

مدلسازی عددی دینامیک قطرات باردار در افشانه الکتروهیدرودینامیکی با در نظر گرفتن فروپاشی اولیه

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران
 استادیار، پژوهشکده انرژی، پژوهشگاه مواد و انرژی، تهران، ایران
 دانشیار، دانشکده مهندسی هوا فضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

مرتضی رحمان پور*
 ابوالفضل پوررجبیان
 رضا ابراهیمی

چکیده

اندازه قطرات و توزیع مولفه‌های سرعت محوری و شعاعی قطرات در یک الکترواسپری تولید شده از مخروط تیلور، توسط توسعه یک کد کامپیوتری در محیط FORTRAN، مدل شده است. دینامیک قطرات با در نظر گرفتن جریان دو-فازی رقیق و روش لاگرانژی، شبیه‌سازی شده و تاثیر هوای ساکن اطراف آن بصورت یکطرفه لحاظ گردیده است. مدلی نیز برای تعیین قطر اولیه قطرات و فاصله فروپاشی اولیه جت ارائه شده که قادر به محاسبه فروپاشی اولیه است. این مدل به صورت تابعی از دبی، فاصله نازل تا صفحه زیرین، ولتاژ اعمالی، و مشخصات سیال در یک میدان الکتریکی بصورت الکتروهیدرودینامیکی دو-بعدی شبیه سازی شده است. تغییر اندازه قطرات در عبور از اسپری بدلیل تبخیر تا رسیدن به حد رایلی در نظر گرفته شده است. در مدل بکار رفته سیال عامل به صورت سیال لزج و تراکم ناپذیر در هوای ساکن تک دما لحاظ و میدان الکتریکی خارجی با اعمال اختلاف پتانسیل الکتریکی بین نازل و صفحه زیرین ایجاد گردیده است. در نهایت توزیع مکانی، زاویه چتراسپری، اندازه و سرعت آنها با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است که نشان دهنده مطابقت خوب نتایج ارائه شده می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: الکتروهیدرودینامیک، الکترواسپری، فروپاشی اولیه، قطرات باردار، حد رایلی.

Numerical Simulation of Charged Droplets Dynamics in an Electrohydrodynamic Spraying with Primary Break-up

M. Rahmanpour
 A. Pourrajabian
 R. Ebrahimi

Department of Mechanical Engineering, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran
 Department of Energy, Materials and Energy Research Center (MERC), Tehran, Iran
 Department of Aerospace Engineering, K.N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

The size and the axial/radial velocity distributions of electrically controlled droplets generated from Taylor cone operating in the stable cone-jet regime are simulated by numerical modeling of electrosprays. To achieve these goals, a numerical code in FORTRAN is developed. Electro spray droplet dynamics considered the diluted two-phase flow and used Lagrangian method for tracking of a single drop and in the simulation the effect of still air around drops is taking to account in one direction. Also, a new model is used to determine the primary breakup process of jet to calculate the initial droplet diameter and breakup space. A model is formulated as function of liquid flow rate, needle-to-counter electrode distance, applied voltage, and electrical conductivity and surface tension of the liquid in a DC electric field is presented with a 2D electrohydrodynamic model. The droplet size reduction can be explained by evaporation and/or Coulomb explosion. Results show that moving downstream, the average velocity of droplets decreases monotonically. This paper reports a numerical study of the effects of an externally applied electric field on the dynamics of drop formation from a vertical metal capillary. The fluid issuing out of the capillary is a viscous liquid, the surrounding ambient fluid is air, and the electric field is generated by establishing a potential difference between the capillary and a horizontal, electrode placed downstream of the capillary outlet. The Primary jet Break-up and droplet transport and evaporation of electrohydrodynamic sprays is investigated by modeling of droplet size and velocity distribution in spray cones and a series of drop migrations under the influence of an electric field were carried out and the results are in good agreement with other theoretical and experimental studies.

Keywords: Electrohydrodynamic, Electro spray, Primary Break-up, charged droplets, Rayleigh Limit.

افزایش یافته و با رسیدن به حد رایلی-در این حالت نیروی دفع متقابل بارهای الکتریکی در سطح قطره بر کشش سطحی غلبه نموده و قطره ناپایدار می‌گردد- قطرات شکافته شده و قطرات ریزتری تولید می‌کنند که بیشینه بار الکتریکی که یک قطره باردار کروی می‌تواند در سطح خود به صورت پایدار حفظ نماید برای اولین بار توسط رایلی [۲] به صورت نظری به صورت $q_R = 8\pi\sqrt{\epsilon_0\gamma r^3}$ تعیین شد که به حد رایلی معروف است. قطرات ریزتر تولید شده به صورت چشم‌گیری نسبت سطح به حجم بالاتری از قطرات اولیه خواهند داشت لذا پس از فرآیند شکافت نرخ تبخیر بالا رفته و بار دیگر چگالی بار سطحی افزایش می‌یابد تا اینکه مجدداً شکافت رخ دهد. مطالعه تشکیل ذرات معلق قبل از الکترواسپری

۱- مقدمه

الکترواسپری روش تولید ذرات باردار و تک سایز ایده‌آل است که کاربردهای زیادی در زمینه‌های مختلف دارد. در الکترواسپری قطرات از یک نازل مویرگی با اعمال یک ولتاژ بالا تولید می‌شوند و سیال در خروجی نازل به شکل مخروط درآمده و اگر ولتاژ اعمالی به حد کافی بالا باشد از نوک مخروط جت نازکی از سیال خارج خواهد گردید. به دلیل ناپایداری الکتریکی، جت سیال به قطرات شکسته خواهد شد. قطرات به نوبه خود بار اضافی- از همان نوع قطبیت اعمالی- را در خود خواهند داشت. مقدار این بار ثابت بوده و با توجه به دبی جریان و ولتاژ اعمالی مشخص می‌شود [۱]. با تبخیر قطرات، چگالی بار بر روی سطح قطره

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: ac.rahmanpour@azaruniv.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۵/۰۴/۲۰

تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۵/۳۱

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = F_D + F_S + F_A + F_B + F_M + F_{em} \text{ نیروی الکترومغناطیسی} + F_V + F_E + F_G + \frac{F_e + F_m}{\text{نیروهای میدانی}} \quad (1)$$

که در ادامه در مورد هریک توضیحات مختصری آورده شده و در مورد میزان اهمیت یا امکان چشم‌پوشی هر کدام بحث خواهد شد.

۲-۱- نیروی پسا (F_D)

بر یک قطره معلق نیروی پسای اثر دینامیکی اعمال می‌شود. برای سرعت‌های پایین (اعداد رینولدز کم) نیروی پسای استوکس وارد بر یک ذره کروی به شکل زیر است

$$F_D = 3\pi\mu_g U d_i \quad (2)$$

که در آن d_i قطر قطره i -ام، μ_g لزجت دینامیکی هوای اطراف، و U سرعت نسبی بین قطره و هوای اطراف است. این معادله را می‌توان با تعریف ضریب پسا به شکل زیر نوشت:

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2}\rho_l U^2 A} = \frac{24}{Re} \quad (3)$$

که در معادله فوق ρ_l چگالی قطره، و A مساحت جانبی قطره می‌باشد. عدد رینولدز نیز عبارت است از:

$$Re = \frac{\rho_l U d_i}{\mu_g}$$

شایان ذکر است که قانون پسای استوکس برای جریان‌های خزشی با اعداد رینولدز پایین $Re < 0.5$ قابل کاربرد است و در سرعت‌های بالا، ضریب پسا از معادله بالا پیروی نمی‌کند.

برای قطره منفرد مایع در اعداد رینولدز بالاتر رابطه زیر برای ضریب پسا پیشنهاد شده است [۹]:

$$C_D = f C_{D,sphere} + (1-f) C_{D,disk}$$

$$C_{D,sphere} = 0.36 + 5.48 Re^{-0.573} + \frac{24}{Re} \quad \text{برای } Re \leq 10^4$$

$$C_{D,disk} = 1.1 + \frac{64}{Re}, \quad f = 1 - a_r^2, \quad a_r = \frac{a}{b}$$

که در آن d_i قطر قطره، ρ_l چگالی قطره و ρ_g چگالی گاز اطراف می‌باشد.

در سال‌های اخیر تک معادله نیمه تجربی توسط کیلان و کلباریوف [۱۵] ارائه گردیده است که تقریباً برای تمامی بازه‌های عدد Re صادق است.

$$C_D = \frac{24}{Re} \left[1 + 18.5 Re^{3.6} + \left(\frac{Re}{2} \right)^{11} \right]^{1/30} + \frac{4}{9} \frac{Re^{0.8}}{330 + Re^{0.8}} \quad (4)$$

۲-۲- نیروی برای سافمن (F_S)

سافمن این نیرو، را که ناشی از تغییرات سرعت در امتداد عمود بر جهت حرکت است، برای ذره کروی شکل که با سرعت ثابت در یک میدان برشی ساده و عدد رینولدز پایین حرکت می‌کند، بدست آورد. او با استفاده از تبدیل فوریه و بسط مجانب وار میدان سرعت، رابطه را برای آن تشکیل داد:

$$F_S = 1.615 \rho_g V^2 d^2 U \left| \frac{dU}{dr} \right|^{1/2} \operatorname{sgn} \left(\frac{dU}{dr} \right) \quad (5)$$

با توجه به قابل صرفنظر بودن گرادیان سرعت در جهت r می‌توان از اثرات نیروی برای سافمن در این مسئله چشم‌پوشی کرد.

انجام گرفته است چرا که کاربردهای بسیار زیادی از فیزیک اتمسفری [۳] گرفته تا احتراق [۴] را شامل می‌شود. تافلین و همکاران [۵] یک روش تشدید نوری را برای اندازه‌گیری دقیق تغییرات اندازه قطره در طی فرآیند تبخیر و شکافت قطره استفاده نمودند. گومز و تانگ [۲] یک گزارش تصویری از فرآیند شکافت قطره در الکترواسپری را چاپ نمودند. محاسبات نظری برای فرآیند تبخیر-شکافت قطرات نیز در الکترواسپری انجام یافته است. در اکثر مطالعات، برای ساده سازی محاسبات، نسبت ثابت قطر قطره ثانویه به قطر قطره اولیه در تحلیل‌ها در نظر گرفته شده بود [۶-۷]. فرض مشابهی توسط کبارله و تانگ [۸] استفاده شده است که در آن برای هر مرحله از شکافت، تعداد ثابت قطره ثانویه به قطر اولیه، فرض شده است. لوپز و گانان کالوو [۹] یک مدل لاگرانژی برای مطالعه دینامیک یک افشانه چند پخشی از قطرات باردار ارائه داده و این مدل را برای الکترواسپری تک پخشی و چند پخشی استفاده نمودند. حرکت سیال باردار توسط اولیور ویلهلم [۱۰] با استفاده از شبیه سازی و توصیف لاگرانژی در استفاده از الکترواسپری در تولید صفحات باتری‌های لیتیومی با ظرفیت بالا و اندازه و وزن کم جهت استفاده‌های هوا-فضایی برای طول عمر و نسبت ظرفیت به وزن بالا تشریح شده است. لوپز و گانان کالوو [۹] و [۱۱] به صورت تجربی شکست جت باردار سیال رسانا برای لزجت‌ها و پتانسیل‌های اعمالی مختلف مطالعه نمودند. همچنین گانان کالوو و همکاران [۱۲-۱۳] قوانین مقیاس برای وابستگی قطر قطرات ایجاد شده به دبی را در مطالعات پیریزی نمودند.

هر چند در طی سالهای گذشته کارهای عددی ارزشمندی در زمینه مدلسازی اسپرهای الکتروهدودینامیکی انجام شده است، اما فرضیات ساده کننده، از قبیل حل غیر دقیق میدان الکتریکی، عدم در نظر گرفتن فروپاشی اولیه جت سیال، فرض یکسان بودن قطرات و برابری بار الکتریکی پس از شکستن جت سیال به قطره، و در نظر گرفتن فرکانس ثابت تولید قطره، موجب دوری مدل‌های عددی پیشین از فیزیک مسئله گردیده است. البته در برخی از پژوهش‌ها نیز سعی شده است که با به کاربردن برخی معادلات و مدل‌های نیمه تجربی، مانند استفاده از قوانین مقیاس [۱۰-۱۱] و [۱۳]، و یا بهره گیری از توزیع اولیه قطرات حاصل از آزمایشات تجربی [۱۱-۱۲] و [۱۴] که به نوبه خود نیاز به تجهیزات تست را در بر دارد، این فاصله کاهش یابد. در کار اخیر معادلات میدان الکتریکی به صورت کامل حل شده است و با استفاده از مدل موج برای شکست اولیه جت سیال قطر میانگین بدست آمده و با بکاربردن توزیع روزین راملر برای اندازه و بار الکتریکی و فرکانس تولید قطرات تلاش گردیده است که نقایص روش‌های پیشین تصحیح و نتایج بهبود یابند.

۲- معادلات حاکم

دینامیک قطرات در الکترواسپری با در نظر گرفتن جریان دو فازی رقیق و روش لاگرانژی دنبال کردن تک قطره، شبیه سازی خواهد شد. برای حرکت قطره کروی صلب کوچک i -ام با بار الکتریکی q_i در محیط ساکن، نیروهای موثر عبارتند از: نیروی پسا (F_D)، برای سافمن (F_S)، جرم افزوده (F_A)، نیروی بست (F_B)، ماگنوس (F_M)، نیروی لندن-واندروالس (F_V)، نیروی گرانش (F_G)، نیروی الکترواستاتیک (F_E)، نیروی میدان الکتریکی (F_e) و نیروی میدان مغناطیسی (F_m). بنابراین معادله مومنوم زیر حاکم خواهد بود:

۲-۳- نیروی جرم افزوده (F_A)

نیروی جرم افزوده یا جرم مجازی نیرویی است که به سبب جایگزینی سیال اطراف بجای مکان ذره حرکت کرده ایجاد می‌شود و برابر است با

$$F_A = \frac{1}{2} m_i \frac{dv}{dt} \quad (6)$$

که در آن m_i جرم قطره است و با توجه به کوچک بودن جرم قطرات در افشانه‌های الکترویهیدرودینامیکی این نیرو نیز ناچیز بوده و قابل صرفنظر کردن است.

۲-۴- نیروی بست (F_B)

در بدست آوردن نیروی استوکس فرض شده است که جریان پایا باشد، اما اگر جریان گذرا باشد، نیروی دیگری القا می‌گردد که به نیروی بست مشهور است، که برابر است با:

$$F_B = \frac{9m_i}{d_i} \sqrt{\frac{v}{\pi}} \int_0^t \frac{\frac{dv}{dt}}{\sqrt{t-\tau}} d\tau \quad (7)$$

در حالت ساده، نسبت نیروی بست به نیروی استوکس را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$R_{BS} = \sqrt{\frac{18 \rho_g \tau_s}{\pi \rho_l t}} \quad (8)$$

در آن τ_s زمان آرامش استوکس (Stokes Relaxation Time) است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_s = \frac{\rho_l d_i^2}{18\mu} \quad (9)$$

بنابراین نیروی بست، زمانی که نسبت چگالی سیال به چگالی ذره کم باشد، قابل صرفنظر کردن است. در پژوهش حاضر با در نظر گرفتن هوا به عنوان سیال محیطی با چگالی $1/2$ و قطرات هیتان مایع با چگالی $684 \frac{kg}{m^3}$ دیده می‌شود که نسبت چگالی کم است، لذا از نیروی بست نیز صرفنظر شده است.

۲-۵- نیروی ماگنوس (F_M)

زمانی که ذره در حال چرخش باشد، یا اینکه در یک میدان گرادیان سرعت قرار گیرد، نیرویی بر آن اعمال می‌گردد که به نیروی ماگنوس معروف است و مقدار آن برابر است با:

$$F_M = \frac{\pi}{8} d_i^3 \rho_g \Omega U \quad (10)$$

که در آن Ω سرعت زاویه‌ای ذره برحسب $\frac{Rad}{s}$ است. [۱۶] نسبت نیروی ماگنوس به نیروی پسای استوکس را می‌توان به شکل زیر بدست آورد:

$$R_{MS} = \frac{d_i^2 \rho}{24 \mu} \Omega \quad (11)$$

بنابراین زمانی که اندازه ذره یا سرعت چرخشی آن کوچک باشد، به راحتی می‌توان از نیروی ماگنوس چشم‌پوشی نمود. در این پژوهش با توجه به قطر کم قطرات (در حد میکرو متر)، صرفنظر از نیروی ماگنوس نیز منطقی بوده و در محاسبات منظور نگردیده است.

۲-۶- نیروی لندن - واندروالس (F_V)

نیروی لندن-واندروالس تابعی از فاصله ذره تا دیوار می‌باشد. نیروی لندن-واندروالس براساس دو قطبی‌های لحظه‌ای ایجاد شده به وسیله ابر

الکترونی که هسته اتم را احاطه کرده است، می‌باشد. برای ذره کروی با قطر d_i در نزدیکی یک سطح تخت، انرژی تبادل شده عبارت است از:

$$E_{van} = -\frac{A}{12} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + 2 \ln \frac{x}{1+x} \right] \quad (12)$$

که در آن $x = \frac{Z}{d}$ و Z فاصله کره تا سطح و A ثابت هاماکر است که در محدوده 10^{-19} تا 10^{-20} ژول است. [۱۶]

با توجه به فاصله نسبتاً زیاد قطرات از دیوار، به وضوح مشخص می‌شود که تاثیر نیروی واندروالس ناچیز بوده و قابل حذف کردن می‌باشد.

۲-۷- نیروی الکترواستاتیکی (F_E)

با توجه به باردار بودن قطرات، یکی از مهمترین نیروهای موثر بر قطرات، نیروی دفع متقابل بارهای همانم می‌باشد، که با توجه به قانون کلمب، نیروی وارد بر هر یک از دو بار نقطه‌ای q_i و q_j که در فاصله r_{ij} از هم قرار گرفته اند برابر با:

$$F_E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^2} \quad (13)$$

امتداد این نیرو نیز در امتداد خط واصل دو بار خواهد بود. بنابراین در یک افشانه با N قطره، نیروی الکترواستاتیکی وارد بر هر یک از قطرات باردار را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$F_{E_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{ij, i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} \quad (14)$$

۲-۸- نیروهای میدانی

نیروهای میدانی که به نیروهای جسمی نیز معروفند، نیروهایی هستند که از میدان‌های مختلف اطراف سیستم به جریان وارد می‌شوند. این نیروها می‌توانند شامل نیروهای گرانشی، نیروهای الکتریکی و یا نیروهای مغناطیسی باشند.

۲-۸-۱- نیروی گرانشی (F_g)

نیروی گرانشی که به دلیل حضور در میدان جاذبه زمین به هریک از قطرات اثر می‌کند برابر است با:

$$F_g = m_i g \quad (15)$$

۲-۸-۲- نیروی الکترویهیدرودینامیکی (F_e)

زمانی که جریان دوفاز تحت اثر میدان الکتریکی خارجی قرار می‌گیرد (مانند افشانه الکترویهیدرودینامیکی) ذرات باردار با نیروی الکتریکی، F_e ، مواجه می‌شوند که این نیرو برابر است با:

$$F_e = qE - \frac{1}{2} E^2 \nabla \epsilon + \nabla \left[\frac{1}{2} E^2 \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial \rho} \right) T \right] \quad (16)$$

که در آن q بار حمل شده توسط قطره باردار، E شدت میدان الکتریکی و T دماست. اولین جمله در معادله بالا متاثر از بار محلی است، جمله دوم نشان دهنده نیرو به دلیل تغییرات گذردهی است که نیروی قطبی سازی (Polarization force) خوانده می‌شود و جمله سوم ناشی از غیرهمگن بودن شدت میدان الکتریکی است که با عنوان نیروی محدودکننده الکتریکی (electro-strictive force) نامیده می‌شود. این نیرو به نیروی EHD معروف است و مقدار آن برابر است با نیروهای EHD مؤثر بر قطره کروی شناور در یک سیال دی‌الکتریک دیگر در یک میدان الکتریکی است و به صورت ریز محاسبه می‌گردد:

$$f_e = -\nabla p_e + f_{e1} + f_{e2} = -\nabla p_e + \rho_{ea} E_a + (p \cdot \nabla) E_c \quad (17)$$

که شامل سه جمله است و به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

- جمله فشار EHD کلی، p_e ، مؤثر بر قطره

$$p_e = \frac{3}{2} \left[\frac{\epsilon_c(\epsilon_d - \epsilon_c)}{\epsilon_d + 2\epsilon_c} \right] E_c^2 + \frac{1}{6} [(\epsilon_d(\epsilon_c/\epsilon_d) + 2)(\epsilon_c/\epsilon_d - 1)] E_c^2 \quad (18)$$

- مؤلفه الکتروفوریتیک، f_{e1} ، مؤثر بر قطره :

$$f_{e1} = \rho_{ed} E_d = \left(\frac{3\epsilon_c}{2\epsilon_c + \epsilon_d} \right) \rho_{ed} E_c \quad (19)$$

- مؤلفه دی الکتروفوریتیک، f_{e2} ، اعمال شده بر قطره:

$$f_{e2} = p \cdot \nabla E_c = [(\epsilon_d - \epsilon_c) E_d] \cdot \nabla E_c = \frac{3}{2} \left[\frac{\epsilon_c(\epsilon_d - \epsilon_c)}{\epsilon_d + 2\epsilon_c} \right] \nabla E_c^2 \quad (20)$$

بنابراین میدان الکتریکی اعمال شده، E_c ، مربع میدان الکتریکی، E_c^2 ، گرادینان مربع میدان الکتریکی، ∇E_c^2 ، به منظور بدست آوردن مؤلفه‌های EHD مؤثر بر قطرهٔ کروی بایستی محاسبه گردند.

لازم است که مؤلفه‌های نیروی EHD مؤثر بر قطره که در بالا بدست آمد، به صورت چگالی نیرو (N/m^3) بر اساس حجم قطره بیان شده‌اند، بنابراین نیروی کلی برابر است با حاصلضرب چگالی نیرو در حجم قطره.

۲-۳-۸- نیروهای مغناطیسی (F_m)

در ذراتی که نسبت به مغناطیس حساس می‌باشند، اگر در معرض یک میدان مغناطیسی قرار گیرند، نیروی مغناطیسی بر آنها اعمال می‌گردد که برابر است با:

$$F_m = n\mu_r B_0 \quad (21)$$

که در آن B_0 چگالی شار مغناطیسی در خلاء، n تعداد قطب‌های شمال و μ_r مغناطش نسبی ماده است. اغلب مواد مغناطیسی رسانایی بالایی دارند و لذا از اثرات الکترواستاتیکی در مواد مغناطیسی می‌توان چشم‌پوشی نمود.

در کل نیروها و اندازه حرکت‌هایی که بر ذره باردار در یک میدان الکترومغناطیسی وارد می‌شوند شامل آنهایی است که به دلیل بار خالص، دو قطبی الکتریکی (دائمی یا القایی) در میدان الکتریکی و دو قطبی مغناطیسی در میدان الکتریکی القایی وجود دارند [۱۷].

با چشم‌پوشی از اثرات دو قطبی‌های مغناطیسی، نیرویی که با نام نیروی لورنتز (Lorentz Force) شناخته می‌شود، بر ذره باردار که در یک میدان الکترومغناطیسی حرکت می‌کند وارد می‌شود که برابر است با:

$$F_{em} = q(E + U \times B) + \nabla(P_d \cdot E) \quad (22)$$

که در آن P_d اندازه حرکت دو قطبی است که برای مواد دی‌الکتریک به صورت زیر است:

$$P_d = \frac{\pi \epsilon_r - 1}{2 \epsilon_r - 2} d_i^3 \epsilon E \quad (23)$$

که در آن ϵ گذردهی و ϵ_r گذردهی نسبی یا ضریب دی‌الکتریک است. در پژوهش حاضر، به دلیل عدم وجود میدان مغناطیسی القایی، مقدار $B = 0$ قرار داده می‌شود. همچنین به دلیل اینکه ϵ ثابت فرض شده در نتیجه جمله $\nabla(P_d \cdot E)$ نیز صفر خواهد شد لذا تنها نیروی الکترومغناطیسی وارد بر قطره باردار نیروی میدان الکتریکی است. با توجه به آنچه که گفته شد و نیز در نظر گرفتن اهمیت هریک از جمله‌های معادله (۱) می‌توان این معادله را به صورت زیر ساده سازی نمود:

$$\frac{\pi}{6} d_i^3 \rho_d \frac{d\vec{v}_i}{dt} = C_D \frac{\pi}{8} \rho_g d_i^2 \vec{v}_i^2 \vec{e}_i + q_i \vec{E}_{ext} \quad (24)$$

$$+ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i,j,i \neq j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}^3} \vec{r}_{ij} + F_e$$

و نیز

$$\frac{d\vec{x}_i}{dt} = \vec{v}_i$$

که در آن x_i موقعیت مکانی و v_i سرعت قطره i -ام، d_i قطر قطره، ρ_d چگالی قطره و ρ_g چگالی گاز اطراف می‌باشد. \vec{E}_{ext} بردار میدان الکتریکی خارجی، q_i و q_j بار الکتریکی ذرات i -ام و j -ام و زیرنویس-های d مربوط به قطره و g مربوط به سیال محیط می‌باشند. C_D ضریب پسا، Re عدد رینولدز و a و b قطر بزرگ و کوچک قطره می‌باشند. در هنگام حرکت قطره، به دلیل تبخیر از سطح، اندازه قطره به تدریج کاهش می‌یابد.

۳- نرخ تبخیر سطحی

تبخیر که مستقیماً متناسب با سطح قطره می‌باشد به صورت زیر است:

$$\frac{dR_i}{dt} = -\psi R_i^2 \quad (25)$$

که در آن شعاع قطره i -ام و ψ نرخ تبخیر حلال است و بستگی به دمای محیط، اندازه قطره و خواص حلال دارد و مدل‌های مختلفی برای محاسبه آن ایجاد شده است. یکی از معروف ترین این مدل‌ها توسط مویله و همکارانش [۱۸] ارائه شده است که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\psi = \frac{\pi D_i^* M}{\pi \rho R R_i^3} \left[\frac{P_\infty}{T_\infty} - \frac{P_{sat}}{T_i} \right] \quad (26)$$

$$D_i^* = \frac{D_v}{\frac{R_i}{R_i + \Delta} + \frac{4D_v}{R_i \alpha \bar{v}_w}}$$

$$T_i = T_\infty + \frac{Le}{4\pi R_i k_g^*} \frac{dm}{dt}$$

و

$$k_g^* = \frac{k_g}{\frac{R_i}{R_i + \Delta} + \frac{4D_v}{R_i \alpha \bar{v}_w} C_p \bar{v}}$$

که در آن D_v ضریب پخش، α ضریب تجمع جرم (mass accommodation coefficient) و \bar{v}_w سرعت مولکولی میانگین مایع، Δ فاصله در حدود پوشش آزاد از سطح قطره، k_g رسانایی گرمایی، n_g عدد چگالی، C_p ظرفیت گرمایی ویژه و \bar{v} سرعت مولکولی میانگین گاز محیطی و α_t ضریب تجمع گرمایی (thermal accommodation coefficient) هستند.

۴- معادلات میدان الکتریکی

مطالعه اثرات میدان الکتریکی در یک میانجی دی‌الکتریک نیازمند دانش توزیع میدان الکتریکی و پتانسیل الکتریکی است. اساساً، توزیع میدان الکتریکی در داخل یک سیستم در اثر اعمال پتانسیل الکتریکی با استفاده از معادله پواسون تعیین می‌گردد که مستقیماً از معادلات ماکسول استنتاج می‌شود [۱۹]. البته با این فرض که ثابت دی‌الکتریک یکنواخت و ثابت در نظر گرفته شده است:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\sigma}{\epsilon} \quad (28)$$

با توجه به رسانایی و فرض سوم ذکر شده در داخل سیال هیچگونه بار الکتریکی نمی‌تواند وجود داشته باشد، در چنین مواردی معادله پواسون به معادله لاپلاس ساده می‌شود [۲۰]:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (29)$$

همچنین میدان الکتریکی برابر است با:

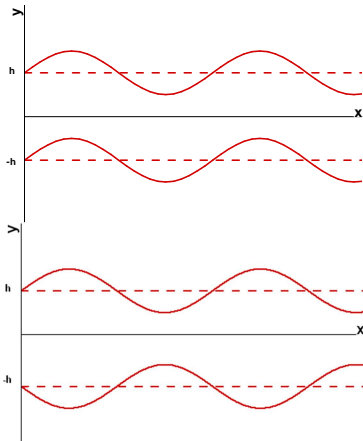
قطره از جت سیال دانست. با افزایش عدد وبر شرایط تغییر کرده و امواج ناپایدار روی جت سیال، عامل اصلی شکست است [۲۲].

صفحه سیال طی پیشروی در محیط گازی با اثراتی چون تنش اترودینامیک، گرادین فشار هوای مجاور، کشش سطحی و لزجت دینامیکی مواجه می‌شود. این شرایط سبب بروز امواجی بر روی صفحه مایع می‌شوند. دو دسته کلی به صورت موج سینوسی (نامتقارن) و واریکوز (متقارن) شناخته شده‌اند که در شکل ۱ نشان داده شده‌اند. فرض می‌شود که صفحات سیال لزج و غیر قابل تراکم به ضخامت $2h$ با سرعت U در یک سیال ساکن تراکم ناپذیر (عموما هوا) جریان می‌یابد. سیستم مختصاتی، متصل به صفحات سیال در حرکت است. در این حالت طیف اغتشاشی بسیار کوچک به فرم:

$$\eta = \eta_0 e^{ikx + \omega t} \quad (31)$$

به حالت پایای جریان اعمال می‌شود. η_0 دامنه موجی اولیه، $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ عدد موج و $\omega = \omega_r + i\omega_i$ نرخ رشد نام دارد. ناپایدارترین اغتشاش، ω_r بالاتری دارد که در این حالت با Q نشان داده می‌شود و چنین فرض می‌شود که به ازای نرخ رشد بیشینه صفحه سیال دچار فروپاشی خواهد شد [۲۳].

بنابراین اگر تابعی مانند $\omega = \omega(k)$ از روابط حاکم بر صفحه استخراج شود، می‌توان نرخ رشد بیشینه و عدد موج متناظر را پیدا کرد. با مشخص شدن این ارقام، قطر دازه سیال (لیگامنت) و قطر متوسط و نهایی قطره‌ای که از شکست صفحه سیال ایجاد می‌شود معین خواهد شد.



شکل ۱- دو فرم عمومی موج‌های روی صفحه سیال (الف) موج سینوسی یا نامتقارن و (ب) موج واریکوز یا متقارن (اقتباس از [۲۲])

برای بدست آوردن رابطه نهایی تلاشی، باید معادلات مومنوم و پیوستگی را با توجه به شرایط مرزی خطی برای صفحه سیال حل کرد. باید دقت داشت که برای دو موج متقارن و نامتقارن، شرایط مرزی هندسی π رادیان با هم اختلاف خواهند داشت. در نهایت با حل توابع پتانسیل و جریان، رابطه زیر برای موج سینوسی به صورت تابعی از عدد موج چنین بدست می‌آید:

$$\omega^2 [\tanh(kh) + Q] + [4v_l k^2 \tanh(kh) + 2iQkU] \omega + 4v_l k^4 \tanh(kh) - 4lv_l^2 k^3 \tanh(lh) - QU^2 k^2 + \frac{\gamma k^3}{\rho_l} = 0 \quad (32)$$

که در آن Q نسبت چگالی گاز به سیال و $l^2 = k^2 + \frac{\omega}{v_l}$ می‌باشند.

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad (30)$$

جزئیات حل عددی میدان الکتریکی در مرجع [۱۸] آورده شده است.

۵- فروپاشی اولیه قطره

سیال خروجی از نازل‌های الکترواسپری از ابتدا بصورت قطره ظاهر نخواهند شد. سیال لحظاتی پس از تزریق بصورت مجموعه‌ای پیوسته و ناپایدار دیده خواهد شد. بسته به نوع نازل، این مجموعه ناپایدار در انژکتورهای فشاری-چرخشی بصورت صفحات سیال و در نازل‌های تک سوراخه به صورت جت سیال خواهد بود. اثرات کشش سطحی سیال و پسای اعمالی از طرف هوا در کنار هم، بروز ناپایداری‌ها را بر روی صفحه و جت سیال تشدید می‌کنند. در نتیجه‌ی این تشدید، شکست و فروپاشی اتفاق افتاده و قطرات حاصل خواهند شد. بنابراین روند شکست و فروپاشی اسپری در محیط ساکن گازی را در دو تعریف زیر می‌توان خلاصه کرد [۲۱]:

فروپاشی اولیه: در اسپری‌های فشاری، فروپاشی صفحه و جت سیال به عناصر ریزتر به نام لیگامنت^۱ (نوار سیال) و در ادامه، شکست این عناصر به قطرات کروی را فروپاشی اولیه می‌گویند.

فروپاشی ثانویه: شکست قطرات درشت سیال به عناصر ریزتر را فروپاشی ثانویه گویند.

جت پس از خروج از نازل فاصله‌ای معین را طی خواهد کرد تا در نهایت به قطرات خالص سیال تبدیل شود. محاسبات مربوط به ناحیه چگال^۲ به وسیله مدل‌های فروپاشی اولیه انجام خواهد شد. پس از طی این فاصله، ناحیه رقیق اسپری به کمک مدل‌های فروپاشی ثانویه و در فضای فاز گسسته دنبال می‌شود. امواج ناپایدار روی صفحه پس از طی فاصله‌ای به طول L شکسته شده به لیگامنت و در نهایت به قطرات درشت سیال تبدیل می‌شوند. محاسبات پس از این مرحله در سیستم مختصات لاگرانژی در اتصال با فاز پیوسته انجام خواهد شد.

با تزریق سیال به داخل محیط گازی، صفحه و جت مایع با مومنوم اعمالی معین شروع به پیشروی می‌کند. توزیع فشار خاصی از طرف هوا بر روی این اجزا اعمال می‌شود که سبب ناپایداری و در نهایت شکست آنها می‌گردد. نیروهای متاثر از کشش سطحی، لزجت دینامیکی و اینرسی سیال عوامل مهمی در راستای این مهم هستند. از این رو قابل پیش‌بینی است که اعداد بی‌بعدی در ارتباط با این نیروها قابل تعریف است که بتوان بر اساس آنها روند شکست جت و صفحه سیال را توجیه کرد. عدد وبر^۳ به صورت نسبت نیروهای اینرسی به کشش سطحی، عدد رینولدز به عنوان نسبت نیروهای اینرسی به لزج در کنار عدد آنزوگ^۴ که تابعی از خصوصیات سیال است، از مهمترین این اعداد به شمار می‌آیند.

کاملاً مشخص است که با افزایش سرعت اولیه و به دنبال آن عدد وبر، میزان ناپایداری و شکست سیال افزایش می‌یابد. در اعداد وبر پایین مشاهده می‌شود که ناپایداری قابل توجهی بر روی ستون سیال تشکیل نشده و بنابراین می‌توان کشش سطحی را عامل فروپاشی و جدایش

^۱Ligament

^۲Dense

^۳Weber number

^۴Ohnesorge number

برای طول موج کوتاه نیز به صورت مشابه خواهیم داشت:

$$\left[\frac{\Omega h}{U}\right]_{short\ assumption} = \frac{2}{3} We_g \sqrt{\frac{Q}{3}} \quad (41)$$

حال اگر سمت راست تساوی دو رابطه (40) و (41) را با هم برابر قرار دهیم، عدد وبر بحرانی معادل 1.6875 بدست خواهد آمد. هرگاه عدد وبر گازی بزرگتر از این مقدار باشد، صفحه سیال در طول موج کوتاه و هرگاه کمتر از این مقدار باشد، صفحه در طول موج بلند خواهد شکست.

اکنون که عدد وبر بحرانی و شرایط انتقال از طول موج بلند به کوتاه را یافته‌ایم، مجدداً به رابطه (32) برای سیال لزج برمی‌گردیم. در رابطه مذکور دو ساده سازی عمده انجام می‌دهیم:

- از جمله‌های مرتبه دوم لزجت دینامیکی صرفنظر می‌کنیم.
- از آنجا Q که از مرتبه 10^{-3} است، نهایتاً می‌توان فرض کرد که $1 \ll Q$ ، بدین ترتیب در نهایت رابطه تلاشی برای موج سینوسی جاری روی صفحه سیال لزج به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\omega_r = \frac{1}{\tanh(kh) + Q} \left\{ -2v_l k^2 \tanh(kh) + \sqrt{4v_l^2 k^4 \tanh^2(kh) - Q^2 U^2 k^2 - [\tanh(kh) + Q](-QU^2 k^2) + \frac{\gamma k^3}{\rho_l}} \right\} \quad (42)$$

این رابطه مشابه آنچه برای سیال غیر لزج انجام شد، به دو رابطه جدا شکسته می‌شود. برای طول موج بلند خواهیم داشت:

$$\omega_r = -2v_l k^2 + \sqrt{4v_l^2 k^4 + \frac{QU^2 k}{h} - \frac{\gamma k^2}{\rho_l h}} \quad (43)$$

به صورت مشابه برای طول موج کوتاه داریم:

$$\omega_r = -2v_l k^2 + \sqrt{4v_l^2 k^4 + Q^2 U^2 k^2 - \frac{\gamma k^3}{\rho_l}} \quad (44)$$

با این توضیحات، می‌توان برای شرایط مختلف تزریق، نرخ رشد بیشینه و عدد موج متناظر را تعیین کرد. سپس یکی از روابط (4-14) یا (4-15) را به کار می‌بریم تا نرخ رشد بیشینه Ω را تعیین کنیم. تحت این شرایط جت سیال در لحظه ای که موج به η_b می‌رسد، شکسته و براساس رابطه (31) زمان فروپاشی به صورت تعریف می‌شود:

$$\tau = \frac{1}{\Omega} \ln\left(\frac{\eta_b}{\eta_0}\right) \quad (45)$$

زمانی فروپاشی زمانی است که صفحه سیال طی می‌کند تا از حالت پیوسته به حالت گسسته قطره‌ای برسد. بر این اساس طول فروپاشی که همین فاصله طی شده است به صورت رابطه (46) معرفی می‌شود:

$$L_b = U\tau = \frac{U}{\Omega} \ln\left(\frac{\eta_b}{\eta_0}\right) \quad (46)$$

در رابطه فوق $\ln\left(\frac{\eta_b}{\eta_0}\right)$ بر اساس کارهای دومبروفسکی و هوپر [24] معادله (41) در نظر گرفته می‌شود. پس از اینکه صفحه سیال فاصله L_b را پیمود به لگامنت تبدیل می‌گردد. در مورد طول موج کوتاه می‌توان فرض نمود که سیال به ازای هر طول موج یک لیگامنت تشکیل می‌دهد. قطر این لیگامنت از قانون بقای جرم:

$$d_L = \sqrt{\frac{16h}{k_s}} \quad (47)$$

معادله 32 برای موج‌های سینوسی بدست آمده است. اگر در این معادله جمله‌های $\tanh(kh)$ و $\tanh(lh)$ را به ترتیب به $\coth(kh)$ و $\coth(lh)$ تبدیل کنیم، رابطه بدست آمده برای موج‌های واریکوز صادق خواهد بود. رابطه بالا نسبتاً ثقیل است، لذا در صورتی که متغیرهای مرتبط لزجی را از رابطه (32) حذف کنیم رابطه ساده:

$$\omega^2 [\tanh(kh) + Q] + \omega 2i QkU - QU^2 k^2 + \frac{\gamma k^3}{\rho_l} = 0 \quad (33)$$

برای موج متقارن و

$$\omega^2 [\coth(kh) + Q] + \omega 2i QkU - QU^2 k^2 + \frac{\gamma k^3}{\rho_l} = 0 \quad (34)$$

برای موج نامتقارن بدست خواهد آمد. با حل معادلات فوق رابطه تلاشی به ترتیب برای امواج سینوسی و واریکوز به صورت تابعی از عدد موج، برای جریان غیر لزج به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{\tanh(kh)QU^2 k^2 - \gamma k^3 / \rho_l} [\tanh(kh) + Q]}{\tanh(kh) + Q} \quad (35)$$

و

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{\coth(kh)QU^2 k^2 - \gamma k^3 / \rho_l} [\coth(kh) + Q]}{\coth(kh) + Q} \quad (36)$$

اشمیت [23] تغییرات نرخ رشد را به صورت عددی بی‌بعد در مقابل عدد موج kh بررسی کرد و مشاهده نمود که نرخ رشد بیشینه به ازای هر عدد وبر، برای موج سینوسی اتفاق می‌افتد. به عبارت دیگر چنین پیش‌بینی می‌شود که موج متقارن مسئول شکست صفحات سیال است. از این رو کار خود را با امواج متقارن یا سینوسی ادامه می‌دهیم.

ساده سازی‌های بیشتری در مورد رابطه بدست آمده برای موج سینوسی می‌توان اعمال کرد. با در نظرگیری فرض طول موج بلند برای موج متقارن، $\tanh(kh) \approx kh$ را باید در رابطه (35) وارد کرد. از طرفی چون نسبت چگالی گاز به مایع بسیار کمتر از kh است، از این رو این جمله نیز قابل صرفنظر است. بنابراین برای طول موج بلند، رابطه تلاشی به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\omega_r = \frac{\sqrt{QU^2 k^2 - \gamma k^3 / \rho_l}}{kh} \quad (37)$$

برای اعمال فرض طول موج کوتاه نیز باید جمله $\tanh(kh)$ را با عدد یک جایگزین کرد. بنابراین رابطه (4-6) برای طول موج کوتاه و سیال غیر لزج به صورت زیر خلاصه می‌شود:

$$\omega_r = \sqrt{QU^2 k^2 - \gamma k^3 / \rho_l} \quad (38)$$

اما برای استفاده از این فرضیات باید محدودیتی قائل شد. در حقیقت باید شرایطی را برای استفاده از فرض طول موج بلند یا کوتاه تعریف کرد. با مساوی قرار دادن روابط (37) و (38) به نتیجه زیر می‌رسیم:

$$\omega_{r,shot} = \sqrt{kh} \omega_{r,long} \quad (39)$$

در واقع هر گاه kh در رابطه فوق بزرگتر از یک شود، آنگاه فرض طول موج کوتاه صادق است و برعکس. از طرفی این معیار انتقال را می‌توان به صورت عددی بی‌بعد و ملموس مانند عدد وبر تعریف کرد. برای این منظور عدد موج متناظر با نرخ رشد بیشینه را برای هر دو رابطه (37) و (38) بدست می‌آوریم. پس از ساده سازی‌های ریاضی برای طول موج بلند، نرخ رشد بیشینه Ω از طریق زیر با عدد وبر ارتباط پیدا می‌کند.

$$\left[\frac{\Omega h}{U}\right]_{long\ assumption} = \frac{1}{2} \sqrt{Q We_g} \quad (40)$$

۶- تعریف مساله حل عددی دینامیک قطرات

ابتدا طبق روش عددی ارائه شده در مرجع [۱۹]، در هر نقطه از میدان مقدار و جهت بردار شدت میدان الکتریکی خارجی بدست آمده و به صورت جمله معین در حل دینامیک قطرات وارد شده است. حال برای ادامه حل تعیین شرایط اولیه قطره از جمله قطر، سرعت اولیه، بار الکتریکی و موقعیت مکانی آن و نیز فرکانس تولید قطرات ضروری است. بدین منظور قطر اولیه قطرات و فاصله فروپاشی، از مدل ارائه شده در قسمت فروپاشی اولیه محاسبه می‌گردد. برای فیزیکی شدن این جواب‌ها، همانطور که پیشتر نیز گفته شد از توزیع روزین راملر استفاده می‌شود. زمان تشکیل هر قطره نیز از پایداری جرم و دبی ورودی تعیین می‌گردد. مطابق مرجع [۱۹] یک الکترواسپری با نازلی به قطر ۸ میلی‌متر و طول ۶ میلی‌متر که در فاصله ۳۴ میلی‌متری از صفحه زیرین قرار گرفته به عنوان هندسه حل عددی لحاظ گردیده است. اتیلن گلیکول نیز به عنوان سیال عامل استفاده شده است. برای دبی $5.56 \times 10^{-9} \text{ m}^3/\text{s}$ و ولتاژ اعمالی 4.8 kV قطر جت حاصل $15.4 \mu\text{m}$ محاسبه شده است که با نتایج تجربی کاملاً مطابقت دارد. حال اگر از قانون مقیاس اشاره شده در آن مرجع استفاده گردد قطره تک سایز با قطر $29.1 \mu\text{m}$ بدست می‌آید که از قطر میانگین قطرات اندازه گیری شده در آزمایشگاه بزرگتر است در حالی که با استفاده از روش ارائه شده در فروپاشی اولیه مقدار قطر میانگین $28.2 \mu\text{m}$ و توزیع لوگ-نرمال با انحراف معیار ۴٪ لحاظ شده است که صحت بیشتری با داده های تجربی دارد. سرعت میانگین قطره (با استفاده از معادله پیوستگی و اندازه قطره، 20.9 m/s) چگالی بار الکتریکی (67.2 C/m^2) و نقطه فروپاشی اولیه (طول فروپاشی) به همراه میدان الکتریکی محاسبه شده وارد حل دینامیک قطرات می‌گردد.

۷- نتایج

در فاصله 2.6 cm از مرز ورودی قطرات، قطر میانگین قطره و سرعت محوری میانگین در برابر فاصله از مرکز اسپری برای مدل و نتایج آزمایشگاهی به ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ مقایسه شده است. بدلیل اینکه نسبت سطح به حجم در قطرات کوچکتر مقدار بزرگتری دارد، لذا نرخ تبخیر در قطره کوچکتر سرعت بیشتری خواهد داشت. نتایج مدل در مقایسه با یافته‌های آزمایشگاهی از مطابقت خوبی برخوردار است و در اندازه قطره حدود ۷٪ و در مقدار سرعت حداکثر ۱۰٪ اختلاف را نشان می‌دهد. با این وجود سرعت محاسبه شده در مدل عددی همواره مقداری بزرگتر از مقادیر تجربی اختیار می‌کند و این اختلاف در سرعت-های بالاتر، بیشتر نیز می‌گردد و شاید این تمایز به دلیل فرض سکون هوای اطراف و در نظر نگرفتن اثرات مومنتوم انتقالی به هوای اطراف قطره باشد.

در شکل ۴ تصویر لحظه‌ای (Snap Shot) از توزیع محلی قطرات در مخروط الکترواسپری به نمایش درآمده است، که در آن هر یک از نقاط نماینده تک قطره می‌باشد. نتایج در این لحظه نشان دهنده 3520 قطره در حالت پایا می‌باشند. به وضوح دیده می‌شود که نیروی دفع متقابل قطرات بردار هم‌نام منجر به پخش گسترده اسپری با فاصله گرفتن از نقطه فروپاشی می‌گردد که این امر حاکی از آن است که چتر اسپری در الکترواسپری‌ها نسبت به اسپری‌های متداول بزرگتر و پهن‌تر است.

بدست می‌آید و مشابه همین رابطه برای طول موج بلند نیز قابل محاسبه است با این تفاوت که در این حالت فرض می‌شود سیال به ازای هر طول موج دو لیگامنت تشکیل می‌دهد. بنابراین رابطه (۴۷) برای موج بلند به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_L = \sqrt{\frac{8h}{k_s}} \quad (48)$$

در روابط بالا k_s همان عدد موج متناظر با نرخ رشد بیشینه است. پس از تشکیل نوارهای سیال، کشش سطحی موجود بر روی سطح سیال در کنار میدان فشار موجود در اطراف آن، موجب شکست این نوار به قطرات ریزتر می‌گردد. با استفاده از قانون بقای جرم، برای نوارهای باریک سیال و نتایجی که وبر برای فروپاشی استوانه سیال بدست آورد، می‌توان نتیجه گرفت که قطر متوسط قطره نهایی به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

$$D_d = 1.88 d_L (1 + 3 Oh)^{1/6} \quad (49)$$

که این رابطه $Oh = \frac{\mu L}{\sqrt{\rho} d_L \nu}$ عدد آنزوگ است.

۵-۲- توابع توزیع

پس از اینکه قطر متوسط از نتایج فروپاشی اولیه به دست آمد، قطرات باید به صورتی سازگار با نتایج تجربی، به محیط تزریق شوند. به عبارت دیگر معرفی صرف یک قطر ثابت در محل شکست صفحات سیال با فیزیک مسئله در تناقض است. از این رو لازم است توزیعی بر این مقادیر متوسط زده شود تا گستره‌ای نسبتاً وسیع از قطرات تعریف گردد. توزیع کاربردی روزین-راملر (Rosin-Rammler) در این زمینه تعریف شده است. تابع توزیع روزین-راملر با تابع توزیع حجمی در این حالت به صورت زیر ارائه می‌گردد:

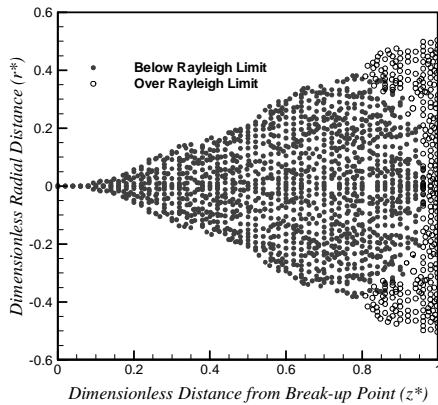
$$v = 1 - \exp\left(-\left(\frac{D}{\bar{D}}\right)^\alpha\right) \quad (50)$$

که در رابطه فوق متغیر α ، متغیر توزیع نام دارد و برای کاربرد مورد نظر در $3/5$ در نظر گرفته می‌شود [۲۴].

متغیر D نیز قطر قطرات داخل بسته‌هاست و به صورت تحلیلی باید محاسبه شود. \bar{D} نیز همان قطر متوسط مشخصه است و به صورت زیر محاسبه می‌گردد:

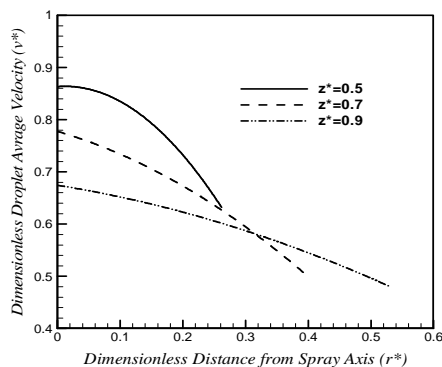
$$\bar{D} = d_D \Gamma(1 - \alpha)^{-1} \quad (51)$$

در رابطه بالا d_D قطر متوسط قطرات بوده و از رابطه (۴۹) برای فروپاشی اولیه محاسبه می‌شود. Γ نیز تابع گاما است و از مراجع ریاضی قابل دستیابی است. کاملاً مشخص است که تعداد قطرات درشت در توزیع روزین-راملر (RR) کمتر است، به عبارت دیگر توزیع روزین-راملر قطر قطرات را با انحراف کمتری نسبت به قطر متوسط تخمین می‌زند. در واقع درشت بودن قطرات نه تنها سبب خطا در محاسبه قطر متوسط قطرات داخل اسپری می‌شود، بلکه نفوذ اسپری را به دلیل مومنتوم بالای این قطرات، افزایش می‌دهد. از این رو در تحقیق اخیر برای فروپاشی اولیه توزیع روزین-راملر استفاده شده است. پس از محاسبات مربوط به فروپاشی اولیه، قطر متوسط، زمان فروپاشی و طول فروپاشی مشخص می‌گردد. بر این اساس می‌بایست ابتدا توزیعی بر روی قطر متوسط مذکور زده شود، تا قطرهای قطرات اولیه معین گردند.



شکل ۴- توزیع موقعیت قطرات در تصویر لحظه‌ای از مخروط الکترواسپری ($r^* = \frac{r}{H}$ و $z^* = \frac{z}{H}$). نقاط کم رنگ توخالی نشان دهنده این است که قطره به به حد رابلی رسیده است.

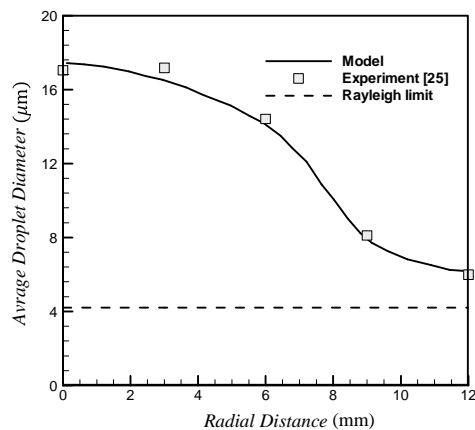
شکل ۷ توزیع اندازه قطرات را فواصل مختلف روی محور اسپری نشان می‌دهد. در قسمت الف این شکل به وضوح دیده می‌شود که توزیع جرم بسیار تک‌پاش (monodisperse) بوده و نسبت انحراف معیار (SD) به قطر میانگین (D_{avr}), SD/D_{avr} برابر با 0.00118 است. همچنین توزیع قطرات بسیار شبیه به توزیع لوگ نرمال می‌باشد که مطابقت خوبی با روند مشاهده شده در اکثر نتایج آزمایشگاهی دارد. و در ادامه در مسیر حرکت قطرات و به سبب تبخیر این توزیع پهن‌تر با یک کشیدگی به سمت قطرات ریزتر تبدیل می‌شود (شکل ۷ ب). $SD/D_{avr} = 0.00226$. با دقت در مقادیر کوچک انحراف معیار در این شکل، دیده می‌شود که توزیع قطرات در الکترواسپری یکنواخت و تک‌پاش می‌باشد. (الف تا د). همچنین، مقایسه قطر میانگین در فواصل مختلف مشخص کننده تبخیر سطحی قطرات در حین حرکت و تولید قطرات ریزتر می‌باشد.



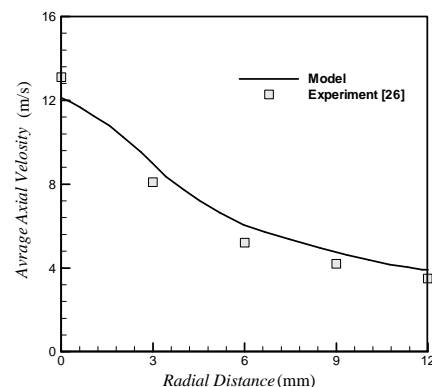
شکل ۵- تغییرات سرعت میانگین محوری در جهت‌های محوری و شعاعی

مقدار نیم زاویه محاسبه شده برای این الکترواسپری مقدار حدود ۳۴/۱ درجه را ارائه می‌کند و مقدار تجربی ۳۵/۹ از آزمایشات اندازه‌گیری شده است. به سبب تبخیر در حین انتقال قطرات رفته رفته کوچکتر شده و چنانکه انتظار می‌رفت در لبه کناری اسپری احتمال رسیدن به حد رابلی وجود دارد که در این صورت قطره دچار شکافت کلمبی شده و مقداری از جرم و بار خود را ساطع می‌نماید و به قطرات ریزتر شکسته می‌شود که به دلیل عدم نظر گرفتن این پدیده در این مطالعه مقدار زاویه پخش اسپری اندکی کمتر محاسبه شده است [۲۷-۲۸].

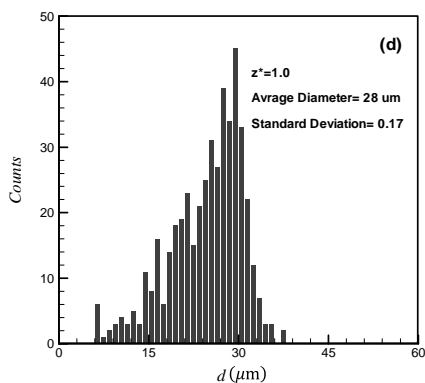
شکل ۵ تغییرات سرعت میانگین محوری در جهت شعاعی را در موقعیت‌های مختلف به تصویر می‌کشد. همانطور که مشخص می‌گردد به دلیل نیروی الکتریکی بیشتر در مرکز اسپری و مومنتوم بالای قطره به سبب جرم بیشتر، سرعت عبور قطرات از مرکز بیشتر از کناره‌ها می‌باشد. شکل ۶ توزیع اندازه قطرات را به صورت تابعی از فاصله از نقطه فروپاشی اولیه نشان می‌دهد. نتایج مشخص می‌کند که قطر قطرات در جهت شعاعی در z ثابت تقریباً ثابت بوده و تغییرات کمی می‌کند هرچند کاهش مختصری نیز دیده می‌شود، اما در شعاع ثابت با افزایش فاصله از نقطه فروپاشی اولیه، به دلیل تبخیر و شکست ثانویه قطر قطرات کاهش می‌یابد.



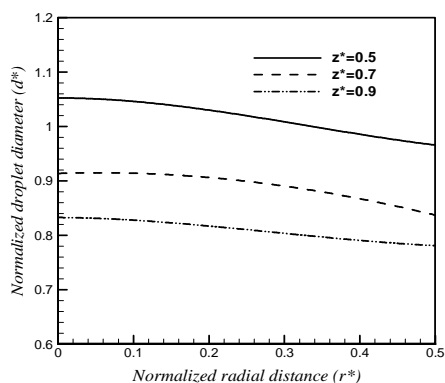
شکل ۲- قطر میانگین قطره بدست آمده از حل عددی و نتایج تجربی [۱۹]



شکل ۳- سرعت محوری میانگین قطره به صورت تابعی از فاصله شعاعی بدست آمده از حل عددی در مقایسه با نتایج تجربی [۲۶]

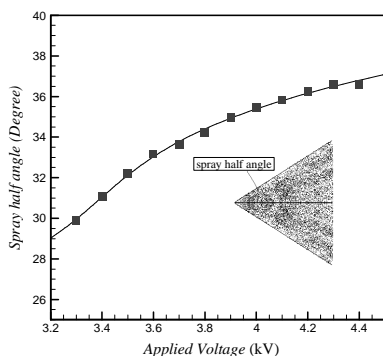


شکل ۷- توزیع اندازه قطرات تبخیر شونده اسپری در مکان‌های مختلف در طول محور میانی آن. الف) $z^* = 0.5$ ، ب) $z^* = 0.7$ ، ج) $z^* = 0.9$ و د) $z^* = 1.0$



شکل ۶- تغییرات اندازه قطرات در نقاط مختلف الکترواسپری

در شکل ۸ نمودار تغییرات زاویه پخش اسپری در برابر تغییرات ولتاژ اعمال شده ترسیم شده است. این زاویه با افزایش ولتاژ اعمال شده به صورت نمایی افزایش می‌یابد اما پس از حدی این نرخ به حالت ثابت می‌رسد. چرا که همانگونه که می‌دانیم در ولتاژهای بسیار بالا مد الکترواسپری تغییر یافته و به پالس جت یا مولتی جت تبدیل خواهد شد که به دلیل گذرا بودن و ناپایداری در حوزه این مطالعه قرار نگرفته است هر چند به همین دلیل کاربرد صنعتی و آزمایشگاهی این مدها نیز محدود می‌باشد.

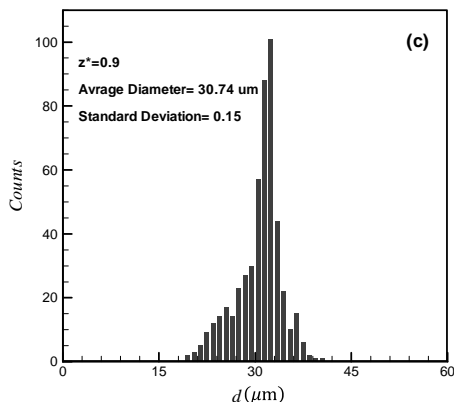
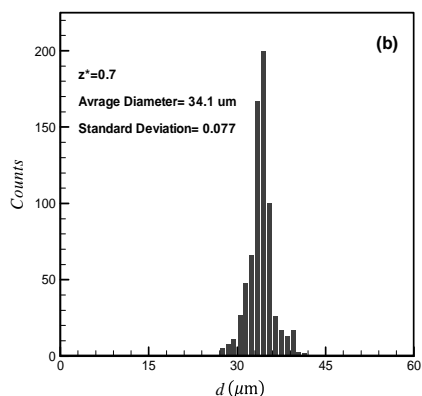
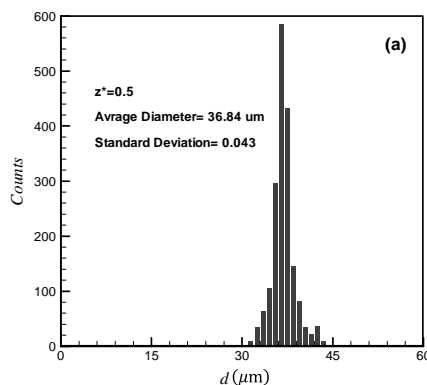


شکل ۸- نمودار تغییرات زاویه اسپری با ولتاژ اعمال شده.

(محلول تری‌اتیلن گلیکول (TEG)+ یدید سدیم (NaI)، رسانایی الکتریکی $K=0.01$ S/m، قطر خارجی نازل $OD=0.56$ mm، فاصله نازل تا الکتروود صفحه‌ای $H=3$ mm، دبی حجمی جریان 120 nL/s)

۸- نتیجه‌گیری

جزئیات شبیه‌سازی عددی دینامیک قطرات باردار در یک اسپری الکتروهیدرودینامیکی در انتقال و تبخیر در زیر حد رابلی ارائه گردید. نتایج به صورت منطقی با نتایج محققین این حوزه مطابقت دارد. نتایج نشان می‌دهد که با پیشروی در طول اسپری به دلیل تبخیر، نسبت سطح به حجم افزایش می‌یابد که این امر نرخ تبخیر را افزایش می‌دهد. همچنین به دلیل اثرات برهم‌کنشی قطرات با بارهای هم‌نام چتر اسپری این نوع افشانه‌ها بزرگتر است. در یک



Scaling Laws, *New Journal of Physics*, Vol. 15, No. 3, pp. 33-35, 2013.

[15] Kelbaliyev G., Ceylan K., Development of New Empirical Equations for Estimation of Drag Coefficient, Shape Deformation, and Rising Velocity of Gas Bubbles or Liquid Drops, *Chemical Engineering Communications*, Vol. 194, No. 10-12, pp. 1623-1637, 2007.

[16] Sirignano W.A., *FLUID DYNAMICS AND TRANSPORT OF DROPLETS AND SPRAYS*, Cambridge University Press, 2010.

[17] Soo S. L., *Multiphase Fluid Dynamics*, Ashgate Publishing Company, 1990.

[18] Moyle A. M., Smidansky P. M., Lamb D., Laboratory studies of water droplet evaporation kinetics, *12th Conference on Cloud Physics*, Madison, pp. 10-14, 2006.

[19] Rahmanpour M., Ebrahimi R., Numerical simulation of electrohydrodynamic spray with stable Taylor cone-jet, *Heat Mass Transfer*, Vol. 51, No. 10, 2015.

[20] Najjaran A.K., Ebrahimi R., Rahmanpour M., *Numerical Modeling of High Electrohydrodynamic Atomization to be Used in Ion Propulsion*, MSc Thesis, K.N. Toosi University of Technology, Aerospace Eng. Department, 2011. (in Persian)

[21] Bafekr S. H., Shams M., Shadaram A., *Numerical Modeling of High Pressure spray with Euler-Lagrange Method*, MSc Thesis, K.N. Toosi University of Technology, Mechanical Eng. Department, 2011. (in Persian)

[22] Madsen J., *Computational and Experimental Study of Sprays From The Breakup of Water Sheets*, PhD. thesis, Faculty of Engineering and Science, Aalborg University, Denmark, 2006.

[23] Senecal P., Schmidt D., Nouar I., Corradini M.L., Modeling High-Speed Viscous Liquid Sheet Atomization, *International Journal of Multiphase Flow*, Vol. 25, No. 6, pp. 1073-1097, 1999.

[24] Dombrowski N., Johns W. R., The aerodynamic instability and disintegration of viscous liquid sheets, *Chemical Engineering Science*, Vol. 18, No. 3, pp. 203-214, 1963.

[25] Shrimpton J. S., Modeling Dielectric Charged Drop Break Up using an Energy Conservation Method, *IEEE Transactions on Dielectrics and Electrical Insulation*, Vol. 15, No. 5, pp. 1471-1477, 2008.

[26] Hartman R., *Electrohydrodynamic Atomization in the Cone-Jet Mode. From Physical Modeling to Powder Production*, Ph.D. Thesis, TU Delft, 1999.

[27] Ashkriz N., *Handbook of Atomization and Sprays: Theory and Applications*, Springer, 2011.

[28] Lastow O., Balachandran W., Numerical simulation of electrohydrodynamic (EHD) atomization, *Journal of Electrostatics*, Vol. 64, pp. 850-859, 2006.

فاصله ثابت از نازل تمرکز قطرات بزرگتر در مرکز بوده و به دلیل اثرات نیروی کلمبی و میدان الکتریکی لبه کناری اسپری محل تمرکز قطرات ریزتر است. همچنین توزیع اندازه قطرات هرچه به انتهای اسپری نزدیک می‌شویم یکنواخت تر شده و به حالت تک پاش که مهمترین مزیت این نوع اسپری‌ها می‌باشد میل می‌کند. شبیه سازی کامل مخروط تیلور با احتساب هوای اطراف به روش VOF با حل کامل میدان الکتریکی (چاپ شده توسط همین نویسندگان در مراجع [۱۹-۲۰]) و به دنبال آن استفاده از مدل موج برای احتساب فروپاشی اولیه جت که قطر قطره حاصل و محل شکست جت را مشخص می‌نماید منجر به روش عددی شده است که علیرغم سرعت بالای آن و پرهیز از پیچیدگی‌های حل پژوهشگران گذشته از بسیاری از ساده سازی‌ها اجتناب کرده و با نتایج تجربی نیز مطابقت خوبی را نشان می‌دهد.

۹- مراجع

[1] Gomez A., Tang K., Charge and Fission of Droplets in Electrostatic Spray, *Phys. Fluids*, Vol. 6, pp. 404-414, 1994.

[2] Rayleigh L., On the Conditions of Instability of Electrified Drops, *Proc. Roy. Soc.*, Vol. 29, pp. 71-83, 1879.

[3] Dawson G.A., Charge Loss Mechanism of Highly Charged Water Droplets in the Atmosphere, *J. Geophysical Research Atmosphere*, Vol. 78, No. 27, pp. 6364-6369, 1973.

[4] Chen C., Gomez A., Counter Flow Diffusion Flames of Quasi-Monodisperse Electrostatic Sprays, in *24th symp. (int.) Combustion*, Pittsburgh, PA, 1992.

[5] Taflin D. C., Ward T. L., Davis E. J., Electrified droplet fission and Rayleigh limit, *Langmuir*, Vol. 5, No. 2, pp. 376-384, 1989.

[6] ROTH D., KELLY A.J., Analysis of the Disruption of Evaporating Charged Droplets, *IEEE Transactions on Industry Applications*, Vol. IA-19, NO. 5, 1983.

[7] Shrimpton J.S., Dielectric Charged Drop Break-up at Sub-Rayleigh Limit Conditions, *IEEE Trans. Dielectrics Elec. Insul.*, Vol. 12, pp. 573-578, 2005.

[8] Kebarle P., Tang L., From Ion in Solution to Ion in Gas Phase- The Mechanism of Electro spray Mass Spectrometry, *Anal. Chem.*, Vol. 65, No. 22, pp. 972A-986A, 1993.

[9] López J. M., Gañán-Calvo A. M., A Note on Charged Capillary Jet Breakup of Conducting Liquids: Experimental Validation of a Viscous One Dimensional Model, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 501, pp. 303-326, 2004.

[10] Wilhelm O., *Electrohydrodynamic Spraying-Transport, Mass and Heat Transfer of Charged Droplets and Their Application to Deposition of Thin Functional Films*, in *Science*, PhD Thesis, University of Tubingen, Zurich, 2004.

[11] Gañán-Calvo A. M., López J. M., Chueca P. R., The combination of electrospray and flow focusing, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 566, pp. 421- 445, 2006.

[12] López J. M., Chueca P. R., Gañán-Calvo A. M., Linear Stability Analysis of Axisymmetric Perturbations in Imperfectly Conducting Liquid Jets, *Physics of Fluids*, Vol. 17, pp. 3-25, 2005.

[13] López J. M., Barrero A., Boucard A., Loscertales I. G., Márquez M., An Experimental Study of the Electro spraying of Water in Air at Atmospheric Pressure, *Journal of the American Society for Mass Spectrometry*, Vol. 15, No. 2, pp. 253-259, 2004.

[14] Gañán-Calvo A. M., Muñoz N. R., Montanero J. M., The Minimum or Natural Rate of Flow and Droplet Size Ejected by Taylor Cone-Jets: Physical Symmetries and