

اصلاح مدل رتبه کاسته تجزیه متعامد بهینه جهت شبیه سازی جریان ناپایای لایه ای تراکم ناپذیر با جایگزینی عبارت فشار بر حسب مودهای میدان سرعت

محمد کاظم مؤیدی

استادیار، آزمایشگاه پژوهشی دینامیک سیالات محاسباتی، بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه قم، قم، ایران

چکیده

در این پژوهش از روش تجزیه متعامد بهینه به منظور توسعه یک الگوی رتبه کاسته جهت شبیه سازی میدان جریان ناپایای تراکم ناپذیر استفاده شده است. معادلات حاکم بر دینامیک جریان پس از تصویرسازی در راستای مودهای پراثری تر، یک سامانه دینامیکی رتبه کاسته ایجاد می کنند. معمولاً این الگو با بهره گیری از نمایه های میدان سرعت ایجاد شده لذا مدل سازی عبارت فشار در معادله اندازه حرکت از اهمیت خاصی در صحت و پایداری الگوی حاصل برخوردار می باشد. دو روند برای این منظور وجود دارد که یکی مبتنی بر حذف عبارت فشار با وجود شرایط مرزی همگن و دیگری جایگزین نمودن عبارت فشار به نحوی شایسته در معادله اندازه حرکت می باشد. روشی که در این پژوهش به کار رفته، استفاده از نمایه های فشار به صورت مستقیم و بهره گیری از ضرایب مودال میدان سرعت برای میدان فشار می باشد. نتایج حاصل از الگو رتبه کاسته پیشنهادی با شبیه سازی های حاصل از حل عددی مستقیم مقایسه شده اند. از آنجا که تنها دلیل ناپایداری الگوهای رتبه کاسته عدم جایگزینی عبارت فشار نیست، لذا پاسخ الگو دینامیکی رتبه کاسته حاصل به طور کامل بر داده های حل عددی مستقیم منطبق نشده ولی در مقایسه با الگوهای رتبه کاسته کلاسیک از دقت بالاتری برخوردار می باشد.

واژه های کلیدی: جریان تراکم ناپذیر، جریان ناپایا، روش تجزیه متعامد بهینه، الگوی رتبه کاسته، مودهای فشار، تصویرسازی گالرکین.

Calibration of Reduced Order POD Model of Unsteady Incompressible Laminar Flow Using Pressure Representation as a Function of Velocity Field Modes

M. K. Moayyedi

CFD Research Laboratory, Department of Mechanical Engineering, University of Qom, Qom, Iran

Abstract

In this study, the proper orthogonal decomposition has been used to develop a reduced order model of the unsteady incompressible flows. After projection of governing equations along high level energy modes, a low-dimensional dynamical system is constructed. Usually, this model is developed using velocity field modes therefore pressure term representation in momentum equation will have an important role for stability and accuracy of outcome reduced order model. Two approaches are available for pressure term deputation, the first is based on elimination of pressure term due to homogenous condition on control volume boundaries and the second used appropriately method for pressure term representation in momentum equation. The method, which is used in this research, is based on using pressure snapshots and velocity field modal coefficients for calculation pressure field modes. The obtained results from proposed model have been compared with related DNS results. Because the instability behavior of reduced order model is not only related to pressure term modeling therefore response of low-dimensional dynamical system is not exactly verified with DNS data. But the outcome results from proposed model have higher accuracy than classic reduced order models.

Keywords: Incompressible Flow, Unsteady Flow, Proper Orthogonal Decomposition, Reduced Order Model, Pressure Modes, Galerkin Projection.

۱- مقدمه

روش تجزیه متعامد بهینه کاربردهای گسترده ای شامل توسعه مدل های رتبه کاسته، پردازش تصاویر و بازسازی داده ها و ساختارها دارد. این روش با محاسبه یک مجموعه از بردارهای پایه که می توانند ساختارهای پر انرژی سیستم را تسخیر کنند، آغاز شده و در صورت انتقال معادلات حاکم به فضای برداری تشکیل شده از این بردارهای پایه می توان دینامیک حاکم بر میدان را با تعداد ابعاد کمتری و با دقتی مناسب بازسازی نمود.

در یک تعریف کلی، روش تجزیه متعامد بهینه یک دستگاه مختصات n بعدی متعامد ایجاد می کند که نسبت به همه دستگاه های مختصات متعامد دیگری که برای توصیف یک دسته نمایه از میدانی مفروض می توانند مورد استفاده قرار گیرند، تقریب بهتری را ارائه می کند. بنابراین می توان سامانه های دینامیکی با ابعاد بالا را با الگویی

رتبه کاسته توصیف کرد که مدل حاصل با تعداد محدودی از جملات معلوم و از دیدگاه بازیافت انرژی موجود در مودها بهینه باشد. تاریخچه ای بر روش تجزیه متعامد بهینه و تشریح روش های انجام آن را می توان به طور کامل در مقاله اسمیت پیدا کرد [۱]. این روش ابتدا توسط کارهونن - لوی و سپس کوسامبی به عنوان روشی جهت تحلیل داده های آماری که دارای نوعی الگو^۱ بودند مطرح شد [۲]. سپس لاملی پیشنهاد کرد که از روش تجزیه متعامد بهینه می توان برای استخراج ساختارهای مقیاس بزرگ^۲ در جریان های آشفته استفاده کرد [۳]. لیکن در اواخر دهه هشتاد میلادی به تدریج کاربردهای روش تجزیه متعامد بهینه و به ویژه با مطرح شدن روش نمایه توسط

^۱ Pattern

^۲ Large scale

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: mk.moayyedi@qom.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۵/۲۶

تاریخ پذیرش: ۹۶/۱۲/۲۲

سیرویش افزونی یافت [۴]. این روش به عنوان ابزاری کارآمد برای ایجاد مدل های رتبه کاسته از سامانه های دینامیکی پیچیده ای که داده هایی از تجربه و یا حل های عددی مستقیم دارند، مورد توجه قرار گرفت.

استفاده از این روش به منظور مدل سازی رتبه کاسته جریان های ناپایا، با تکیه بر قوانین کامل بقاء، در دهه اخیر مورد توجه بسیاری قرار گرفته، لیکن مشکلاتی نیز در توسعه این مدل ها وجود داشته است. از جمله مسائلی که بسیاری از کارهای پژوهشی با آن مواجه بوده اند، ناتوانی سامانه دینامیکی در پیش بینی دقیق تغییرات زمانی میدان جریان می باشد. این موضوع می تواند ناشی از دلایلی از جمله نبودن رابطه صریح بین میدان فشار و میدان سرعت (برای جریان های تراکم ناپذیر) پس از بازسازی مدل رتبه کاسته بر پایه مودهای میدان سرعت، انتخاب نامناسب نمایه ها، دقت پایین حل عددی و ناتوانی مدل رتبه کاسته در کاهش سطح انرژی مودهای با اعداد موج بالا که به نوعی معرف ساختارهای مقیاس کوچک^۱ میدان هستند، باشد. از اینرو روش هایی جهت افزایش دقت مدل های رتبه کاسته مبتنی بر روش تجزیه متعامد بهینه پیشنهاد شده است. از جمله می توان به روش فلویر اشاره کرد که با استفاده از حل یک مسأله بهینه سازی و ترکیب آن با معادلات حاکم به جواب هایی مناسبی دست یافت. همچنین با استفاده از حل همزمان مسأله بهینه سازی و یک مسأله الحاقی^۲ پاسخ زمانی سامانه های دینامیکی حاکم بر مسائلی که فیزیک پیچیده تری دارند را نیز دقیق تر بدست آورد [۵]. کاپلت از چند روش مختلف که همگی بر اساس حل یک مسأله بهینه سازی بودند به منظور بهبود پاسخ سامانه دینامیکی حاکم برای مسائل دو و سه بعدی مورد نظر استفاده کرد [۶]. نوآک از یک جمله اصلاح به منظور افزایش دقت سامانه دینامیکی و به عنوان جایگزینی برای جمله فشار حذف شده در معادله سامانه دینامیکی استفاده کرد [۷]. گالتی نیز از روش های بهینه سازی برای بهبود دقت مدل های رتبه کاسته به منظور استفاده در مسائل کنترل جریان بهره برد [۸]. مؤیدی و همکارانش با استفاده از یک حل یک مسئله بهینه سازی و محاسبه ضرایب مربوط به عبارت خطی به بهبود نتایج مدل رتبه کاسته در پیش بینی رفتار جریان تراکم ناپذیر پرداختند. نتایج حاصل از پژوهش آنها حاکی از پایداری مناسب روش در پیش بینی تغییرات زمانی ضرایب مودال سیستم دینامیکی میدان جریان می باشد [۹]. ثابت قدم و همکارانش یک مدل بهینه سازی را پیشنهاد دادند که با محاسبه ضرایب عبارت خطی سیستم دینامیکی و با حذف جملات کم اثر، سرعت حل مسئله بهینه سازی را افزایش می داد. مدل توسعه یافته برای شبیه سازی جریان تراکم ناپذیر استفاده شده و نتایج حاصل از آن دقت بالایی در پیش بینی دینامیک میدان جریان داشت [۱۰]. استانکیویژ و همکارانش مدل رتبه کاسته بهینه سازی شده را با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک توسعه دادند. این مدل برای شبیه سازی جریان تراکم ناپذیر بکار گرفته شد. برای افزایش دقت مدل رتبه کاسته عبارات خطی و غیرخطی را به مدل رتبه کاسته افزوده و با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک آنها را محاسبه کردند [۱۱]. کوردیر و همکارانش در سال ۲۰۰۹ پژوهشی را در خصوص بهبود دقت مدل های

رتبه کاسته انجام داده و در آن با استفاده از روش منظم سازی تیخونوف^۳ عملکرد این مدل ها را در پیش بینی رفتار جریان های تراکم ناپذیر افزایش دادند. نتایج پژوهش آنها نشان داد که با بهره گیری از این روش مشکل ناپایداری مدل های رتبه کاسته، که بیشتر مربوط به اثرات مرتبط با جمله خطی در مدل می شود، حل شده و پایداری بالاتری در رفتار الگوی رتبه کاسته دیده می شود [۱۲]. در این پژوهش، از روش POD برای مدل سازی رتبه کاسته جریان ناپایای تراکم ناپذیر استفاده شده است. دو روش برای اصلاح مدل رتبه کاسته در نظر گرفته شده که در روش اول از اصلاح اثر وجود گرادیان فشار روی مرزهای میدان و به منظور جبران اثر جمله فشار استفاده شده و در روش دوم از ترکیب روش تجزیه متعامد بهینه همراه با حل یک مسئله بهینه سازی با استفاده از تکنیکی سریع و تقریبی مستقیم به منظور محاسبه ضرایب جمله اصلاح بهره برده شده است.

۲- روش تجزیه متعامد بهینه - نمایه

لاملی تعریفی از ساختارهای متجانس^۴ را به صورت توابعی از متغیرهای مکانی ارائه کرد که بیشینه انرژی را دارا هستند بدین ترتیب این ساختارهای متجانس عبارت زیر را بیشینه می کنند:

$$\frac{\langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \phi(\mathbf{x}) \rangle^2}{\langle \phi(\mathbf{x}), \phi(\mathbf{x}) \rangle}, \quad (1)$$

در این عبارت، (f, g) نمایشگر ضرب داخلی در فضای L^2 به صورت زیر می باشد:

$$(f, g) = \int_{\Omega} f g d\Omega$$

برای محاسبه توابع ویژه POD از یک رابطه جداسازی زمانی دیگر استفاده می شود که ارتباطی مستقیم و نزدیک با روش نمایه سیرویش دارد و به عنوان یک روش جهت محاسبه مودهای POD استفاده می شود. برای استفاده از روش POD-نمایه نیاز به یک دسته n تایی از داده های میدان اغتشاشی به صورت $\mathbf{u}_n(\mathbf{x})$ بوده که این نمایه ها می توانند از نتایج شبیه سازی در زمان های متفاوت یا به ازای تغییر پارامترهای دیگر، به شکل زیر بدست آیند:

$$\mathbf{u}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{u}_n(\mathbf{x}, \delta^n). \quad (2)$$

مودهای POD توابع ویژه ماتریس زیر می باشند:

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \mathbf{u}^*(\mathbf{x}', t) \rangle, \quad (3)$$

در این پژوهش از روش تجزیه مقادیر تکین جهت حل مسأله مقدار ویژه فوق استفاده شده است. همان طور که اشاره شد مودهای POD دارای خاصیت تعامد هستند، یعنی در رابطه زیر صدق می کنند:

$$(\phi^i, \phi^j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}. \quad (4)$$

³ Thikhonov Regularization

⁴ Coherent Structures

¹ Small Scales

² Adjoint

۳- مدل رتبه کاسته توسعه یافته با روش تجزیه

متعامد بهینه - گالرکین

معادلات حاکم بر دینامیک جریان تراکم ناپذیر شامل معادلات پیوستگی و اندازه حرکت بوده که این معادلات در فرم برداری و بی بعد بصورت زیر می باشند:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad ()$$

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \text{Re}^{-1} (\nabla^2 \mathbf{u}).$$

بردارهای سرعت را می توان به صورت حاصل جمع یک بخش متوسط گیری شده زمانی و یک بخش اغتشاشی^۱ نوشت:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \quad ()$$

با جایگذاری رابطه (۶) در معادله پیوستگی و با این شرط که موده های جریان در معادله پیوستگی جریان تراکم ناپذیر صدق کنند، معادلات حاکم بر دینامیک جریان تراکم ناپذیر به معادلات اندازه حرکت کاهش خواهد یافت. بخش متوسط میدان سرعت به صورت یک میانگین از تغییرات زمانی بردارهای سرعت در نظر گرفته شده و جمله اغتشاشی با استفاده از بسط موده های POD به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{u}'(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N \Phi^i(\vec{x}) \mathbf{a}^i(t), \quad (7)$$

به طوریکه:

$$\Phi^i(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \phi_i^u(\vec{x}) & 0 \\ 0 & \phi_i^v(\vec{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^i(t) = \begin{bmatrix} a^i(t) \\ b^i(t) \end{bmatrix}$$

۴- تصویرسازی گالرکین و معادله سیستم دینامیکی

با تصویرسازی معادلات پیوستگی و اندازه حرکت در زیرفضای موده های POD و با فرض اینکه مشتق زمانی مقادیر بخش متوسط گیری شده صفر باشد، یک دسته معادله دیفرانسیلی مرتبه اول برای ضرایب مودال بدست می آید که سامانه دینامیکی نامیده شده و معادله آن به صورت زیر می باشد:

$$\frac{d\mathbf{a}^k}{dt} + A_{kij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j + B_{ki} \mathbf{a}^i + C_k = 0, \quad (8)$$

معادله (۸) به منظور محاسبه تغییرات زمانی ضرایب مودال حل شده تا ضرایب حاصل برای بازسازی میدان جریان با استفاده از رابطه (۷) بکار روند.

۵- بازسازی سیستم دینامیکی رتبه کاسته

به منظور محاسبه تعداد موده های مورد نیاز جهت ایجاد الگوی رتبه کاسته معیاری بر اساس اختلاف سطح انرژی موده های میدان استفاده شده است (شکل ۵). معیاری مورد نظر در این پژوهش دستیابی به سطح انرژی ۹۹/۹٪ بوده که بر این اساس، N_F حاصل، تعداد موده های مناسب برای ایجاد مدل رتبه کاسته را نشان می دهد [۹].

۶- ناپایداری مدل رتبه کاسته

مدل های رتبه کاسته استاندارد، که از تصویرسازی معادلات اندازه حرکت جریان تراکم ناپذیر در راستای موده های میدان جریان حاصل می شوند، ممکن است دقت بالایی در پیش بینی تغییرات زمانی میدان جریان نداشته باشند. این موضوع می تواند ناشی از دلایلی مانند، عدم وجود رابطه ای مستقیم بین میدان سرعت و فشار و در نتیجه تقریب حذف اثرات جمله فشار، دقت نامناسب موده های محاسبه شده (برقراری نبودن معادله پیوستگی توسط موده های میدان سرعت)، ناپایداری های ناشی از حذف موده های با اعداد موج بالا، و دقت پایین نمایه های ورودی که در نتیجه معادلات بقاء به طور کامل برقرار نخواهند بود. روش های گوناگونی برای جبران این خطاها پیشنهاد شده و قابل طرح می باشد. از جمله اصلاح روش محاسبه موده های میدان، اصلاح فرضیات بکار رفته به منظور توسعه سیستم دینامیکی و استفاده از روش های جبران ساز به منظور اصلاح خطای ناشی از رفتار سیستم دینامیکی [۱۰].

۷- بازسازی سیستم دینامیکی رتبه کاسته

الگوهای رتبه کاسته حاصل از تصویرسازی معادلات اندازه حرکت در راستای موده های POD به دلایل مختلفی پیش بینی دقیقی از دینامیک میدان جریان ندارند. روش های مختلفی برای جبران این خطاها پیشنهاد شده است. اگر موده های POD در معادله پیوستگی صدق نکنند، آنگاه اثر بقای جرم در معادله الگوی رتبه کاسته حذف شده و این سبب بروز ناپایداری در پاسخ آن خواهد شد. جمله فشار پس از تصویرسازی معادلات اندازه حرکت و بر اساس تئوری گاوس به شکل زیر تجزیه خواهد شد:

$$(\nabla p, \phi^k) = -(\nabla \cdot \phi^k, p)_{\Omega} + (p, \phi^k)_{\Gamma} \quad (9)$$

بخش اول اثر تغییرات میدان فشار در نقاط داخلی حجم کنترل مفروض و عبارت دوم اثر توزیع فشار روی مرزهای میدان جریان می باشد. اگر موده های میدان جریان بقایی باشند آنگاه در معادله پیوستگی صدق کرده، بدین معنی که:

$$(\nabla \cdot \phi^k, p)_{\Omega} = 0, \quad (10)$$

در این صورت عبارت اول در معادله (۹) حذف شده و نتیجه به شکل زیر خواهد شد:

$$(\nabla p, \phi^k) = (p, \phi^k)_{\Gamma} \quad (11)$$

وجود شرایط مرزی همگن روی مرزهای میدان جریان می تواند سبب حذف اثر عبارت سمت راست معادله فوق شود. این بدین معنی است که یا مقدار فشار روی مرزهای صفر بوده (فشار نسبی) و یا توزیع آن به نحوی است که حاصل ضرب داخلی عبارت سمت راست معادله (۱۱) صفر شود. لیکن ویژگی های فیزیکی و محاسباتی موجود در برخی مسائل ممکن است سبب عدم احراز شرایط ذکر شده در خصوص عبارت فشار شده و در نتیجه این جمله از معادله سیستم دینامیکی (ضرایب معادله (۸)) قابل حذف نیست. این مطلب می تواند به این دلیل باشد که موده های جریان معادله پیوستگی را ارضاء نکرده و یا توزیع فشار روی مرزهای میدان به گونه ای است که اثرات آن قابل صرف نظر نمی باشد. بنابراین در این شرایط می بایست جمله فشار به نحوی

¹ Fluctuation

در معادله حاکم بر مدل عمل کرده و سبب می شود که سیستم دینامیکی رفتار واقعی مسئله را پیش بینی کند [۹].

۹- جداسازی معادله مدل رتبه کاسته و محاسبه ضرایب مدل

مشتقات وابسته به ضرایب مدل رتبه کاسته (معادله (۸)، (۱۵)) با روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم محاسبه شده و برای انتگرال گیری زمانی معادلات سیستم دینامیکی، روش رانگ-کوتای چهار مرحله ای مرتبه چهارم صریح به کار رفته است. مطالعه پیرامون گام زمانی نشان می دهد که مقدار بکاررفته (مساوی با گام زمانی استفاده شده برای تولید نمایه های ورودی) برای این مسئله به اندازه کافی کوچک بوده و سیستم دینامیکی رفتار پایداری را نشان می دهد.

۱۰- نتایج

در این قسمت به ارائه و بررسی نتایج پژوهش پرداخته می شود. دو مسئله مورد بررسی قرار گرفته که در مسئله اول معادله برگرز لزج مورد بحث بوده و مسئله بعدی به بررسی جریان تراکم ناپذیر ناپایا حول یک سیلندر مربع شکل در عدد رینولدز ۱۰۰ می پردازد. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از مدل رتبه کاسته، داده های حاصل با نتایج شبیه سازی عددی مستقیم مقایسه شده اند [۱۳].

۱۰-۱- معادله برگرز لزج

برای تحلیل معادله برگرز لزج یک بعدی یک دسته ۱۰۰ تایی از حل میدان جریان شامل مقادیر سرعت در زمان های مختلف و با گام های زمانی مساوی در نظر گرفته شده است. برای تحلیل عددی این مسئله معادله برگرز لزج یک بعدی:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \text{Re}^{-1} (\nabla^2 \mathbf{u}), \quad 0 < x < L \quad (16)$$

با شرط اولیه:

$$\mathbf{u}(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (17)$$

و شرایط مرزی:

$$\mathbf{u}(0, t) = \mathbf{u}(L, t) = 0.3 \times \sin(\pi t) \quad (18)$$

در عدد رینولدز ۱۰۰ حل شده و نتایج حاصل برای یک بازه زمانی معادل ۱ واحد به عنوان ورودی برای بازسازی سیستم دینامیکی رتبه کاسته استفاده شده است. روشن است تفاوت اساسی معادله برگرز لزج و معادله ناویر-استوکس عدم وجود عبارت فشار در این رابطه می باشد. در نتیجه انتظار می رود دقت نتایج حاصل از مدل رتبه کاسته معادله برگرز لزج در مقایسه با مدل مرتبط با معادلات ناویر-استوکس بسیار بالاتر باشد. با استفاده از ماتریس نمایه ها، مسئله مقدار ویژه معادل حل شده و مقادیر و بردارهای ویژه بدست می آیند. شکل ۱ توزیع چهار مود پراثری تر نشان داده که در شکل ۲ توزیع انرژی نسبی آنها نمایش داده شده است.

محاسبه یا جایگزین شود، در غیر این صورت بقای موجود در معادلات اندازه حرکت از بین رفته و منجر به ایجاد ناپایداری در رفتار سیستم دینامیکی حاکم بر مسئله می شود. روشی که در این پژوهش پیشنهاد شده اعمال اثر عبارت فشار بصورت مستقیم در معادله سامانه دینامیکی بر حسب ضرایب میدان سرعت به صورت زیر می باشد:

$$p(\vec{x}, t) = \sum_{i=1}^N \mathbf{a}^i(t) \Psi^i(\vec{x}), \quad (12)$$

در نتیجه معادله سیستم دینامیکی رتبه کاسته (رابطه ۸) به صورت زیر اصلاح می شود:

$$\frac{d\mathbf{a}^k}{dt} + A_{kij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j + (B_{ki} + B_{ki}^p) \mathbf{a}^i + C_k = 0, \quad (13)$$

در رابطه فوق B_{ki}^p ضریب اثر عبارت فشار بوده که به هر دو معادله اندازه حرکت اضافه شده و از روابط زیر بدست می آید:

$$B_{ki}^p = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial \Psi^i}{\partial x}, \phi_u^k \right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial \Psi^i}{\partial y}, \phi_v^k \right) \end{bmatrix} \quad (14)$$

روشن است که آرایه های ماتریس فوق مقدار عبارت فشار در معادلات اندازه حرکت در راستاهای افقی و عمودی می باشند. نکته اساسی در خصوص روش بکاررفته در این پژوهش بهره بردن از بیان عبارت فشار بر حسب ضرایب مودال میدان سرعت (رابطه ۱۳) و ایجاد یک ارتباط مستقیم بین این دو کمیت مهم در میدان های جریان تراکم ناپذیر می باشد. ذکر این نکته ضروری است هر چند این روش دقت الگوی رتبه کاسته را در مقایسه با الگوی کلاسیک افزایش داده لیکن به دلیل اینکه پاره ای از خطاها ناشی از علل دیگری است لذا داده های حاصل از این الگو همگرایی کامل با داده های حل عددی مستقیم ندارند.

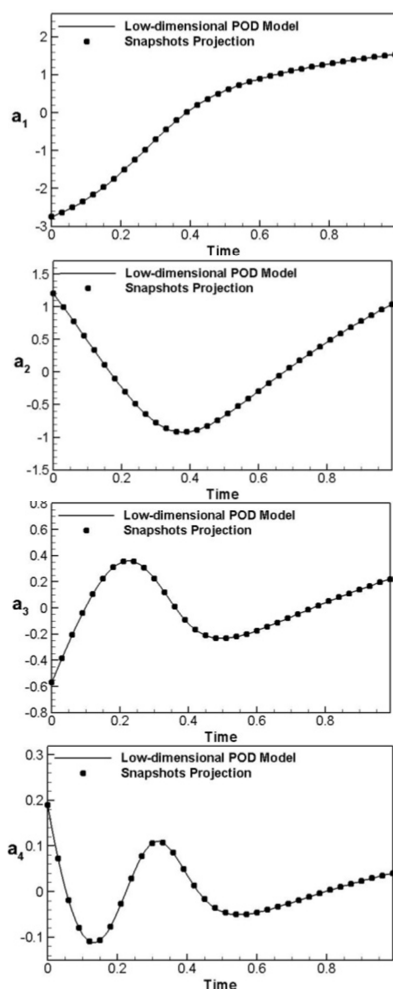
۸- اصلاح الگوی رتبه کاسته با استفاده از مدل خطی

جبران ساز گذرا

مدل رتبه کاسته اصلاح شده، علیرغم بازسازی اثر مدهای غیربقایی، به دلایل دیگری از جمله ناپایداری های ذاتی موجود در این مدل ها، جایگزین نشدن اثر جمله فشار روی مرزها، حذف مدهای با اعداد موج بالا و ... باز هم دقت بالایی در پیش بینی تغییرات زمانی میدان جریان ندارد، به منظور بهبود پیش بینی زمانی مدل رتبه کاسته یک جمله خطی به صورت زیر به معادله سامانه دینامیکی اضافه می شود:

$$\frac{d\mathbf{a}^k}{dt} + A_{kij} \mathbf{a}^i \mathbf{a}^j + (B_{ki} + B_{ki}^p + B_{ki}') \mathbf{a}^i + C_k = 0, \quad (15)$$

جمله اضافه شده فوق، جمله اصلاح نامیده شده و به منظور افزایش دقت سامانه دینامیکی بکار می رود. این جمله می تواند مانند یک عبارت استهلاکی در معادله سیستم دینامیکی عمل کرده و اثرات مدهای پراثری را، که گاهی سامانه دینامیکی توانایی کاهش سطح انرژی آنها را ندارد، کمتر کند. این موضوع می تواند ناشی از این باشد که سیستم دینامیکی به اندازه کافی دارای استهلاک نبوده و این افزودگی در سطح انرژی مودها باعث واگرایی در پاسخ حاصل از مدل می شود. در این شرایط جمله اصلاح همچون عبارت استهلاک مصنوعی

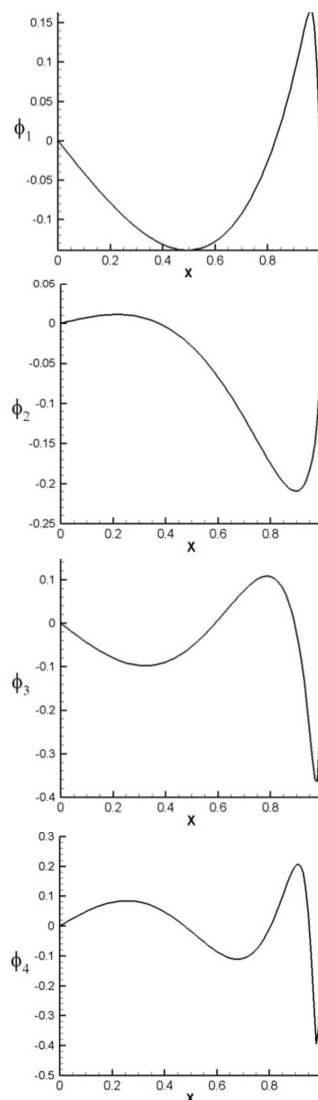


شکل ۳- تغییرات زمانی چهار ضریب مودال بر انرژی تر معادله برگرز لزج در عدد رینولدز ۱۰۰، خطوط پیوسته انتگرال گیری از الگوی رتبه کاسته و نقاط حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم

همانطور که در این شکل دیده می شود نتایج مدل استاندارد از دقت بسیار بالایی در مقایسه با داده های حاصل از حل دقیق برخوردار می باشد. از آنجایی که عبارت فشار در معادله برگرز لزج وجود نداشته در نتیجه انتظار می رود مشکل مورد بحث در معادله ناویر-استوکس که همان جفت شدگی بین میدان سرعت و فشار است، در مدل مربوط به این معادله ظاهر نشود. لذا همانطور که مشاهده می شود نتایج حاصل از مدل رتبه کاسته بدون اصلاحات مربوط به عبارت فشار با داده های حاصل از حل دقیق تطابق بسیار خوبی دارند.

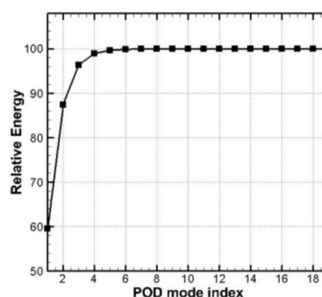
۱۰-۲- جریان لزج ناپایا حول سیلندر مربع شکل

مسئله دوم بر اساس حل معادلات جریان سیال تراکم ناپذیر (معادله (۶)) حول یک سیلندر مربع شکل در عدد رینولدز ۱۰۰ می باشد. یک دسته ۷۵ تایی از حل میدان جریان شامل فشار، مولفه های افقی و عمودی سرعت در زمان های مختلف، با گام های زمانی مساوی، و در یک بازه زمانی معین به عنوان ورودی در نظر گرفته شده است. در شکل ۴ سه عضو از دسته نمایه های فشار، مولفه افقی و عمودی سرعت در گام های زمانی مختلف نشان داده شده است. این بازه زمانی یک سیکل

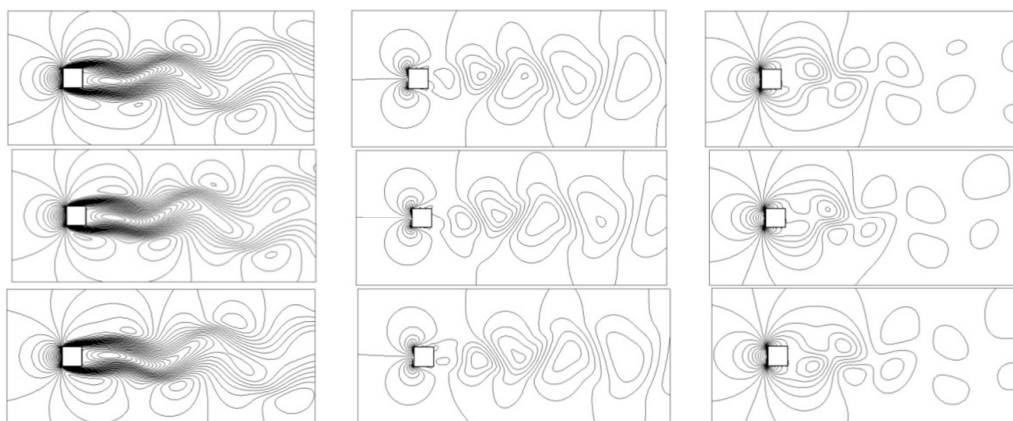


شکل ۴- توزیع چهار مود پرانرژی تر دسته نمایه حاصل از حل معادله برگرز لزج در عدد رینولدز ۱۰۰

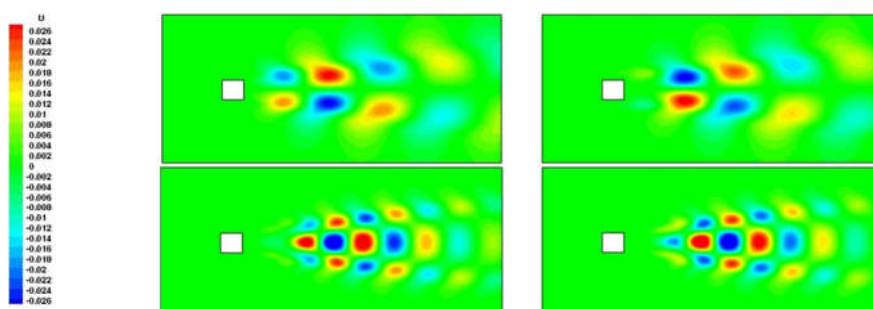
همانطور که در شکل ۲ مشاهده می شود ۸ مود اول می توانند معیار بازسازی مدل رتبه کاسته را برای مسئله مورد نظر ارضاء کنند. در شکل ۳ تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول (مربوط به ۴ مود پرانرژی تر) برای مدل رتبه کاسته معادله برگرز لزج مشاهده می شود. در این شکل مقایسه ای بین نتایج حاصل از مدل با نتایج حاصل از حل دقیق انجام شده است.



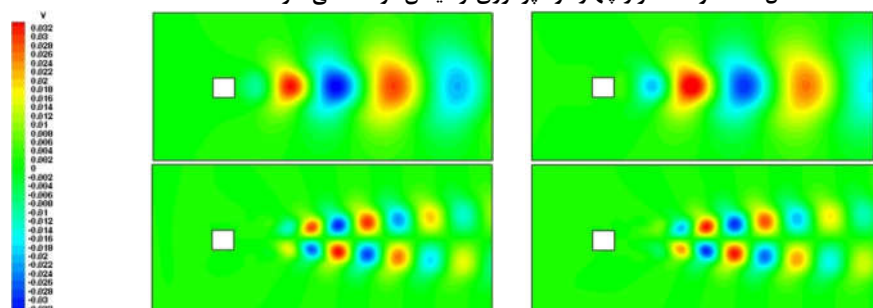
شکل ۵- انرژی نسبی مدهای POD دسته نمایه معادله برگرز لزج در عدد رینولدز ۱۰۰



شکل ۴- خطوط همتراز سه نمایه مؤلفه افقی سرعت (ستون سمت چپ)، مؤلفه عمودی سرعت (ستون وسط) و میدان فشار (ستون سمت راست)



شکل ۵- خطوط همتراز چهار مود پراثری تر میدان مؤلفه افقی سرعت



شکل ۶- خطوط همتراز چهار مود پراثری تر میدان مؤلفه عمودی سرعت

نمودار تصویر کننده عدد سهم مودها بوده و با توجه به روش ارائه شده تعداد مودهای مورد نیاز برای ایجاد مدل رتبه کاسته محاسبه می شود. در جدول ۱ سطح (درصد) انرژی (در فرم بی بعد) مودهای اول تا پنجم مؤلفه افقی سرعت و انرژی کل به ازای اضافه شدن هر مود جدید آورده شده است. همانطور که مشخص است تنها با استفاده از ۲ مود اول تقریباً ۸۰ درصد انرژی جنبشی کل سیستم تسخیر شده در حالی که ۳ مود باقیمانده تنها در حدود ۱۷ درصد انرژی کل را تغییر می دهند. برای این مسئله شش مود به منظور بازسازی مدل رتبه کاسته جهت شبیه سازی میدان جریان مورد استفاده قرار گرفته است. سپس با استفاده از نمایه های فشار ضرایب مودال میدان سرعت و با بهره گیری از حل یک مسئله کمینه سازی مودهای میدان فشار محاسبه شده است. شکل ۸ خطوط همتراز مودهای فشار محاسبه شده با روش تشریح شده را نشان می دهد. پس از بازسازی مدل رتبه کاسته به شکل یک سیستم دینامیکی بر اساس روابط (۹) و (۱۴) برای مدل های استاندارد و اصلاح شده برای عبارت فشار و با استفاده از یک شرط اولیه که برابر با مقدار ضرایب مودال در اولین گام زمانی است، پیشروی زمانی با

نوسان کامل بوده که اندازه آن از نمودار تغییرات زمانی انرژی جنبشی کل میدان یا ضرایب بی بعد (مانند ضریب برآ) بدست می آید. سپس مقادیر سرعت اغتشاشی (طبق رابطه ۶) بدست آمده و دسته نمایه حاصل بر اساس رابطه (۷) به منظور محاسبه مودهای جریان استفاده می شود. توابع ویژه و بردارهای ویژه پس از حل یک مسئله مقدار ویژه استخراج شده که در شکل های ۵ و ۶ به ترتیب خطوط همتراز چهار مود پراثری تر مؤلفه افقی و عمودی سرعت نمایش داده شده است. همانطور که در این دو شکل نیز مشخص است یک دوگانی در ساختار مودهای میدان سرعت وجود دیده شده که ناشی از تقارن آنها می باشد [۱۰]. شکل ۷ انرژی نسبی مودهای جریان برای مؤلفه افقی و عمودی سرعت را نشان می دهد. همانطور که در این شکل مشخص است، برای هر دو مؤلفه سرعت تعداد مودهایی که سهم بالاتری در میزان انرژی کل میدان دارند، بسیار کمتر از کل مودهایی باشد. این

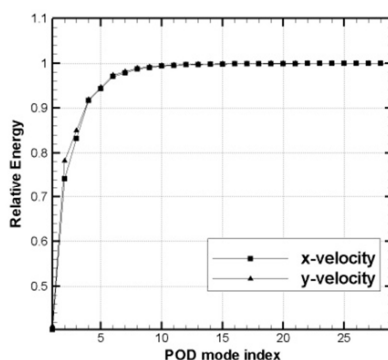
¹ Duality

(بهینه‌سازی شده) در مقایسه با مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای عبارت فشار نشان داده شده‌است. همانطور که مشخص است، نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده (بهینه‌سازی شده) از دقت بسیار بالاتری در قیاس با نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای عبارت فشار و در مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم برخوردار است. مقایسه‌ای بین تغییرات ضرایب مودال مؤلفه عمودی سرعت حاصل از مدل رتبه‌کاسته بهینه‌سازی شده، مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای عبارت فشار با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم در شکل ۱۲ نشان داده شده‌است. واضح است که نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده با روش بهینه‌سازی در مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم، دقت بسیار بالای این مدل را نشان می‌دهد.

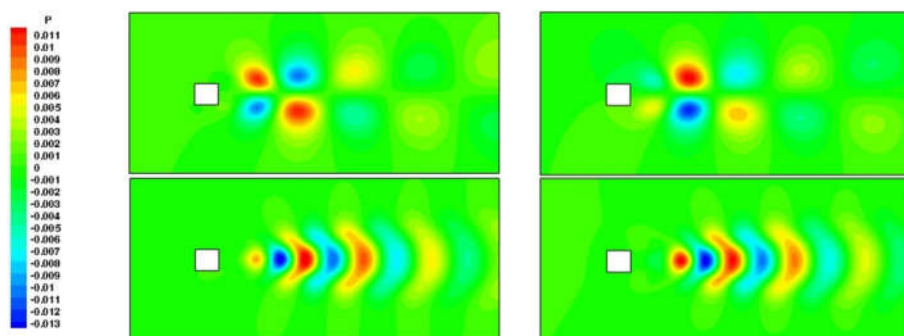
استفاده از انجام می‌گیرد. در شکل ۹ مقایسه‌ای بین تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول، بر حسب سطح انرژی، برای مؤلفه افقی سرعت در یک بازه زمانی معادل با یک نوسان کامل بین شبیه‌سازی عددی مستقیم، مدل رتبه‌کاسته استاندارد و مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای عبارت فشار نمایش داده شده‌است. همانطور که در شکل مشخص است، نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای عبارت فشار در مقایسه با نتایج مدل استاندارد از دقت بالاتری در مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم برخوردار است. شکل ۱۰ تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول برای مؤلفه عمودی سرعت را نشان می‌دهد که نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده برای عبارت فشار دقت بالاتری در مقایسه با مدل رتبه‌کاسته استاندارد، برای شبیه‌سازی میدان جریان نمایش می‌دهد. در شکل ۱۱ تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول مؤلفه افقی سرعت حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده

جدول ۱- سطح انرژی (بی‌بعدشده) مودهای پیرانرژی تر مؤلفه افقی سرعت.

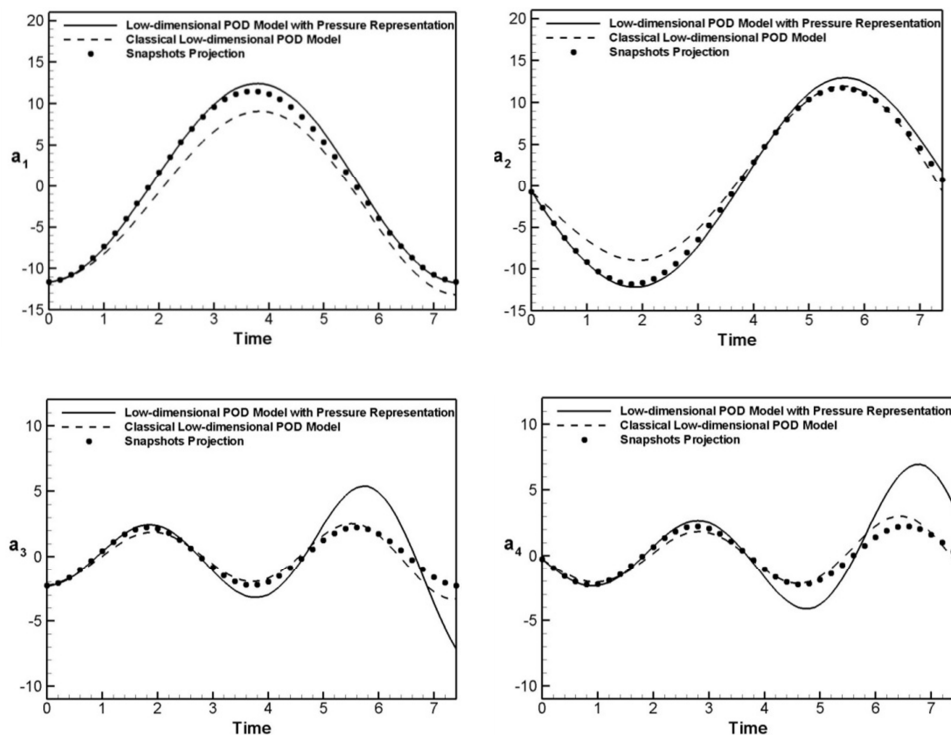
شماره مود	۱	۲	۳	۴	۵
میزان انرژی جنبشی	٪۳۹	٪۴۰/۵	٪۷/۵	٪۷/۶۵	٪۱/۸۵
انرژی جنبشی کل	٪۳۹	٪۷۹/۵	٪۸۷	٪۹۴/۶۵	٪۹۶/۵



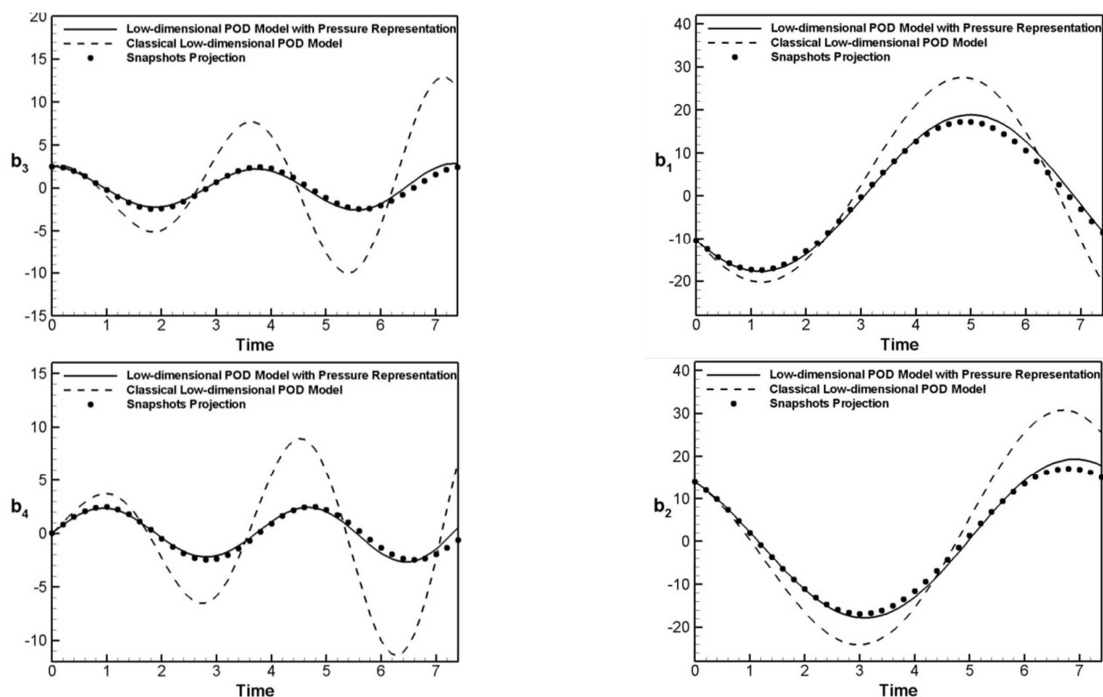
شکل ۷- انرژی نسبی مودهای POD میدان سرعت



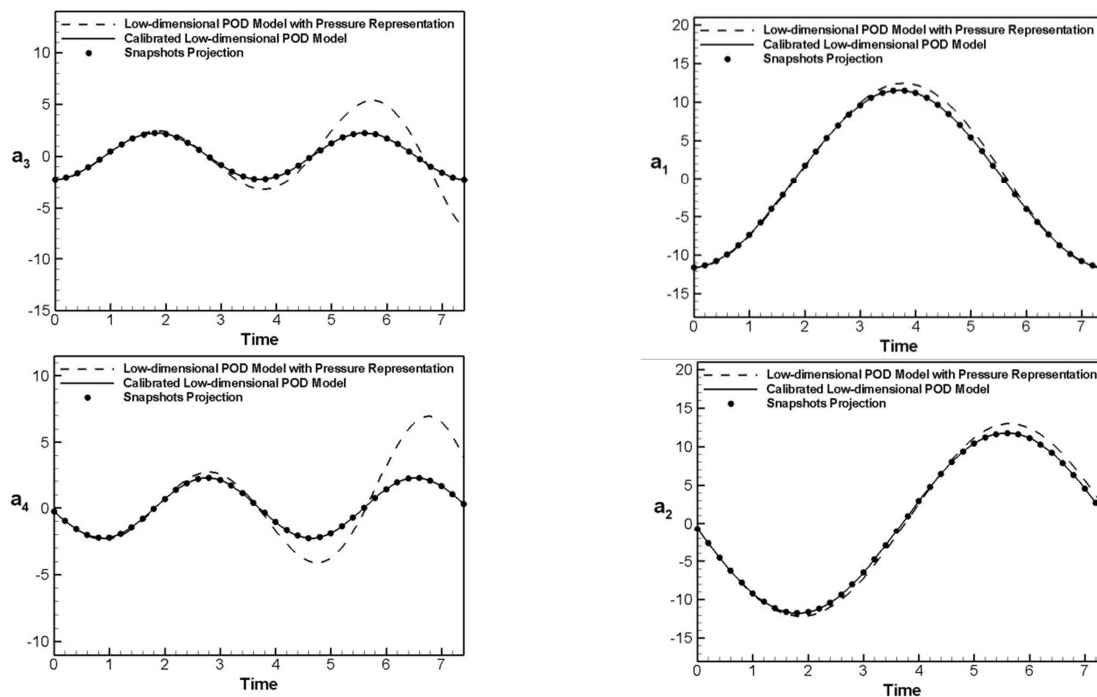
شکل ۸- خطوط هم‌تراز چهار مود پیرانرژی تر میدان فشار



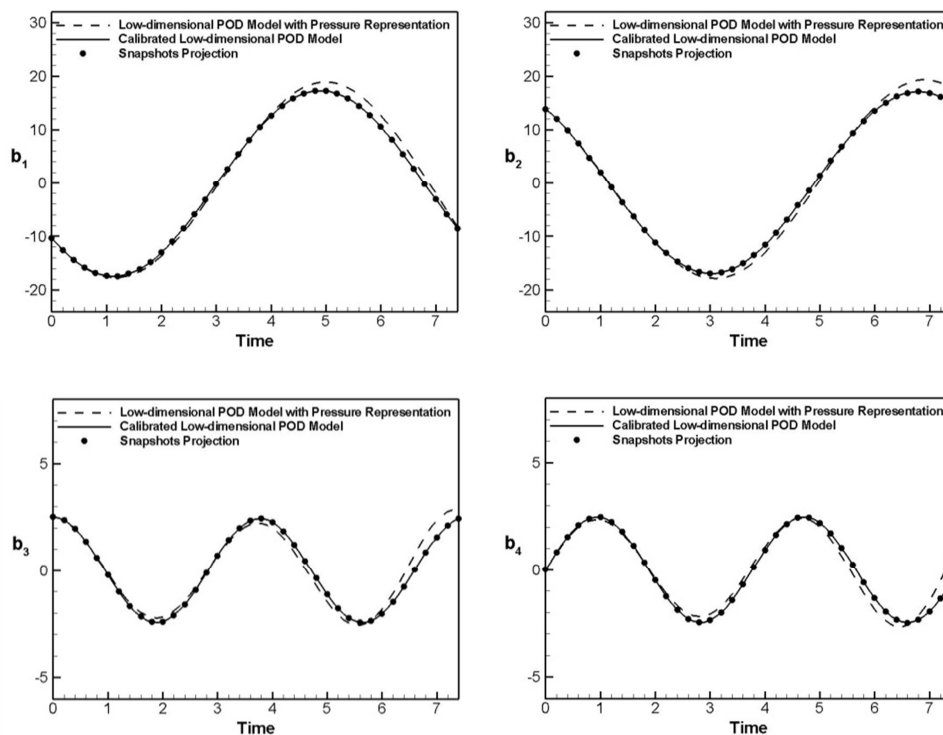
شکل ۹- تغییرات زمانی چهار ضریب مودال پر انرژی تر معادله اندازه حرکت در راستای x ، خطوط پیوسته انتگرال گیری از الگوی رتبه کاسته اصلاح شده با جایگزینی عبارت فشار، خط چین الگوی رتبه کاسته استاندارد و نقاط حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم



شکل ۱۰- تغییرات زمانی چهار ضریب مودال پر انرژی تر معادله اندازه حرکت در راستای y ، خطوط پیوسته انتگرال گیری از الگوی رتبه کاسته اصلاح شده با جایگزینی عبارت فشار، خط چین الگوی رتبه کاسته استاندارد و نقاط حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم



شکل ۱۱- تغییرات زمانی چهار ضریب مودال پر انرژی تر معادله اندازه حرکت در راستای y ، خطوط پیوسته انتگرال گیری از الگوی رتبه کاسته اصلاح شده با جایگزینی عبارت فشار، خط چین الگوی رتبه کاسته استاندارد و نقاط حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم



شکل ۱۲- تغییرات زمانی چهار ضریب مودال پر انرژی تر معادله اندازه حرکت در راستای y ، خطوط پیوسته انتگرال گیری از الگوی رتبه کاسته اصلاح شده (بهینه سازی شده)، خط چین الگوی رتبه کاسته اصلاح شده با جایگزینی عبارت فشار و نقاط حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم

۱۱- نتیجه‌گیری

استفاده از روش‌های سریع در تحلیل مسائل مهندسی از اهداف پژوهشگران و طراحان در این حوزه می‌باشد. مدل‌های رتبه‌کاسته یکی از راه‌کارهایی است که به عنوان روشی مناسب، سریع و کم‌هزینه همواره مورد توجه پژوهشگران بوده‌است. کاربرد الگوهای رتبه‌کاسته، که بر اساس معادلات بقای حاکم بر پدیده‌های فیزیکی توسعه می‌یابند، در سال‌های اخیر توسعه بسیار زیادی یافته‌است. این پژوهش، به ارائه یک روش جدید از اصلاح مدل رتبه‌کاسته توسعه یافته بر پایه روش تجزیه متعامد بهینه پرداخته است. بدین منظور با تصویرسازی معادلات.

بقای جرم و اندازه حرکت خطی در فضای مودهای POD، مدل حاصل به صورت یک مسئله مقدار اولیه بدست می‌آید. به منظور حذف اثر گرادیان فشار روی مرزهای میدان جریان، که سبب عدم برقراری قانون بقای جرم می‌شود، مودهای فشار با بهره‌گیری از نمایه‌های مربوطه و با استفاده از ضرایب مودال میدان سرعت محاسبه می‌شوند. عبارت مرتبط با تغییرات فشار از معادله اندازه حرکت حذف نشده و به شکل یک رابطه جایگزین در آن بیان می‌شود. برای اصلاح اثر مودهای غیربقایی در معادله پیوستگی و میراکردن اثرات حذف مودهای با اعداد موج بالا از یک عبارت اصلاح (جبران‌ساز) خطی استفاده شده‌است. از دو روش تشریح شده به منظور انتگرال‌گیری در بازه زمانی کوتاه برای مسئله مذکور بهره گرفته شده که افزایش دقت نتایج و کاهش زمان چشمگیری را در مقایسه با شبیه‌سازی عددی مستقیم نشان می‌دهد.

۱۲- مراجع

- [7] Noack B.R., Papas P. and Monkewitz P. A., The Need for a Pressure-Term Representation in Empirical Galerkin Models of Incompressible Shear Flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 523, pp.339-365, 2005.
- [8] Galletti, B., Bottaro, A., Bruneau, C. H., and Iollo, A. Accurate Model Reduction for Transient and Forced Wakes, *European J. Mech-B/Fluids*, Vol. 26, pp.354-366, 2007.
- [9] Moayyedi M. K., Taeibi-Rahni M., and Sabetghadam F., Accurate Low-dimensional dynamical Model for Simulation of the Unsteady Incompressible Flows, *The 12th Fluid Dynamic Conference*, Babol, Iran, 2009.
- [10] Sabetghadam, F., Moayyedi, M. K., and Taeibi-Rahni, M., A Fast Approach for Temporal Calibration of Low-dimensional POD Model for Simulation of the Unsteady Incompressible Flows, *The 9th Iranian Aerospace Society Conference*, IAU- Science and Research Branch, Tehran, Iran, 2010.
- [11] Stankiewicz W., Roszak R., and Morzyński M., "Genetic Algorithm-based Calibration of Reduced Order Galerkin Models", *Mathematical Modeling and Analysis*, Vol. 16, No.2, pp.233-247, 2011.
- [12] Cordier L., Abou El Majd B., Favier J., Calibration of POD reduced-order models using Tikhonov regularization, *International J. for Numerical Methods in Fluids*, 63 (2), pp.269-296, 2009.
- [13] Moayyedi, M.K., *Low-dimensional POD Simulation of the Unsteady Flows around Bodies with Arbitrary Shapes*. PhD Dissertation, Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology, 2009.
- [1] Smith, T. R., Moehlis, J., Holmes, P., "Low-dimensional Modeling of Turbulence Using the Proper Orthogonal Decomposition", *A tutorial*, Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [2] Holmes, P., Lumley, J. L., and Berkooz, G., *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge Monographs on Mechanics, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [3] Lumley, J. L., The Structure of Inhomogeneous Turbulence, In A. M. Yaglom Tartarski, editors, *Atmospheric Turbulence and Wave Propagation*, pp. 166-Nauka, 78, 1967.
- [4] Sirovich, L., Turbulence and the Dynamics of Coherent Structures, *Parts I-III, Quarterly of Applied Math.*, XLV (3):561-82, 1987.
- [5] Favier, J., Cordier, L., Kourta, A., and Iollo, A., Calibrated POD Reduced-order Models of Massively Separated Flows in the Perspective of Their Control, *ASME Joint U.S.-European Fluids Engineering Summer Meeting*, Miami, Florida, USA, 2006
- [6] Couplet, M., Basdevant, C., and Sagaut, P., "Calibrated Reduced-order POD-Galerkin System for Fluid Flow Modeling", *J. Computational Physics*, Vol. 207, pp. 192-220, 2005.