

## کنترل فعال ارتعاشات یک تیر هوشمند دوار با استفاده از وصله‌های پیزوالکتریک

مجید حیدری

دانش آموخته کارشناسی ارشد، گروه مکانیک، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

شهرام هادیان جزی\*

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

## چکیده

در این مقاله کنترل فعال ارتعاشات یک تیر دوار یک‌سر گیردار هوشمند به کمک وصله‌های پیزوالکتریک حسگری و عملگری روی سطوح خارجی آن بررسی شده است. معادلات حرکت با استفاده از روش المان محدود و به کمک المان‌های ۶ و ۹ درجه برای قسمت‌های فاقد وصله و قسمت‌های شامل آن‌ها، گسسته‌سازی شده است. چند نوع مختلف کنترل‌کننده مانند LQR، LQG و پس‌خورد سرعت برای کنترل فعال نوسانات استفاده شده است. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد کنترل‌کننده LQR به دلیل پس‌خورد همه حالت‌های سیستم عملکرد بهتری از نظر زمان نشست دارد. در حالی که کنترل‌کننده پس‌خورد سرعت فقط به داده‌های سنسورهای پیزوالکتریک نیاز داشته و بنابراین به کارگیری آن مقرون به صرفه‌تر و عملی‌تر است. در این مقاله همچنین اثر تعداد زوج وصله‌های پیزوالکتریک روی کنترل ارتعاشات تیر با در نظر گرفتن چهار جفت وصله در نقاط مختلف تیر مطالعه شده است.

**واژه‌های کلیدی:** تیر دوار، کنترل فعال نوسانات، وصله پیزوالکتریک، کنترل بهینه، پس‌خورد سرعت.

## Active Vibration Control of a Rotary Smart Beam Using Piezoelectric Patches

M. Heidari

Department of Mechanical Engineering, Shahrekord University, Shahrekord, Iran

Sh. Hadian Jazi

Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

## Abstract

The active vibration control of a smart cantilever rotary beam, using dual sensor and actuator piezoelectric patches stuck on the outer surface of the beam, is studied. Motion equations are discretized by finite element method with 6 and 9 DOF elements for parts without piezoelectric patches and with them, respectively. Several types of controllers such as LQR, LQG and rate feedback controller are employed to actively control vibrations of the beam. Simulation results exhibit a better performance in terms of settling time for the LQR controller due to all states' feedback; while rate controller is only relying on the sensor patches for feedback which is convenient in terms of cost. Also, the effect of the number of piezoelectric patches is studied.

**Keywords:** Rotary Beam, Active Vibration Control, Piezoelectric Patches, Optimal Control, Rate Feedback.

ارتعاشات سازه‌های هوشمند دوار مورد توجه محققین مختلف قرار گرفته و تحقیقات زیادی در این زمینه انجام شده است.

به‌طور کلی کنترل ارتعاشات سازه‌های هوشمند به دو بخش عمده کنترل فعال و کنترل غیرفعال تقسیم می‌شوند. در کنترل غیرفعال سیستم کنترل عبارت است از تنظیم پارامترهای سختی و مستهلک‌کنندگی سیستم مکانیکی به صورت غیر برخط و غیرفعال. به‌عنوان نمونه موازی کردن یک مدار RL با مبدل پیزوالکتریک و کاهش انرژی مکانیکی سازه از این طریق، یکی از روشهای کنترل غیرفعال نوسانات سازه‌ها است [۱]. واضح است که در چنین روش‌هایی امکان تغییر ضرایب میرایی و سختی حین فعالیت سیستم وجود ندارد و بنابراین در برابر نامعینی‌های سیستم و اغتشاشات اعمال شده ضعیف عمل خواهد کرد. در کنترل فعال در هر لحظه و با توجه به وضعیت پاسخ سیستم می‌توان پیام مناسب به محرک ارسال کرد. به کمک این نوع از کنترل و بسته به نوع کنترل‌کننده طراحی شده می‌توان اثر اغتشاشات و نامعینی‌های مختلف روی سیستم را کاهش داد. در زمینه کنترل فعال ارتعاشات کارهای مختلفی در سال‌های گذشته انجام شده است. از بین این کارها می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. لی و همکارانش در ۱۹۹۱ به بررسی مساله کنترل فعال ارتعاشات یک بدی صفحه

## ۱- مقدمه

اجزاء دوار در سیستم‌های مکانیکی مختلف یکی از پرکاربردترین اجزا مکانیکی هستند و به‌همین دلیل بیشترین توجه را نیز از طرف محققین علوم مختلف دریافت کرده‌اند. مطالعه این اجزا از آن روی اهمیت دارد که رفتار سیستم‌ها هنگام دوران با رفتار آنها در حالت‌های غیردورانی متفاوت است. علاوه بر آن اجزا دوار سیستم‌ها اصولاً خطرهای بالقوه‌ای هستند که در صورت عدم تحلیل مناسب قدرت مخرب بالایی در از بین بردن کل سیستم و یا مختل کردن عملکرد آن دارند. بررسی رفتار اجزا دوار، بررسی ارتعاشات آنها در راستاهای مختلف، طراحی اجزا دوار، کنترل رفتار این اجزا و مسایلی از این دست موضوعاتی هستند که محققین به بررسی آنها پرداخته‌اند.

از طرف دیگر ابداع و پیشرفت سریع مواد هوشمند مانند پیزوالکتریک‌ها طی سال‌های اخیر باعث به‌وجود آمدن سازه‌های هوشمند و به‌کارگیری آنها در ساخت ماشین آلات مختلف شده است. از جمله کاربردهای این سازه‌ها، در سیستم‌های دوار است. در چنین حالت‌هایی امکان کنترل ارتعاشات اجزا دوار و به تبع آن افزایش کارایی و راندمان این اجزا وجود خواهد داشت. به‌همین دلیل بررسی و کنترل

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: s.hadian@eng.ui.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۸/۰۴

تاریخ پذیرش: ۹۵/۱۱/۰۲

یک سر درگیر به کمک لایه‌های پیزوالکتریک پرداختند [۲]. ساراوانوس در ۱۹۹۷ به بررسی کنترل ارتعاشات یک پوسته به کمک لایه‌های عملگری و حسگری از پیزوالکتریک‌ها پرداخت [۳]. وی برای مدل‌سازی سیستم مورد نظر از یک المان ۸ گره‌ای استفاده کرد. برنت و همکارانش در ۲۰۰۱ به بررسی مساله استهلاک فعال ارتعاشات سازه‌های انعطاف‌پذیر پرداختند [۴]. آنها برای مدل‌سازی از یک المان ساده تیر مرکب با در نظر گرفتن خواص پیزوالکتریسته برای آن استفاده کردند و به کمک یک کنترل‌کننده بهینه LQR نوسانات یک تیر ساده را کنترل کردند. ناراینان و بالامورگان در ۲۰۰۳ به بررسی کنترل فعال نوسانات یک تیر انعطاف‌پذیر به کمک حسگرها و عملگرهای پیزوالکتریک گسترده پرداختند [۵]. آنها در این تحقیق اثر دما بر خواص الکتریکی و مکانیکی و وابستگی بین آنها را بررسی کردند. دادفرینیا و همکارانش در ۲۰۰۴ مساله کنترل ارتعاشات یک بازوی رباتیک که پایه آن حرکت انتقالی انجام می‌داد را بررسی کردند [۶]. سبا و همکارانش در ۲۰۰۶ مساله کنترل نوسانات یک تیر انعطاف‌پذیر به کمک عملگرهای پیزوالکتریک که روی سطح تیر نصب شده‌اند و یک شتاب‌سنج که در انتهای تیر نصب شده‌است را بررسی کردند [۷]. آنها برای این کار از یک کنترل‌کننده فازی استفاده کردند. روی و چاکرابورتی در ۲۰۰۹ کنترل ارتعاشات سازه‌های هوشمند پوسته‌ای که به وصله‌های حسگری و عملگری پیزوالکتریک مجهز بودند را مطالعه نمودند [۸]. آنها از الگوریتم ژنتیک به منظور تعیین موقعیت بهینه وصله‌های پیزوالکتریک روی سازه برای داشتن بیشترین کنترل‌پذیری و همچنین برای طراحی کنترل‌کننده بهینه LQR برای داشتن بیشترین ضریب میرایی هم‌زمان با حفظ ولتاژ عملگرها در محدوده مورد نظر استفاده کردند. کاپوریا و یاسین در ۲۰۱۰ یک مدل المان محدود کارآمد برای کنترل ارتعاشات یک تیر مجهز به لایه‌های پیزوالکتریک حسگری و عملگری ارائه دادند و روشهای مختلف کنترل بهینه را با آن آزمودند [۹]. زوریچ و همکارانش در ۲۰۱۲ کنترل ارتعاشات یک تیر کامپوزیتی را مورد مطالعه قرار دادند [۱۰]. آنها با استفاده از بهینه‌سازی فازی، اندازه و محل بهینه وصله‌های پیزوالکتریک نصب‌شده روی تیر و همچنین پارامترهای بهینه کنترل‌کننده را تعیین نمودند. ژاوانویچ و همکارانش در ۲۰۱۳ به بررسی عملی کنترل فعال ارتعاشات یک تیر یک‌سر درگیر هوشمند با استفاده از یک کنترل‌کننده PID پرداختند [۱۱]. آنها برای کنترل از عملگرهای پیزوالکتریک و همچنین وصله‌های کرنش‌سنج استفاده کردند. هاشمی‌نژاد و واحدی در ۲۰۱۴ کنترل فعال ارتعاشات یک تیر با تکیه‌گاه‌های ساده و ضخامت دلخواه را مورد بررسی قرار دادند [۱۲]. آنها فرض کردند که تیر به طور ناقص مجهز به لایه‌های پیزوالکتریک عملگری و حسگری است که روی و زیر تیر نصب شده‌اند. همچنین علیقلی‌زاده و همکاران در ۲۰۱۵ بررسی مساله کنترل فعال ارتعاشات یک تیر یک‌سر درگیر با استفاده از وصله‌های پیزوالکتریکی که از نظر طول و محل نصب روی تیر بهینه شده بودند، پرداختند [۱۳].

در زمینه تیرهای انعطاف‌پذیر دوار نیز کارهای مختلفی انجام شده است. از جمله این تحقیقات در زمینه کنترل ارتعاشات تیرهای هوشمند دوار می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. چوی و هان در ۲۰۰۴ اثر عملگرهای پیزوالکتریک را روی ارتعاشات یک تیر دوار به صورت عملی بررسی کردند. سیستم کنترلی آنها، یک کنترلگر ساده اندازه ثابت

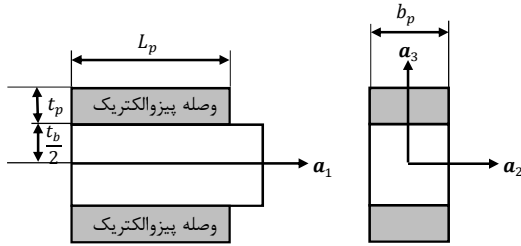
بود [۱۴]. تاکار و گانجولی در ۲۰۰۴ به بررسی اثر حضور عملگرهای پیزوالکتریک در ارتعاشات تیرهای دوار پرداختند. آنها برای تیرهای مورد بررسی یک لایه عملگر پیزوالکتریک روی تیر و یک لایه عملگر پیزوالکتریک زیر تیر در نظر گرفتند [۱۵]. البته آنها در این کار از سیستم‌های کنترل فعال استفاده نکردند. ال‌دین و توفیق در ۲۰۰۶ به مدل‌سازی المان محدود یک تیر دوار و کنترل غیر فعال آن پرداختند [۱۶]. مارتق و همکارانش در ۲۰۰۸ مساله کنترل غیرفعال نوسانات پره‌های توربین را مورد بررسی قرار دادند [۱۷]. آنها در این کار از یک تنظیم‌کننده جرم و میراگر غیرفعال استفاده کردند. چاندیرمانی در ۲۰۱۰ مساله کنترل فعال نوسانات یک تیر دوار به کمک مواد پیزوالکتریک را بررسی کرد [۱۸]. وی فرض کرد دو لایه پیزوالکتریک روی سطوح بالا و پایین تیر چسبیده‌اند و این دو لایه سرتاسر طول تیر را در بر گرفته‌اند. همچنین برای کنترل از روش کنترل بهینه LQR استفاده کرد. بوتو و همکارانش در ۲۰۱۳ مساله استفاده از صفحات پیزوالکتریک به عنوان عملگر برای کنترل نوسانات تیرهای دوار را مورد بررسی قرار دادند [۱۹]. آنها در کار خود موقعیت بهینه قرارگیری این صفحات را محاسبه کردند و برای کنترل نوسانات از تحریک مودهای ارتعاشی تیر به صورت معکوس استفاده نمودند. در این بین از هیچ حسگری استفاده نشده و بنابراین علی‌رغم ادعای کنترل فعال، به نوعی عمل کنترل به صورت غیرفعال انجام می‌شد. فیتزجرالد و همکارانش در ۲۰۱۳ مساله کنترل فعال نوسانات پره‌های توربین بادی به کمک تنظیم‌کننده جرم و میراگر فعال را به روش LQR مورد بررسی قرار دادند [۲۰].

همان‌گونه که مشاهده شد مساله کنترل ارتعاشات فعال تیرها و به خصوص تیرهای دوار همچنان یکی از موضوعات مورد توجه محققان است. این موضوع به دلیل کاربرد بسیار گسترده تجهیزات دوار در سیستم‌های مورد استفاده بشر است. همچنین با توجه به بررسی کارهای انجام شده مشاهده می‌شود که کنترل فعال ارتعاشات تیرهای دوار به کمک وصله‌های پیزوالکتریک عملگری و حسگری در تحقیقات پیشین مورد توجه قرار نگرفته است. شاید بتوان شبیه‌ترین تحقیق به کار انجام شده در این مقاله را همان مرجع [۱۴] معرفی کرد که در آن از یک وصله پیزوالکتریک عملگری استفاده شده است. ضمن اینکه این کار صرفاً یک کار تجربی بوده است. به همین دلیل در این تحقیق مساله کنترل فعال ارتعاشات تیرهای دوار هوشمند که مجهز به زوج وصله‌های پیزوالکتریک حسگری و عملگری است مورد بررسی قرار گرفته است. در این مسیر کنترل‌کننده‌های بهینه LQR و LQG و همچنین پسخورد سرعت مورد استفاده قرار گرفته‌اند و مزایا و معایب آنها در کنترل فعال ارتعاشات تیر دوار بررسی شده است.

## ۲- توصیف سیستم مورد بررسی

نمایی کلی از سیستم مورد بررسی در این تحقیق در شکل نشان داده شده است. همان‌گونه که از شکل پیدا است این سیستم یک تیر انعطاف‌پذیر به طول  $L$  است که به صورت یک‌سر گیردار به استوانه صلب، هاب، به شعاع  $r$  متصل است. هاب توسط یک موتور با سرعت ثابت حول محور خود به گردش درمی‌آید. روی تیر و در نقاط مشخصی از آنها وصله‌های پیزوالکتریک به‌عنوان حسگر و عملگر در نظر گرفته

بررسی به همراه یک جفت وصله پیزوالکتریک متصل به آن در شکل نشان داده شده است.



شکل ۲- نمایی از مدل هندسی تیر دوار و وصله‌های پیزوالکتریک متصل به آن

با توجه به این شکل انرژی پتانسیل تیر به صورت زیر نوشته می‌شود

$$U = U_b + U_p \quad (3)$$

که در آن انرژی پتانسیل تیر و  $U_p$  انرژی پتانسیل وصله‌های پیزوالکتریک است. این مقادیر به صورت زیر محاسبه می‌شوند.

$$U_b = \frac{1}{2} \int_{V_b} \varepsilon \sigma dV_b + \frac{1}{2} \int_0^L F_{cp}(x) \left( \int_0^x \left( \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta \right) dx \quad (4)$$

در رابطه فوق  $V_b$  حجم تیر و  $F_{cp}(x)$  نیروی مرکزگرای ایجاد شده بر واحد طول در تیر هستند.

$$U_p = \sum_{n_p} \left( \int_{V_b} \varepsilon \sigma dV_b - \int_{V_p} E_z D dV_p + \int_0^{L_p} F_{cp}(x) \left( \int_0^x \left( \frac{\partial w}{\partial \zeta} \right)^2 d\zeta \right) dx \right) \quad (5)$$

در رابطه فوق  $V_p$  حجم وصله پیزوالکتریک،  $F_{cp}(x)$  نیروی مرکزگرای ایجادشده بر واحد طول در وصله پیزوالکتریک و  $n_p$  تعداد جفت وصله‌های پیزوالکتریک موجود در سطوح بالا و پایین تیر هستند. رابطه تنش و کرنش برای تیر همان رابطه خطی هوک در نظر گرفته می‌شود و برای وصله‌های پیزوالکتریک همانند رابطه میدان و جابجایی الکتریکی از رابطه (۱) محاسبه می‌شود. همچنین با توجه به اینکه مدل اویلر-برنولی برای تیر انتخاب شده است، کرنش به صورت زیر از روی تغییر شکل تیر محاسبه می‌شود

$$\varepsilon = -z \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (6)$$

که در آن  $z$  فاصله هر نقطه سطح مقطع از تار خنثی تیر است.

انرژی جنبشی تیر هوشمند نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود

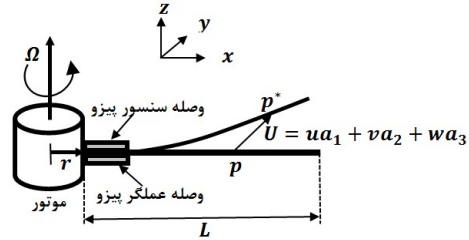
$$T = \frac{1}{2} \int_{V_b} \rho_b \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dV_b + \sum_{n_p} \int_{V_p} \rho_p \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dV_p \quad (7)$$

که در آن  $\rho_b$  و  $\rho_p$  به ترتیب چگالی تیر و وصله‌های پیزوالکتریک هستند. کار جزئی نیروهای ناپایستار خارجی وارد بر تیر نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\overline{\delta W_{nc}} = \int_0^L f(x, t) \delta w dx - \sum_{n_p} q V^a(t) \quad (8)$$

که در آن  $f(x, t)$  بار عرضی گسترده اعمال شده به تیر، و  $V^a(t)$  ولتاژ اعمالی به عملگر پیزوالکتریک و  $q$  بار الکتریکی تولیدشده در این عملگر است و از رابطه زیر محاسبه می‌شود

می‌شود. در شکل فقط یک جفت از این وصله‌ها نشان داده شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود این وصله‌ها در انتهای تیر که به هاب متصل است به سطح بالا و زیرین تیر متصل شده‌اند.



شکل ۱- نمایی از یک بازوی هوشمند یک‌سرگردار دوار

در حالت کلی هر نقطه از تیر در سه جهت، یک جهت طولی، محور  $x$ ، و دو جهت عرضی در راستای محور دوران و عمود بر آن، محورهای  $z$  و  $y$ ، جابجا می‌شود. در شکل بردارهای یکه سه راستای  $x$  و  $y$  و  $z$  به ترتیب با  $a_1$ ،  $a_2$  و  $a_3$  نشان داده شده‌اند. در این تحقیق با فرض اینکه ضخامت تیر در راستای عمود بر محور دوران از ضخامت آن در راستای محور دوران بسیار بیشتر است، فقط نوسان تیر در جهت عرضی در راستای محور دوران، محور  $z$ ، مورد بررسی قرار گرفته است. تغییر شکل تیر در این راستا با  $w$  نشان داده می‌شود.

## ۲-۱- معادلات حاکم بر مواد پیزوالکتریک

مواد پیزوالکتریک موادی هستند که اگر تحت تغییر شکل مکانیکی قرار گیرند بار الکتریکی تولید می‌کنند (اثر مستقیم) و اگر یک میدان الکتریکی به آنها وارد شود تغییر شکل مکانیکی می‌دهند (اثر معکوس).

از آنجا که وصله‌های پیزوالکتریک روی سطح تیر نصب شده‌اند و با فرض آنکه میدان الکتریکی آنها در یک جهت،  $a_3$ ، باشد، در این صورت معادلات حاکم بر رفتار این وصله‌ها عبارتند از [۲۱]

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_p & -dE_p \\ dE_p & \epsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon \\ E_z \end{bmatrix} \quad (1)$$

که در آن  $\varepsilon$  کرنش،  $E_p$  مدول الاستیسیته پیزوالکتریک،  $\epsilon$  ثابت دی‌الکتریک پیزوالکتریک،  $d$  ضریب کوپلینگ ماده پیزوالکتریک،  $\sigma$  تنش در راستای  $a_1$ ،  $E_z$  میدان الکتریکی در راستای ضخامت وصله و  $D$  جابجایی الکتریکی در راستای ضخامت وصله،  $a_3$ ، است.

## ۲-۲- معادلات حرکت تیر هوشمند

در این بخش معادلات حاکم بر رفتار تیر هوشمند دوار با استفاده از اصل تعمیم‌یافته هامیلتون و روش المان محدود استخراج خواهد شد. اصل تعمیم‌یافته هامیلتون برای یک سیستم دینامیکی به صورت زیر نوشته می‌شود [۲۲].

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta T - \delta U + \overline{\delta W_{nc}}] dt = 0$$

$$\delta w(t_1) = \delta w(t_2) = 0, \quad \delta D(t_1) = \delta D(t_2) = 0$$

که در آن  $T$  انرژی جنبشی،  $U$  انرژی پتانسیل و  $\overline{\delta W_{nc}}$  کار جزئی نیروهای ناپایستار وارد بر سیستم است. نمایی از هندسه تیر مورد

ماتریس سختی کوپلینگ الکترومکانیکی وصله‌های پیزوالکتریک،  $C_p$  ماتریس سختی ظرفیت خازنی وصله‌های پیزوالکتریک،  $P_{ex}$  بردار نیروهای مکانیکی اعمال شده به المان و  $B_{elec}$  بردار ضرایب نیروهای الکتریکی است. همچنین بردار سیگنال کنترلی (ولتاژ) عملگرهای پیزوالکتریک است.

همچنین معادلات مربوط به المان‌های فاقد وصله‌های پیزوالکتریک نیز به شکل

$$M^w \ddot{d}^w + K^w d^w + H^w \dot{d}^w = F^w \quad (11)$$

نوشته می‌شوند که در آن ماتریس جرمی المان،  $M^w$  ماتریس سختی،  $H^w$  ماتریس سختی ناشی از دوران المان،  $F^w$  بردار نیروهای اعمالی بر المان در راستای  $w$  است. در روابط فوق  $d^e$  و  $d^w$  برای هر المان به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$d^w = \left[ w_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} \quad w_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} \quad w_3 \frac{\partial w_3}{\partial x} \right]^T, \quad d^e = [d_1 \quad d_2 \quad d_3]^T \quad (12)$$

که در آن  $d_1$ ،  $d_2$  و  $d_3$  جابجایی الکتریکی در گره‌های المان‌های شامل وصله‌های پیزوالکتریک هستند.

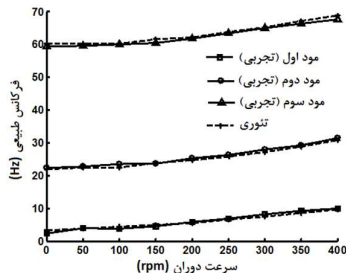
با حذف  $d^e$  بین دو معادله رابطه (۱۰) و با در نظر گرفتن  $n$  المان برای تیر دوار و همچنین با در نظر گرفتن یک میرایی تناسبی برای سیستم، معادلات ترکیب شده به شکل کلی زیر نوشته می‌شود

$$M \ddot{d}^w + C \dot{d}^w + K d^w = F_{ex} + F_{elec} V^a(t) \quad (13)$$

که در آن برداری است متشکل از جابجایی و شیب گره‌های در نظر گرفته شده برای تیر،  $M$  ماتریس اینرسی کل سیستم،  $C$  ماتریس میرایی کل سیستم و  $K$  ماتریس سختی کل سیستم است. همچنین بردار نیروهای خارجی وارد بر سیستم و  $F_{elec}$  ماتریس ضرایب نیروهای الکتریکی است.

برای بررسی درستی معادلات به دست آمده، سه فرکانس اول سیستم بر حسب سرعت دوران تیر از طریق معادلات استخراج شده محاسبه و با فرکانس‌های طبیعی اندازه‌گیری شده در [۱۴] مقایسه شده‌اند. این مقایسه در شکل نشان داده شده است. لازم به ذکر است برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی از طریق معادلات از مشخصات تیر مورد آزمایش در [۱۴] استفاده شده است.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود تطبیق مناسبی بین فرکانس‌های محاسبه شده و فرکانس‌های اندازه‌گیری شده وجود دارد.



شکل ۵- فرکانس‌های محاسبه شده و اندازه‌گیری شده

#### ۲-۴- معادلات مربوط به حسگر پیزوالکتریک

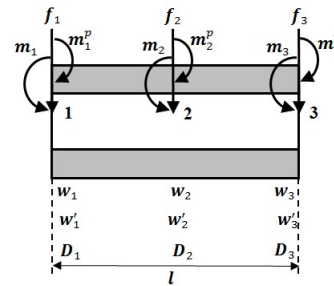
همان‌گونه که قبلاً نیز گفته شد، هنگامی که یک ماده پیزوالکتریک تحت تاثیر یک کرنش مکانیکی قرار می‌گیرد، یک بار

$$q = \int_{A_p} D d A_p \quad (9)$$

که در آن  $A_p$  مساحت سطح مقطع عملگر پیزوالکتریک است.

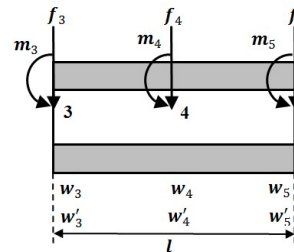
#### ۲-۳- مدل المان محدود تیر هوشمند

به دلیل پیچیده بودن معادلات حاکم بر رفتار سیستم، در این تحقیق معادلات سیستم مورد بررسی به کمک روش المان محدود گسسته‌سازی می‌شوند. از آنجا که تیر در نقاط مختلف دارای وصله‌های پیزوالکتریک است، برای استخراج مدل المان محدود آن از دو نوع المان استفاده می‌شود. یکی از این المان‌ها، یک المان تیر ۹ درجه آزادی با درجات آزادی مکانیکی و الکتریکی است. این المان برای قسمت‌هایی که شامل وصله‌های پیزوالکتریک هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرد. نمایی از این المان و درجات آزادی آن در شکل نشان داده شده است.



شکل ۳- نمایی از المان ۹ درجه آزادی تیر

در شکل فوق  $f_i$  و  $m_i$  به ترتیب نیرو و گشتاور اعمالی در گره  $i$ ام،  $w_i$  و  $w'_i$  و  $D_i$  به ترتیب تغییر مکان عرضی تیر، شیب آن و جابجایی الکتریکی گره  $i$ ام و  $m_i^p$  گشتاور اعمالی توسط پیزوالکتریک در گره  $i$ ام هستند. المان دوم یک المان تیر ۶ درجه آزادی با درجات آزادی مکانیکی است. این المان برای قسمت‌هایی از تیر که شامل وصله‌های پیزوالکتریک نیستند، استفاده می‌شود. نمایی از این المان هم در شکل نشان داده شده است.



شکل ۴- نمایی از المان ۶ درجه آزادی تیر

با در نظر گرفتن توابع درون‌یاب مناسب معادلات مربوط به المان‌های شامل وصله‌های پیزوالکتریک به شکل

$$(M_b + M_p) \ddot{d}^w + (K_b + K_p + H_b + H_p) \dot{d}^w + \theta d^e = P_{ex} \quad (10)$$

نوشته می‌شوند. در معادلات فوق  $M_b$  ماتریس جرمی مربوط به قسمت تیر،  $M_p$  ماتریس جرمی مربوط به وصله‌های پیزوالکتریک،  $K_b$  ماتریس سختی مربوط به قسمت تیر،  $K_p$  ماتریس سختی مربوط به وصله‌های پیزوالکتریک،  $H_b$  ماتریس سختی ناشی از دوران قسمت تیر،  $H_p$  ماتریس سختی ناشی از دوران مربوط به وصله‌های پیزوالکتریک،  $\theta$

منظور طراحی شده و پاسخ سیستم در حضور این سه نوع کنترل کننده مورد بررسی قرار گرفته است.

### ۳-۱- کنترل کننده بهینه LQR

این کنترل کننده در حقیقت یک تنظیم کننده بهینه به کمک فیدبک حالت است. به عبارت دیگر در این روش سیگنال کنترلی به نحوی تنظیم می‌گردد که ضمن بهینه کردن تابع هدفی مشخص، قطب‌های سیستم حلقه بسته به سمت چپ محور موهومی منتقل شده و سیستم پایدار گردد [۲۳].

### ۳-۲- کنترل کننده بهینه LQG

در قسمت قبل، یک سیستم کنترل بهینه با پسخورد حالت ارایه شد. این کار با فرض کنترل پذیری کامل سیستم و با پسخورد گرفتن از کلیه حالت‌های سیستم انجام شد. ولی در بسیاری از کاربردهای واقعی، اندازه گیری تمامی متغیرهای حالت امکان پذیر نیست و یا از نظر اقتصادی مقرون به صرفه نیست. همچنین در بسیاری از موارد ممکن است که به علت نویز فراوان محیطی، اندازه گیری‌های انجام شده برای فیدبک و یا حتی خروجی سیستم مناسب نباشد. در تمامی این موارد و مواردی از این قبیل، نمی‌توان به تمام متغیرهای حالت برای پسخورد دسترسی پیدا کرد. به همین منظور در چنین مواردی به جای پسخورد گرفتن از تمامی متغیرهای حالت، از مقادیر تخمینی آنها استفاده می‌شود [۲۳].

### ۳-۳- کنترل کننده پسخورد سرعت

همان گونه که مشاهده شد در دو کنترل کننده قبلی از پسخورد متغیرهای حالت سیستم و یا مقادیر تخمینی آنها استفاده شد. همچنین برای محاسبه مقادیر تخمینی متغیرهای حالت از پسخورد خروجی سیستم، که در اینجا جابجایی انتهای تیر است، استفاده شد. در هیچ یک از حالت‌های فوق از حسگرهای تعبیه شده در سیستم به صورت وصله‌های پیزوالکتریک استفاده نشده است. این موضوع اساس استفاده از این وصله‌های حسگری را به چالش می‌کشد. در این قسمت از روش کنترلی استفاده می‌شود که بتواند از خروجی حسگرهای پیزوالکتریک استفاده کند. به این نوع کنترل کننده، کنترل کننده پسخورد سرعت گفته می‌شود. در این نوع از کنترل کننده از مشتق ولتاژ خروجی حسگرهای پیزوالکتریک، که در حقیقت نماینده‌ای از نرخ تغییرات کرنش است، جهت کنترل نوسانات تیر استفاده می‌شود. با این کار استهلاک سیستم زیاد شده و نوسانات کنترل می‌شوند [۵]. به این ترتیب فرمان کنترلی به صورت زیر نوشته [۵]:

$$\mathbf{V}^a(t) = -\mathbf{G}\dot{\mathbf{V}}^s(t) \quad (22)$$

که در آن  $\mathbf{G}$  بهره کنترل فیدبک سرعت است و  $\mathbf{V}^s(t)$  از رابطه (۲۰) محاسبه می‌شود. با جای گذاری رابطه فوق در معادلات فضای حالت سیستم و با انجام چند عملیات ساده ماتریسی معادلات سیستم حلقه بسته بدون حضور اغتشاش به صورت

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}'\mathbf{x} \quad (23)$$

نوشته می‌شود که در آن

$$\mathbf{A}' = (\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{G}\mathbf{C}_s)^{-1}\mathbf{A} \quad (24)$$

الکتریکی در داخل آن تولید می‌شود، که این بار الکتریکی را می‌توان به عنوان اثر مستقیم ماده پیزوالکتریک (حسگر) به جریان الکتریکی تبدیل کرد. با توجه به اینکه به حسگر پیزوالکتریک هیچ پتانسیل الکتریکی اعمال نمی‌شود، و میدان الکتریکی ایجاد شده در داخل ماده پیزوالکتریک ناچیز است، لذا  $E_z = 0$  خواهد بود. به این ترتیب جابجایی الکتریکی در راستای ضخامت پیزوالکتریک به شکل زیر محاسبه می‌شود

$$D = dE_p \varepsilon \quad (14)$$

به این ترتیب کل بار الکتریکی که در اثر کرنش مکانیکی (تغییر شکل عرضی تیر) روی سطح الکترودهای پیزوالکتریک ایجاد می‌شود عبارت است از:

$$q(t) = \int_{A_p} D \, dA_p \quad (15)$$

در این صورت شدت جریان الکتریکی خروجی از حسگر که در اثر این بار الکتریکی تولید می‌شود عبارت است از:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{A_p} D \, dA = \frac{d}{dt} \int_{A_p} dE_p \varepsilon \, dA_p \quad (16)$$

با استفاده از رابطه (۶) و همچنین مدل المان محدود استفاده شده برای مدل سازی سیستم، رابطه فوق به شکل زیر بازنویسی می‌شود

$$i(t) = \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{d}}^w \quad (17)$$

که در آن  $\mathbf{p}$  برداری ثابت است. این بردار با استفاده از توابع شکل انتخاب شده محاسبه می‌شود. بدین ترتیب ولتاژ خروجی حسگر بر حسب بردار جابجایی گره‌های مربوط به وصله پیزوالکتریک عبارت است از [۲۱]:

$$\mathbf{V}^s(t) = \mathbf{G}_s \mathbf{p}^T \dot{\mathbf{d}}^w \quad (18)$$

که در آن  $\mathbf{G}_s$  ضریب تقویت حسگر است.

### ۲-۵- مدل فضای حالت سیستم

با در نظر گرفتن بردار حالت زیر

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{d}^w(t) \\ \dot{\mathbf{d}}^w(t) \end{bmatrix} \quad (19)$$

معادلات فضای حالت تیر دوار هوشمند به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{V}^a(t) + \mathbf{D}\mathbf{F}_{ex} \quad (20)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}_r \mathbf{x}(t) \quad , \quad \mathbf{V}^s(t) = \mathbf{C}_s \mathbf{x}(t)$$

که در آن

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{F}_{elec} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{C}_s = [\mathbf{0} \quad \mathbf{G}_s \mathbf{p}^T] \quad ,$$

است.  $\mathbf{C}_r$  نیز به گونه‌ای انتخاب می‌شود که خروجی  $\mathbf{y}$  جابجایی انتهای تیر باشد.

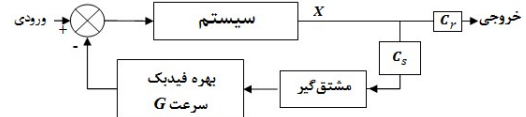
### ۳- کنترل فعال نوسانات

همان گونه که قبلا نیز ذکر شد، هدف از انجام این تحقیق، کنترل فعال ارتعاشات تیر دوار به کمک وصله‌های پیزوالکتریک تعبیه شده روی آن است. لذا در این بخش سه نوع کنترل کننده مختلف برای این

است. پاسخ معادله (۲۳) عبارت است از

$$\mathbf{x} = e^{A^t} \mathbf{x}_0 \quad (25)$$

که در آن شرایط اولیه سیستم است. به این ترتیب با طراحی مناسب بهره کنترل کننده می توان علاوه بر پایدار نمودن سیستم مشخصات مطلوبی نیز برای پاسخ زمانی اعمال نمود. شکل نمودار جعبه ای سیستم حلقه بسته با پسخورد سرعت را نشان می دهد.



شکل ۶- نمودار جعبه ای حلقه بسته سیستم در حضور کنترل کننده پسخورد سرعت

#### ۴- نتایج عددی

در این بخش به شبیه سازی رفتار تیر دوار به ازای ورودی های مختلف به عنوان اغتشاش و در حضور کنترل کننده های معرفی شده در بخش قبل پرداخته می شود. نتایج در دو بخش مختلف ارائه شده است. در بخش اول فقط یک جفت وصله پیزوالکتریک در ابتدای تیر و در محل اتصال تیر به استوانه مرکزی، هاب، در نظر گرفته شده است. در این حالت سیستم یک سیستم تک ورودی- تک خروجی خواهد بود. در بخش دوم چند جفت وصله پیزوالکتریک در نقاط مختلف تیر در نظر گرفته شده است. در این حالت سیستم یک سیستم چند ورودی - تک خروجی خواهد بود. خصوصیات فیزیکی و هندسی تیر دوار و مواد پیزوالکتریک در جدول ۱ ارائه شده است. همچنین در این شبیه سازی ها، سرعت دورانی استوانه مرکزی و تیر متصل به آن ۳۰۰ دور بر دقیقه در نظر گرفته شده است. همچنین برای شبیه سازی تیر از ۵ المان استفاده شده است.

جدول ۱- مشخصات فیزیکی سیستم مورد بررسی

خواص فیزیکی تیر	خواص فیزیکی پیزوالکتریک
$L = 0.15$ (m)	$L_p = 0.1$ (m)
$b_b = 36$ (mm)	$b_p = 36$ (mm)
$t_b = 1$ (mm)	$t_p = 2$ (mm)
$E_b = 72$ (Gpa)	$E_p = 68$ (Gpa)
$a_h = 0.1$ (m)	$d = -320 \times 10^{-10} (mN^{-1})$
	$\epsilon = 2/37 \times 10^{-10} (F/m)$

در این جدول  $E_p$  و  $E_b$  به ترتیب مدول الاستیسیته تیر و وصله های پیزوالکتریک هستند.

#### ۴-۱- سیستم تک ورودی

همان گونه که قبلا گفته شد در این بخش با در نظر گرفتن یک جفت وصله پیزوالکتریک در ابتدای تیر، به بررسی کنترل فعال ارتعاشات یک تیر دوار به صورت یک سیستم تک ورودی- تک خروجی پرداخته می شود. همچنین از دو نیروی مختلف یکی نیروی ضربه ای با اندازه ضربه ۱۰ نیوتن ثانیه در زمان  $t=1$  ثانیه و دیگری نیروی هارمونیک با فرکانس  $8/44$  هرتز که به عنوان اغتشاش به انتهای تیر وارد می شود، استفاده شده است. پارامترهای انتخابی برای

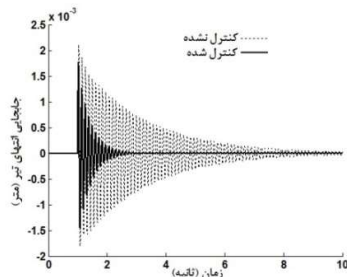
کنترل کننده های مختلف در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲- پارامترهای انتخابی برای سه نوع کنترل کننده معرفی شده.

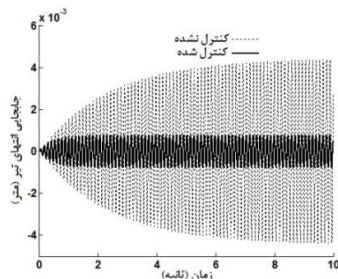
کنترل کننده	$Q$	$R$	$G$
LQR	$30 \times 10^{-5} I$	۱۰۰	-
LQG	$2 \times 10^{-7} I$	۲۳۰	-
پسخورد سرعت	-	-	۰/۸

در جدول فوق  $I$  ماتریس همانی با ابعاد مناسب است. لازم به ذکر است انتخاب ماتریس های وزنی در کنترل کننده های بهینه و همچنین بهره پسخورد  $G$  در کنترل کننده پسخورد سرعت، به اهداف طراحی کنترل کننده بستگی دارد. در این تحقیق دو هدف زمان نشست سیستم و اندازه ولتاژ اعمالی به عملگر پیزوالکتریک به عنوان اهداف طراحی در نظر گرفته شده است. علت انتخاب اندازه ولتاژ عملگر پیزوالکتریک به عنوان یک هدف طراحی، محدود بودن ولتاژ اعمالی به عملگر پیزوالکتریک است. این مقدار، که در حقیقت حد اشباع عملگر است، ۳۰۰ ولت در نظر گرفته شده است [۲۴]. جابجایی انتهای تیر دوار برای دو اغتشاش در نظر گرفته شده در حضور کنترل کننده LQR در شکل های ۷ و ۸ نشان داده شده است. همچنین ولتاژ اعمالی به عملگر پیزوالکتریک در این دو حالت در شکل های ۹ و ۱۰ نشان داده شده است.

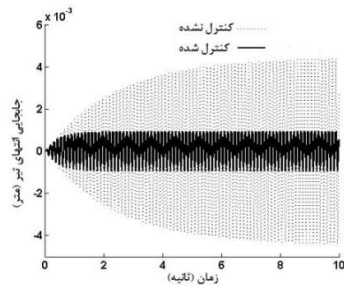
همان گونه که از شکل مشاهده می شود کنترل کننده LQR اغتشاش نیروی ضربه ای به تیر را بسیار سریعتر از استهلاک موجود در سیستم کنترل کرده است.



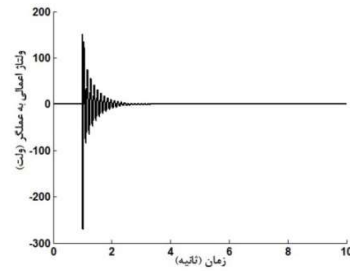
شکل ۷- پاسخ انتهای تیر دوار تحت اغتشاش ضربه با LQR



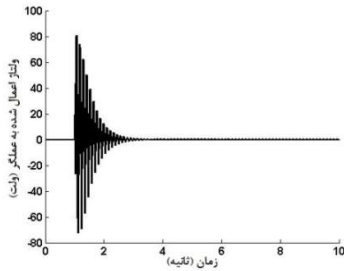
شکل ۸- پاسخ انتهای تیر دوار تحت اغتشاش هارمونیک با LQR



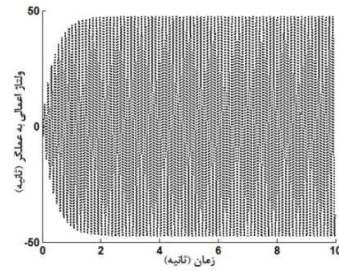
شکل ۱۲- پاسخ انتهای تیر دوار تحت اغتشاش هارمونیک با LQG



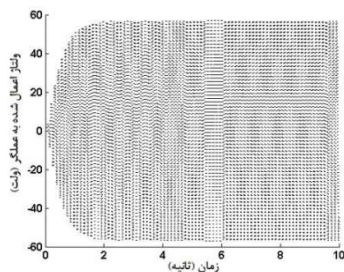
شکل ۹- ولتاژ اعمالی به عملگر تحت اغتشاش ضربه با LQR



شکل ۱۳- ولتاژ اعمالی به عملگر تحت اغتشاش ضربه با LQG



شکل ۱۰- ولتاژ اعمالی به عملگر تحت اغتشاش هارمونیک با LQR



شکل ۱۴- ولتاژ اعمالی به عملگر تحت اغتشاش هارمونیک با LQG

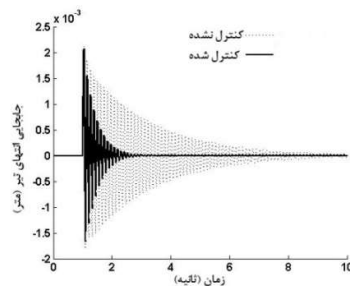
همچنین این کنترل کننده اغتشاش هارمونیک را نیز تحت کنترل در آورده، شکل ، و دامنه نوسان تیر را نسبت به سیستم بدون کنترل به شدت کاهش داده است. مقدار ولتاژ مورد نیاز برای کنترل نوسانات تیر در حضور هر دو اغتشاش، شکل های ۹ و ۱۰ از حد اشباع عملگر، ۳۰۰ ولت، کمتر بوده است.

نتایج شبیه سازی برای اغتشاش ضربه ای و هارمونیک اعمال شده به انتهای تیر، برای کنترل کننده LQG در شکل های ۱۱ و ۱۲ ارایه شده است. همچنین ولتاژ اعمال شده به عملگر پیژوالکتریک در این دو حالت در شکل های ۱۳ و ۱۴ نشان داده شده است.

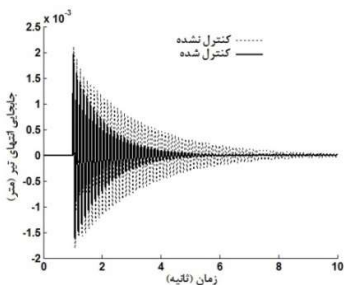
همان گونه که مشاهده می شود کنترل کننده LQG نیز اغتشاش ضربه ای را به سرعت دفع کرده و دامنه نوسان تیر در حضور اغتشاش هارمونیک را نیز به مقدار قابل توجهی کاهش داده است.

ضمن آنکه عملگرها نیز اشباع نشده اند. نتایج شبیه سازی برای نیروی ضربه ای و نیروی هارمونیک اعمال شده به انتهای تیر، در حضور کنترل کننده پسخورد سرعت در شکل های ۱۵ تا ۱۸ ارایه شده است. شکل های ۱۵ و ۱۶ جابجایی انتهای تیر و شکل های ۱۷ و ۱۸ ولتاژ اعمالی به عملگر را نشان می دهند.

در این حالت نیز کنترل کننده پسخورد سرعت ضمن آنکه نوسانات سیستم را کنترل کرده است ولتاژ اعمالی به عملگرها نیز به حد اشباع خود نرسیده است.



شکل ۱۱- پاسخ انتهای تیر دوار تحت اغتشاش ضربه با LQG



شکل ۱۵- پاسخ انتهای تیر دوار تحت اغتشاش ضربه با پسخورد

تخمینی آنها استفاده شده است. همچنین ولتاژ اعمالی به عملگر پیزوالکتریک در این کنترل کننده نیز همانند کنترل کننده LQR کمتر از ۳۰۰ ولت و در حدود ۲۹۰ ولت است. زمان نشست سیستم در حضور کنترل کننده پسخورد سرعت و اغتشاش ضربه‌ای، در حدود ۵ ثانیه است و همان طور که از شکل مشخص است ولتاژ اعمالی به عملگر پیزوالکتریک در این حالت نیز کمتر از ۳۰۰ ولت و در حدود ۲۹۰ ولت است. نکته قابل توجه در انتخاب ضریب بهره کنترل کننده پسخورد سرعت این است که با افزایش بهره کنترل کننده پسخورد سرعت، زمان نشست سیستم به شدت کاهش می‌یابد. در عوض، این امر باعث افزایش ولتاژ ورودی عملگر می‌شود.

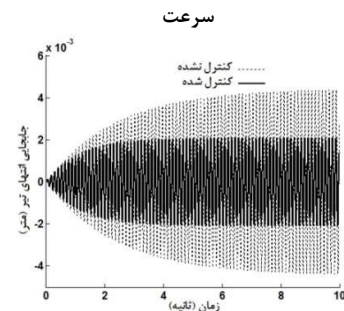
با اینکه مبنای دقیقی برای مقایسه بین کنترل کننده پسخورد سرعت، LQR و LQG وجود ندارد ولی با توجه به پاسخ سیستم به اغتشاش ضربه‌ای، زمان نشست در کنترل کننده بهینه LQR کمتر از کنترل کننده پسخورد سرعت و LQG است. در واقع از دیدگاه نظریه کنترل کننده بهینه LQR با توجه به پسخورد کردن همه متغیرهای حالت سیستم، نسبت به کنترل کننده پسخورد سرعت و LQG بهتر عمل می‌کند. ولی در عمل طراحی کنترل کننده‌ای که بتواند از همه متغیرهای حالت سیستم پسخورد بگیرد امکان‌پذیر و یا به صرفه نیست و بنابراین انتخاب کنترل کننده پسخورد سرعت و LQG منطقی‌تر به نظر می‌رسد. نتایج مربوط به اغتشاش هارمونیک در حضور سه کنترل کننده معرفی شده نیز نشان می‌دهد دامنه نوسانات ماندگار با کنترل کننده LQR از ۵ میلیمتر در حالت بدون کنترل کننده به حدود ۰/۸ میلیمتر طی مدت زمان حدودی یک ثانیه رسیده است. این در حالی است که با کنترل کننده LQG دامنه نوسانات به حدود ۱ میلیمتر در مدت زمان کمی بیشتر از یک ثانیه کاهش یافته است. همچنین این دامنه در حضور کنترل کننده پسخورد سرعت در مدت زمان دو ثانیه به ۲ میلیمتر کاهش یافته است.

#### ۴-۳- سیستم چند ورودی

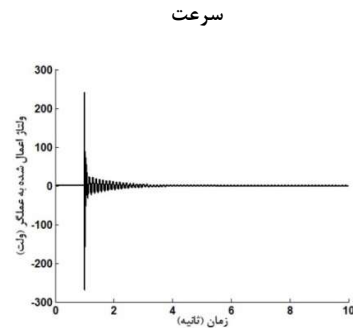
در این بخش با در نظر گرفتن تعداد بیشتری جفت وصله پیزوالکتریک، به بررسی کنترل فعال ارتعاشات یک تیر دوار به صورت یک سیستم چند ورودی پرداخته می‌شود. بدین منظور چهار جفت وصله پیزوالکتریک در نقاط مختلف تیر دوار در نظر گرفته شده است. این نقاط عبارتند از: **جفت اول:** ۲/۵ سانتیمتری ابتدای تیر. **جفت دوم:** ۱۲/۵ سانتیمتری ابتدای تیر. **جفت سوم:** ۲۲/۵ سانتیمتری ابتدای تیر. **جفت چهارم:** ۳۷/۵ سانتیمتری ابتدای تیر.

کلیه مقادیر فیزیکی در نظر گرفته شده برای تیر دوار همانند شبیه‌سازی بخش قبل است. همچنین در این قسمت از دو نوع کنترل کننده LQR و پسخورد سرعت برای کنترل ارتعاشات سیستم استفاده شده است و ضرایب کنترل کننده و ماتریس‌های وزنی نیز همانند قبل در نظر گرفته شده است.

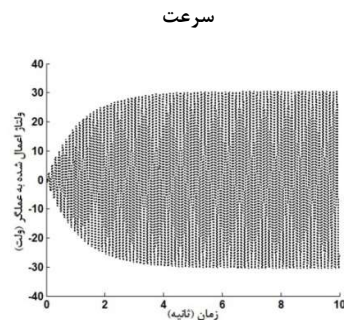
اغتشاش در نظر گرفته شده در این بخش نیز همانند بخش اول یک نیروی ضربه‌ای به اندازه ۱۰ نیوتن ثانیه است که در لحظه  $t=1$  ثانیه به انتهای تیر وارد می‌شود. جابجایی انتهای تیر در حضور کنترل کننده LQR در **Error! Reference source not found.** و در حضور کنترل کننده پسخورد سرعت در شکل نشان داده شده است.



شکل ۱۶- پاسخ انتهای تیر دوار تحت اغتشاش هارمونیک با پسخورد



شکل ۱۷- ولتاژ اعمالی به عملگر تحت اغتشاش ضربه با پسخورد



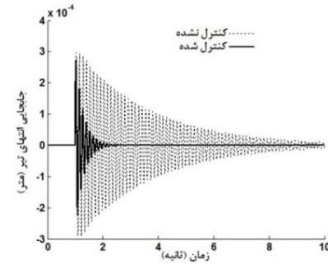
شکل ۱۸- ولتاژ اعمالی به عملگر تحت اغتشاش هارمونیک با پسخورد

#### ۴-۲- تحلیل نتایج

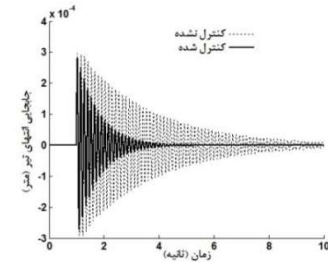
همان گونه که از نتایج مشخص است، هر سه کنترل کننده در انجام وظیفه خود که کاهش نوسانات انتهای تیر بوده است، موفق بوده‌اند. مدت زمان نشست سیستم در حضور کنترل کننده LQR و اغتشاش نیروی ضربه‌ای حدود ۱/۷ ثانیه و ولتاژ اعمالی به عملگر پیزوالکتریک کمتر از ۳۰۰ ولت و در حدود ۲۹۰ ولت است. بررسی‌ها نشان می‌دهد افزایش ضریب وزنی مربوط به ماتریس **Q** زمان نشست پاسخ انتهای تیر را کاهش ولی در مقابل ولتاژ اعمال شده به عملگر پیزوالکتریک را افزایش می‌دهد. این در حالی است که با افزایش ضریب وزنی مربوط به ماتریس **R** زمان نشست سیستم افزایش و ولتاژ اعمالی به عملگر پیزوالکتریک کاهش می‌یابد. مدت زمان نشست در حضور کنترل کننده LQG و اغتشاش ضربه‌ای حدود ۲ ثانیه است که نسبت به کنترل کننده LQR، ۰/۳ ثانیه بیشتر است. این امر به آن دلیل است که در این کنترل کننده به جای پسخورد حالت‌های واقعی سیستم از مقادیر



پس‌خورده سرعت مورد بررسی قرار گرفت. ابتدا معادلات دینامیکی حاکم بر تیر دوار با وصله‌های پیزوالکتریک به دست آمدند و سپس این معادلات به شکل معادلات فضای حالت بازنویسی شدند. پس از آن و در بخش اول با در نظر گرفتن فقط یک جفت وصله پیزوالکتریک، تاثیر کنترل‌کننده‌های فوق‌الذکر بر رفتار سیستم بررسی شد. سپس با افزودن تعداد بیشتری عملگر و حسگر پیزوالکتریک و تبدیل سیستم به یک سیستم چند ورودی، تاثیر کنترل‌کننده‌های LQR و پس‌خورده سرعت بر رفتار سیستم مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان داد، کارایی کنترل‌کننده بهینه LQR به واسطه پس‌خورده گرفتن از کلیه حالت‌های سیستم، از کنترل‌کننده‌های دیگر بهتر است. ولی در عمل پس‌خورده گرفتن از کلیه حالت‌ها یا امکان‌پذیر نیست و یا هزینه سیستم را بسیار افزایش می‌دهد. از طرف دیگر با افزایش تعداد وصله‌های پیزوالکتریک، رفتار سیستم بهتر از حالت سیستم تک ورودی کنترل می‌شود. البته طبیعی است در این حالت هزینه تجهیزات کنترلی سیستم نیز بیشتر خواهد بود. پیدا کردن تعداد و محل بهینه وصله‌های پیزوالکتریک و همچنین مدل‌سازی هیستریسیس مربوط به پیزوالکتریک‌ها می‌تواند موضوعات تحقیقات بعدی باشد.



شکل ۱۹- نوسانات انتهای تیر دوار در حضور کنترل‌کننده LQR تحت اغتشاش ضربه‌ای و چهار جفت وصله پیزوالکتریک



شکل ۲۰- نوسانات انتهای تیر دوار در حضور کنترل‌کننده پس‌خورده سرعت تحت اغتشاش ضربه‌ای و چهار جفت وصله پیزوالکتریک

### ۶- فهرست نشانه‌ها

$A$	مساحت سطح مقطع ( $m^2$ )
$b$	عرض (m)
$B_{elec}$	بردار ضرایب نیروهای الکتریکی
$C$	ماتریس میرایی کل سیستم
$C_p$	ماتریس سختی ظرفیت خازنی
$D$	جابجایی الکتریکی
$d$	ضریب کوپلینگ دی‌الکتریک
$d^e$	بردار جابجایی الکتریکی المان
$d^w$	بردار جابجایی مکانیکی المان
$d_t^w$	بردار جابجایی مکانیکی و الکتریکی کل سیستم
$E$	مدول الاستیسیته ( $N/m^2$ )
$E_z$	میدان الکتریکی در راستای ضخامت ( $N/C$ )
$f(x, t)$	بار عرضی گسترده خارجی بر واحد طول ( $N/m$ )
$F_c$	نیروی مرکزگرا بر واحد طول ( $N/m$ )
$F^w$	بردار نیروهای اعمالی بر المان
$F_{ex}$	بردار نیروهای خارجی وارد بر کل سیستم
$G_s$	ضریب تقویت حسگر
$H$	ماتریس سختی ناشی از دوران کل سیستم
$H_b$	ماتریس سختی تیر ناشی از دوران المان‌های با پیزو
$H_p$	ماتریس سختی پیزو ناشی از دوران المان‌های با پیزو
$H^w$	ماتریس سختی ناشی از دوران المان‌های بدون پیزو
$K$	ماتریس سختی کل سیستم
$K_b$	ماتریس سختی تیر المان‌های با پیزوالکتریک
$K_p$	ماتریس سختی پیزو المان‌های با پیزوالکتریک
$K^w$	ماتریس سختی المان‌های بدون پیزوالکتریک
$L$	طول (m)
$M$	ماتریس اینرسی کل سیستم

همان‌گونه که از Error! Reference source not found.

مشاهده می‌شود نوسانات انتهای تیر در حضور کنترل‌کننده LQR بسیار سریعتر از استهلاك سیستم کنترل شده و زمان نشست آن در حدود ۱ ثانیه است. همچنین، همان‌طور که از شکل مشاهده می‌شود کنترل‌کننده پس‌خورده سرعت نیز نوسانات انتهای تیر را بسیار سریعتر از استهلاك سیستم کنترل کرده و زمان نشست در حضور این کنترل‌کننده در حدود ۲/۵ ثانیه است.

با یک مقایسه بین سیستم تک ورودی و سیستم چند ورودی می‌توان دریافت که سیستم چند ورودی بهتر از سیستم تک ورودی ارتعاشات سیستم را کنترل کرده است. مقایسه بین زمان نشست نشان می‌دهد، زمان نشست سیستم در حضور چندین وصله پیزوالکتریک (برای کنترل‌کننده LQR، ۱ ثانیه و برای کنترل‌کننده پس‌خورده سرعت، ۲/۵ ثانیه) از زمان نشست سیستم در حضور فقط یک جفت وصله پیزوالکتریک (برای کنترل‌کننده LQR، ۱/۷ ثانیه و برای کنترل‌کننده پس‌خورده سرعت، ۵ ثانیه) کمتر است. از طرف دیگر با وجودی که نتایج نشان می‌دهد سیستم چند ورودی در حضور کنترل‌کننده LQR، بازده بهتری نسبت به همین سیستم در حضور کنترل‌کننده پس‌خورده سرعت دارد ولی کنترل‌کننده‌های پس‌خورده سرعت، به صورت مجزا برای هر ورودی طراحی می‌شوند در حالی که یک ماتریس بهره  $K$  کلی برای کنترل‌کننده LQR طراحی می‌شود. این امر به کاربر کمک می‌کند تا هر کنترل‌کننده را به صورت جداگانه تنظیم و تاثیر آن روی رفتار سیستم را بررسی کند.

### ۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق مساله کنترل فعال ارتعاشات یک تیر دوار به کمک وصله‌های پیزوالکتریک در حضور کنترل‌کننده‌های LQR، LQG و

- [8] Roy T., and Chakraborty D., Optimal vibration control of smart fiber reinforced composite shell structures using improved genetic algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 319, No. 1-2, pp. 15-40, 2009.
- [9] Kapuria S., and Yasin M. Y., Active vibration control of piezoelectric laminated beams with electroded actuators and sensors using an efficient finite element involving an electric node. *Smart Materials and Structures*, Vol. 19, No. 4, pp. 045019, 2010.
- [10] Zorić N. D., Simonović A. M., Mitrović Z. S., and Stupar S. N., Optimal vibration control of smart composite beams with optimal size and location of piezoelectric sensing and actuation. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, Vol. 24, No. 1, pp. 499-526, 2012.
- [11] Jovanović M. M., Simonović A. M., Zorić N. D., Lukić N. S., Stupar S. N., and Ilić S. S., Experimental studies on active vibration control of a smart composite beam using a PID controller. *Smart Materials and Structures*, Vol. 22, No. 11, pp. 1-8, 2013.
- [12] Hasheminejad S. M., and Vahedi M., Active vibration control of a thick piezolaminated beam with imperfectly integrated sensor and actuator layers. *International Journal of Automation and Control*, Vol. 8, No. 1, pp. 58-87, 2014.
- [13] S. Aligholizadeh, M. A. Hamed, and Qadim R. H., Active vibration control of the clamped beam with length and location optimized piezoelectric patches. *Madares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 9, pp. 11-22, 2015. (in Persian)
- [14] Choi S. B., and Han M. S., Vibration control of a rotating cantilevered beam using piezoactuators: experimental work. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 277, No. 1-2, pp. 436-442, 2004.
- [15] Thakkar D., and Ganguli R., Dynamic response of rotating beams with piezoceramic actuation. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 270, No. 4-5, pp. 729-753, 2004.
- [16] El-Din M. A., and Tawfik M., Vibration attenuation in rotating beams with periodically distributed piezoelectric controllers. In *13th International Congress on Sound and Vibration (ICSV'06)*, Vienna, Austria, 2006.
- [17] Murtagh P. J., Ghosh A., Basu B., and Broderick B. M., Passive control of wind turbine vibrations including blade/tower interaction and rotationally sampled turbulence. *Wind Energy*, Vol. 11, No. 4, pp. 305-317, 2008.
- [18] Chandiramani N. K., Active control of a piezo-composite rotating beam using coupled plant dynamics. *Journal of Sound and Vibration*, vol. 329, no. 14, pp. 2716-2737, 2010.
- [19] Botta F., Marx N., Dini D., and Battista G., Experimental results for optimal placement of piezoelectric plates for active vibration control of a cantilever beam. *International Journal of Engineering and Technology*, Vol. 5, No. 5, pp. 4489-4494, 2013.
- [20] Fitzgerald B., Basu B., and Nielsen S. R., Active tuned mass dampers for control of in-plane vibrations of wind turbine blades. *Structural Control and Health Monitoring*, Vol. 20, No. 12, pp. 1377-1396, 2013.
- [21] Piefort V., *Finite element modelling of piezoelectric active structures*, Ph.D. Thesis, Université Libre de Bruxelles, 2001.
- [22] Baruh H., *Analytical dynamics* WCB/McGraw-Hill, Boston, 1999.
- [23] Burns R. S., *Optimal and robust control system design* Butterworth-Heinemann, Oxford, 2001.
- [24] Choi S. B., and Han M. S., Vibration control of a rotating cantilevered beam using piezoactuators: experimental work. *Journal of sound and vibration*, Vol. 277, No. 1, pp. 436-442, 2004.

ماتریس اینرسی تیر المان‌های با پیژوالکتریک	$M_b$
ماتریس اینرسی پیژو المان‌های با پیژوالکتریک	$M_p$
ماتریس اینرسی المان‌های بدون پیژوالکتریک	$M^w$
بردار نیروهای مکانیکی	$P_{ex}$
بار الکتریکی (C)	$q$
ماتریس وزنی حالت در کنترل کننده بهینه	$Q$
شعاع هاب (m)	$r$
ماتریس وزنی ورودی در کنترل کننده بهینه	$R$
ضخامت (m)	$t$
انرژی جنبشی	$T$
تغییر شکل طولی (m)	$u$
انرژی پتانسیل	$U$
تغییر شکل عرضی (m)	$v$
ولتاژ اعمالی به عملگر پیژوالکتریک (V)	$V^a$
ولتاژ خروجی حسگر (V)	$V^s$
تغییر شکل عرضی (m)	$w$
کار نیروهای ناپایستار	$W_{nc}$

### علائم یونانی

کرنش	$\varepsilon$
ثابت دی الکتریک	$\epsilon$
ماتریس سختی کوپلینگ الکترومکانیکی	$\theta$
چگالی	$\rho$
تنش	$\sigma$
سرعت دوران تیر	$\Omega$
<b>زیر نویس‌ها</b>	
تیر	$b$
پیژوالکتریک	$p$

### ۷-مراجع

- [1] Mao Q., and Pietrzko S., *Shunt Piezoelectric Circuits*, in: *Control of Noise and Structural Vibration: A MATLAB®-Based Approach*, Eds., pp. 325-366, London: Springer London, 2013.
- [2] Lee C. K., Chiang W. W., and O'Sullivan T. C., Piezoelectric modal sensor/actuator pairs for critical active damping vibration control. *The Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 90, No. 1, pp. 374-384, 1991.
- [3] Saravanos D. A., Mixed Laminate Theory and Finite Element for Smart Piezoelectric Composite Shell Structures. *AIAA Journal*, Vol. 35, No. 8, pp. 1327-1333, 1997.
- [4] Bruant L., Coffignal G., Lene F., and Verge M., Active control of beam structures with piezoelectric actuators and sensors: modeling and simulation. *Smart materials and structures*, Vol. 10, No. 2, pp. 404-408, 2001.
- [5] Narayanan S., and Balamurugan V., Finite element modelling of piezolaminated smart structures for active vibration control with distributed sensors and actuators. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 262, No. 3, pp. 529-562, 2003.
- [6] Dadfarnia M., Jalili N., Liu Z., and M. Dawson D., An observer-based piezoelectric control of flexible Cartesian robot arms: theory and experiment. *Control Engineering Practice*, Vol. 12, No. 8, pp. 1041-1053, 2004.
- [7] Seba B., Ni J., and Lohmann B., Vibration attenuation using a piezoelectric shunt circuit based on finite element method analysis. *Smart materials and structures*, Vol. 15, No. 2, pp. 509-517, 2006.