مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۸۲، جلد ۴۸، شماره ۱، بهار، ۱۳۹۷، صفحه ۹-۱۷

تحلیل رفتاراستاتیکی تیر کامپوزیتی چند لایه با نظری جدید تغییر شکل برشی معکوس هیپربولیکی

رضا اسراری دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین، ایران
یونس محمدی* استادیار، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین، ایران
محمدمهدی خیری‌خواه استادیار، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین، ایران

چکیده

در این تحقیق، یک نظریه تغییر شکل برشی معکوس هیپربولیکی جدید برای تیرهای کامپوزیتی ارائه شده است. این نظریه معتبر برای انواع نمونه‌های عددی از تیرهای کامپوزیتی برای بررسی پاسخ استاتیکی ودینامیکی می‌باشد. نظریه ارائه شده مبتنی بر تابع شکل کرنش برشی می‌باشد که توزیع غیرخطی تنش برشی عرضی را نتیجه داده و همچنین شرایط مرزی آزاد کششی را ارضا می‌کند. ازاصل کار مجازی برای استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم استفاده شده است. برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم، توابع مثلثاتی به صورت سری فوریه یگانه(حل لوی) برای تیر کامپوزیتی با لایه‌های متقاطع عرضی روی تکیه‌گاه ساده بکار گرفته شده است. این روش حل، پاسخ دقیقی را برای تحلیل تیر کامپوزیتی ارائه می‌دهد که به دور از هر نوع خطای عددی و محاسباتی می‌باشد. همچنین دیده می‌شود که نظریه حاضر می‌تواند با دقت بیشتری برای مدلسازی تیرهای کامپوزیتی نسبت به سایر نظریه‌های تغییر شکل برشی در حجم محاسبات یکسان استفاده شود.

واژه‌های کلیدی: رفتار استاتیکی، تیر کامپوزیتی، نظریه تغییر شکل برشی معکوس هیپربولیکی.

A New Inverse Hyperbolic Shear Deformation theory for Static Analysis of Laminated Composite Beam

R. Asrari Faculty of Industrial and Mechanical engineering, Islamic AzadUniversity, Qazvin Branch, Qazvin, Iran
U. Mohammadi Faculty of Industrial and Mechanical engineering, Islamic AzadUniversity, Qazvin Branch, Qazvin, Iran
M. M. Kherikhah Faculty of Industrial and Mechanical engineering, Islamic AzadUniversity, Qazvin Branch, Qazvin, Iran

Abstract

In this paper, a new inverse hyperbolic shear deformation theory is proposed, formulated and validated for a variety of numerical examples of laminated composite beam for the static responses. The proposed theory based upon shear strain shape function yields nonlinear distribution of transverse shear stresses and also satisfies traction free boundary conditions. Principle of virtual work is employed to develop the governing differential equations. A Levy type closed form solution methodology is also proposed for cross-ply simply supported beams which limits applicability. However, it provides accurate solution which is free from any numerical /computational error. It is observed that the present theory can be more accurately applied for the modeling of laminated composite beams at the same computational cost as that of other shear deformation theories.

Keywords: hyperbolic shear deformation theory Beam, Laminated Composite, Static Analysis.

۱- مقدمه

مواد مرکب مورد استفاده در صنایع مهندسی به ترکیبی از جامدهای ناهمگنی که به صورت مکانیکی و یا متالوژیکی ترکیب شده‌اند اطلاق می‌گردد. تیرهای کامپوزیتی چند لایه بخاطر نسبت بالای مقاومت به وزن و همچنین نسبت بالای سفتی به وزنشان بطور گسترده در سازه‌های هوایی، سفینه‌های فضایی، توربوماشین‌ها و کاربردهای صنعتی دیگر بکار می‌روند. پیشرفت‌های اخیر در تکنولوژی مواد کامپوزیتی باعث استفاده تیرهای کامپوزیتی چند لایه بعنوان اجزا سازنده در کاربردهای مهندسی مختلف به خاطر خواص مکانیکی برتر این مواد شده است. با وجود این، زمانی که بارگذاری عرضی بر یک تیر چند لایه کامپوزیتی وارد شود به خاطر مدول برشی عرضی کم در مقایسه با مدول کششی آن، اثرات تغییر شکل برشی به صورت کاملاً مشخص باید در نظرگرفته شود و این امر ضرورت تحلیل دقیق تیرهای چندلایه را ممکن می‌سازد. نظریه‌های مربوط به تیرها به طور اساسی شامل کاهش مسئله نظریه الاستیسیته سه بعدی به یک مسئله دو بعدی می‌باشد به طوریکه بعد ضخامت تیر بسیار کوچکتر از بعد طولی تیر می‌باشد و این به طور تقریبی توزیع مولفه‌های میدان جابجایی، کرنش و تنش را در بعد ضخامت تیر ممکن می‌سازد. در تیرهای کامپوزیتی چند لایه، تغییر شکل برشی عرضی اثرات قابل توجهی را در جابجایی عرضی، فرکانس‌های طبیعی ارتعاشی و بارهای کمانشی ایفا می‌کند. نظریه ابتدایی در تیر براساس فرضیات اویلر-برنولی استوار است که درصد خطای بیشتری را در تحلیل تیرهای غیرایزوتروپیک[1] به خاطر صرف نظر از تغییر شکل برشی عرضی نشان می‌دهد. تاچرت[۱] نظریه مقدماتی تیر را برای تیرهای غیرایزوتروپیک امتحان کرد. کراچسینویچ[۲] نظریه تغییر شکل برشی تیرهای لایه‌ای[2] را توسعه داد. اوجالو[۳] نظریه کلاسیک اویلر-برنولی را برای تیرهای چند لایه به کار برد.اسفیت و هیلر[۴] تیرهای چند لایه را با

1Anisotropic
2Layerwise
1Anisotropic

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: v u.mohammadi@gmail.com
تاریخ دریافت: ۹۴/۱۲/۲۴
تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۶/۱۶

فرض کرنش برشی لایه‌ای ثابت و جابجایی عرضی پیوسته در ضخامت مطالعه کردند که کاربرد لایه‌ای برای نظریه تیموشنکو به حساب می‌آمد. ضرایب اصلاحی برشی[1] برای تیر متعامد[2] توسط برت[۵] و مک کاتچن [۶] محاسبه شد.

امارتسیومان[۷] نظریه تغییر شکل برشی لایه‌ای را برای چند لایه‌های متقاطع صفر و نود درجه متقارن[3] با فرض توزیع سهموی تنش برشی عرضی در داخل هر لایه توسعه داد.

کریشنا موراتی و شیمپی[۸] تحلیل ارتعاشات چند لایه را با توسعه نظریه‌های تغییر شکل برشی مرتبه بالا بر اساس نظریه مقدماتی چند لایه بررسی کردند. سیلورمن[۹] یک نظریه تغییر شکل سهموی را برای تیر مستطیلی سه لایه متقارن که از دو جهت باریک[4] بود ارائه داد که از اصل کمینه انرژی پتانسیل برای استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی حاکم استفاده کرد. هیو و همکارانش[۱۰] نظریه بهبود یافته تغییر شکل برشی سهموی را با داده‌های آزمایشگاهی برای تیر مسلح شده با الیاف تطابق دادند. خدیر و ردی[۱۱] با استفاده از نظریه‌های کلاسیک، مرتبه اول برشی، مرتبه دوم برشی و مرتبه سوم برشی تحلیل تیر چندلایه متقاطع صفر و نود[5] درجه متقارن و نامتقارن را انجام دادند. نظریه لوکریستنسن و وو،[۱۲و۱۳] نظریه مرتبه بالا را برای ورق‌های همگن و چند لایه توسعه داد که شامل اثرات تغییر شکل برشی، کرنش قائم عرضی و توزیع غیرخطی جابجایی‌های درون صفحه‌ای وعرضی نسبت به ضخامت ورق می‌شد. نظریه فوق شامل یازده متغیر جابجایی بود. این نظریه بطور وسیعی توسط محققین دیگر برای تحلیل تغییر شکل برشی تیرها و ورق‌ها به کار رفته است. کانت و مانجانتها[۱۴و۱۵] با استفاده از نظریه لوکریستنسن تحلیل تیرهای کامپوزیتی و ساندویچی را نشان دادند وفرمولاسیون المان محدود C^0 را برای تیرهای کامپوزیتی و ساندویچی متقارن و نامتقارن ارائه دادند. مایاتی و ساینها[۱۶] تحلیل المان محدود تیرهای ضخیم متقارن و نامتقارن را برپایه نظریه مرتبه بالای لوکریستنسن نشان دادند. سولدتوس و الیشاکوف [۱۷] نظریه مرتبه سه تغییر شکل برشی را برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی تیر مستقیم متعامد[6]، بر پایه نظریه کلاسیک تیر توسعه دادند. موراکمای[۱۸] نظریه تیرهای غیرآیزوتروپیک را توسعه داد که اثرات ترکیبی خمش و تغییر شکل برشی عرضی را بر روی تغییرمکان [7] تیرها در نظر گرفت.

ردی[۱۹] یک نظریه کلی را برای آنالیز کامپوزیتها بر پایه میدان جابجایی لایه‌ای ارائه کرد که نظریه ارائه شده می‌توانست برای تعدادی از نظریه‌های خاص اختصاص داده شود. با فرض کردن تراکم ناپذیری عرضی[8] و نمایش لایه‌ای جابجایی درون صفحه‌ای[9]، میدان جابجایی برای تیرهای چند لایه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u(x,z) = u_0 + U(x,z)$$
$$w(x.z) = w(x)$$

که u_0 بیانگر جابجایی طولی و w بیانگر جابجایی عرضی نقطه‌ای روی محور مرجع چند لایه(صفحه میانی) و تابع $U(x,z)$ نشانگر جابجایی درون صفحه‌ای لایه‌ای می‌باشد.

لو و لیو[۲۰] نظریه تعمیم یافته ردی را با استفاده از توابع شکل درجه سه هرمیت[10] توسعه دادند که پیوستگی درون لایه‌ای[11] تنش برشی را در نظر گرفتند. داوالوس و همکارانش[۲۱] تیرهای چند لایه را با نظریه برشی ثابت لایه‌ای تحلیل کردند و تنش برشی ثابت لایه‌ای را از روابط ساختاری[12] تغییر شکل داده به توزیع سهموی با استفاده از توابع درجه دو(چند جمله‌ای‌های لاگرانژ) رسیدند و کاربردهای عددی مختلفی را با استفاده از روش المان محدود نشان دادند.

سیلورمن[۲۲] حل الاستیسیته‌ی خمش تیرهای متعامد تحت بارهای چندجمله‌ای را با استفاده از توابع تنش ایری[13] نشان داد که تمامی فرمول‌ها را برای تغییرمکان، خمش و تنش برشی عرضی تیرهای ساده و یک سر گیردار[14] به دست آورد. لیخنتیسکی[۲۳] حل دقیق تیرهای چندلایه را با استفاده از توابع درجه دو تنش ایری ارائه کرد.رائو[۲۴] حل الاستیسیته تنش صفحه‌ای را برای تیرهای چند لایه نامتقارن با استفاده از توابع تنش ایری نشان داد. پاگانو[۲۵و۲۶] حل دقیق الاستیسیته را برای تیرهای کامپوزیتی چند لایه تحت خمش استوانه‌ای ارائه داد.محمدی و خلیلی [۲۷] تاثیرات خواص هندسی و مکانیکی، بر رفتار تیرهای ساندویچی با رویه‌های FG ت بارگذاری نفوذی را بررسی کردند که از نظریه بهبودیافته تیرهای ساندویچی برای مدل سازی رویه های FG و الاستیسیته سه بعدی برای هسته انعطاف پذیر اس اده کردند و توانستند دو پارامتر مقیاس طولی λ_b وλ_t را بعنوان توابعی از خواص هندسی و ویژگی های مکانیکی رویه هایFGو هسته تیر ارائه دهند. هولت و وبر[۲۸] حل‌های دقیق[15] تیر ، ورق و پوسته ساندویچی را ارائه دادند.

به دلیل اهمیت توزیع تنش های برشی عرضی در مقطع تیرهای کامپوزیتی، نظریه‌های مختلفی برای در نظرگرفتن اثرات برش پیشنهاد شده است و به همین دلیل لزوم مقایسه این نظریه‌ها احساس می‌شود. از این رو، هدف اصلی این پژوهش ارائه یک نظریه جدید تغییرشکل برشی با تابع معکوس هیپربولیکی می‌باشد که دقت بیشتری را در بیان توزیع تنش‌های برشی نسبت به سایر نظریه‌ها دارد.

در مقاله حاضر ابتدا معادلات دیفرانسیل حاکم بر تیر با استفاده ار اصل کار مجازی استخراج شده‌اند سپس پاسخ معادلات با استفاده از روش لوی برای تیرروی تکیه گاه ساده تعیین شده‌اند و در پایان نتایج نظریه ارائه شده با نظریه‌های مرتبه اول، مرتبه بالا و نظریه ردی مقایسه شده‌اند.

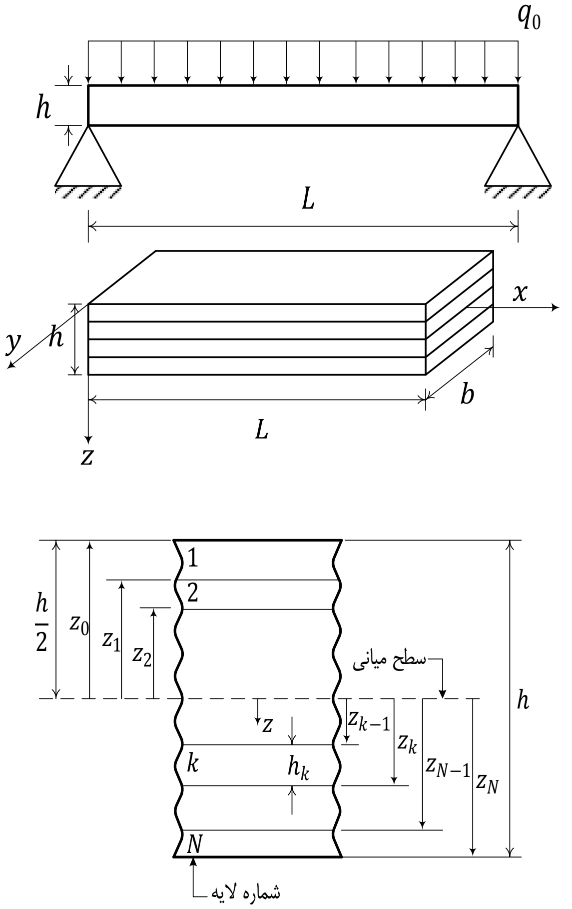
1Shear correction coefficients
2Orthotropic beam
3Symmetric cross-ply laminates
4Narrow doubly
5Cross-ply
6 Orthotropic straight beam
7Deflection
8 Transverse incompressibility
9 Inplane displacement

10Hermite cubic shape functions
11Interlaminar
12Constitutive relations
13.Airy's stress functions
14Cantliver beam
15Exact solutions

۲- مبانی و روش

۲-۱-هندسه مفروض

در این تحقیق تیر کامپوزیتی با تکیه گاه‌های ساده، به طول L، پ پهنایb و ضخامت h که تحت بار عرضی یکنواخت $_0$ م باشد را مطابق شکلشکل ۱ نظر می‌گیریم.



شکل ۱-تعریف فاصله لایه ها از سطح میانی یک چند لایه (N لایه) در مقطع تیر

۲-۲-میدان جابجایی[1]

در تحقیق حاضر، تیر با ضخامت کلی h در نظرگرفته شده و میدان جابجایی زیر با تابع کرنش جدید $\sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right)-z\frac{2r}{h\sqrt{r^2+4}}$ پیشنهاد می‌شود.

$$\begin{cases} u(x,z)=u_0(x)-z\frac{\partial w_0}{\partial x}+\left(\sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right)-z\frac{2r}{h\sqrt{r^2+4}}\right)\theta_x \\ v(x)=0 \\ w(x,z)=w_0(x) \end{cases} \qquad (۱)$$

که u_0 و w_0 جابجایی‌های صفحه میانی تیر وθ_x تغییر شکل برشی صفحه میانی می‌باشند. ضرایب تغییر شکل برشی، توابعی به شکل کرنش برشی و در اینجا طوری انتخاب شده‌اند که پیش‌بینی واقع بینانه‌ای را برای جابجایی و توزیع تنش در سرتاسر ضخامت تیر بیان می‌دارد. پارامتر r، پارامتر تنش برشی عرضی می‌باشد که بوسیله مقایسه کردن نظریه‌های موجود و حل الاستیسیته برای طیف گسترده‌ای از مسائل انتخاب می شودکه در این تحقیق$r=3$در نظرگرفته شده است[۴۴]است [با عرفی تابع+ $f(z)=g(z)$ Ωzکه درآن$g(z)=\sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right)$ و $\Omega=\frac{-2r}{h\sqrt{r^2+4}}$ می‌باشد نظریه حاضر را می‌توان به فرم کلی زیر نوشت:

$$\begin{cases} u(x,z)=u_0(x)-z\frac{\partial w_0}{\partial x}+f(z)\theta_x \\ v(x)=0 \\ w(x,z)=w_0(x) \end{cases} \qquad (۲)$$

نظریه نشان داده شده در بالا توسط محققین زیادی با توابع شکل‌های مختلفی از$f(z)$ارائه شده است که در جدول ۱ نشان داده شده است. پارامترΩ، مقدار ثابتی می‌باشد که با توجه به شرایط مرزی تنش برشی عرضی ارزیابی می‌شود . ؛ براین میدان جابجایی در نظرگرفته شده، شرایط مرزی را در بالا و پایین تیر ارضا می‌کند و نیاز است که ضریب اصلاحی برشی از بین برود.

۲-۳-روابط کرنش -جابجایی[2]

کرنش‌های خطی درنظرگرفته شده با استفاده از میدان جابجایی پیشنهادی، با فرض تغییر مکان و چرخش های کوچک به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx}=\frac{\partial u_0}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+f(z)\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_{zz}=0 \\ \gamma_{xz}=-\frac{\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial f(z)}{\partial z}\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x} \end{cases} \qquad (۳)$$

۲-۴-روابط ساختاری[3]

روابط ساختاری برای تعدادk لایه با هر جهتی برای هر لایه می‌تواند به صورت زیر به دست آید:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_z \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}_k=\begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}_k\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}_k \qquad (۴)$$

یا می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\{\sigma\}_{3\times1}=[\bar{Q}_{ij}]\{\varepsilon\}_{3\times1} \qquad (۵)$$

که $[\bar{Q}_{ij}]$ ماتریسی می‌باشد که به ماده و جهت هر لایه در سیستم مختصات (x,y,z) بستگی دارد.

جدول۱- توابع شکل پیشنهادی توسط محققین دیگر

Model	
Kaczkowski[29]	$\frac{5z}{4}\left(1-\frac{4}{3h^2}z^2\right)$
Levinson[29], Reddy[30]	$z\left(1-\frac{4}{3h^2}z^2\right)$

1Displacement field
2Strain displacement relations
3Constitutive relations

Levy	$\frac{h}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)$
Mantari et al.[32]	$\sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)e^{\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{h}z\right)}+\frac{\pi}{2h}z$
Viola et al.[31]	$\frac{2h}{\pi}\tan\left(\frac{\pi}{2h}z\right)$
Mantari et al.[33]	$\tan(mz)-zm\sec^2\left(\frac{mh}{2}\right),\ m=\left\{\frac{1}{5h},\frac{\pi}{2h}\right\}$
Aydogdu[35]	$ze^{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}\left(z\alpha^{\frac{-2\left(\frac{z}{h}\right)^2}{\ln\alpha}}\right),\ \forall\alpha>0$
Mantari et al.[33]	$z2.85^{2\left(\frac{z}{h}\right)^2}+0.028z$
Viola et al.[31]	$\xi\left[\frac{h}{\pi}\sinh\left(\frac{\pi}{h}z\right)-z\right],\ \xi=\left\{1,\frac{1}{\cosh\left(\frac{\pi}{2}\right)-1}\right\}$
Mantari et al.[32]	$\sinh\left(\frac{z}{h}\right)e^{m\cosh\left(\frac{z}{h}\right)}-\frac{z}{h}\left[\cosh\left(\frac{1}{2}\right)+m\sinh^2\left(\frac{1}{2}\right)\right]e^{m\cosh\left(\frac{1}{2}\right)},\ m=\{-6,-7\}$
Akavci and Tanrikulu[37]	$\frac{3\pi}{2}h\tanh\left(\frac{z}{h}\right)-\frac{3\pi}{2}z\sec h^2\left(\frac{1}{2}\right)$
Akavci and Tanrikulu[37]	$z\,\mathrm{sech}\left(\pi\frac{z^2}{h^2}\right)-z\sec h\left(\frac{\pi}{4}\right)\left[1-\frac{\pi}{2}\tanh\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$
در کار حاضر	$\sinh^{-1}\left(\frac{rz}{h}\right)+\Omega z\ ,\Omega=-\frac{2r}{r\sqrt{h^2+4}}$

۲-۵-استخراج معادلات حاکم بر تیر[1] با استفاده از نظریه ارائه شده

استخراج معادلات حاکم بر تیربا استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالای ارائه شده با بکارگیری اصل کار مجازی حاصل می‌شود:

$$\iiint(\delta U-\delta W_{ext})dV=0 \tag{۶}$$

که δU انرژی کرنشی مجازی و δW_{ext} کار مجازی نیروهای خارجی می باشد. با توجه به میدان کرنش و تنش ایجاد شده و بارخارجی اعمال شده، انرژی کرنش مجازی کار مجازی نیروه خارجی را می توان نوشت:

$$\delta U=\sum_{k=1}^{N}\iiint(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx}+\tau_{xz}\delta\gamma_{xz})dV \tag{۷}$$

$$W_{ext}=\int q\delta w_0 dx \tag{۸}$$

حال با جایگذاری معادلات(۳)و(۴)در معادله (۷) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\delta U=\sum_{k=1}^{N}\iiint\Bigg[&\bar{Q}_{11}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+f(z)\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)\\&+\bar{Q}_{16}\left(\frac{-\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial(f(z))}{\partial z}\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\Bigg]\\&\times\delta\left[\frac{\partial u_0}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+f(z)\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right]\\&+\Bigg[\bar{Q}_{16}\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}-z\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+f(z)\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\right)\\&+\bar{Q}_{66}\left(\frac{-\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial f(z)}{\partial z}\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)\Bigg]\\&\times\delta\left[\frac{-\partial w_0}{\partial x}+\frac{\partial f(z)}{\partial z}\theta_x+\frac{\partial w_0}{\partial x}\right]dV\end{aligned} \tag{۹}$$

حال باانتگرال‌گیری از تک‌تک بخش‌های رابطه‌ی(۹) و با استفاده از اصل اساسی حساب تغییرات[2] و با در نظرگرفتن انتگرال‌های روابط (۱۰) و (۱۱) اصل کار مجازی برای مسئله حاکم برحسب میدان جابجایی پیشنهاد شده به صورت نشان داده شده در رابطه (۱۲) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&[A_{ij}B_{ij}D_{ij}E_{ij}F_{ij}H_{ij}]\\&=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}[\bar{Q}_{ij}^{(k)}][1,z,z^2,g(z),zg(z),g^2(z)]dz\\&\quad i,j=1,6\end{aligned} \tag{۱۰}$$

$$\begin{aligned}&[K_{ij}L_{ij}O_{ij}P_{ij}]\\&=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}[\bar{Q}_{ij}^{(k)}][g'(z)\quad zg'(z)g'^2(z)\quad g(z)g'(z)]dz]\\&i,j=1,6\end{aligned} \tag{۱۱}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N}\int\Bigg\{\Bigg[&-A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+B_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}-E_{11}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}-B_{11}\Omega\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}\\&+A_{16}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-K_{16}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}-A_{16}\Omega\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\\&-A_{16}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\Bigg]\delta u_0\\&+\Bigg[B_{11}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}-F_{11}\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x^3}\\&-D_{11}\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x^3}+B_{16}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}-L_{16}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}\\&-B_{16}\Omega\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}-B_{16}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\\&-q\Bigg]\delta w_0\Bigg\}dx\end{aligned} \tag{۱۲}$$

1Derivation of beam equations

2Calculus of variations

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=1}^{N}\Big[-E_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}-B_{11}\Omega\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+F_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}+D_{11}\Omega\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\\
&-H_{11}\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}-F_{11}2\Omega\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}\\
&-D_{11}\Omega^2\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}+E_{16}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\
&+B_{16}\Omega\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-P_{16}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}-E_{16}\Omega\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\\
&-L_{16}\Omega\frac{\partial\theta_x}{\partial x}-B_{16}\Omega^2\frac{\partial\theta_x}{\partial x}-E_{16}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\
&-B_{16}\Omega\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+K_{16}\frac{\partial u_0}{\partial x}+A_{16}\Omega\frac{\partial u_0}{\partial x}\\
&-L_{16}\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}-B_{16}\Omega\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}+P_{16}\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\\
&+E_{16}\Omega\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+L_{16}\Omega\frac{\partial\theta_x}{\partial x}+B_{16}\Omega^2\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\\
&-K_{66}\frac{\partial w_0}{\partial x}-A_{66}\Omega\frac{\partial w_0}{\partial x}+O_{66}\theta_x\\
&+2\Omega K_{66}\theta_x+A_{66}\Omega^2\theta_x+K_{66}\frac{\partial w_0}{\partial x}\\
&+A_{66}\Omega\frac{\partial w_0}{\partial x}\Big]\delta\theta_x=0
\end{aligned}
$$

با ساده‌سازی معادلات (۱۲) خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N}\int\Big\{\Big[-A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+B_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}-(E_{11}+\Omega B_{11})\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}\\
&-(K_{16}+\Omega A_{16})\frac{\partial\theta_x}{\partial x}\Big]\delta u_0\\
&+\Big[-B_{11}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}+D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}\\
&-(F_{11}+\Omega D_{11})\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x^3}\\
&-(L_{16}+\Omega B_{16})\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}-q\Big]\delta w_0\\
&+\Big[(F_{11}+\Omega D_{11})\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\\
&-(E_{11}+\Omega B_{11})\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\\
&+(F_{11}+\Omega D_1)\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}\\
&+(-H_{11}-2\Omega F_{11}-D_{11}\Omega^2)\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}\\
&+(K_{16}+\Omega A_{16})\frac{\partial u_0}{\partial x}\\
&+(-L_{16}-\Omega B_{16})\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\\
&+(O_{66}+2\Omega K_{66}+\Omega^2 A_{66})\Big]\theta_x\,dx\Big\}\\
&=0
\end{aligned}
\qquad (۱۳)
$$

با در نظر گرفتن چند لایه‌ها به صورت $cross-ply$، ویژگی‌های سفتی وابسته به این نوع چند لایه‌ها باعث صفر شدن برخی از ثوابت در معادلات دیفرانسیل کلی می‌شود:

$$K_{16}=A_{16}=B_{16}=L_{16}=0 \qquad (۱۴)$$

حال با توجه به اصل اساسی حساب تغییرات و در نظرگرفتن چند لایه‌ها به صورت $cross-ply$ ، معادلات دیفرانسیل حاکم برای تیر کامپوزیتی با نظریه مرتبه بالای ارائه شده به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\sum_{k=1}^{N}\Big[-A_{11}\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}+B_{11}\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}-(E_{11}+B_{11}\Omega)\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}\Big]=0 \qquad (۱۵)$$

$$\sum_{k=1}^{N}\Big[D_{11}\frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4}-B_{11}\frac{\partial^3 u_0}{\partial x^3}-(F_{11}+\Omega D_{11})\frac{\partial^3\theta_x}{\partial x^3}-q\Big]=0 \qquad (۱۶)$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{N}\Big[(F_{11}+\Omega D_{11})\frac{\partial^3 w_0}{\partial x^3}-(E_{11}+B_{11}\Omega)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}\\
&-(H_{11}+2\Omega F_{11}+D_{11}\Omega^2)\frac{\partial^2\theta_x}{\partial x^2}\\
&(O_{66}+2\Omega K_{66}+A_{66}\Omega^2)\theta_x\Big]=0
\end{aligned}
\qquad (۱۷)
$$

در معادلات فوق، علامت سیگما(جمع) به خاطر جمع خواص هر لایه و به عبارتی به دلیل در نظر گرفتن مجموع ویژگی‌های سفتی وابسته به هر لایه استفاده شده است.

۳- حل معادلات حاکم[1] برای تیر با تکیه گاه ساده

به دلیل دقت مدل معادلات ریاضی پیشنهادی، حل لوی[2] را برای تیر کامپوزیتی چندلایه $cross-ply$به صورت زیر در نظر می‌گیریم، به طوریکه جواب‌های پیشنهادی در شرایط مرزی تیر روی تکیه‌گاه ساده[3]را صدق می‌کنند.

$$
\begin{aligned}
u_0&=\sum_{m=1}^{\infty}u_m\cos(\alpha x)\\
w_0&=\sum_{m=1}^{\infty}w_m\sin(\alpha x)\\
\theta&=\sum_{m=1}^{\infty}x_m\cos(\alpha x)\\
q&=\sum_{m=1}^{\infty}q_m\sin(\alpha x)\\
\alpha&=\frac{m\pi}{L}
\end{aligned}
\qquad (۱۸)
$$

q بار عرضی اعمال شده بر تیر می‌باشد که با توجه به حل لوی، بار عرضی را به صورت سری فوریه سینوسی در نظر گرفته‌ایم. با جایگذاری این سری های فوریه در معادلات دیفرانسیل حاکم(۱۵) تا (۱۷) ، به یک دستگاه معادلات جبری به صورت روابط (۱۹) می‌رسیم که با حل آن، مجهولات مسئله شامل u_m، w_m وx_m محاسبه می‌شوند:

$$
\begin{cases}
A_{11}u_m\alpha^2-B_{11}w_m\alpha^3\\
+(E_{11}+\Omega B_{11})x_m\alpha^2=0\\
D_{11}w_m\alpha^4-B_{11}u_m\alpha^3\\
-(F_{11}+\Omega D_{11})x_m\alpha^3=q_m\\
[-(F_{11}+\Omega D_{11})w_m\alpha^3+(E_{11}+\Omega B_{11})u_m\alpha^2\\
+(H_{11}+2\Omega F_{11}+D_{11}\Omega^2)x_m\alpha^2\\
+(O_{66}+2\Omega K_{66}+A_{66}\Omega^2)x_m]=0
\end{cases}
\qquad (۱۹)
$$

حال می‌توان معادلات (۱۹) را به فرم ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$[\bar{R}]_{3\times3}\{\Delta\}_{3\times1}=\{q\}_{3\times1}$$

که $\{\Delta\}=\{u_m \quad w_m \quad x_m\}^T$و $\{q\}=\{0 \quad q_m \quad 0\}^T$ و ماتریس $[\bar{R}]$ به عنوان ماتریس ضرایب شامل پارامترهای ثابتی از خواص مکانیکی و هندسی لایه‌ها می‌باشد.

1Solution methodology
2Levy's solution
3Simply supported boundary condition

۴-نتایج عددی و صحت سنجی

در این بخش با ذکر یک مثال عددی، نتایج به دست آمده از روش تحلیلی بیان شده را با نتایج به دست آمده از حل‌های عددی و کارهای قبلی مقایسه و دقت آن مورد بررسی قرار می‌گیرد.

برای اثبات دقت و ارزیابی کار حاضر، تیر کامپوزیتی چند لایه $cross-ply$ متقارن $[0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}]$ و غیرمتقارن $[0^{\circ}/90^{\circ}]$ را تحت بار یکنواخت با تکیه‌گاه ساده در نظر می‌گیریم. همه لایه‌ها دارای ضخامت یکسان بوده و از مواد یکسان ارتوتروپیک ساخته شده‌اند. ویژگی های مادی و هندسی هر لایه به صورت زیر می‌باشند:

$$E_1/E_2 = 25,\quad G_{12} = 0.5E_2,\quad \upsilon_{12} = \upsilon_{21} = 0.25,$$
$$q = 200\, N/mm$$
$$L = 90\text{mm},\quad h = 10\text{mm},\quad b = 1\text{mm}$$

برای راحتی، عبارات بی‌بعد برای تغییر شکل قائم، تنش در صفحه و تنش برشی عرضی به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\overline{w} = \frac{100wbE_2h^3}{qL^4}\quad \overline{\sigma_x} = \frac{bh^2}{qL^2}\sigma_x$$
$$\overline{\tau_{xz}} = \frac{bh}{qL}\tau_{xz}$$

حداکثر تغییر شکل قائم تیر برای نسبت L/hهای مختلف با نتایج کارهای محققین دیگر مقایسه شده و در جدول‌های ۲و۳ نشان داده‌شده است با مقایسه داده‌های موجود نتیجه می‌شود با افزایش ضخامت تیر و نسبت لاغری و بیشترشان اثرات برش در تیر متقارن $[0^{\circ}/90^{\circ}/0^{\circ}]$ نسبت به حالت نامتقارن $[0^{\circ}/90^{\circ}]$ و به دلیل تابع معکوس هیپربولیکی ارائه شده در این نظریه که اثرات برش را با دقت بیشتری در نظر می‌گیرد ، اختلاف حداکثر تغییر شکل قائم در حالت متقارن با سایر نظریه‌ها نسبت به حالت نامتقارن بیشتر است. حداکثر تغییر شکل قائم تیر کامپوزیتی متقارن و نامتقارن به ازای نسبت‌های اورتوتروپی بالا در نسبت لاغری کم$(L/h = 5)$ در جدول‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است. کاملاً دیده می‌شود که هرچه نسبت مدول الاستیسیته طولی به عرضی افزایش می‌یابد به دلیل افزایش سفتی تیر کامپوزیتی، حداکثر خیز تیر تحت بار یکنواخت کاهش می‌یابد. همچنین دیده می‌شود که نظریه ارائه شده برای نسبت لاغری کم به ازای نسبت‌های مدول‌های الاستیسیته مختلف تقریب دقیق‌تری را از حداکثر تغییر شکل قائم تیر نشان می‌دهد.شکل۲، تغییر شکل قائم تیر را به ازای L/h مای مختلف نشان می‌دهد. به وضوح مشاهده می‌شود که هرچه نسبت L/h افزایش می‌یابد، به دلیل ضخیم‌تر شدن تیر، تغییر شکل قائم آن به ازای بار یکنواخت ثابت، کاهش می‌یابد. همچنین به دلیل متقارن بودن بارگذاری و نوع شرایط تکیه‌گاهی دیده می‌شود که به ازای هر نسبت دلخواهی از L/h،حداکثر تغییر شکل در نقطه میانی تیر اتفاق می‌افتد.

جدول۲ - حداکثر تغییر شکل قائم تیر کامپوزیتی چندلایه [0/90/0] تحت بار یکنواخت

Theory					
Simply-supported beam					
CBT					
FOBT					
HOBT					

جدول۳– حداکثر تغییر شکل قائم تیر کامپوزیتی چندلایه [0/90] تحت بار یکنواخت

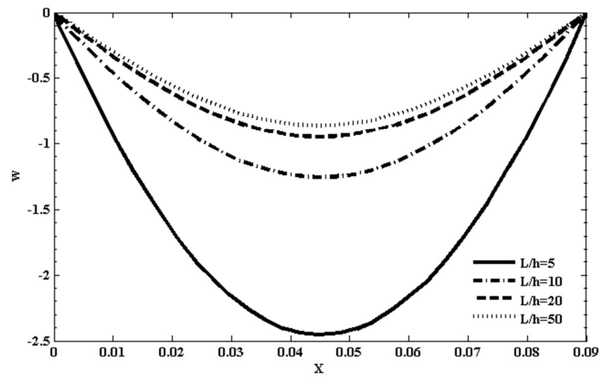
Theory					
Simply-supported beam					
CBT					
FOBT					
HOBT					

جدول۴–حداکثر تغییر شکل قائم تیر کامپوزیتی متقارن $[0^\circ/90^\circ/0^\circ]$ به‌ازای نسبت‌های مدول‌های الاستیسیته‌ی مختلف برای $L/h = 5$

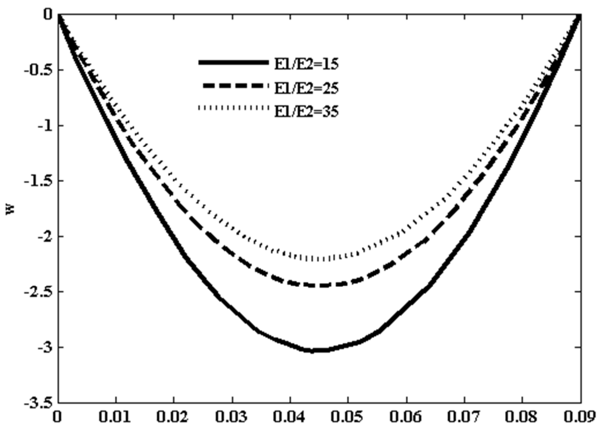
E_1/E_2	$W_{\max}$	HOBT	FSDT	CBT
10	3.7370	3.7081	3.6881	0.8309
20	2.6731	2.6221	2.1731	0.6952
30	2.3101	2.2837	2.2502	0.5735
40	2.1228	2.0674	2.0134	0.4467

جدول۵–حداکثر تغییر شکل قائم تیر کامپوزیتی متقارن $[90^\circ/0^\circ]$ به‌ازای نسبت‌های مدول‌های الاستیسیته‌ی مختلف $L/h = 5$

E_1/E_2	$W_{\max}$	HOBT	FSDT	CBT
10	6.7203	6.6914	7.1034	5.2031
20	5.1203	5.0631	5.5204	4.0478
30	4.3897	4.3441	4.8103	3.0198
40	3.8765	3.8263	4.0213	2.5368



شکل۲ – تغییر شکل قائم تیر به ازای L/h های مختلف

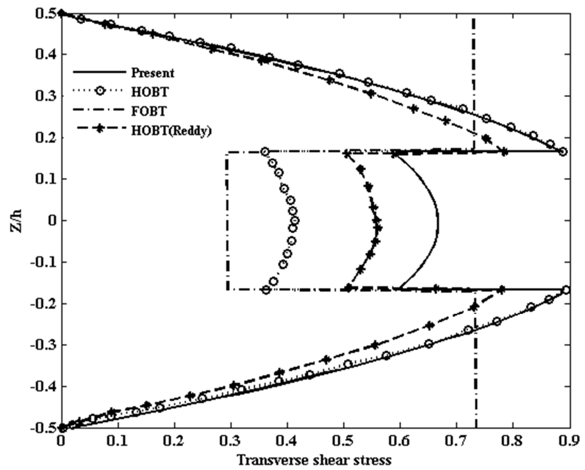


شکل ۳- تغییر شکل قایم تیر یکنواخت برای نسبت مدول الاستیسیته‌های مختلف

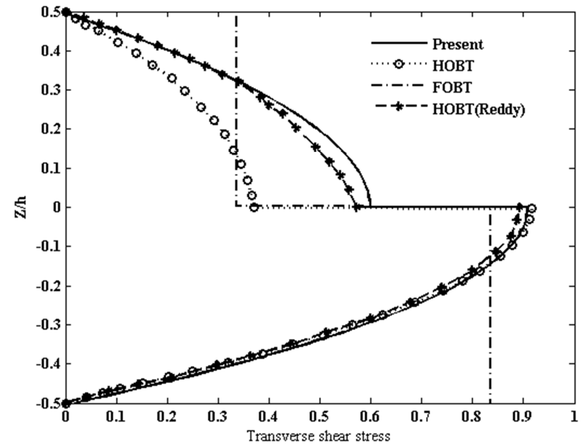
شکل۳ تغییر شکل قائم تیر تحت بار یکنواخت را به ازای نسبت‌های مدول الاستیسیته طولی به عرضی مختلف نشان می‌دهد. همان‌طوری که از نمودار قابل‌مشاهده است به ازای افزایش نسبت مدول‌های الاستیسیته، به دلیل افزایش سفتی، تیر تغییر شکل قائم کمتری را تحت بار یکنواخت تجربه می‌کند.

توزیع تنش برشی عرضی در راستای ضخامت تیر برای $L/h =$ 5 با مقایسه سایرت نظریه‌ها در شکل‌های ۴ و ۵ نشان داده شده است.

نتایج نظریه $FOBT$ برای تنش برشی عرضی در هر لایه مقدار ثابتی می‌باشد که با توجه به شکل‌های ۴ و ۵ و ارزیابی نظریه ارائه شده با سایر تحلیل‌ها مشاهده می‌شود که نظریه مرتبه بالای ارائه شده به خاطر در نظر گرفتن تابع شکلی به فرم معکوس یک تابع هیپربولیکی و در نظر گرفتن ثابت Ω به‌عنوان ضریب zتقریب دقیقی را برای تیر چندلایه نشان می‌دهد. به طوریکه با توجه به شکل‌های ۴ و ۵ بیشینه تنش برشی عرضی درست در لایه‌ی میانی تیر اتفاق می‌افتد.



شکل۴- توزیع تنش برشی عرضی در تیرکامپوزیتی متقارن[0/90/0]

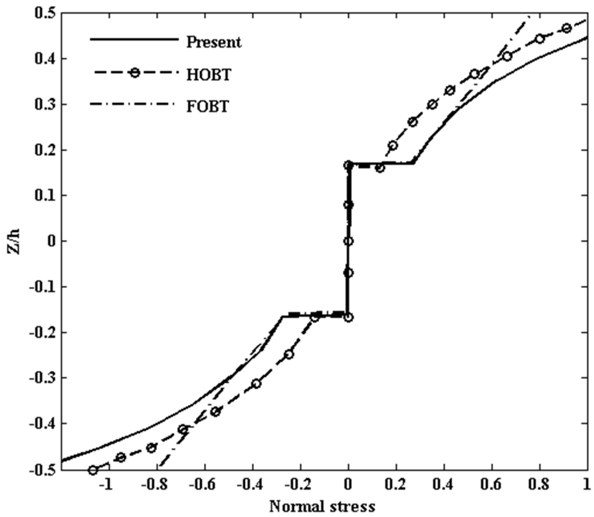


شکل۵- توزیع تنش برشی عرضی در تیرکامپوزیتی متقارن[0/90]

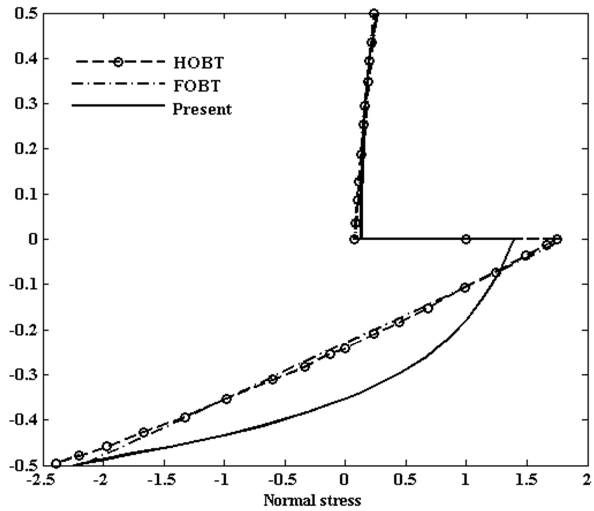
توزیع تنش قائم در صفحه برای تیر چند لایه کامپوزیتی با مقایسه سایر نظریه‌ها در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که نظریه $FOBT$ توزیع خطی تنش قائم را در لایه‌ها بیان می‌دارد و معیار دقیقی برای تحلیل تنش قائم در تیرهای چند لایه نمی‌باشد. نظریه حاضر توزیع غیرخطی تنش قائم را نسبت به ضخامت در هر لایه نشان می‌دهد که پیش‌بینی واقع بینانه‌ای را برای توزیع تنش قائم ارائه می‌دهد. شکل‌های ۸ و ۹ توزیع تنش برشی عرضی را نسبت به ضخامت تیر درxهای مختلف نشان می‌دهد .به عبارت دیگر توزیع تنش برشی را در طول تیر ارائه می‌دهد.

از شکل‌های ۸ و ۹ مشاهده می‌شود که توزیع تنش برشی عرضی در ابتدای تیر به دلیل تحمل نیروهای تکیه گاهی، حداکثر مقدار خود

را در یک ضخامت یکسان، نسبت به سایر طول‌ها داشته و هر چه در ضخامت یکسان به وسط تیر نزدیک می‌شویم به دلیل ساده بودن



شکل۶ – توزیع تنش قائم در صفحه برای تیر کامپوزیتی متقارن[0/90/0]

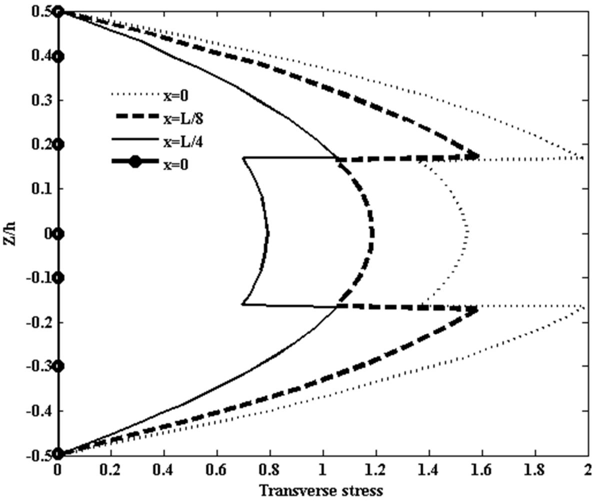


شکل۷ – توزیع تنش قائم در صفحه برای تیرکامپوزیتی متقارن[0/90]

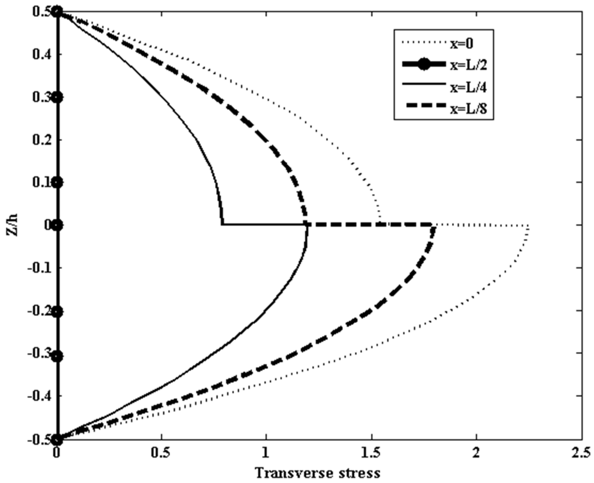
تکیه‌گاه‌های تیر مورد بررسی و تقارن در بارگذاری مقدار تنش برشی عرضی به عدد صفر می‌گراید؛ به طوریکه از نمودارهای اشاره شده مشاهده می‌شود مقدار تنش برشی عرضی درست در وسط تیر مقدار صفر را اختیار می‌کند.

۵-نتیجه‌گیری

در این مطالعه، یک نظریه مرتبه بالای توسعه یافته برای تحلیل استاتیکی تیر ارائه شد که تابع شکل،برای در نظر گرفتن اثرات برشی به صورت تابع معکوس سینوسی هیپربولیکی در نظر گرفته شد. با توجه به میدان جابجایی نظریه ارائه شده و روابط سازگاری، معادلات دیفرانسیل استخراجی با استفاده از اصل کار مجازی معادلات از نوع



شکل۸ – توزیع تنش برشی عرضی در امتداد ضخامت در طول تیر [0/90/0]



شکل۹ – توزیع تنش برشی عرضی در امتداد ضخامت در طول تیر[0/90]

معمولی کوپل بوده که با استفاده از روش لوی و در نظرگرفتن سری فوریه یگانه برای تیر کامپوزیتی روی تکیه‌گاه ساده حل شد. همچنین توابع سینوسی و کسینوسی ارائه شده برای حل، شرایط مرزی تیر را ارضا می‌کنند. با توجه به نتایج دیده می‌شود که نظریه ارائه شده دقت بیشتری را در بیان توزیع تنش برشی عرضی و تنش قائم در صفحه نسبت به سایر نظریه‌ها دارد. فرمول‌بندی ارائه شده در این مطالعه را به خاطر داشتن میدان جابجایی ارائه شده جدید، می‌توان برای مطالعه رفتار کمانش، کمانش حرارتی و تحلیل تنش‌های حرارتی به کار برد همچنین می‌توان با در نظرگرفتن جمله انرژی جنبشی و استفاده از اصل همیلتون تحلیل ارتعاشی تیر فوق را با استفاده از میدان جابجایی جدید ارائه شده انجام داد.

۶- مراجع

[1] Tauchert T. R., On the Validity of Elementary Bending Theory for Anisotropic Elastic Slabs, Journal of Composite Materials, Vol. 9, pp. 207–214, 1975.

[25] Pagano N. J., Exact Solution for Composite Laminates in Cylindrical Bending, Journal of Composite Materials, Vol. 3, pp. 398–411, 1969.
[26] Pagano N. J., Influence of Shear Coupling in Cylindrical Bending of Anisotropic Laminates, Journal of Composite Materials, Vol. 4, pp. 330–343, 1970.
[27] Mohammadi Y., Khalili S., Reza M., Effect of geometrical and mechanical properties on behaviour of sandwich beams with functionally graded face sheets under indentation loading. Journal Of Materials Design and Application;Vol. 225 No. 4 231-244, 2011.
[28] Holt P. J. and Webber J. B. H., Exact Solutions to Some Honeycomb Sandwich Beam, Plate and Shell Problems, The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, Vol. 17, No. 1, pp. 1–8, 1982.
[29] Kaczkowski Z. Plates. In: Statical calculations. Arkady, Warsaw; 1968
[30] Reddy J.N., A simple higher-order theory for laminated composite plates. J Appl Mech, Trans ASME; 51(4):745–52, 1984
[31] Viola E, Tornabene F, Fantuzzi N. General higher-order shear deformation Theories for the free vibration analysis of completely doubly-curved laminated shells and panels.ComposStruct; 95:639–66, 2013.
[32] Mantari JL, Oktem AS, Guedes Soares C. A new higherorder shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates.ComposPartB:Eng2012; 43(3):1489–99.
[33] Mantari J.L, Oktem A.S, Guedes Soares C. A new trigonometric sheardeformation theory for isotropic ,laminated composite and sandwich plates.Int J Solids Struct 49(1):PP. 43–53, 2012.
[34] Mantari J.L, Oktem A.S., Guedes Soares C. Static and dynamic analysis of laminated composite and sandwich plates and shells by using a new higher- order shear deformation theory. Compos Struct 94(1):37–49, 2011.
[35] Aydogdu M. A new shear deformation theory for laminated composite plates. Compos Struct 89(1):94–101, 2009.
[36]Mantari J.L., Guedes Soares C., Analysis of isotropic and multilayered platesand shells by usingageneralized higher-order shear deformation theory. Compos Struct 94(8):2640–56, 2012.
[37] Akavci SS, Tanrikulu AH. Buckling and free vibration analyses of laminated composite plates by using two new hyperbolic shear-deformation theories. Mech Compos Mater; 44(2):145–54, 2008.
[38] Aguiar R, Moleiro F, Soares CM. Assessment of mixed and displacement-based models for static analysis of composite beams of different cross-sections. Compos Struct; 94(2):601-16, 2012.
[39] Khdeir AA, Reddy JN. An exact solution for the bending of thin and thick crossply laminated beams. Compos Struct; 37(2):PP.195–203,1997.
[40] Thuc P. VO, Huu-Tai Thai. Static behavior of composite beams using various refined shear deformation theories. Composite Structures 94 PP. 2513–2522, 2012.
[41]Chakraborty A, Mahapatra DR, Gopalakrishnan S. Finite element analysis of free vibration and wave propagation in asymmetric composite beams with structural discontinuities. Compos Struct,; 55(1):PP 23–36, 2002.
[42] Murthy MVVS, Mahapatra DR, Badarinarayana K, Gopalakrishnan S. A refined higher order finite element for asymmetric composite beams. Compos Struct; 67(1):PP. 27–35, 2005.
[43] Zenkour AM. Transverse shear and normal deformation theory for bending analysis of laminated and sandwich elastic beams. Mech Compos Mater Struct1999; 6:267–83.
[44] Neeraj Grover, D.K. Maiti B.N. Singh., 2012, A new inverse hyperbolic shear deformation theory for static and buckling analysis of laminated composite and sandwich plates, Composite structure 95, 667-675, 2013
[2] Krajcinovic D., Sandwich Beam Analysis, Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 39, No. 3, pp. 773–778, 1972.
[3] Ojalvo I. U., Departures from Classical Beam Theory in Laminated, Sandwich, and Short Beams, AIAA J., Vol. 15, No. 10, pp. 1518–1521, 1977.
[4] Swift G. W. and Heller R. A., Layered Beam Analysis, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of ASCE, Vol. 100, pp. 267–282, 1974.
[5] Bert C. W., Simplified Analysis of Static Shear Factor for Beams of Nonhomogeneous Cross Section, Journal of Composite Materials, Vol. 7, pp. 525–529, 1973.
[6] Dharmarajan S. and McCutchen H. Jr., Shear Coefficient for Orthotropic Beams, Journal of Composite Materials, Vol. 7, pp. 530–535, 1973.
[7] Ambartsumyan S. A., Theory of Anisotropic Plates, J. E. Ashton, ed., Technomic Publishing Co., Inc., Lancaster, PA, 1970.
[8] Krishna Murty A. V. and Shimpi R. P., Vibration of Laminated Beams, Journal of Sound and Vibration, Vol. 36, pp. 273–284, 1974.
[9] Silverman I. K., Flexure of Laminated Beams, Journal of the Structural Division, Proceedings of ASCE, Vol. 106, pp. 711–725, 1980.
[10] Hu M. Z., Kolsky H. and Pipkin A. C., Bending Theory for Fiber Reinforced Beams, Journal of Composite Materials, Vol. 19, pp. 235–249, 1985.
[11] Khdeir A. A. and Reddy J. N., An Exact Solution for the Bending of Thin and Thick Cross-ply Laminated Beams, Composite Structures, Vol. 37, No. 2, pp. 195–203, 1997.
[12] Lo K. H., Christensen R. M. and Wu E. M., A Higher Order Theory for Plate Deformations, Part 1: Homogeneous Plates, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 44, pp. 663–668, 1977.
[13] Lo K. H., Christensen R. M. and Wu E. M., A Higher Order Theory for Plate Deformations, Part 2: Laminated Plates, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 44, pp. 669–676, 1977
[14] Kant T. and Manjunatha B. S., Refined Theories for Composite and Sandwich Beams with C0 Finite Elements, Computers and Structures, Vol. 33, pp. 755–764, 1989.
[15] Manjunatha, B. S. and Kant, T., 1993a, New Theories for Symmetric/Unsymmetric Composite and Sandwich Beams with C0 Finite Elements, Composite Structures, Vol. 23, pp. 61–73.
[16] Maiti D. K. and Sinha P. K., Bending and Free Vibration Analysis of Shear Deformable Laminated Composite Beams by Finite Element Method, Composite Structures, Vol. 29, pp. 421–431,1994.
[17] Soldatos K. P. and Elishakoff I., A Transverse Shear and Normal Deformable Orthotropic Beam Theory, Journal of Sound and Vibration, Vol. 154, No. 3, pp. 528–533, 1992.
[18] Murakami H., Reissner E. and Yamakawa J., Anisotropic Beam Theories with Shear Deformation, Trans. ASME, Journal of Applied Mechanics, Vol. 63, pp. 660–668, 1996.
[19] Reddy J. N., A Generalization of Two Dimensional Theories of Laminated Composite Plates, Communications in Applied Numerical Methods, Vol. 3, pp. 173–180, 1987.
[20] Lu, X. and Liu, D., An Interlaminar Shear Stress Continuity Theory for both Thin and Thick Composite Laminates, ASME Journal Applied Mechanics, Vol. 59, pp. 502–509, 1992
[21] Davalos J. F., Kim Y. and Barbero E. J., Analysis of Laminated Beams with a Layerwise Constant Shear Theory, Composite Structures, Vol. 28, pp. 241–253,1994.
[22] Silverman I. K., Orthotropic Beams under Polynomial Loads, Journal of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of ASCE, Vol. 90, pp. 293–319, 1964.
[23] Lekhnitskii S. G., Anisotropic Plates, 2nd ed., Moscow, translated by Tsai, S. W. and Cheron, T., Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1957.
[24] Rao K. M. and Ghosh B. G., Exact Analysis of Unsymmetric Laminated Beam, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 105, pp. 2313–2325, 1979.