

شبیه سازی عددی انتقال گرمای همرفتی آزاد نانو سیال تحت میدان مغناطیسی در داخل محفظه موجدار

مهدي مسلمی*

کورش جواهرده

مونا شهبازی

مربی، موسسه آموزش عالی آیندگان مازندران، تنکابن، ایران

دانشیار، دانشگاه گیلان، دانشکده مهندسی مکانیک، گیلان، رشت، ایران

دانشجوی دکتری، پردیس دانشگاه گیلان، رشت، ایران

چکیده

در این مقاله، مدل عددی انتقال گرمای همرفتی آزاد همراه با اثر میدان مغناطیسی یکنواخت در حالت جریان لایه ای پایا، در یک محفظه موجدار که با استفاده از نانو سیال اکسید مس پر شده است، مورد بررسی قرار گرفته است. دیوارهای راست و چپ محفظه عایق در نظر گرفته شده اند، در حالی که دیوارهای بالایی و پایینی موجدار همدمای می باشند. معادلات حاکم بر مسئله به صورت تابع جریان-فرمول گردابه مورد بررسی قرار گرفته و بی بعد سازی شده است. سپس معادلات با استفاده از روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم گسسته سازی شده و آنگاه با روش شتاب دهنده همگرایی بر اساس شرایط مرزی مورد نظر حل شده است. مقایسه های متعددی با پژوهش های منتشر شده قبلی انجام شده و درصد اختلاف بین آنان ناچیز است. در مطالعه پارامتری اثر پارامترهای حاکم مانند عدد رایلی، عدد هارتمن و کسر حجمی نانوسیال بر جریان بررسی شده است و نتایج به صورت کانتورهای تابع جریان، همدمای و عدد ناسلت ارائه گردیده است. نتایج نشان می دهد که حضور نانوسیال منجر به تقویت قابل توجه انتقال گرما برای تمامی مقادیر عدد رایلی می شود. افزایش عدد هارتمن نشان می دهد که سرعت جریان کم شده و انتقال حرارت کاهش می یابد و همچنین افزایش عدد رایلی نیز میزان آهنگ انتقال گرمای همرفتی آزاد را بیشتر می نماید. **واژه های کلیدی:** محفظه موجدار، نانو سیال، میدان مغناطیسی، همرفت آزاد، حل عددی.

Numerical Investigation of Natural Convection of Nano-fluid in a Wavy Cavity in the Presence of Magnetic Field

M. Moslemi

K. Javaherdelh

M. shahbazi

Ayandegan Institute of higher education, Tonekabon, Iran

Faculty of Mechanical Engineering, University of Guilan, Iran

Faculty Faculty of Mechanical Engineering, University of Guilan, Iran

Abstract

A numerical analysis has been performed to investigate the laminar natural convection heat characteristics in a wavy cavity filled with CuO/water nanofluid. The left and right walls are insulated and the wavy bottom and top walls are maintained at a constant temperature while the uniform magnetic field is considered. In performing the analysis, the governing equations are given in terms of the stream function-vorticity formulation. In order to solve Non-dimensionalized equations, discretizing with second-order accurate central difference method and was performed using the successive under relaxation with appropriate boundary conditions is considered. To validate the numerical model, various comparisons with previously published studies have been conducted and results are in a good agreement. The main objective is to survey the effects of the Rayleigh number, Hartmann number, and nanoparticles volume fraction on the fluid flow and heat transfer characteristics. Results are illustrated in contours of stream function, constant temperature, and Nusselt number. For all values of Rayleigh number, the presence of nanoparticles leads to significant enhancement in heat transfer.

Keywords: wavy cavity, nanofluid, magnetic field, natural convection.

۱-مقدمه

انتقال حرارت جابجایی نانو سیالات وابسته به خواص ترموفیزیکی سیال پایه و ذرات جامد در ابعاد نانو، الگوی جریان و ساختار جریان، کسر حجمی ذرات معلق، ابعاد و شکل این ذرات است. در سال های اخیر، مطالعات متعددی در ارتباط با انتقال گرما جابجایی در نانو سیالات انجام شده است. وانگ و همکاران انتقال گرما نانو سیال آب و مس را در یک محفظه مربعی مورد مطالعه قرار داد. [۱] مانکا و همکاران انتقال گرمای ترکیبی نانو سیال آب و اکسید آلومینیوم را در کانال با مقطع مستطیلی مورد بررسی قرار دادند و بر اساس یافته های آنها بیشترین بهبود انتقال حرارت در کسر حجمی ۵٪ اتفاق می افتد و مقدار ضریب انتقال گرما از ۱/۱۴ به ۲/۰۱ مقدار آن در سیال پایه آب می باشد. [۲] گویت و همکاران انتقال گرما نانو سیال آب و اکسید آلومینیوم را در

انتقال گرمای همرفتی آزاد در محفظه موجدار به دلیل افزایش سطح تبادل گرمایی و کاربرد زیاد در صنایع مختلف نظیر صنایع الکترونیکی، مبادله کن گرما، کلکتورهای خورشیدی و راکتور های هسته ای موضوع مطالعات بسیاری از محققین بوده است. سیالاتی از قبیل آب، روغن و اتیلن گلیکول معمولاً به عنوان سیال در انتقال گرما استفاده می شوند اما عملکرد حرارتی بسیار پایینی دارند. استفاده از ذرات نانو و افزودن آن به سیالات پایه باعث بهبود رسانایی گرمایی در نتیجه افزایش میزان انتقال حرارت در سیالات میگرد که به دلیل بالاتر بودن رسانایی گرمایی فلز جامد نسبت به سیال می باشد. خصوصیات

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: mehdimoslemi1982@gmail.com

تاریخ دریافت: ۹۴/۱۲/۱۴

تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۵/۳۱

محفظه مربعی شکل بررسی کردند. [۳] رحمان نژاد و همکاران انتقال گرمای نانو سیال را به همراه اثر میدان مغناطیسی در محفظه مربعی شکل درپوش متحرک مورد مطالعه قرار دادند. [۴] ابو-ندا اثرات تغییر لزجت و انتقال گرمای رسانشی نانو سیالات آب-اکسید مس و آب-اکسید آلومینیوم بر افزایش انتقال گرما در جابجایی طبیعی را مورد مطالعه قرار داد [۵و۶]. سانترا خواص انتقال گرما از نانو سیال آب - مس در یک محفظه مربعی گرمادیده متفاوت با مدل های لزجت متفاوت مطالعه کرد [۷] هو، یک مدل سازی عددی از جابه جایی طبیعی نانو سیالات در یک محفظه مربعی با در نظر گرفتن اثرات ناشی از عدم قطعیت لزجت و رسانش گرمایی انجام داد [۸].

هندسه موجدار در بسیاری از تجهیزات مهندسی به عنوان یک ابزار در افزایش ضریب انتقال استفاده می شود. به عنوان نمونه انتقال گرما نانوسیال بر روی سطوح موج محدود در حفرات افزایش قابل توجهی را در زمان های اخیر خود جلب کرده است [۹-۱۰].

ابو ندا و اوزتاپ انتقال گرمای همرفتی آزاد نانو سیال آب و اکسید آلومینیوم را در داخل محفظه مربعی سطح بالا و پایین آن موجدار با شرایط مرزی عایق و سطوح راست و چپ با شرایط مرزی همدم را تحقیق کردند. نتایج آنها نشان می داد که مقدار انتقال گرمای نانو سیال آب و اکسید آلومینیوم به نسبت اب خالص افزایش قابل توجهی دارد. همچنین اثر سطح موجدار را نیز بررسی کردند [۱۱]. انتقال گرمای همرفتی آزاد نانو سیال در داخل محفظه موجدار مرکب عمودی که در شرایط مرزی همدم و صفحات بالایی پایینی صاف و عایق است توسط چو و همکاران بررسی شد نتایج شان نشان می داد که مقدار انتقال گرما به نسبت طول موج سطح وابسته است و مقدار انتقال گرما با افزایش ذرات نانو بیشتر می شود [۱۲]. همچنین اسماعیل پور و عبدالله زاده انتقال گرما و تولید انرژی را برای نانو سیال اب و مس در داخل محفظه موجدار عمودی به دست آوردند [۱۳].

چن و همکاران انتقال گرما ترکیبی نانو سیال را بر پایه آب در داخل محفظه موجدار بررسی کردند. شرایط هندسی مساله به صورت دیواره های راست و چپ آن موجدار و دیواره های بالا و پایین به صورت صاف و متحرک بود. آنها نشان دادند که انتقال گرما برای ذرات پایه مس نسبت به نانو ذرات دیگر بیشتر است. همچنین دریافتند که در عدد ریچاردسون ثابت با افزایش عدد گرافش مقدار انتقال گرمای بیشتر می شود [۱۴].

ابو-ندا و چامخواه انتقال گرما، در یک محفظه موج دار را که با استفاده از نانو سیال اکسید مس پر شده است، مورد بررسی قرار دادند. آنها نشان دادند که حضور نانو سیال منجر به تقویت قابل توجه انتقال گرما برای تمامی مقادیر عدد ریچاردسون و نسبت هندسه دیوار پایینی می شود [۱۵]. انتقال گرما و تولید انرژی نانو سیال آب و اکسید آلومینیوم در داخل محفظه با دیواره عمودی موجدار توسط چو بررسی شد. او نشان داد که میزان تولید انرژی با افزایش میزان کسر حجمی ذرات نانو کاهش و عدد ناسلت افزایش می یابد. همچنین با افزایش عدد رایلی در بالای دامنه موج در وسط صفحه مقدار عدد ناسلت افزایش می یابد در حالیکه مقدار عدد بجان کم می شود [۱۶]. شرم و همکاران [۱۷] انتقال گرمای همرفتی آزاد در داخل محفظه موجدار متخلخل که با نانو سیال پر شده بود در شرایط ناپایا را مطالعه نمودند. آنها میزان انتقال گرمای بهینه را با میزان سازی طول موج سطح

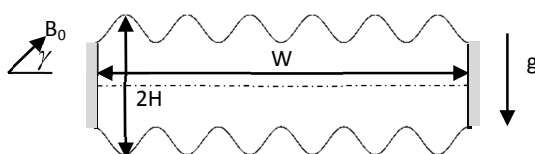
بدست آوردند. پاپ و همکاران [۱۸] انتقال گرمای همرفتی آزاد نانو سیال در داخل محفظه افقی موجدار در محیط متخلخل و شرایط ناپایا بررسی کردند. مدل استفاده شده برای نانو سیال بر اساس تیواری و داس [۱۹] بوده است. آنها دریافتند که با افزایش پارامتر پراکندگی حرارتی مقدار انتقال گرما افزایش می یابد.

همچنین اثر میدان مغناطیسی در نانو سیال به منظور کنترل آهنگ انتقال گرما در بسیاری از تحقیقات مورد مطالعه واقع شده است. [۲۰-۲۱]. انتقال گرمای همرفتی آزاد نانو سیال در داخل یک محفظه با دیواره های موجدار را همراه با اثر مغناطیسی توسط شیخ الاسلامی و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت. [۲۲] آنها نشان دادند که عدد ناسلت با افزایش میزان ذرات نانو و افزایش بزرگی دامنه موج و عدد رایلی افزایش می یابد در حالیکه با افزایش عدد هارتمن مقدار انتقال حرارت کاهش می یابد. انتقال گرما ترکیبی نانو سیال آب و اکسید آلومینیوم همراه با اثر مغناطیسی در داخل کانال موجدار توسط نصیری و همکاران مورد مطالعه قرار گرفت. [۲۳] آنها نشان دادند که افزایش عدد گرافش در ضریب حجمی مختلف نانو سیال، مقدار ناسلت متوسط افزایش می یابد. چنین با افزایش عدد هارتمن مقدار ناسلت متوسط افزایش می یابد.

در این مقاله انتقال گرمای همرفتی آزاد نانو سیال اکسید مس همراه با اثر مغناطیسی بر روی سطح موجدار سینوسی مورد بررسی قرار گرفته است، بدین صورت که سطح موجدار پایینی در دمای T_H و سطح موجدار بالایی در دمای T_c قرار دارد. همچنین سطوح صاف راست و چپ عایق می باشند. اثر پارامترهایی نظیر ضریب حجمی نانو ذره، عدد هارتمن و عدد رایلی بر روی جریان و انتقال گرما مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- فرمول بندی ریاضی مساله

سطح بالایی به صورت معادله (۱) می باشد که H حداکثر فاصله عمودی سطح موجدار از مرکز محفظه و α بزرگی دامنه موج می باشد. سطح موجدار پایینی به صورت $s(x)$ - است. سطح سرد بالایی در دمای T_c و سطح گرم پایینی در دمای T_H قرار دارند. سطوح چپ و راست صاف و عایق در نظر گرفته شده است. شتاب گرانش در جهت Y می باشد. جریان تحت میدان مغناطیسی یکنواخت B قرار دارد بطوریکه جهت میدان مغناطیسی زاویه γ با محور افقی دارد. در این پژوهش مقدار $\gamma = \pi/8$ در نظر گرفته شده است. (شکل ۱)



$$s(x) = H - \alpha(H - \sin(2\pi(xi - 0.25))) \quad (1)$$

$$\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} = 1 + \frac{3 \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_f} - 1 \right) \phi}{\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_f} + 2 \right) - \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} - 1 \right) \phi} \quad (14)$$

تابع جریان و چرخش به صورت زیر تعریف می شود.

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (15)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (16)$$

تابع جریان در معادله پیوستگی صدق می کند معادله چرخش با حذف گرادیان فشار بین معادلات مومنوم و مشتق گیری معادله (۵) در راستای y و کم کردن آن از مشتق معادله (۶) در راستای x به صورت زیر بدست می آید:

$$u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = v_{nf} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) +$$

$$B_{nf} g \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\sigma_{nf} B_0^2}{\rho_{nf}} \left[\frac{\partial v}{\partial y} \sin \gamma \cos \gamma - \right. \quad (17)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \sin \gamma \cos \gamma + \frac{\partial v}{\partial x} \cos^2 \gamma - \frac{\partial u}{\partial y} \cos^2 \gamma \right]$$

متغیرهای بدون بعد برای بی بعد سازی معادلات به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\Psi = \frac{\psi \text{Pr}_f}{v_f}, Y = \frac{y}{H}, \Omega = \frac{\omega L^2 \text{Pr}_f}{v_f}, \theta = \frac{T - T_c}{T_H - T_c},$$

$$\alpha = \frac{\bar{a}}{H}, S(x) = \frac{\bar{S}(x)}{H}, X = \frac{x}{H}, Ha = HB_x \sqrt{\frac{\sigma_f}{\mu_f}} \quad (18)$$

$$Ra = \frac{g B_f (T_H - T_c) \text{Pr}_f (2H)^3}{v_f^2} = Gr \cdot \text{Pr}$$

$$Ra = \frac{g B_f (T_H - T_c) \text{Pr}_f (2H)^3}{v_f^2} = Gr \cdot \text{Pr}$$

که در آن Ra غدد رایلی و Ha عدد هارتمن سیال پایه است. مشخصات ترموفیزیکی نانو سیال در جدول (۱) آمده است [۳۰].

جدول ۱- مشخصات ترموفیزیکی آب و نانو ذره اکسید مس

	ρ (kg / m^3)	C_p (j / kgk)	K (w / m^2k)	σ (Ω / m)
آب	۹۹۷/۱	۴۱۷/۹	۰/۶۱۳	۰/۰۵
اکسید مس	۶۵۰۰	۵۴۰	۱۸	$۲/۷ \times 10^{-۱۰}$

با قرار دادن متغیرهای بدون در معادلات پیوستگی، مومنوم و انرژی به صورت زیر می باشد.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} = -\Omega \quad (19)$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} \quad (2)$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} \quad (3)$$

جریان پایا، دوبعدی، تراکم ناپذیر است و از اثر تابش، اتلاف ویسکوز، القای جریان مغناطیسی و گرمای ژول صرف نظر شده است. همچنین سیال پایه آب و ذرات نانو اکسید مس انتخاب شده است. برای نیروی شناوری در معادله مومنوم از تقریب بوزینسک استفاده شده است بنابراین معادلات پیوستگی، مومنوم و انرژی به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial x} + v_{nf} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$$+ \frac{\sigma_{nf} B_0^2}{\rho_{nf}} (v \sin \gamma \cos \gamma - u \sin^2 \gamma)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_{nf}} \frac{\partial P}{\partial y} + \quad (6)$$

$$v_{nf} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + B_{nf} g (T - T_c)$$

$$+ \frac{\sigma_{nf} B_0^2}{\rho_{nf}} (u \sin \gamma \cos \gamma - v \sin^2 \gamma) \quad (7)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

در معادلات بالا چگالی موثر، ضریب انبساط گرمایی و ظرفیت گرمایی نانو سیال به صورت زیر تعریف می شود [۲۸-۲۴]:

$$\rho_{nf} = \rho_f (1 - \phi) + \rho_n \phi \quad (8)$$

$$\beta_{nf} = \beta_f (1 - \phi) + \beta_n \phi \quad (9)$$

$$V_{nf} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \quad (10)$$

$$\mu_{nf} = \frac{\mu_f}{(1 - \phi)^{2.5}} \quad (11)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = (\rho C_p)_f (1 - \phi) + (\rho C_p)_n \phi \quad (12)$$

و رسانایی گرمایی از رابطه ماکسول به زیر طبق رابطه در نظر گرفته می شود [۲۳]

$$\frac{k_{nf}}{k_n} = \frac{(k_p + 2k_f) - 2\phi(k_f - k_p)}{(k_p + 2k_f) + \phi(k_f - k_p)} \quad (13)$$

همچنین رسانایی الکتریکی موثر نانو سیال از رابطه ماکسول به صورت رابطه نوشته می شود [۲۹]:

$$u \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + v \eta_y \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \left[\frac{\frac{k_{nf}}{k_f}}{(1-\phi) + \phi \left(\frac{\rho C_p}{\rho C_p} \right)_n} \right] \times \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta \partial \xi} + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] \quad (25)$$

که در آن

$$u = \eta_y \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, \quad v = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \quad (26)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} - \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\eta_y = \frac{1}{S(x)} \quad \eta_x = \frac{-yS'(x)}{S^2(x)} \quad (27)$$

$$\eta_{xx} = \frac{y(2S'^2 - SS'')}{S^3(x)} \quad \eta_{yy} = 0$$

شرایط مرزی

۱-۲- شرایط مرزی در منبع گرمایی

دیواره بالا:

$$\eta = 1, U = V = 0 \longrightarrow \psi = cte = 0 \quad (28)$$

$$\theta = 0 \quad \Omega = (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}$$

دیواره پایین:

$$\eta = -1, U = V = 0 \longrightarrow \psi = cte = 0 \quad (29)$$

$$\theta = 1, \theta = 0 \quad \Omega = (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2}$$

دیواره چپ:

$$\xi = 0, U = V \longrightarrow \psi = cte = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad \Omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}$$

دیواره راست:

$$\xi = 4, U = V = 0 \longrightarrow \psi = cte = 0 \quad (31)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad \Omega = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2}$$

اصلاح عدد ناسلت

در مورد عدد ناسلت بر روی سطح گرم ، با توجه به شرایط مرزی مشخص شده، روابط زیر قابل بیان می باشد:

$$Nu_h = \frac{h H}{K_f} \quad (32)$$

که ضریب انتقال گرمای همرفتی بصورت زیر تعریف می گردد:

$$h = \frac{q_w}{T_H - T_C} \quad (34)$$

رسانایی گرمایی نانوسیال نیز بر اساس رابطه زیر بدست می آید:

$$\frac{1}{Pr_f} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \Omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \Omega}{\partial y} \right) = \quad (20)$$

$$\frac{1}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_s}{\rho_f} \right]} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) + \frac{Ra_f}{8} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\beta_s}{\beta_f} \right] \frac{\partial \theta}{\partial x} + Ha^2 \left[1 + \frac{3 \left(\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_f} \right) - 1 \right) \phi}{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} + 2 \right) - \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} - 1 \right) \phi} \right] \left(\frac{1}{(1-\phi) + \phi \frac{\rho_n}{\rho_f}} \right) \times$$

$$\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \tan \gamma + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \tan^2 \gamma + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \tan \gamma \right) \frac{\partial \psi}{\partial Y} \frac{\partial \theta}{\partial X} - \frac{\partial \psi}{\partial X} \frac{\partial \theta}{\partial Y} = \quad (21)$$

$$\left[\frac{\frac{k_{nf}}{k_f}}{(1-\phi) + \phi \left(\frac{\rho C_p}{\rho C_p} \right)_n} \right] \left[\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right]$$

به منظور حل سطح موجدار با استفاده از تبدیل زیر سطح موجدار به سطح صاف تبدیل می گردد.

$$\xi = x \quad \eta = \frac{y}{S(x)} \quad (22)$$

بنابراین با قرار دادن معادله سطح موجدار به سطح صاف تبدیل می شود معادلات تبدیل شده به صورت زیر می باشد :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} + \quad (23)$$

$$(\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\Omega$$

$$\frac{1}{Pr_f} \left[\eta_y \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \Omega}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \left(\eta_y \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \right) \right] = \quad (24)$$

$$\frac{1}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_n}{\rho_f} \right]} \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial \xi^2} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2} + \right.$$

$$2\eta_x \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta \partial \xi} + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \left. \right] + \frac{Ra}{8} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\beta_n}{\beta_f} \right] \left[\frac{\partial \theta}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right] +$$

$$Ha^2 \left[1 + \frac{3 \left(\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_f} \right) - 1 \right) \phi}{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} + 2 \right) - \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} - 1 \right) \phi} \right] \left(\frac{1}{(1-\phi) + \phi \frac{\rho_n}{\rho_f}} \right) \times$$

$$\left(2 \left[\eta_{xy} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \eta_y \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \eta_x + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} \right) \tan \gamma + \left(\eta_{yy} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \eta_y^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) \tan^2 \gamma \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left[\eta_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta \partial \xi} \right] \right) \right]$$

۳- روش حل عددی

معادلات دیفرانسیل بدون بعد شده (۲۵-۲۳) به روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم گسسته سازی شده که معادلات تفاضل محدود در جدول ۲ آورده شده است. با استفاده از شرایط مرزی مشخص شده در دیواره محفظه با استفاده از روش شتاب دهنده همگرایی (Successive under relaxation) معادلات به صورت زیر درآمده و به روش تکرار حل و همگرا می شوند.

$$\phi^{k+1}(i, j) = \phi^k(i, j) + r[\phi^{k+1}(i, j) - \phi^k(i, j)] \quad (30)$$

که در رابطه بالا I نشان دهنده ضریب تخفیف است و بجای ϕ عبارت ψ, Ω یا θ جایگزین می شود. حل معادلات آنقدر ادامه دارد که به حد همگرایی بدست آید که به صورت زیر تعریف می شود.

$$\left| \frac{\phi^{k+1}(i, j) - \phi^k(i, j)}{\phi^k(i, j)} \right| < 5 \times 10^{-7} \quad (31)$$

(۳۴)

$$k_{nf} = \frac{q_w}{\partial T / \partial n}$$

که "n" نشان دهنده جهت عمود بر دیواره ها می باشد. با قرار دادن روابط (۳۳) و (۳۴) در رابطه (۳۲) و استفاده از پارامترهای بی بعد، عدد ناسلت محلی در دیواره های منبع حرارتی بصورت زیر تعریف می گردد:

$$Nu_h = \left(\frac{K_{nf}}{K_f} \right) (\partial \theta / \partial n) = \left(\frac{K_{nf}}{K_f} \right) \sqrt{1 + S'^2} \partial \theta / \partial \eta \quad (35)$$

عدد ناسلت میانگین برای منبع حرارتی بصورت زیر با انتگرالگیری از اعداد ناسلت محلی بر روی دیواره ها گرمایی می گردد:

$$Nu_m = \frac{1}{S} \int_0^4 Nu_h dS = \frac{1}{S} \left(\frac{K_{nf}}{K_f} \right) \int_0^4 (1 + S'^2) \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\zeta \quad (36)$$

که در رابطه (۳۶) $\bar{S}$ برابر است با

$$\bar{S}(\zeta) = \int_0^4 (1 + \bar{S}'^2) d\zeta \quad (37)$$

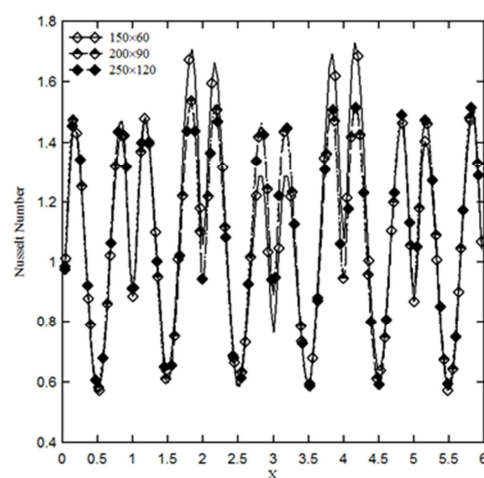
جدول ۲- نحوه گسسته سازی معادلات دیفرانسیل بی بعد جریان چرخش و انرژی

معادله ۲۳	$\frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta \xi^2} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta \eta^2} + 2\eta_x \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\Delta \eta \Delta \xi} + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta \eta} = -\Omega_{i,j}$
معادله ۲۴	$\frac{1}{Pr_f} \left[\eta_y \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \left(\frac{\Omega_{i+1,j} - \Omega_{i-1,j}}{2\Delta \zeta} + \eta_x \frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \right) - \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta \zeta} + \eta_x \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \right) \left(\eta_y \frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \right) \right] =$ $\frac{1}{(1-\phi)^{2.5} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\rho_n}{\rho_f} \right]} \left[\frac{\Omega_{i+1,j} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i-1,j}}{\Delta \xi^2} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\Omega_{i,j+1} - 2\Omega_{i,j} + \Omega_{i,j-1}}{\Delta \eta^2} + 2\eta_x \frac{\Omega_{i+1,j+1} - \Omega_{i+1,j-1} - \Omega_{i-1,j+1} + \Omega_{i-1,j-1}}{4\Delta \eta \Delta \xi} + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\Omega_{i,j+1} - \Omega_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \right] + \frac{Ra}{8} \left[(1-\phi) + \phi \frac{\beta_n}{\beta_f} \right] \left[\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2\Delta \zeta} + \eta_x \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \right] +$ $Ha^2 \left[1 + \frac{3 \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_f} - 1 \right) \phi}{\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_f} + 2 \right) - \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_f} - 1 \right) \phi} \right] \left[\frac{1}{(1-\phi) + \phi \frac{\rho_n}{\rho_f}} \right] \times$ $2 \left[\eta_{xy} \left(\frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \right) + \eta_y \left(\frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\Delta \eta \Delta \xi} \right) \tan \gamma + \left(\eta_{yy} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta \eta} + \eta_y^2 \right) \tan^2 \gamma \right]$ $+ \left[\eta_{xx} \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta \eta} + \eta_x^2 \frac{\psi_{i,j+1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j-1}}{\Delta \eta^2} + \frac{\psi_{i+1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i-1,j}}{\Delta \xi^2} + 2\eta_x \frac{\psi_{i+1,j+1} - \psi_{i+1,j-1} - \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}}{4\Delta \eta \Delta \xi} \right]$
معادله ۲۵	$\left(\eta_y \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \right) \left(\frac{\theta_{i+1,j} - \theta_{i-1,j}}{2\Delta \zeta} + \eta_x \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \right) - \left(\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\Delta \zeta} + \eta_x \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \right) \eta_y \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2\Delta \eta} =$ $\left[\frac{k_{nf}}{k_f} \right] \times \left[\frac{\theta_{i+1,j} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i-1,j}}{\Delta \xi^2} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\theta_{i,j+1} - 2\theta_{i,j} + \theta_{i,j-1}}{\Delta \eta^2} + 2\eta_x \frac{\theta_{i+1,j+1} - \theta_{i+1,j-1} - \theta_{i-1,j+1} + \theta_{i-1,j-1}}{4\Delta \eta \Delta \xi} + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\theta_{i,j+1} - \theta_{i,j-1}}{2\Delta \eta} \right]$

۴- نتایج

مساله بسیار مهم در شبیه سازی عددی اطمینان از کافی بودن تعداد نقاط شبکه می باشد برای دستیابی به تعداد نقاط مناسب و کافی در عمل محاسبات را با یک شبکه مناسب شروع شده سپس تعداد نقاط شبکه را به تدریج افزایش می یابد، بنحوی که از یک تعداد نقاط به بعد تاثیر شبکه روی نتایج ناچیز گردد. برای مساله فوق از شبکه بندی های 50×150 ، 90×200 ، 120×250 استفاده شده است که نتایج بدست آمده برای عدد نوسلت صفحه گرم در شکل ۲ آمده است که تفاوت برای شبکه بندی 90×200 و 120×250 کمتر از ۲٪ است.

برای اعتبار سنجی حل مساله نتایج حاصل با نتایج بدست آمده توسط بجان با سیال عامل آب برای محفظه صاف در جدول ۳ و برای نانو سیال در جدول ۴ آورده شده است. مقایسه نتایج نشان می دهد که نتایج بدست آمده از کد حاضر به مطالعات گذشته نزدیک است.



شکل ۲- بررسی اثر تعداد شبکه بر روی عدد ناسلت با

$$Ra = 10^4, \alpha = 0.2, Ha = 5, \phi = 0.05$$

جدول ۲- تغییرات عدد ناسلت متوسط بدست آمده از

مطالعه حاضر و بجان [۳۳]

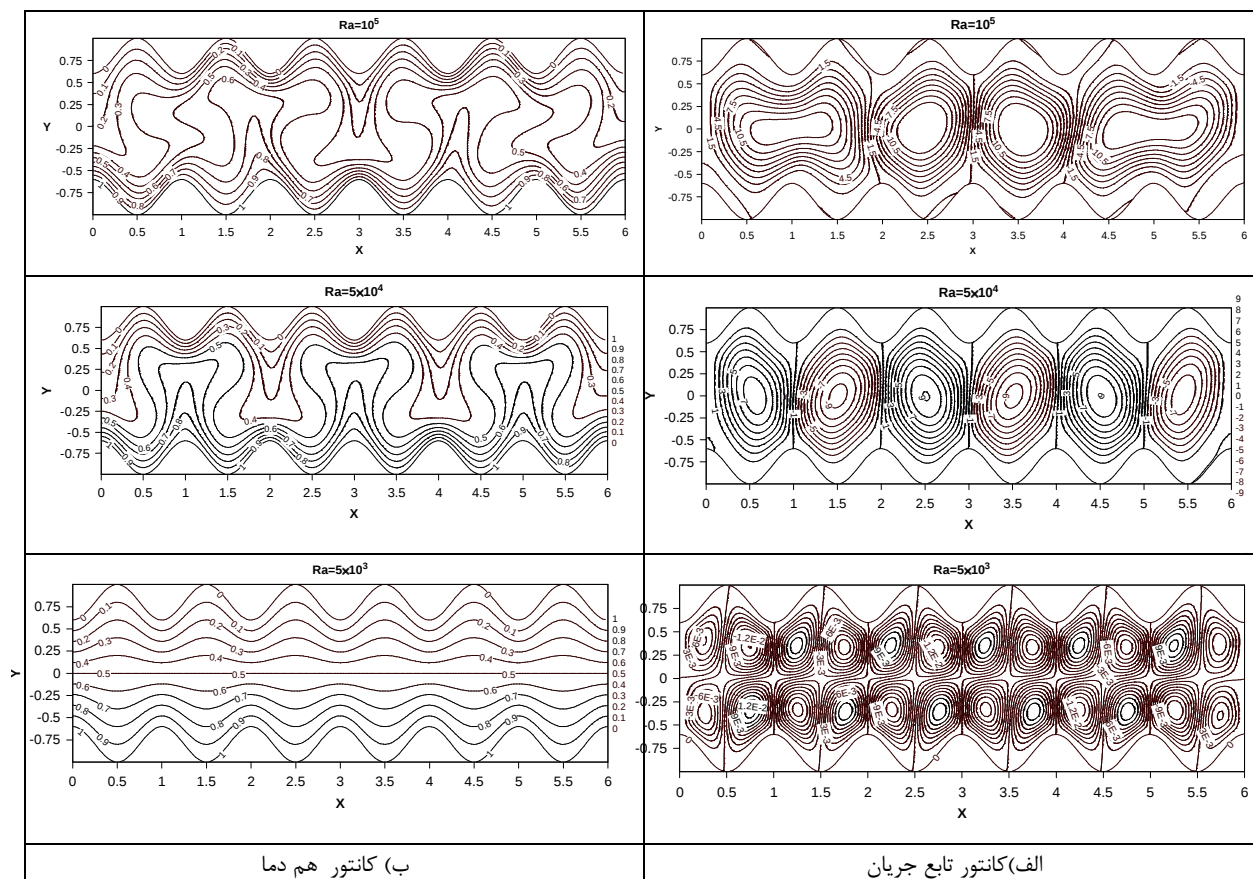
$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$
۱/۷۱	۳/۶۹
۱/۷۴	۳/۷۴

در شکل (۳) تاثیر عدد رایلی بر انتقال گرما به صورت کانتورهای تابع جریان و خطوط همدمان نشان داده شده است مشخص است که در اعداد رایلی بزرگ یک سری چرخه های ناهمسانگرد در محفظه بوجود می آید که سطح مقطعشان تقریباً مربع است که به آن سلولهای بنارد گفته می شود

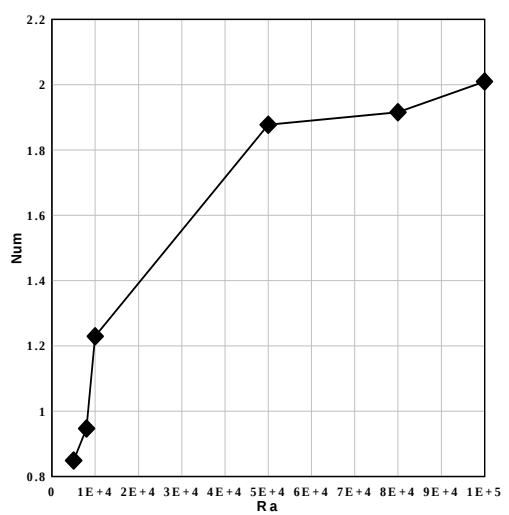
جدول ۳- تغییرات عدد ناسلت متوسط بدست آمده برای سیال نانو از مطالعه حاضر و سایر محققین

	$Ra = 10^4$	$Ra = 10^5$
خانفر و همکاران [۳۰]	۲/۲۴۵	۴/۵۲۲
بارکوس و میتسولی [۳۱]	۲/۲۴۵	۴/۵۱۰
فوسگی و همکاران [۳۲]	۲/۳۰۲	۴/۶۵۴
مطالعه حاضر	۲/۲۳۹	۴/۴۵۹

با افزایش عدد رایلی از 10^4 تا 10^5 تعداد چرخه های ناهمسانگرد کمتر می شود و حرکت سیال بین دو صفحه شکل می گیرد در حالیکه در اعداد رایلی برابر با 10^4 چرخه های ناهمسانگرد بر روی هریک از صفحات گرم و سرد به طور مجزا تشکیل می شود که نشان دهنده حرکت ناچیز سیال از صفحه گرم به طرف صفحه سرد است. بنابراین با افزایش عدد رایلی و در نتیجه نیروی گرانش این گردابه های کوچک حذف شده و به گردابه های بزرگتری تبدیل می شوند. در کانتور دما اثر جریان سلولی بر انتقال حرارت به صورت افزایش انتقال گرما در راستای عمودی اهنک انتقال گرما را از مقدار رسانش خالص که در آن فقدان حرکت سیال حاکم می شود بالاتر می برد و با افزایش عدد رایلی ساز و کار انتقال گرما از رسانش به سمت جابه جایی می رود و تبادل حرارتی بین صفحات بالایی و پایینی بوجود می آید. همچنین با افزایش عدد رایلی خطوط همدمان حالت پیچیده تری پیدا می کنند و نشان دهنده افزایش جابه جایی است.



شکل ۳- الف) کانتور تابع جریان (ب) کانتور دما با اعداد رایلی متفاوت در $(Ra = 5 \times 10^3 - 10^5, \alpha = 0.2, Ha = 5, \phi = 0.05)$

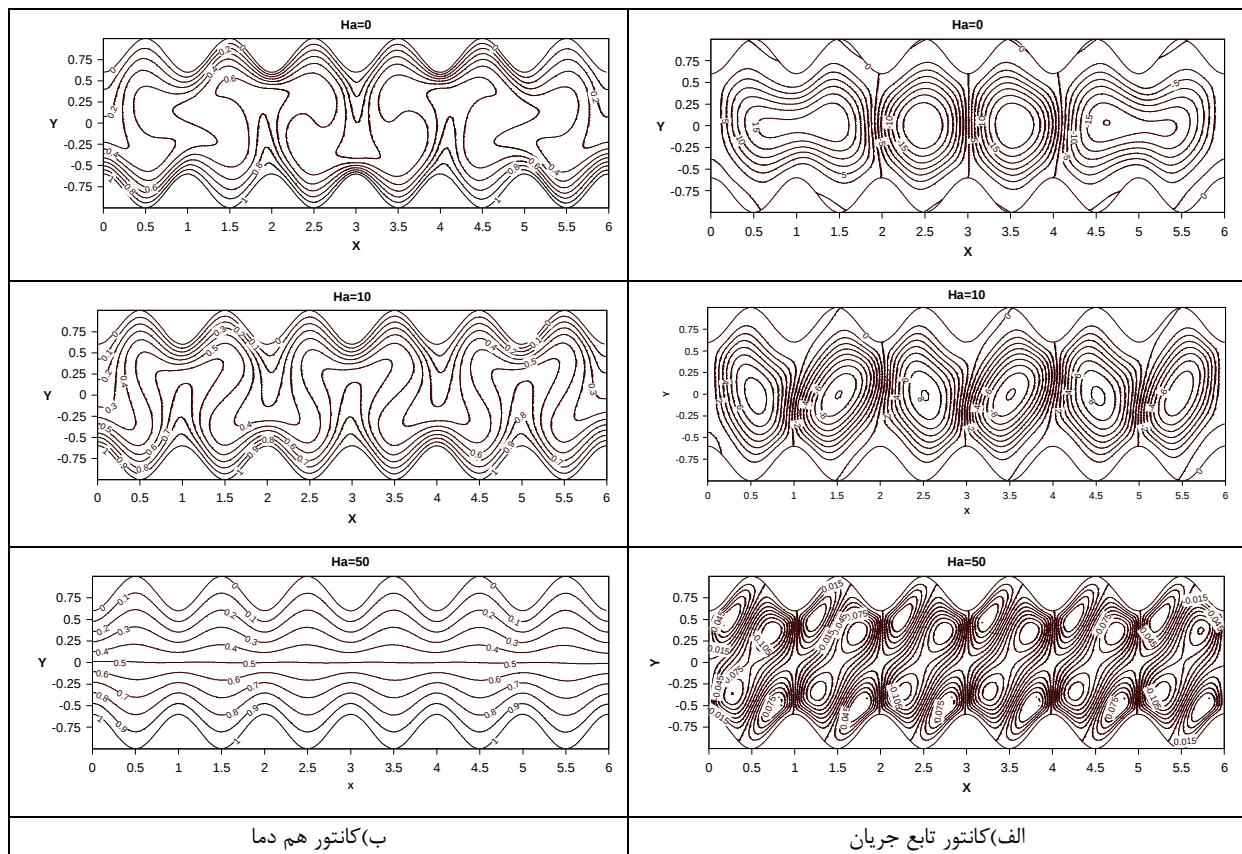


شکل ۴- عدد ناسلت متوسط در

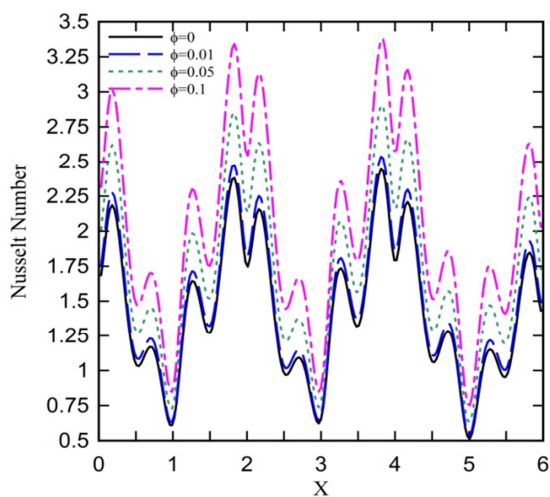
$(Ra = 5 \times 10^3 - 10^5, \alpha = 0.2, Ha = 5, \phi = 0.05)$

در شکل ۴ تاثیر عدد رایلی بصورت نمودار عدد ناسلت متوسط نشان داده شده است. مشخص است که با افزایش عدد رایلی و در نتیجه افزایش مقدار نیروی شناوری مقدار عدد ناسلت بیشتر می شود. همچنین با کاهش عدد رایلی و کم شدن اثر شناوری انتقال گرما از جابه جایی تبدیل به رسانش می گردد و تغییر عدد ناسلت بسیار ناچیز می گردد.

شکل ۵ تاثیر میدان مغناطیسی (با نماد تغییرات عدد هارتمن) بر روی کانتورهای همدما و تابع جریان نشان داده شده است. همانطور که مشخص است با افزایش عدد هارتمن اندازه بیشینه تابع جریان کاهش می یابد که نشان دهنده این امر است که سرعت جریان کاهش می یابد. سلولهای ناهمسانگرد کوچکتر می شوند تا جایی که در $Ha=50$ این سلولها در نزدیکی هر یک از صفحات به طور جداگانه تشکیل می شوند. بنابراین همانطور که در کانتور همدما نشان داده شده است با افزایش عدد هارتمن خطوط جریان از حالت پیچیده به سمت خطوط موازی با دیواره های محفظه متمایل می شوند که بیان کننده آنست که انتقال گرما از جابه جایی به سمت رسانش می رود. در نتیجه اثر میدان مغناطیسی نقش کنترل کننده جریان را دارد و سرعت سیال را کاهش می دهد.



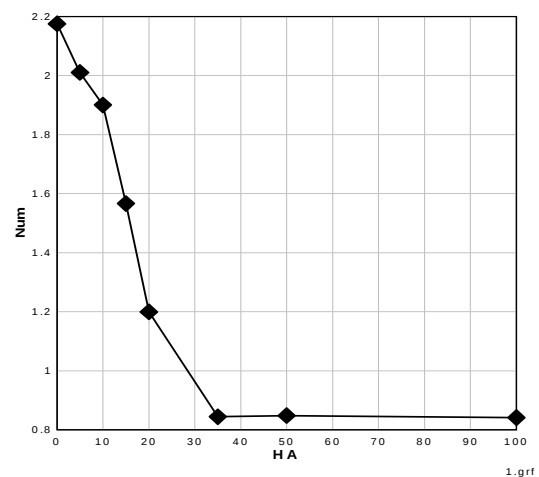
شکل ۵- الف) کانطور تابع جریان ب) کانطور هم دما ($Ra = 10^5, \alpha = 0.2, Ha = 0, 10, 50, \phi = 0.05$)



شکل ۷- عدد ناسلت موضعی با کسرهای حجمی مختلف ($Ra = 5 \times 10^4, \alpha = 0.15, Ha = 10$)

در شکل ۷ تغییرات عدد ناسلت موضعی در صفحه گرم برای نسبت حجمی مختلف ذرات نانو نشان داده شده است. همانطوریکه مشاهده می شود با افزایش نسبت حجمی نانو ذره قابلیت رسانایی گرمایی نانو سیال افزایش پیدا کرده در نهایت مقدار انتقال گرما و عدد ناسلت بیشتر می شود

همچنین در شکل ۶ تغییرات عدد هارتمن به صورت عدد ناسلت متوسط نشان داده شده است مشخص است که با افزایش اثر نیروی هیدرو دینامیکی مغناطیسی و کاهش سرعت جریان مقدار انتقال گرما و در نتیجه عدد ناسلت کاهش می یابد.



شکل ۶- عدد ناسلت متوسط در ($Ra = 10^5, \alpha = 0.2, Ha = 0-100, \phi = 0.05$)

۵- نتیجه گیری

انتقال گرمای همرفتی آزاد نانو سیال اکسید مس در داخل محفظه موجدار مورد بررسی قرار گرفته است. به طوریکه سطح سرد بالایی در دمای T_c و سطح گرم پایینی در دمای T_h قرار دارند و سطوح چپ و راست صاف و عایق در نظر گرفته شده است. همچنین جریان تحت میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. معادلات تابع جریان-گردابه و دما با استفاده از روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم گسسته سازی شده و با روش شتاب دهنده همگرایی حل شده اند. اثر پارامترهایی مانند عدد رایلی، عدد هارتمتن و کسر حجمی نانوسیال به صورت کانتورهای تابع جریان، همدمای و عدد ناسلت نشان داده شده اند. نتایج نشان می دهد که حضور نانوسیال منجر به تقویت قابل توجه انتقال گرما برای تمامی مقادیر عدد رایلی می شود. با افزایش عدد رایلی ساز و کار انتقال گرما از رسانش به سمت جابه جایی می رود و تبادل حرارتی بین صفحات بالایی و پایینی بوجود می آید و در اعداد رایلی بزرگ یک سری چرخه های ناهمسانگرد در محفظه بوجود می آید که سطح مقطعشان تقریباً مربع است که به آن سلولهای بنارد گفته می شود. اثر میدان مغناطیسی نقش کنترل کننده جریان را دارد و سرعت سیال را کاهش می دهد و افزایش عدد هارتمتن مقدار جابه جایی را کم می کند.

۶- نمادها

B_0	میدان مغناطیسی
Gr	عدد گراشف
h	ضریب انتقال رسانایی همرفتی ($W / m^2 K$)
Ha	عدد هارتمتن
k	رسانایی گرمایی (W / mK)
H	ارتفاع محفظه (m)
n	بردار نرمال
Nu_x	عدد ناسلت موضعی
P	فشار (KPa)
Pr	عدد پرانتل
Re	عدد رینولدز
T	دما (K)
u, v	سرعت در راستای x, y (m / s)
x, y	مختصات دکارتی (m)

علائم یونانی

α	پخشندگی گرمایی (m^2 / s)
β	ضریب انبساط ($1 / K$)
ϕ	نسبت حجمی جامد
ν	لزجت سینماتیکی (m^2 / s)
ρ	چگالی (Kg / m^3)
σ	رسانایی الکتریکی (s / m)
ψ	تابع جریان بدون بعد

زیر نویس

C	سطح سرد
H	سطح گرم
P	ذره
p	ذره

۷- مراجع

- [1] Xiaofeng Wang, Diangfang Li, Hongwei Jiao, Heat transfer enhancement of Cu-Water nanofluids considering Brownian motion of nanoparticles in a singular cavity, Journal of Information and Computational Science, 9 (5) pp.1223-1235, 2012..
- [2] Oronzio Manca, S.Nardini, D. Ricci, and S.Tamburrino, Numerical investigation on mixed convection in triangular cross-section ducts with nanofluids, Advanced in Mechanical Engineering, 7 (1) 13 pages, 2015.
- [3] Guet J., Reggio M. and Vasseeur P., Natural convection of nanofluids in square enclosure with a protruding heat, Advanced in mechanical engineering, 4 (167296) 11 pages, 2012.
- [4] Rahmannedzad J., Ramezani A., kalteh M., Numerical investigation of magnetic field effects on mixed convection flow in a nanofluid-filled lid driven cavity, Int.J.of Engineering, 26(10),pp 1213-1224, 2013.
- [5] Abu-Nada E., Effects of variable viscosity and thermal conductivity of CuO-Water nanofluid on heat transfer enhancement in natural convection, Mathematical Model and Simulation, ASME J. Heat Transf. 132 (5) 052401, 2010.
- [6] Abu-Nada E., Effects of variable viscosity and thermal conductivity of Al₂O₃-water nanofluid on heat transfer enhancement in natural convection, Int. J. Heat Fluid Flow 30pp 679-690, 2009.
- [7] Santra A.K., Sen S., Chakraborty N., Study of heat transfer characteristics of copper-water nanofluid in a differentially heated square cavity with different viscosity models, J. Enhanced Heat Transf. 15 (4) pp273-287, 2008.
- [8] J. Ho, M.W. Chen, Z.W. Li, Numerical simulation of natural convection of nanofluid in a square enclosure: effects due to uncertainties of viscosity and thermal conductivity, Int. J. Heat Mass Transfer. 51 (17-18) pp4506-4516, (2008).
- [9] Al-Amiri A., Khanafer K., Bull J., Pop I., Effect of sinusoidal wavy bottom surface on mixed convection heat transfer in a lid-driven cavity, International Journal of Heat and Mass Transfer 50 pp1771-1780, 2007.
- [10] Cho C.C., Chen C.L., Chen C.K., Mixing of non-Newtonian fluids in wavy serpentine microchannel using electro kinetically-driven flow, Electrophoresis 33(5)pp 743-750, 2012.
- [11] Abu-Nada E., Oztop H.F., Numerical analysis of Al₂O₃/water nanofluids natural convection in a wavy walled cavity, Numerical Heat Transfer, Part A: Applications 59 (5)pp 403-419, 2011.
- [12] Cho C.C., Chen C.L., Chen C.K., Natural convection heat transfer performance in complex-wavy wall enclosed cavity filled with nanofluid, Int. J. Therm. Sci. 60 255-263, 2012.
- [13] Esmaeilpour M., Abdollahzadeh M., Free convection and entropy generation of nanofluid inside an enclosure with different patterns of vertical wavy walls, International Journal of Thermal Sciences 52, 127-136, 2012.
- [14] Ching-Chang Cho, Chieh-Li Chen , Cha'o-Kuang Chen, Mixed convection heat transfer performance of water-based nanofluids in lid-driven cavity with wavy surfaces, International Journal of Thermal Sciences 68 pp181-190, 2013.
- [15] Eiyad Abu-Nada , Ali J. Chamkha, Mixed convection flow of a nanofluid in a lid-driven cavity with a wavy wall, International Communications in Heat and Mass Transfer 57 pp36-47, 2014.
- [16] Ching-Chang Cho ,Heat transfer and entropy generation of natural convection in nanofluid-filled square cavity with partially-heated wavy surface, International Journal of Heat

- and Mass Transfer 77pp 818–827, 2014.
- [17] Sheremet M.A., Pop I., Shenoy A., Unsteady free convection in a porous open wavy cavity filled with a nanofluid using Buongiorno's mathematical model, International Communications in Heat and Mass Transfer 67 pp66–72, 2012.
- [18] Sheremet M.A., Pop I., Bachok N., Effect of thermal dispersion on transient natural convection in a wavy-walled porous cavity filled with a nanofluid: Tiwari and Das' nanofluid model, International Journal of Heat and Mass Transfer 92 pp1053–1060, 2016.
- [19] Tiwari R.K., Das M.K., Heat transfer augmentation in a two-sided lid-driven differentially heated square cavity utilizing nanofluids, Int. J. Heat Mass Transfer 50 pp2002–2018, 2007.
- [20] Mahmoudi AH, Pop I, Shahi M., Effect of magnetic field on natural convection in a triangular enclosure filled with nanofluid, Int J Thermal Science 59pp12–140, 2012.
- [21] Hamad M.A.A., Pop I., Md Ismail A.I., Magnetic field effects on free convection flow of a nanofluid past a vertical semi-infinite flat plate. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 12(3),pp1338–1346, 2011.
- [22] Sheikholeslami M., Gorji-Bandpy M., Ganji D.D., Soheil Soleimani, Natural convection heat transfer in a cavity with sinusoidal wall filled with CuO–water nanofluid in presence of magnetic field, Journal of the Taiwan Institute of Chemical Engineers, 45(1)pp 40–49, 2014.
- [23] Rashidi M.M., Mohammad Nasiri Marzieh Khezerloo c, Najib Laraq d, Numerical investigation of magnetic field effect on mixed convection heat transfer of nanofluid in a channel with sinusoidal walls m, Journal of Magnetism and Magnetic Materials 40(1) 159–168, 2016.
- [24] Maxwell J.C. A treatise on electricity and magnetism. London: Oxford University Press; 1904
- [25] S.M.S. Murshed, K.C. Leong, C. Yang, Enhanced thermal conductivity of TiO₂-water based nanofluids. Int.J. Thermal Sci 44(4)pp367–73, 2005.
- [26] Timofeeva EV, Routbort JL, Singh D. Particle shape effects on thermo physical properties of alumina nano fluids. J. Appl. Phys. 106, (014304) 10pages, (2009).
- Pak BC, Cho YI. Hydrodynamic and heat transfer study of dispersed fluids with submicron metallic oxide particles. Exp Heat Transfer Int.J. 11(2)pp151–70, (1998).
- [27] Brinkman HC, The viscosity of concentrated suspensions and solution. J Chem Phys (20)pp 571–81, 1952.
- [28] Sheikholeslami M, Soleimani S, Gorji-Bandpy M, Ganji DD, Seyyedi SM. Natural convection of nanofluids in an enclosure between a circular and a sinusoidal cylinder in the presence of magnetic field. Int. Commun Heat Mass transfer, 39(9)pp1435–43, 2012.
- [29] Koo J, Kleinstreuer C., Laminar nanofluid flow in microheat-sinks. Int J Heat Mass Transfer, 48pp2652–2661, 2005.
- [30] Khalil Khanafer, Kambiz Vafai, Marilyn Lightstone, Buoyancy-driven heat transfer enhancement in a two-dimensional enclosure utilizing nanofluids, International Journal of Heat and Mass Transfer 46 pp 3639–3653, 2003.
- [31] Barakos G., Mitsoulis E., Natural convection flow in a square cavity revisited: laminar and turbulent models with wall functions, Int. J. Numerical Methods Fluids 18 pp695–719, 1994.
- [32] Fusegi T., Hyun J.M., Kuwahara K., Farouk B., A numerical study of three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure, Int. J. Heat Mass Transfer 34 pp1543–1557, 1991.
- Bejan A., convection heat transfer, third ed., Wiley, New York, pp. 241–295, 2003.