

# فرآیند طراحی و اعمال کنترلگر برای سیستم آزمایشگاهی پاندول دو درجه آزادی به روش جایگذاری قطبها

عباس حسابی حساری

کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

حامد مرادی\*

استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

غلامرضا وثوقی

استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف، تهران، ایران

## چکیده

سیستم‌هایی که تعداد درجات آزادی آنها بیشتر از تعداد ورودی کنترلی‌شان باشد، سیستم‌های فروتحرک نامیده می‌شوند. با توجه به اینکه این سیستم‌ها تعداد عملگرهای کمی دارند، هزینه و پیچیدگی آنها کاهش یافته و انرژی کمتری مصرف می‌کنند. یکی از مسائل متداول و پایه‌ای سیستم‌های فروتحرک، سیستم پاندول معکوس می‌باشد که یک سیستم غیرخطی، غیر مینیمم فاز، چند متغیره، ناپایدار و شامل عدم قطعیت‌هاست. این پژوهش به مدل‌سازی پاندول معکوس دو درجه آزادی پرداخته و سپس کنترلگر خطی طراحی شده به روش جایگذاری قطبها را به سیستم غیرخطی در مدل آزمایشگاهی اعمال نموده است. در ادامه، با اعمال کنترلگر خطی طراحی شده؛ میزان پایداری سیستم آزمایشگاهی در اثر تغییرات شرایط اولیه بررسی شده است. پاندول معکوس مدل شده از دو بازوی مفصلی تشکیل شده که یک عملگر در قسمت مفصل بازوی اول نصب شده است. فرآیند انتخاب عملگر از طریق شبیه‌سازی میزان گشتاور و توان مصرفی سیستم انجام شده است. در ادامه با بررسی نتایج شبیه‌سازی‌ها از یک سرو موتور DC، ۱۲ ولتی و با توان نامی ۱/۲ وات به همراه یک گیربکس با نسبت تبدیل ۲۷۵:۱، به عنوان عملگر استفاده شده است. نتایج آزمایشگاهی نشان داده‌اند؛ کنترلگر خطی طراحی شده در اطراف نقطه‌ی تعادل تا حداکثر زاویه‌ی انحراف اولیه‌ی بازوها به میزان ۶ درجه، به صورت مطلوبی باعث پایداری سیستم می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** پاندول معکوس، دو درجه آزادی، کنترلگر چند متغیره، روش جایگذاری قطبها، سیستم‌های فروتحرک.

## Design and Implementation of Pole-placement Control Strategy for Experimental Double Inverted Pendulum

A. Hesabi Hesari

Department of Mechanical engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

H. Moradi

Department of Mechanical engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

Gh.R. Vosoughi

Department of Mechanical engineering, Sharif University of Technology, Tehran, Iran

## Abstract

Systems having degrees of freedom more than the number of control inputs, are called under-actuated systems. Due to small size of actuators, their cost and energy utilization are decreased and they can be implemented in a more simple way. Inverted pendulum system which is an unstable, nonlinear, non-minimum phase and uncertain system, is one of the most applicable and fundamental cases of under-actuated systems. In this paper, an inverted pendulum is modelled as a two degrees of freedom model. Then, a linear multivariable feedback controller is designed to stabilize the experimental set-up. The experimental inverted pendulum is constituted of two links; while one actuator is installed on the first link joint. According to the simulation results, a DC servo motor with specifications of 12 v and 1.2 W nominal power, is selected as the actuator. Experimental results show that the designed controller can appropriately control and stabilize the experimental system around its unstable up-equilibrium point up to  $6^\circ$ .

**Keywords:** Inverted pendulum, Two degrees of freedom, Multivariable feedback control, Pole-placement approach, Under-actuated systems.

عملگرها و تفاوت بین مدل ریاضی سیستم و دینامیک واقعی مسئله می‌تواند به صورت سیستم فروتحرک شود [۷]. با توجه به اینکه این سیستم‌ها تعداد عملگرهای کمی دارند، هزینه و پیچیدگی آنها کاهش یافته و انرژی کمتری مصرف می‌کنند [۸-۱۲]. همچنین بسیاری از سیستم‌های فروتحرک دارای قیود دینامیکی غیرهولونومیک<sup>۲</sup> می‌باشند [۱۳، ۱۴]. از این رو کنترل این سیستم‌ها عموماً از پیچیدگی‌های زیادی برخوردار است. سیستم پاندول معکوس که یک سیستم

## ۱- مقدمه

سیستم‌هایی که تعداد درجات آزادی آنها بیشتر از تعداد ورودی کنترلی‌شان باشد، سیستم‌های فروتحرک<sup>۱</sup> نامیده می‌شوند. این سیستم‌ها به صورت وسیعی در کاربردهای هوافضا [۱]، رباتیک [۲، ۳]، تجهیزات زیردریایی [۴، ۵] و سیستم‌های انعطاف‌پذیر [۶] به کار برده می‌شوند. یک سیستم با توجه به دینامیک ذاتی خود، نقص بعضی از

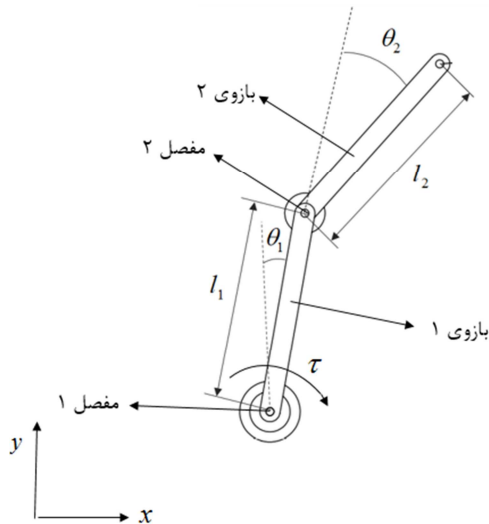
<sup>2</sup> Nonholonomic

<sup>1</sup> Under-actuated systems

$$J_1 = \frac{1}{12} m_1 (l_1^2 + w_1^2) \quad (9)$$

$$J_2 = \frac{1}{12} m_2 (l_2^2 + w_2^2) \quad (10)$$

در روابط بالا  $w_1$  و  $w_2$  به ترتیب عرض بازوی اول و دوم پاندول می‌باشند.



شکل ۱- طرحواره پاندول معکوس

حال معادله‌ی لاگرانژ به صورت زیر نوشته شده و روابط بدست آمده، در رابطه‌ی (۱۱) جایگذاری می‌گردد:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \rightarrow L = T - U \quad (11)$$

سپس با استفاده از رابطه‌ی لاگرانژ، معادلات دینامیکی غیرخطی سیستم در فضای حالت به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} x_1 = \theta_1 \rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 \\ x_3 = \theta_2 \rightarrow \dot{x}_3 = \dot{\theta}_2 \\ \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = M^{-1} \left( Q - P - N \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(m_1 l_1^2 + m_1 l_1^2) & \frac{1}{6} m_2 l_2 (2l_2) \\ +m_2 l_1^2 + m_2 l_1 l_2 \cos \theta_2 & +3l_1 \cos \theta_2 \\ \frac{1}{6} m_2 l_2 (2l_2 + 3l_1 \cos \theta_2) & \frac{1}{3} m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin \theta_2 \\ 0 & -\frac{1}{2} m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \sin \theta_2 \end{bmatrix}$$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} g [(m_1 + 2m_2) l_1 \sin \theta_1 + m_2 l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)] \\ \frac{1}{2} m_2 l_2 [\dot{\theta}_1^2 l_1 \sin \theta_2 + l_1 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 + g \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{bmatrix} \quad Q = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix}$$

غیرخطی، غیر کمینه فاز، چند متغیره، ناپایدار و شامل عدم قطعیت‌هاست، یکی از مسائل متداول و پایه‌ای سیستم‌های فروتحرک می‌باشد. سیستم پاندول معکوس به صورت گسترده به منظور آشنایی و پیدا کردن دید اولیه نسبت به مسائل مشابه رسته بالاتر مانند ربات‌های با بازوهای انعطاف پذیر، ربات‌های با مفاصل انعطاف پذیر، ربات‌های فضایی، متحرک، سیستم هدایت موشک و دستگاه‌های زیر دریایی مورد مطالعه قرار می‌گیرند [۱۵-۱۸]. در این پژوهش ابتدا از روش لاگرانژ معادلات دینامیکی سیستم غیرخطی پاندول معکوس دو لینکی بدست آورده شده است. در ادامه معادلات غیرخطی بدست آمده حول نقطه‌ی تعادل ناپایدار بالایی هر دو لینک، خطی‌سازی گردیده است. پس از خطی‌سازی معادلات غیرخطی، از روش جایگذاری قطب‌ها و با تعریف مکان مطلوب قطب‌های سیستم حلقه بسته به منظور رسیدن به بهترین عملکرد پاسخ خروجی، اقدام به طراحی کنترلگر خطی شده است. سپس با استفاده از نتایج شبیه‌سازی سیستم غیرخطی و همچنین حداکثر میزان گشتاور و توان مصرفی عملگر برای کنترل سیستم، یک سرو موتور DC با ولتاژ ۱۲ ولت و توان نامی ۱/۲ وات به همراه یک گیربکس با نسبت تبدیل ۱:۲۷۵، به عنوان عملگر انتخاب شده است. در ادامه با اعمال کنترلگر خطی طراحی شده به سیستم غیرخطی مدل شده و همچنین سیستم آزمایشگاهی، نتایج عملکرد سیستم شبیه‌سازی و نمایش داده شده است.

## ۲- مدل ریاضی

برای بدست آوردن معادلات دینامیکی سیستم از روش لاگرانژ استفاده شده است [۱۹]. طرحواره مجموعه پاندول معکوس در شکل ۱ نمایش داده شده است. در شکل ۱، گشتاور ورودی عملگر می‌باشد. ابتدا موقعیت مرکز جرم و سرعت بازوها بدست آورده می‌شوند. داریم:

$$X_{c1} = l_{c1} \sin \theta_1 \rightarrow V_{cx1} = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 \quad (1)$$

$$Y_{c1} = l_{c1} \cos \theta_1 \rightarrow V_{cy1} = \frac{1}{2} \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 \quad (2)$$

$$X_{c2} = l_1 \sin \theta_1 + l_{c2} \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (3)$$

$$V_{cx2} = l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (4)$$

$$Y_{c2} = -l_1 \cos \theta_1 - l_{c2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (5)$$

$$V_{cy2} = l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + \frac{1}{2} (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (6)$$

در روابط (۱) تا (۶)،  $l_1$ ،  $l_2$ ،  $l_{c1}$ ،  $l_{c2}$  به ترتیب طول بازوی اول، طول بازوی دوم، طول مرکز جرم بازو، زاویه‌ی جابجایی بازوی اول نسبت به حالت عمودی و زاویه‌ی جابجایی بازوی دوم نسبت به موقعیت بازوی اول می‌باشند. در ادامه، انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم به صورت روابط (۷) و (۸) نوشته می‌شوند:

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_{c1}^2 + \frac{1}{2} m_2 V_{c2}^2 + \frac{1}{2} J_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 \quad (7)$$

$$U = -\frac{1}{2} m_1 g \cos \theta_1 \quad (8)$$

$$-m_2 g (l_1 \cos \theta_1 + \frac{1}{2} \cos(\theta_1 + \theta_2))$$

که  $J_1$  و  $J_2$  از روابط (۹) و (۱۰) بدست می‌آیند:

### ۳- طراحی کنترلر به روش جایگذاری قطبها

به منظور طراحی کنترلر ابتدا طبق رابطه بسط تیلور، به صورت روابط (۱۳)، معادلات غیرخطی (۱۲) حول نقطه تعادل  $\theta_1 = 0, \theta_2 = 0$  خطی سازی می گردند. داریم:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \dot{\theta}_1 = f(0,0,0,0) + \left[ \frac{\partial f}{\partial \theta_1} \right]_{(0,0,0,0)} (\theta_1 - 0) \\ &+ \left[ \frac{\partial f}{\partial \theta_2} \right]_{(0,0,0,0)} (\theta_2 - 0) \\ &+ \left[ \frac{\partial f}{\partial \theta_3} \right]_{(0,0,0,0)} (\theta_3 - 0) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_3 &= x_4 \\ \dot{x}_4 &= \dot{\theta}_2 = g(0,0,0,0) + \left[ \frac{\partial g}{\partial \theta_1} \right]_{(0,0,0,0)} (\theta_1 - 0) \\ &+ \left[ \frac{\partial g}{\partial \theta_2} \right]_{(0,0,0,0)} (\theta_2 - 0) \\ &+ \left[ \frac{\partial g}{\partial \theta_3} \right]_{(0,0,0,0)} (\theta_3 - 0) \end{aligned}$$

پس از خطی سازی و با استفاده از مقادیر پارامترهای سیستم طبق جدول ۱، که از مدل آزمایشگاهی استخراج گردیده اند؛ ماتریس های A، B و Ba به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU \\ U &= \tau \end{aligned} \quad (14)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 50.87 & 0 & -51.911 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -68.52 & 0 & 189.994 & 0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -139.75 \\ 0 \\ 351.508 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = [0]$$

جدول ۱- مقادیر عددی پارامترهای سیستم

مقدار	پارامتر
۰/۱۲ Kg	$m_1$
۰/۱۲ Kg	$m_2$
۰/۲۵ m	$l_1$
۰/۲۵ m	$l_1$
۰/۰۲ m	$w_1$
۰/۰۲ m	$w_1$
۰/۰۰۶ m	$t_1$
۰/۰۰۶ m	$t_2$

در جدول ۱،  $t_1$  و  $t_2$  ضخامت هر یک از بازوها می باشند. مقادیر ویژه ی سیستم خطی سازی شده طبق رابطه ی زیر بدست آورده می شوند:

$$|A - \lambda I| = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 14.562, \lambda_{3,4} = \pm 5.367 \quad (16)$$

در رابطه ی (۱۶)  $\lambda$  مقادیر ویژه ی ماتریس A می باشند. طبق انتظار، سیستم خطی دارای مقادیر ویژه مثبت و ناپایدار است. حال به طراحی کنترلر به روش بازخورد خطی پرداخته می شود. برای این کار ابتدا کنترل پذیری سیستم بررسی می گردد. داریم:

$$M = [B \quad AB \quad A^2B \quad A^3B] \quad (17)$$

در رابطه ی (۱۷) M ماتریس کنترل پذیری سیستم می باشد. برای اینکه سیستم کاملا کنترل پذیر باشد باید مرتبه ی ماتریس کنترل پذیری کامل باشد. پس از بررسی مشخص می گردد مرتبه ی ماتریس M کامل و برابر ۴ می باشد؛ در نتیجه سیستم کاملا کنترل پذیر است. بنابراین می توان قطب های مطلوب سیستم را در صورت عدم محدودیت در عملگر، هر جای دلخواه جایگذاری کرد. به منظور پایداری تابع تبدیل حلقه بسته پس از طراحی کنترلر به روش بازخورد خطی باید داشته باشیم:

$$U = -KX \rightarrow \dot{X} = (A - BK)X \quad (18)$$

در رابطه ی (۱۸) K بردار کنترلی سیستم می باشد. به منظور رسیدن به عملکرد مطلوب و مورد انتظار، قطب های مطلوب سیستم حلقه بسته در محل های زیر جایگذاری می گردد:

$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -5, -5 \\ p_{3,4} &= -3 \pm j \end{aligned} \quad (19)$$

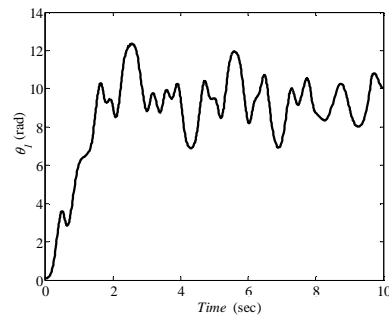
این قطبها با در نظر گرفتن حداکثر فراموش ۰/۲۵، زمان اوج ۱ ثانیه و زمان نشست ۳ ثانیه در پاسخ خروجی زاویه ی بازوها، و به صورت تجربی بدست آمده است. با توجه به اینکه بخشی از دینامیک سیستم، شامل اصطکاک مفاصل بازوها در معادلات ریاضی مدل نشده است؛ قطب های تابع تبدیل حلقه بسته باید به گونه ای تعیین شوند که کنترلر، مقاومت کافی برای پایداری سیستم و ایجاد عملکرد مطلوب را داشته باشد. همچنین با در نظر گرفتن این نکته که محل قطب های تابع تبدیل حلقه بسته روی اندازه ی خروجی کنترلی عملگر تاثیرگذار است؛ امکان جایگذاری قطبها در هر جایی وجود نخواهد داشت. بنابراین در هنگام انتخاب محل قطبها، محدودیت عملگر در اعمال نیروی کنترلی را نیز بایستی در نظر گرفت. به منظور جایگذاری قطب های تابع تبدیل حلقه بسته در محل های مطلوب (روابط ۱۹) بردار کنترلی به صورت زیر بدست می آید:

$$K = [0.41530 \quad 0.1255 \quad 1.1207 \quad 0.0954] \quad (20)$$

### ۴- نتایج شبیه سازی

به منظور بررسی رفتار سیستم، ابتدا معادلات غیرخطی بدست آمده در بخش ۲ به ازای شرایط اولیه ی مشخص و در حالت عدم حضور کنترلر شبیه سازی می گردد. برای این منظور ابتدا پارامترهای سیستم مطابق جدول ۱ تعریف می شوند. مجددا یادآوری می شود زاویه ی  $\theta_2$  همواره نسبت به موقعیت  $\theta_1$  اندازه گیری می شود. همچنین در این حالت موتور و نیروهای اغتشاشی به سیستم وارد نمی شوند و سیستم در حالت آزاد نوسان می کند. نتایج شبیه سازی ارتعاشات آزاد سیستم غیرخطی در شکل های ۲ تا ۵ نمایش داده شده است. شکل های ۲ تا ۵ به ترتیب، تغییرات زاویه ی بازوی اول، تغییرات زاویه ی بازوی دوم، تغییرات سرعت زاویه ای بازوی اول و تغییرات سرعت زاویه ای بازوی

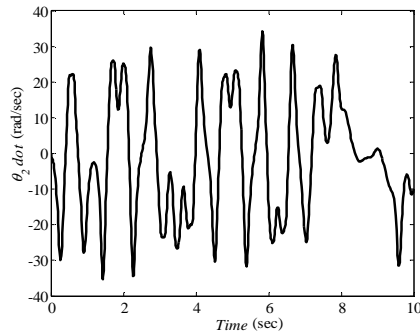
دوم را نمایش می‌دهند. همانطور که از این شکل‌ها مشخص است، سیستم ناپایدار است و با دامنه‌های بزرگ نوسان می‌کند.



شکل ۲- تغییرات زاویه‌ی بازوی اول سیستم غیرخطی مدار باز

به ازای شرایط اولیه  $\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$

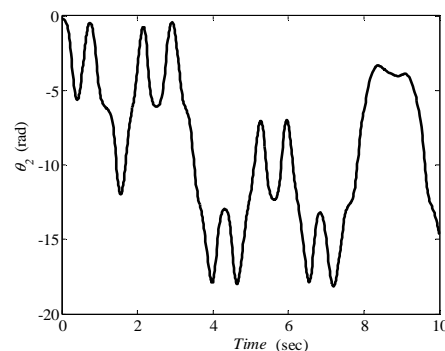
غیرخطی به ازای شرایط اولیه‌ی کوچک و نزدیک به نقطه‌ی تعادل ناپایدار بالایی، نزدیک به پاسخ زمانی سیستم خطی‌سازی شده می‌باشد و کنترلگر طراحی شده نیز به صورت مطلوبی اقدام به پایدارسازی سیستم خطی و غیرخطی می‌نماید. علت نزدیک بودن پاسخ زمانی سیستم خطی و غیرخطی این نکته است که در شرایط اولیه‌ی کوچک، منابع غیرخطی کوچک و قابل صرف‌نظر می‌باشند. در نتیجه سیستم خطی و غیرخطی با تقریب بسیار بالایی معادل می‌باشند. در مقابل با افزایش شرایط اولیه و فاصله گرفتن آنها از نقطه‌ی تعادل، منابع غیرخطی بزرگ شده و سیستم خطی و غیرخطی از هم فاصله می‌گیرند.



شکل ۵- تغییرات سرعت زاویه‌ای بازوی دوم سیستم

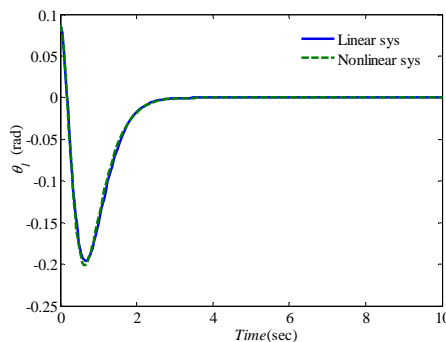
غیرخطی مدار باز به ازای شرایط اولیه

$\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$



شکل ۳- تغییرات زاویه‌ی بازوی دوم سیستم غیرخطی مدار

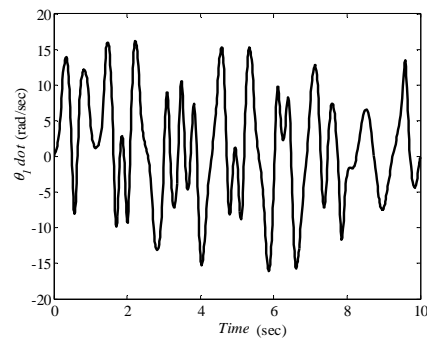
باز به ازای شرایط اولیه  $\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$



شکل ۶- تغییرات زاویه‌ی بازوی اول در حالت اعمال کنترلگر به

سیستم خطی و غیرخطی به ازای شرایط اولیه

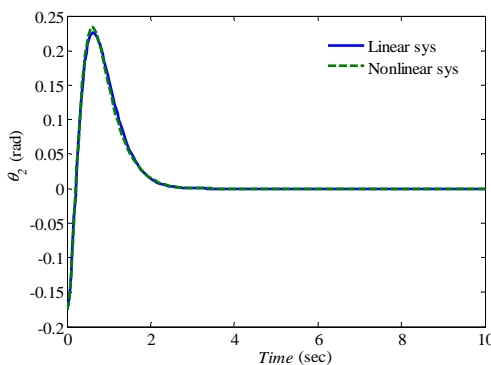
$\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$



شکل ۴- تغییرات سرعت زاویه‌ای بازوی اول سیستم

غیرخطی مدار باز به ازای شرایط اولیه

$\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$



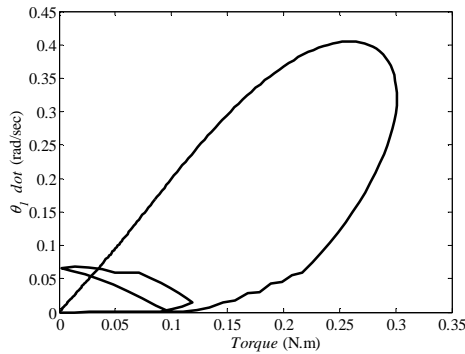
شکل ۷- تغییرات زاویه‌ی بازوی دوم در حالت اعمال کنترلگر به

سیستم خطی و غیرخطی به ازای شرایط اولیه

$\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$

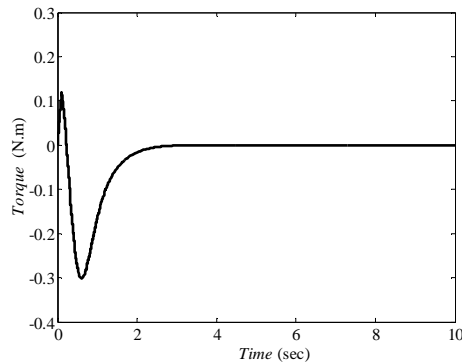
حال با اعمال کنترلگر خطی طراحی شده در بخش ۳ به سیستم خطی و غیرخطی، پاسخ زمانی سیستم در شکل‌های ۶ تا ۹ نمایش داده شده است. شکل‌های ۶ تا ۹ به ترتیب، تغییرات زاویه‌ی بازوی اول، تغییرات زاویه‌ی بازوی دوم، تغییرات سرعت زاویه‌ای بازوی اول و تغییرات سرعت زاویه‌ای بازوی دوم را در حالت اعمال کنترلگر به سیستم، نمایش می‌دهند. این شکل‌ها نشان می‌دهند پاسخ سیستم

سرو موتور با توان نامی ۱/۲ وات و گشتاور نامی ۱/۲۵ میلی نیوتن متر، خواسته‌های سیستم ارضا می‌شود.



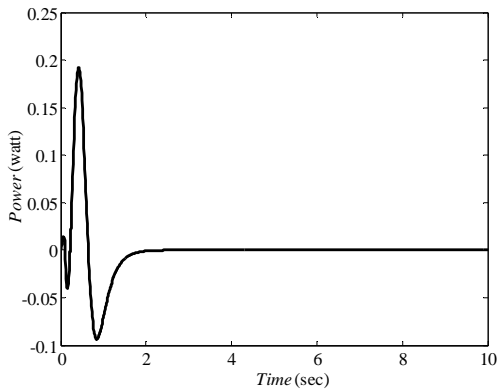
شکل ۱۰- سرعت دورانی بازوی اول بر حسب گشتاور عملگر در حالت اعمال کنترلگر به سیستم غیرخطی به ازای شرایط اولیه

$$\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$$



شکل ۱۱- پاسخ زمانی گشتاور عملگر در حالت اعمال کنترلگر به سیستم غیرخطی به ازای شرایط اولیه

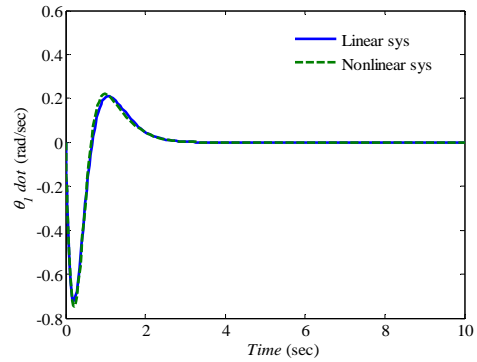
$$\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$$



شکل ۱۲- پاسخ زمانی توان مصرفی عملگر در حالت اعمال کنترلگر به سیستم غیرخطی به ازای شرایط اولیه

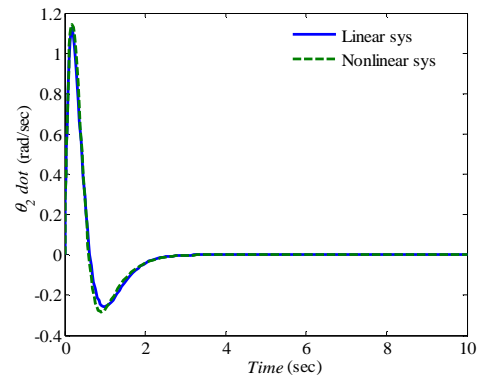
$$\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$$

در ادامه با رسم نمودار گشتاور-سرعت سرو موتور بررسی می‌گردد که نقاط کاری عملگر در زیر این نمودار و در محدوده مجاز قرار گیرد. مشخصات سرو موتور انتخابی در جدول ۲ آورده شده است.



شکل ۸- تغییرات سرعت زاویه‌ای بازوی اول در حالت اعمال کنترلگر به سیستم خطی و غیرخطی با شرایط اولیه

$$\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$$



شکل ۹- تغییرات سرعت زاویه‌ای بازوی دوم در حالت اعمال کنترلگر به سیستم خطی و غیرخطی با شرایط اولیه

$$\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$$

در شکل ۱۰ نمودار سرعت دورانی بازوی اول بر حسب گشتاور عملگر رسم شده است که در انتخاب عملگر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در واقع هر نقطه روی این نمودار، یک نقطه‌ی کاری سیستم در هر لحظه می‌باشد که میزان توان مورد نیاز عملگر را در آن لحظه نشان می‌دهد. شکل ۱۱ نمودار گشتاور عملگر بر حسب زمان را نمایش می‌دهد. طبق شکل ۱۱ عملگر انتخابی باید بتواند گشتاور بیشینه ۰/۳ نیوتن متر را به منظور پایدارسازی سیستم اعمال نماید. شکل ۱۲، نمودار توان مصرفی عملگر بر حسب زمان را نشان می‌دهد. طبق شکل ۱۲ حداکثر توان مصرفی عملگر ۰/۱۹ وات می‌باشد. در ادامه بر اساس نتایج بدست آمده در شبیه‌سازی‌ها، یک سرو موتور DC با ولتاژ ۱۲ ولت انتخاب گردیده است. با توجه به نمودارهای سیستم غیرخطی با شرایط اولیه داده شده، مشاهده می‌شود که حداکثر گشتاوری که موتور به عنوان ورودی سیستم باید اعمال کند-در حالت پاندول رو به بالا- برابر ۰/۳ نیوتن متر می‌باشد. با مشاهده‌ی نمودار توان سیستم که نشان‌دهنده این است که سیستم توان زیادی مصرف نمی‌کند (حداکثر ۰/۱۹ وات)؛ از یک سیستم گیربکس برای کاهش گشتاور روی شفت موتور و یک موتور توان پایین استفاده می‌شود. با انتخاب یک گیربکس با نسبت تبدیل ۲۷۵:۱ و ضریب تاثیر ۰/۷، حداکثر گشتاور روی شفت موتور برابر ۱/۱ میلی نیوتن متر خواهد شد. در نهایت با انتخاب یک

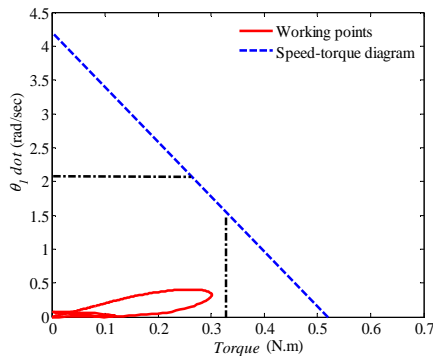
**جدول ۲- مشخصات سرو موتور انتخاب شده**

مشخصات	مقدار عددی
ولتاژ نامی	۱۲ v
سرعت دورانی نامی	۵۸۲۰ rpm
گشتاور نامی	۱/۲۵ mN.m
جریان نامی	۰/۱۳۳ A
سرعت بدون بار	۱۱۲۰۰ rpm
جریان بدون بار	۸/۳۱ mA
گشتاور قفل کن	۲/۴۵ mN.m
جریان لحظه شروع	۰/۲۶۸ A

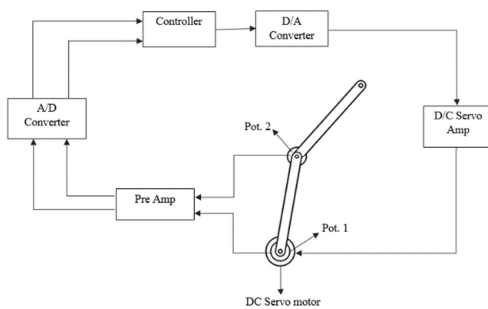
غیرخطی را ندارد. این ناپایداری به این دلیل اتفاق می‌افتد که با افزایش زاویه‌ی بازوها از نقطه‌ی تعادل، منابع غیرخطی بزرگتر شده و مدل خطی و غیرخطی از هم فاصله می‌گیرند.

### ۵- جمع‌بندی و نتیجه‌گیری

در این پژوهش به طراحی کنترلگر خطی به روش جایگذاری قطب‌ها برای یک سیستم پاندول معکوس دو درجه آزادی آزمایشگاهی پرداخته شد. به این منظور ابتدا به روش لاگرانژ معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم بدست آمد. سپس با خطی‌سازی سیستم حول نقطه‌ی تعادل ناپایدار بالایی، معادلات سیستم به فرم فضای حالت نوشته شدند. در ادامه با طراحی کنترلگر به روش جایگذاری قطب‌ها و اعمال آن به سیستم خطی‌سازی شده و غیرخطی، مشاهده گردید کنترلگر طراحی شده به صورت مطلوبی اقدام به پایدارسازی سیستم می‌نماید. به منظور انتخاب عملگر مناسب برای کنترل مجموعه با بدست آوردن نقاط کاری سیستم یک سرو موتور DC، ۱۲ ولتی با توان نامی ۱/۲ وات به همراه یک گیربکس با نسبت تبدیل ۲۷۵:۱ انتخاب گردید. پس از اعمال کنترلگر به سیستم پاندول معکوس آزمایشگاهی مشاهده گردید کنترل طراحی شده در شرایط اولیه‌ی تا حدود ۶ درجه، توانایی پایداری سیستم را به شکل مطلوبی دارد. در ادامه‌ی پژوهش کنونی که به عنوان نقطه‌ی شروع کار تجربی با یک روش کنترلی چند متغیره جایگذاری قطب‌ها بود، سعی بر آن است که به کمک یک استراتژی کنترل مقاوم به پایدارسازی نوسانات پاندول معکوس و همچنین اهداف ردیابی در حضور عدم قطعیت‌ها پرداخته شود.



**شکل ۱۳- قرارگیری نقاط کاری سیستم (خط کامل) در محدود مناسب (خط-نقطه)؛ در حالی که خط چین نمایشگر نمودار سرعت-گشتاور سرو موتور انتخابی است.**



**شکل ۱۴- بلوک دیاگرام کنترلی سیستم پاندول معکوس آزمایشگاهی**

نتایج شبیه‌سازی در شکل ۱۳ نمایش داده شده است. در شکل ۱۳ خط چین، نمودار سرعت-گشتاور سرو موتور انتخابی، منحنی پیوسته نقاط کاری سیستم در هر لحظه و خط-نقطه، محدوده مجاز در حالت کار دائم سرو موتور می‌باشد. همانطور که از نتایج مشخص است نقاط کاری سیستم در محدوده مجاز قرار گرفته‌اند. در نهایت کنترلگر خطی طراحی شده به سیستم پاندول معکوس آزمایشگاهی اعمال می‌گردد. بلوک دیاگرام کنترلی سیستم آزمایشگاهی به صورت شکل ۱۴ می‌باشد. همانطور که از شکل ۱۴ مشخص است؛ دو پتانسیومتر (Pot.1 و Pot.2) روی هر مفصل نصب شده است که زاویه‌ی هر بازو را در هر لحظه به صورت آنالوگ اندازه‌گیری کرده و به کنترلگر ارسال می‌نمایند. قبل از اینکه مقادیر آنالوگ اندازه‌گیری شده توسط پتانسیومترها وارد الگوریتم کنترلی کنترلگر گردد؛ به وسیله‌ی یک مبدل آنالوگ به دیجیتال (A/D)، با زمان نمونه‌برداری  $T_s = 0.01$  s گسسته‌سازی می‌شود. در ادامه کنترلگر با محاسبه‌ی خطای سیستم در هر لحظه یک سیگنال با فواصل زمانی  $T_s = 0.01$  s ارسال می‌نماید. این سیگنال قبل از اعمال به عملگر توسط یک مبدل دیجیتال به آنالوگ (D/A)، به روش ZOH<sup>1</sup> به یک سیگنال آنالوگ تبدیل می‌شود. در نهایت عملگر از طریق اعمال گشتاور به بازوی اول با توجه به الگوریتم کنترلی طراحی شده؛ باعث پایدارسازی سیستم می‌گردد. در شکل ۱۵ رفتار سیستم پاندول معکوس آزمایشگاهی پس از اعمال کنترلگر خطی طراحی شده به روش جایگذاری قطب‌ها و با شرایط اولیه‌ی  $\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$  این تصاویر در فواصل زمانی ۰، ۰/۷۵، ۱/۵، ۲/۲۵، ۳ و ۳/۷۵ ثانیه از سیستم آزمایشگاهی گرفته شده است. لازم به توضیح است در  $t=0$  sec مقادیر شرایط اولیه‌ی مورد نظر به کمک پتانسیومترهای نصب شده روی مفاصل بازوها ایجاد شده و سپس پاندول بلافاصله رها گردیده است. با اعمال کنترلگر خطی طراحی شده به روش جایگذاری قطب‌ها به سیستم آزمایشگاهی مشاهده گردید که سیستم، به ازای شرایط اولیه‌ی کوچک و تا حد ۶ درجه به خوبی کنترل می‌شود؛ اما با افزایش زاویه‌ی اولیه‌ی بازوها، کنترلگر خطی توانایی پایداری سیستم آزمایشگاهی

<sup>1</sup> Zero-order hold



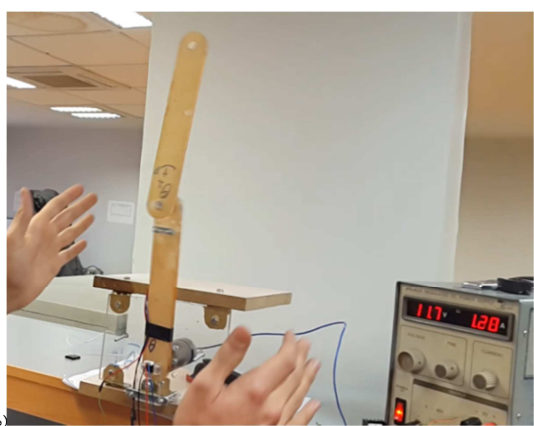
(الف)

t=0 sec



(ب)

t=0.75 sec



(پ)

t=1.5 sec



(ت)

t=2.25 sec



(ث)

t=3 sec



(ج)

t=2.25 sec

شکل ۱۵- رفتار سیستم پاندول معکوس آزمایشگاهی پس از اعمال شرایط اولیهی  $\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -10^\circ, \dot{\theta}_1 = 0, \dot{\theta}_2 = 0$   
 (الف) t=0 sec (ب) t=0.75 sec (پ) t=1.5 sec (ت) t=2.25 sec (ث) t=3 sec (ج) t=3.75 sec



## ۶- مراجع

- controller based on hybrid genetic algorithm, in *2015 International Conference on Automation, Mechanical Control and Computational Engineering*, 2015.
- [18] Stumfoll J., Discrete-time Modified State Observer Implementation on a Two Wheeled Inverted Pendulum Robot, in *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, pp. 0145, 2016.
- [19] Ginsberg J. H., *Advanced engineering dynamics*: Cambridge University Press, 1998.
- [1] Tian Z., Wu H., and Feng C., Hierarchical adaptive backstepping sliding mode control for underactuated space robot, in *Informatics in Control, Automation and Robotics (CAR), 2010 2nd International Asia Conference on*, pp. 500-503, 2010.
- [2] Muniandy M. and Muthusamy K., An innovative design to improve systematic odometry error in non-holonomic wheeled mobile robots, *Procedia Engineering*, Vol. 41, pp. 436-442, 2012.
- [3] Oryschuk P., Salerno A., Al-Husseini A. M., and Angeles J., Experimental validation of an underactuated two-wheeled mobile robot, *Mechatronics, IEEE/ASME Transactions on*, Vol. 14, pp. 252-257, 2009.
- [4] Woods S. A., Bauer R. J., and Seto M. L., Automated ballast tank control system for autonomous underwater vehicles, *Oceanic Engineering, IEEE Journal of*, Vol. 37, pp. 727-739, 2012.
- [5] Hespanha J. P., Trajectory-tracking and path-following of underactuated autonomous vehicles with parametric modeling uncertainty, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Vol. 52, pp. 1362-1379, 2007.
- [6] Ge S., Lee T., and Zhu G., Genetic algorithm tuning of Lyapunov-based controllers: an application to a single-link flexible robot system, *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, Vol. 43, pp. 567-574, 1996.
- [7] Hussein I. and Bloch A. M., Optimal control of underactuated nonholonomic mechanical systems, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, Vol. 53, pp. 668-682, 2008.
- [8] Chen Y.-F. and Huang A.-C., Controller design for a class of underactuated mechanical systems, *Control Theory & Applications, IET*, Vol. 6, pp. 103-110, 2012.
- [9] Man W.-S. and Lin J.-S., Nonlinear control design for a class of underactuated systems, in *Control Applications (CCA), 2010 IEEE International Conference on*, 2010, pp. 1439-1444.
- [10] Olfati-Saber R., Nonlinear control of underactuated mechanical systems with application to robotics and aerospace vehicles, Massachusetts Institute of Technology, 2000.
- [11] Ravichandran M. T. and Mahindrakar A. D., Robust stabilization of a class of underactuated mechanical systems using time scaling and Lyapunov redesign, *Industrial Electronics, IEEE Transactions on*, Vol. 58, pp. 4299-4313, 2011.
- [12] Reyhanoglu M., Schaft A., McClamroch N. H., and Kolmanovsky I., *Nonlinear control of a class of underactuated systems* vol. 2: IEEE, 1996.
- [13] Adhikary N. and Mahanta C., Integral backstepping sliding mode control for underactuated systems: Swing-up and stabilization of the Cart-Pendulum System, *ISA transactions*, Vol. 52, pp. 870-880, 2013.
- [14] Kim Y., Kim S. H., and Kwak Y. K., Dynamic analysis of a nonholonomic two-wheeled inverted pendulum robot," *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 44, pp. 25-46, 2005.
- [15] Furuta K., Okutani T., and Sone H., Computer control of a double inverted pendulum," *Computers & Electrical Engineering*, Vol. 5, pp. 67-84, 1978.
- [16] Bogdanov A., Optimal control of a double inverted pendulum on a cart, *Oregon Health and Science University, Tech. Rep. CSE-04-006, OGI School of Science and Engineering, Beaverton, OR*, 2004.
- [17] Wu B., Liu C., Song X., and Wang X., Design and implementation of the inverted pendulum optimal