2016.

[28] Wang C.M, Zhang Y.Y. and He X.Q., Vibration of Non-local Timoshenko Beams. *Nanotechnology*, Vol. 18, pp. 1-9, 2007.