بازشناسی چهره با استفاده از آنالیز تفکیک خطی بر پایه موجک‌های هار و گابور و ماشین بردار پشتیبان

صفر ایراندوست پاکچین[۱]، استادیار؛ سعید مشگینی[۲]، استادیار؛ سجاد نصیرزاده[۳]، دانشجوی کارشناسی ارشد

۱- دانشکده علوم ریاضی - دانشگاه تبریز - تبریز - ایران - s.irandoust@tabrizu.ac.ir
۲- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه تبریز - تبریز - ایران - meshgini@tabrizu.ac.ir
۳- دانشکده ریاضی - دانشگاه صنعتی شریف - تهران - ایران - sajjadnasirzadeh@gmail.com

چکیده: در این مقاله، پس از انجام مطالعه‌ای در مباحث الکترونیک، پردازش تصویر، بینایی ماشین، بازشناسی چهره، فیلترینگ، تبدیل موجک، آنالیز تفکیک خطی و ماشین بردار پشتیبان، روش جدیدی برای بازشناسی چهره، معرفی و پیشنهاد شده است. روند کلی این روش به‌صورت زیر است: ابتدا تعدادی تصویر از چهره اشخاص، که در این مقاله از پایگاه داده‌های FERET برگرفته شده است؛ به‌عنوان بانک اطلاعاتی برای بازشناسی چهره، وارد سیستم می‌گردد. سپس، از تبدیل گابور برای استخراج ویژگی‌های تصاویر استفاده می‌شود. به‌دلیل حجم زیاد داده‌های به‌دست‌آمده، ابتدا فرآیند فشرده‌سازی آن‌ها بر پایه تبدیل موجک به روی تصاویر به‌دست‌آمده انجام گرفته و سپس، با استفاده از آنالیز تفکیک خطی نسبت به جداسازی آن‌ها اقدام می‌شود. در نهایت، با استفاده از ماشین‌های بردار پشتیبان، کلاسه‌بندی و بازشناسی تصاویر حاصله انجام می‌گیرد. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها، مبین تأثیرات مثبت روش پیشنهادی در حفظ ویژگی‌های تصاویر در بازشناسی آن‌ها و دقت بالای این روش در مقایسه با شیوه‌های مشابه می‌باشد.

واژه‌های کلیدی: بازشناسی چهره، آنالیز تفکیک خطی، تبدیل موجک، موجک هار، فیلتر گابور، ماشین بردار پشتیبان.

Gabor and Haar Wavelets Mixed Usage in Face Recognition Based on Direct Linear Discriminant Analysis and Support Vector Machine

S. Irandoust-pakchin[1], Assistant Professor; S. Meshgini[2], Assistant Professor; S. Nasirzadeh[3], MSc Student

1- Faculty of Mathematical Sciences, University of Tabriz, Tabriz, Iran, Email: s.irandoust@tabrizu.ac.ir
2- Faculty of Electrical and Computer Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran, Email: meshgini@tabrizu.ac.ir
3- Faculty of Mathematical Sciences, Sharif University of Technology, Tehran, Iran, Email: sajjadnasirzadeh@gmail.com

Abstract: In this paper, beside studying in fields of electronic, image processing, computer vision, face recognition, filtering, wavelet transform, linear discriminant analysis and support vector machine, a new method for face recognition has been proposed. First, feature vectors are obtained from raw face images using Gabor wavelets. Next, the extracted feature vectors are mapped to a low dimensional subspace using Haar wavelets. Then, direct linear discriminant analysis technique is used for more compressing and splitting data obtained from the previous part. Finally, these obtained data are sent to support vector machine classifier for classification and then recognition of new images. The proposed method was examined using the FERET database. Experimental results illustrate effectiveness of this method against other related works in terms of recognition rate.

Keywords: Face recognition, feature extraction, Haar wavelet, Gabor wavelet, support vector machine.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۵/۱۱/۰۵
تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۶/۰۱/۱۶
تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۶/۰۵/۰۲
نام نویسنده مسئول: صفر ایراندوست پاکچین
نشانی نویسنده مسئول: ایران - تبریز - بلوار ۲۹ بهمن - دانشگاه تبریز - دانشکده علوم ریاضی.

۱- مقدمه

پردازش تصویر و بینایی ماشین یکی از شاخه‌های مهم مبحث پردازش سیگنال و آنالیز داده‌ها می‌باشد که مورد توجه محققان رشته‌های مختلف از جمله مهندسی برق، مهندسی الکترونیک و ریاضی کاربردی قرار گرفته است. پردازش تصویر شاخه‌ای از پردازش سیگنال به‌حساب می‌آید که در آن، سیگنال‌های ورودی به سیستم، تصاویر دیجیتال می‌باشند و خروجی عمل پردازش، می‌تواند تصویر یا هرگونه اطلاعات مفید دیگری باشد که از آن تصویر استخراج و به‌دست آمده است. پردازش تصویر، شامل کاربردهای متعددی است که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به بهبود کیفیت تصویر، بازسازی تصاویر تخریب‌شده، حذف نویز، آشکارسازی لبه و بازشناسی چهره اشاره کرد. بازشناسی چهره یکی از زیرشاخه‌های این تکنیک است که کاربردهای زیادی در علوم و فناوری‌های مختلف، صنعت و علوم نظامی دارد. از جمله این کاربردها می‌توان به استفاده از ابزارهای پردازش تصویر در ثبت اطلاعات عبور و مرور شرکت‌ها و یا در حیطه نظامی، استفاده از آن برای بازشناسی چهره مجرمان اشاره کرد.

روش‌های زیادی برای بازشناسی تصویر همچون بازشناسی تصویر و شناسایی الگوی تصاویر بر اساس هم‌رخدادی الگوی دودویی محلی متقارن مرکزی [۱] ارائه شده است. همچنین روش‌هایی چون [۲] با استفاده از فیلترگذاری یک‌ریخت در حوزه مکانی اقدام به کاهش تأثیرات شدت‌های روشنایی متفاوت بر چهره کرده و به بازشناسی تصاویر با شدت‌های روشنایی مختلف می‌پردازد. مقاله [۳] به شناسایی حالات چهره با استفاده از تبدیل موجک مختلط و مقاله [۴] به شناسایی چهره در رشته‌های ویدئویی با استفاده از حالات مختلف چهره و موقعیت‌های شخص در فیلم ویدئویی می‌پردازد.

در سال‌های اخیر به‌دلیل اهمیت بازشناسی تصویر، مقالات متعددی در این زمینه به چاپ رسیده است. مرجع [۵] یکی از مهم‌ترین این مقالات است که در سال ۱۹۹۱ به چاپ رسید و بعد از آن نیز مقالاتی بر اساس [۵] منتشر شده‌اند. اساس این روش‌ها به این صورت است: ماتریسی از تصاویر بانک اطلاعاتی تشکیل داده و بردارهای ویژه آن را محاسبه می‌کند و با ضرب ماتریس حاصل از این بردارها در تصاویر، تصویر ویژه به‌دست می‌آید که به‌جای مقایسه خود تصاویر با مقایسه تصاویر ویژه اقدام به بازشناسی چهره می‌کند. اما دارای معایبی است؛ نظیر عدم کلاسه‌بندی، مقرون‌به‌صرفه نبودن روش در ابعاد بالای اطلاعات و دقت کم تشخیص؛ بنابراین، در سال ۲۰۰۲، مقاله [۶] برای رفع این مشکلات ارائه شد. در این مقاله، جداسازی کلاسی انجام شده بود و دقت تشخیص نیز قدری افزایش یافته بود؛ اما همچنان، مشکلاتی وجود داشت. در سال‌های اخیر، مقاله [۷] ارائه شده است و به بهبود و رفع برخی از نواقص موجود در آن می‌پردازد. روش به کار گرفته‌شده در [۷] به این صورت است که ابتدا برای استخراج ویژگی‌های تصاویر از آن‌ها تبدیل گابور گرفته شده، سپس با استفاده از بردارهای ویژگی حاصله و با توجه به کلاس‌های موجود برای هر چهره با روش آنالیز تفکیک خطی مستقیم اقدام به کاهش بعد اطلاعات و جداسازی کلاس‌ها می‌کند و در نهایت با استفاده از ماشین بردار پشتیبان، تصاویر را کلاسه‌بندی کرده و چهره مربوط به تصاویر مورد نظر را تشخیص می‌دهد. در این روش با توجه به حجم بالای اطلاعات به‌دست‌آمده برخی اطلاعات تصویر حذف می‌شود که این کار می‌تواند باعث کاهش دقت تشخیص شود. در این مقاله، روند فشرده‌سازی تصاویر به‌دست‌آمده از تبدیل گابور به‌وسیله موجک‌های هار انجام می‌شود که قبلاً از روش‌هایی چون زیرنمونه‌برداری استفاده می‌شد که باعث حذف برخی ویژگی‌های مهم تصویر شده و در نهایت منجر به کاهش دقت در بازشناسی تصویر می‌شد.

روش‌های دیگری نیز برای بازشناسی تصویر که از سایر ویژگی‌های تصاویر و چهره‌ها استفاده می‌کنند؛ در [۱۳-۸] ارائه شده است.

در ادامه، ابتدا به معرفی تعاریف اولیه در مورد موجک‌ها و فیلترها به‌خصوص موجک هار و گابور، روش آنالیز تفکیک خطی و ماشین بردار پشتیبان در بخش دوم پرداخته و در بخش سوم، روش پیشنهادی را پیاده‌سازی می‌کنیم. در بخش چهارم، به بررسی نتایج عددی حاصل از اعمال روش ارائه‌شده به روی پایگاه داده FERET و مقایسه آن با روش‌های قبل می‌پردازیم و در بخش پنجم، مطالب ارائه‌شده و نتایج حاصله را جمع‌بندی می‌کنیم.

۲- تعاریف اولیه

در ابتدا قدری در مورد فیلترگذاری تصاویر و تبدیل موجک مطالبی می‌آوریم:

۲-۱- ضرب پیچشی و فیلترگذاری

ابتدا به تعریف کانولوشن می‌پردازیم:

فرض کنید x بردار دلخواهی باشد. درایه‌های بردار حاصل از کانوالو بردار h روی بردار x از فرمول زیر به‌دست می‌آید [۱۴]:

$$y_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k x_{n-k} \qquad (۱)$$

با توجه به تعریف ضرب پیچشی، می‌توان آن را با استفاده از ضرب داخلی بردارها به‌شکل ضرب داخلی بردار h و بردار x و گرداندن آن روی بردار x نوشت. همچنین می‌توان آن را به‌شکل ضرب ماتریسی بیان کرد که سطرهای آن بردار hای است که شیفت پیدا کرده است.

۲-۱-۱- برخی فیلترهای مهم

فیلترهای میانگین: همان‌طور که از نام این فیلترها نیز برمی‌آید، این فیلترها میانگین یک همسایگی از درایه مورد نظر را در بردار می‌گیرند.

فیلترهای بالاگذر: این فیلترها معمولاً موجب به‌دست آمدن لبه‌های تصویر می‌شوند و به‌طور کلی، منجر به برجسته شدن اختلاف درایه با درایه‌های همسایگی‌اش می‌شوند. از جمله معروف‌ترین این فیلترها، دسته فیلترهای لاپلاسین هستند. مجموع درایه‌های بردار مربوط به این فیلترها صفر است.

فیلترهای پایین‌گذر: این فیلترها باعث بروز تاری در تصویر می‌شوند و از جمله معروف‌ترین این فیلترها، فیلترهای گوسی و میانگین هستند. معمولاً تمام درایه‌های این فیلترها، اعدادی مثبت است.

۲-۱-۲- موجک هار و گابور

موجک‌ها یکی از ابزارهای مؤثر در پردازش تصویر هستند و در کاربردهای فراوانی چون فشرده‌سازی تصاویر و استخراج لبه به‌طور مستقیم استفاده می‌شوند. همچنین استفاده از تبدیل موجک و تغییر فضای تصویر از حوزه مکانی به حوزه فرکانسی در حذف نویز و افزایش کیفیت تصاویر بسیار کاربرد داشته و باعث راحتی و بهبود عملکرد می‌شوند. اولین خانواده از موجک‌ها، موجک هار است که به نام آلفرد هار، ریاضیدان فرانسوی [۱۵]، نام‌گذاری شده است. وی در سال ۱۹۰۹ اولین کسی بود که به موجک‌ها اشاره کرد. بعد از او پل لوی با نشان دادن برتری این پایه‌ها نسبت به پایه‌های فوریه باعث پیشرفت هرچه بیشتر این ابزار ریاضی گشت.

موجک هار: موجک هار اولین خانواده معرفی‌شده از موجک‌ها می‌باشد و بعد از آن، موجک‌های متعددی معرفی شده‌اند؛ اما همچنان یکی از بهترین و مؤثرترین موجک‌ها به‌حساب می‌آید. این موجک، یک موجک متعامد، متقارن و فرم‌بسته بوده و همین نیز باعث راحتی و دقت بالای بازسازی در استفاده از این موجک می‌شود.

روشی که ما برای کانولوشن فیلتر مربوط به موجک روی تصویر به کار می‌بریم؛ با استفاده از ضرب ماتریسی است که حسن دیگری هم نسبت به کانولوشن معمولی دارد و آن، این است که عمل زیرنمونه‌برداری را نیز همزمان با کانولوشن انجام می‌دهد.

برای تبدیل موجک هار، ماتریس زیر را در تصویر ضرب می‌کنیم [۱۴]:

$$H=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \hline 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (۲)$$

ضرب به این شکل است که برای فیلترینگ (کانولوشن) در جهت سطری، ماتریس را از سمت چپ و برای تبدیل ستونی از سمت راست ضرب می‌کنیم. در حالت کلی، داریم [۱۴]:

$$I_h = HIH^t \quad (۳)$$

در شکل ۱ نتیجه تبدیل موجک هار روی تصویر مشاهده می‌شود. شکل سمت چپ، تصویر اصلی مرد عکاس و شکل وسط، حاصل اعمال موجک هار از مرتبه دو که یک مرتبه، بعد تصویر را پایین آورده است. این تصویر، شامل ۴ تصویر که یکی حاصل موجک مادر (تصویر کوچک‌شده سمت چپ بالا) و دیگری جزئیات سطری تصویر (سمت راست بالا) و دیگری جزئیات ستونی تصویر (سمت چپ پایین) و نهایتاً تصویر جزئیات قطری تصویر (سمت راست پایین) حاصل می‌شود و تصویر آخر، تصویر بازسازی‌شده توسط عکس موجک هار است.

شکل ۱: نتیجه حاصل از اعمال تبدیل موجک هار و بازسازی آن [۱۴]

موجک گابور: مشخصه اصلی این موجک‌ها شباهت آن‌ها به بینایی انسان در ارائه جهت‌گیری‌های مختلف و تناوب تصاویر است. بنابراین، استفاده از آن‌ها در استخراج الگو و مقایسه تصاویر، مناسب است. تابع هسته فیلترهای گابور، همان تابع هسته فیلتر گوسی است که با موج سینوسی مدوله شده است. این تابع به‌شکل زیر است [۷]:

$$\Psi_{\omega,\theta}(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x'^2+y'^2}{2\sigma^2}\right)\exp(j\omega x') \quad (۴)$$
$$x'=x\cos(\theta)+y\sin(\theta),\quad y'=-x\sin(\theta)+y\cos(\theta)$$

که در آن، (x,y) مکان پیکسل مورد نظر در تصویر است و ω فرکانس زاویه‌ای مرکزی و θ میزان چرخش پادساعت‌گرد تابع گابور

(جهت‌گیری فیلتر) و σ نشانگر برجستگی تابع گوسی در هر دو جهت x و y است. در این مقاله، برای برقراری رابطه بین σ و ω، $\sigma=\frac{\pi}{\omega}$ در نظر می‌گیریم. برای استخراج بیشتر و بهتر اطلاعات و خصوصیات تصویر، معمولاً مجموعه‌ای از فیلترهای گابور را با فرکانس‌ها و جهت‌گیری‌های مختلف به روی تصویر کانوالو می‌کنیم که به این مجموعه، بانک فیلتر گابور گویند. با توجه به تعداد فرکانس‌ها و جهت‌گیری‌های θ و ω، در این مقاله از ۵ فرکانس و ۸ زاویه استفاده می‌کنیم که به‌صورت زیر مقداردهی می‌شوند [۷]:

$$\begin{aligned} \omega_u &= \frac{\pi}{۲}\times\sqrt{۲}^{-u}, \quad u=۰,۱,۲,\ldots,۴ \\ \theta_v &= \frac{\pi}{۸}\times v \quad , \quad v=۰,۱,۲,\ldots,۷ \end{aligned} \tag{۵}$$

در شکل ۲ نمونه‌ای از این بانک فیلتر و اعمال آن به روی یک تصویر مشاهده می‌شود.

با اعمال این فیلترها به روی تصویر، ۴۰ عدد تصویر به‌دست می‌آید که با پشت سر هم چیدن ستون‌های این تصاویر، بردار ویژگی گابور به‌دست می‌آید؛ اما بعد این بردار بسیار بالا بوده، طوری که عملاً استفاده از آن غیرممکن است.

۲-۲- آنالیز تفکیک خطی

هرچند با استفاده از موجک هار اقدام به فشرده‌سازی و کاهش بعد اطلاعات می‌شود، اما همچنان این حجم اطلاعات در عمل غیرقابل استفاده است و به‌لحاظ محاسباتی مقرون‌به‌صرفه نیست. در این بخش، روش آنالیز تفکیک خطی را معرفی می‌کنیم که با حذف اطلاعات غیرلازم که باعث درهم‌تنیدگی تصاویر نیز می‌شود؛ هم حجم اطلاعات را کاهش داده و کار را عملی‌تر و مقرون‌به‌صرفه می‌کند و همچنین با جداسازی تصاویر، کار بازشناسی چهره را راحت‌تر و دقت تشخیص را بهبود می‌بخشد.

در ابتدا کمی روش‌هایی که در مقالات گذشته استفاده شده؛ معرفی می‌کنیم:

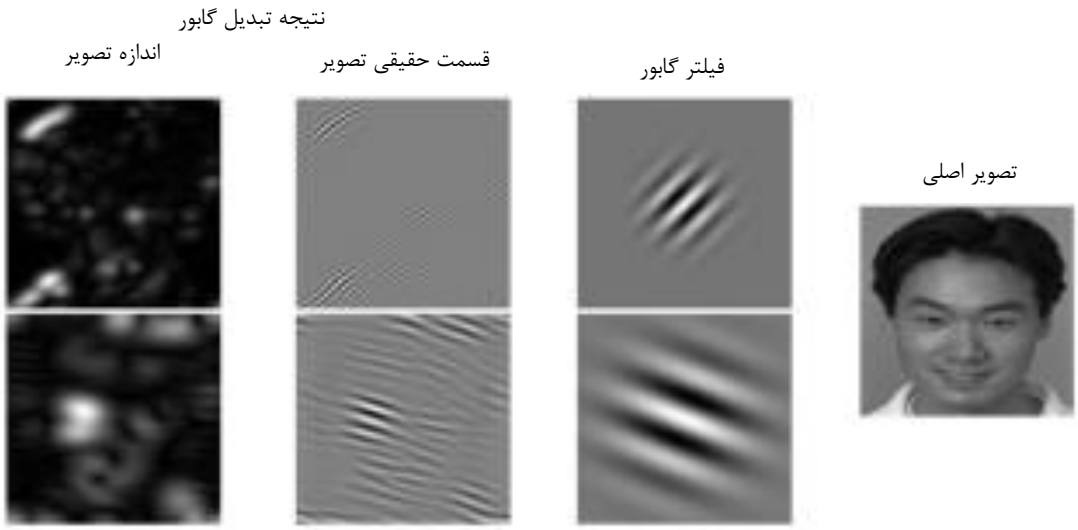
۲-۲-۱- آنالیز مؤلفه‌های اصلی[۱] و آنالیز تفکیک خطی[۲]

الگوریتم‌های آنالیز مؤلفه‌های اصلی (PCA) و آنالیز تفکیک خطی (LDA) از جمله روش‌های کلاسیک موجود در این زمینه‌اند. روش PCA [۵] به این صورت است که تمام داده‌ها را (بدون کلاسه‌بندی) در یک ماتریس جمع کرده و بردارهای ویژه آن را محاسبه می‌کند و تعدادی از بردارهای ویژه را که مقادیر ویژه متناظر آن‌ها بیش‌ترین مقدار است؛ در یک ماتریس ذخیره می‌کند و با ضرب این ماتریس در بردار حاصل از تصویر، اقدام به جداسازی و استخراج جزئیات اصلی تصویر می‌کند.

در مقابل، روش LDA [۶] به این صورت است که با استفاده از تصاویر، ماتریس‌های پراکندگی درون‌کلاسی و بین‌کلاسی را تشکیل داده و ماتریس W را از رابطه زیر محاسبه می‌کند [۶]:

$$W=\arg\max_{W}\frac{\left|W^{-۱}S_bW\right|}{\left|W^{-۱}S_wW\right|} \tag{۶}$$

این کار با استفاده از محاسبه بردارهای ویژه ماتریس $S_w^{-۱}S_b$ انجام می‌پذیرد. اما با توجه به این که ماتریس S_w معمولاً منفرد است و وارون‌پذیر نمی‌باشد؛ لذا این کار عملی نیست. لذا در این روش، فضای پوچ S_w را حذف می‌کند؛ اما این کار باعث حذف بسیاری اطلاعات ضروری و کاهش دقت می‌شود. لذا از روش آنالیز تفکیک خطی مستقیم استفاده می‌شود.



شکل ۲: نتیجه اعمال موجک گابور به روی تصویر [۷]

۲-۲-۲- آنالیز تفکیک خطی مستقیم[۳]

در این روش نیز همچون روش LDA هدف، یافتن ماتریس تبدیل W می‌باشد که از رابطه (۶) به‌دست می‌آید. قبل از تبیین الگوریتم، ابتدا روش به‌دست آمدن ماتریس پراکندگی درون‌کلاسی (S_w) و بین‌کلاسی (S_b) بیان می‌شود [۷]:

$$S_b = \sum_{i=1}^{J} N_i (e_i - e)(e_i - e)^T$$
$$S_w = \sum_{i=1}^{J} \sum_{z_k \in Z_i} (z_k - e_i)(z_k - e_i)^T \qquad (۷)$$

که در آن، $z_k \in \mathbb{R}^n$ بردار حاصل از تصویر است که متعلق به یکی از J کلاس $\{Z_1, Z_2, \ldots, Z_J\}$ است؛ N_i تعداد بردارهای موجود در کلاس iام و e_i بردار میانگین بردارهای موجود در کلاس iام بوده و e نیز بردار میانگین تمامی بردارها می‌باشد.

همان‌طور که در بخش قبل گفته شد، فضای پوچ S_w با توجه به رابطه (۶) حاوی اطلاعاتی ضروری است که باعث جداسازی بهتر کلاس‌ها می‌شود و در عین حال، فضای پوچ S_b در جداسازی تصاویر نقشی نداشته و در واقع، حاوی اطلاعاتی غیرضروری است. بنابراین، ما به‌دنبال حذف فضای پوچ S_b به‌جای فضای پوچ S_w هستیم. برای این کار، روش‌های مختلفی در مقالاتی چون [۱۸-۱۶] ارائه شده‌اند. در این مقاله، از روش آنالیز تفکیک خطی مستقیم (DLDA) که در مقاله [۱۶] معرفی شده است؛ استفاده می‌شود. این روش، بدین‌صورت است:

ابتدا ماتریس V محاسبه می‌شود به‌طوری که:

$$V^{-1} S_b V = \Lambda \qquad (۸)$$

که در آن، ماتریس Λ ماتریس قطری است که درایه‌های روی قطر آن به‌صورت نزولی مرتب شده‌اند که در واقع همان مقادیر ویژه S_b می‌باشند؛ ستون‌های ماتریس V نیز بردارهای ویژه S_b می‌باشند. با توجه به این که S_b منفرد است، برخی مقادیر ویژه آن صفر یا بسیار نزدیک به صفر می‌باشند. این مقادیر ویژه و بردارهای متناظر با آن‌ها را در V و V^{-1} حذف می‌کنیم و ماتریس Y و $\hat{Y}$ به‌دست می‌آید که داریم:

$$\hat{Y} S_b Y = D_b \qquad (۹)$$

که در آن، D_b زیرماتریس Λ می‌باشد. حال با قرار دادن [۷]:

$$Z = Y D_b^{-\frac{1}{2}}$$
$$\hat{Z} = D_b^{-\frac{1}{2}} \hat{Y} \qquad (۱۰)$$

داریم:

$$\hat{Z} S_b Z = I \qquad (۱۱)$$

حال، بعد اطلاعات نیز کاهش یافته؛ زیرا فضای پوچ S_b حذف شده و لذا ماتریس $\hat{Z} S_w Z$ یک ماتریس $p \times p$ است. حال ماتریس R را طوری می‌یابیم که:

$$R^{-1} \hat{Z} S_w Z R = \Gamma \qquad (۱۲)$$

که در آن، Γ ماتریس قطری است که درایه‌های آن به‌صورت صعودی مرتب شده‌اند. برای به‌دست آوردن R نیز از مقادیر ویژه و بردارهای ویژه $\hat{Z} S_w Z$ استفاده می‌شود. حال به‌دلخواه، m ستون اول R و متناظراً m سطر اول ماتریس R^{-1} به‌ترتیب در U و $\hat{U}$ جمع می‌شوند و D_w نیز زیر ماتریس $m \times m$ ماتریس Γ در نظر گرفته می‌شود. حال با در نظر گرفتن [۷]:

$$A = ZU$$
$$\hat{A} = \hat{U} \hat{Z} \qquad (۱۳)$$

داریم:

$$\hat{A} S_w A = D_w$$
$$\hat{A} S_b A = I \qquad (۱۴)$$

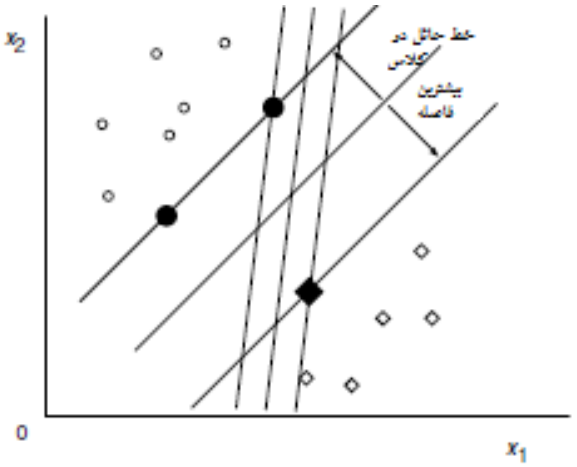
حال قرار می‌دهیم [۷]:

$$W = A D_w^{-\frac{1}{2}}$$
$$\hat{W} = D_w^{-\frac{1}{2}} \hat{A} \qquad (۱۵)$$

و با ضرب ماتریس $\hat{W}$ که همان ماتریس تبدیل مورد نظر ما است؛ در بردار حاصل از تصاویر، هم بعد آن کاهش می‌یابد و هم تا حدی آن‌ها از هم جدا می‌شوند.

۲-۳- ماشین بردار پشتیبان[۴]

در این بخش، به معرفی روش کلاسه‌بندی ماشین بردار پشتیبان (SVM) پرداخته می‌شود. روش SVM یکی از الگوریتم‌های مبتنی بر شبکه عصبی برای کلاسه‌بندی داده‌ها است. در این روش، هدف، یافتن خط مستقیم (ابرصفحه) حائل بین دو کلاس مختلف با استفاده از روابط بهینه‌سازی و برنامه‌ریزی درجه‌دو می‌باشد. ولی برای بهبود دقت، یک حاشیه امن در دو سمت این خط (ابرصفحه) در نظر گرفته می‌شود که به بردارهای روی این خطوط (ابرصفحه) بردار پشتیبان می‌گویند.



شکل ۳: کلاسه‌بندی با استفاده از SVM [۱۹]

اما این خطوط (ابرصفحه) معمولاً تفکیک‌کننده‌های دقیقی نیستند. بنابراین، ما ابتدا با استفاده از تابع هسته، داده‌ها را ابتدا به فضای دیگری می‌بریم که در این فضا بتوان با خط راست (ابرصفحه) دو کلاس را از هم جدا کرد.

به‌عنوان ورودی برای این الگوریتم، مجموعه $\{(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)\}$ را در نظر می‌گیریم که در آن، x_i ها داده‌های مربوط به تصاویر هستند و y_i ها مقدار ۱ یا ۱- دارند که نشان‌دهنده عضویت یا عدم عضویت تصویر به کلاس مورد نظر است. حال با استفاده از روابط موجود و خلاصه‌سازی و انجام برخی عملیات، مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم زیر حاصل می‌شود [۱۹]:

$$\begin{aligned}&\max_{\alpha}\Omega(\alpha)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\alpha_j y_i y_j K(x_i,x_j)\\&s.t.\quad \sum_{i=1}^{n}\alpha_i y_i=0,\quad \alpha_i\in[0,C],\quad i=1,2,\ldots n\end{aligned}\tag{۱۶}$$

در معادله (۱۶)، α_i ها ضرایب لاگرانژ، K تابع هسته و C ثابتی است که به‌عنوان پارامتر تنظیم می‌نامند. با حل معادله (۱۶)، α به‌دست می‌آید که همراه با تابع هسته، اطلاعات لازم برای بازشناسی چهره هستند. بردارهای پشتیبان مقادیر درونی $(0,C)$ هستند که با استفاده از آن‌ها، مقدار ثابتی که مقدار بایاس خوانده می‌شود؛ به‌دست می‌آید. با استفاده از این اطلاعات، تابع تصمیم‌گیری به‌شکل زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$f(x)=\operatorname{sgn}\left(\sum_{x_i\in S}\alpha_i y_i K(x_i,x)+b\right)\tag{۱۷}$$

که در آن، S مجموعه بردارهای پشتیبان و b مقدار بایاس یاد شده است. بردار مورد نظر متعلق به کلاسی است که مقادیر y_i اعضای آن کلاس با مقدار تابع تصمیم یکسان باشد.

اما مسئله‌ای که با آن سر و کار داریم، تنها دو کلاس ندارد. برای حل این مشکل، دو راه حل عمده وجود دارد: یکی روش یک-به-یک است این روش، هر دو کلاس متفاوت را در مقابل هم قرار می‌دهد؛ بنابراین، این روش مستلزم صرف زمان و حجم عملیات بیشتر می‌باشد. روش دیگر، روش یک-به-کل است که هر کلاس را برابر کل کلاس‌های دیگر در نظر می‌گیرد و بنابراین فقط به تعداد کلاس‌ها، روش SVM پیاده‌سازی می‌شود و بنابراین حجم عملیات و زمان کمتری صرف می‌شود. البته دقت روش اول نیز کمی بیشتر است؛ اما در این مقاله، از روش دوم استفاده می‌شود که به‌صرفه‌تر است. در ادامه، در مورد تابع هسته قدری توضیح داده می‌شود و چند نمونه از توابع هسته معروف بیان می‌شود.

۲-۳-۱- تابع هسته SVM

همان‌طور که قبلاً اشاره شده است، تابع هسته برای انتقال داده‌ها به فضای دیگری است که در آن فضا بتوان با استفاده از ابرصفحه‌ای داده‌ها را از هم جدا کرد. برای این کار از توابع مختلفی استفاده می‌شود. در حالت اولیه آن، این تابع، همان ضرب داخلی است که فضا را عوض نمی‌کند. تابع چندجمله‌ای ساده[۵] از نزدیک‌ترین توابع به ضرب داخلی است. در رابطه (۱۸)، این تابع با درجه d نمایش داده شده است [۱۹]:

$$K(x,x')=\left(x^T x'+1\right)^d\tag{۱۸}$$

یکی دیگر از این توابع هسته مشهور که نسبت به تابع SP بهتر عمل می‌کند، تابع چندجمله‌ای نرمال‌شده به‌صورت ابرکروی است. در رابطه (۱۹) این تابع با پارامترهای d و h بیان شده است [۷]:

$$K(x,x')=\frac{1}{3^d}\left(\frac{x^T x'+h^2}{\sqrt{\left(\|x\|^2+h^2\right)\left(\|x'\|^2+h^2\right)}}+1\right)^d\tag{۱۹}$$

از دیگر توابع مهم و بسیار کارآمد در این زمینه می‌توان به تابع پرتوی پایه اشاره کرد که توابعی مثل توابع هسته گوسی دارند. در رابطه (۲۰) این تابع با پارامتر σ نشان داده شده است [۱۹]:

$$K(x,x')=\exp\left(-\frac{|x-x'|^2}{2\sigma^2}\right)^d\tag{۲۰}$$

در نهایت تابع هسته موجک بیان می‌شود که در این مقاله از این تابع هسته استفاده شده است. تابع موجک با پارامتر α به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$\begin{aligned}&K(x,x')=\prod_{i=1}^{m}\cos\left(1.75\frac{x_i-x_i'}{2\alpha}\right)\exp\left(-\frac{(x_i-x_i')^2}{2\alpha^2}\right)\\&x=(x_1,x_2,\ldots,x_m)^T,\quad x'=(x_1',x_2',\ldots,x_m')^T\end{aligned}\tag{۲۱}$$

۳- روش پیشنهادی

در این بخش، به ارائه روش پیشنهادی و الگوریتم مربوطه می‌پردازیم. روش‌های استفاده‌شده در این الگوریتم، در بخش قبل معرفی شده‌اند؛ بنابراین، از معرفی دوباره آن‌ها پرهیز کرده و تنها در صورت اعمال تغییرات به آن‌ها اشاره می‌کنیم.

در این روش، ابتدا بانک اطلاعاتی تصاویر در اختیار قرار می‌گیرد که برای هر شخص، کلاسی (مجموعه‌ای) از تصاویر چهره در زوایای مختلف را در بردارد. سپس از هر یک از تصاویر بانک اطلاعاتی تبدیل گابور گرفته می‌شود. همان‌طور که قبلاً نیز اشاره شده، حجم اطلاعات در تبدیل با بانک فیلتر ۸×۵ گابور، ۴۰ برابر می‌شود. بنابراین، استفاده از این حجم اطلاعات در عمل غیرممکن است. برای رفع این مشکل، از روش‌های متعددی می‌توان استفاده کرد. برای مثال، می‌توان تصاویر حاصل را با ضریبی معین کاهش بعد داد؛ اما این کار باعث حذف اطلاعات می‌شود. بنابراین، در این مقاله با استفاده از موجک هار، این تصاویر فشرده می‌شوند که با این کار، اطلاعات به‌جای حذف شدن با یکدیگر ادغام می‌شوند. حال برای هر تصویر، یک بردار خصوصیات تصویر را در اختیار داریم. با استفاده از روش DLDA این داده‌ها جداسازی می‌شوند و همچنین برخی اطلاعات اضافی نیز حذف و حجم

داده‌ها کاهش می‌یابد. از روش DLDA یک ماتریس تبدیل به‌دست می‌آید که همراه با بانک فیلتر گابور و موجک هار احتیاج به ذخیره‌سازی دارند و برای مرحله تشخیص لازم هستند. با ضرب این ماتریس تبدیل در بردارهای خصوصیات تصاویر، دسته اطلاعات لازم جهت کلاسه‌بندی تصاویر به‌دست می‌آیند که برای کلاسه‌بندی از روش SVM با تابع هسته موجک استفاده می‌شود. با اعمال این روش به روی داده‌ها، مجموعه اطلاعات مربوط به کلاسه‌بندی تصاویر به‌دست می‌آیند که این اطلاعات نیز نیاز به ذخیره‌سازی دارند. حال برای بازشناسی چهره مورد نظر به این شکل عمل می‌شود که ابتدا از تصویر مورد نظر تبدیل گابور-هار گرفته شده و سپس با استفاده از ضرب ماتریس تبدیل یافته شده از روش DLDA در مرحله پردازش، بانک اطلاعاتی برداری به‌دست می‌آید که در این مقاله با استفاده از روش یک-به-کل، چهره مربوط به تصویر تشخیص داده می‌شود.

الگوریتم روش پیشنهادی به این صورت است:

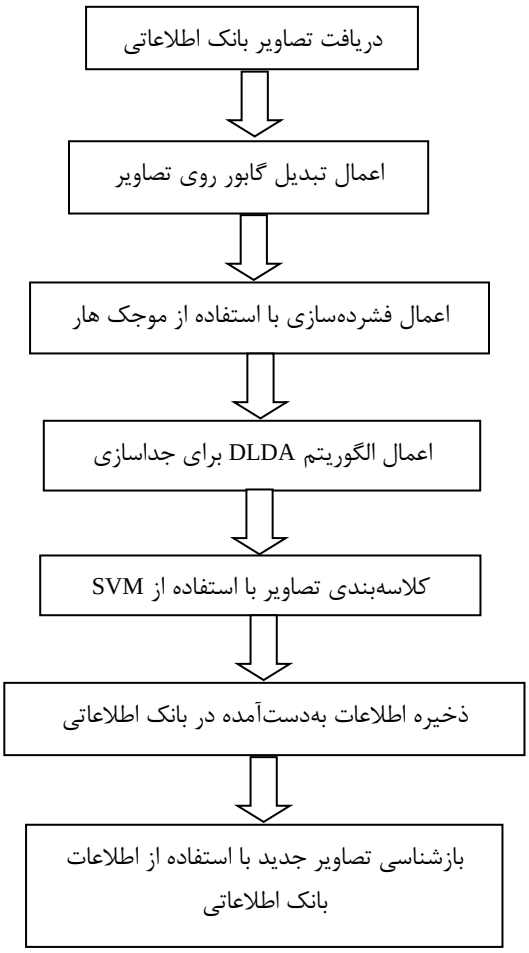
۱. از تصاویر بانک اطلاعاتی (پایگاه داده‌ها) تبدیل گابور-هار گرفته می‌شود.
۲. با استفاده از الگوریتم DLDA ماتریس تبدیل را به‌دست می‌آوریم.
۳. با ضرب ماتریس تبدیل در ماتریس خصوصیات تصاویر، تصاویر را به فضای تبدیل انتقال می‌دهیم.
۴. تصاویر را در فضای تبدیل با استفاده از روش SVM و با تابع هسته موجک کلاسه‌بندی می‌کنیم.
۵. از تصویر مورد نظر برای بازشناسی (تصویر تست) تبدیل گابور-هار گرفته و ماتریس تبدیل را در آن ضرب می‌کنیم.
۶. با استفاده از تابع تصمیم SVM چهره مربوطه را تشخیص می‌دهیم.

در شکل ۴، روندنمای تشکیل پایگاه داده و بازشناسی چهره با استفاده از روش پیشنهادی این مقاله، رسم شده است.

۴- نتایج عددی

در این بخش، نتایج عددی حاصل از پیاده‌سازی روش ارائه‌شده در بخش روش پیشنهادی با استفاده از نرم‌افزار متلب و بر روی پایگاه داده FERET [۲۲] آورده شده است. پایگاه داده FERET یکی از معتبرترین پایگاه داده‌های مورد استفاده در بازشناسی چهره است که البته در این مقاله از تصاویر (کلاس) مربوط به ۱۰۰ شخص مختلف استفاده کرده‌ایم که در هر کلاس، ۱۱ تصویر مختلف که در زوایای مختلف گرفته شده‌اند؛ وجود دارد. البته به‌عنوان پیش‌پردازش قسمت‌هایی از تصاویر برش داده شده‌اند. در شکل ۵ تصاویر مربوط به ۴ کلاس مختلف، نشان داده شده است.

بر روی این تصاویر، یک مرحله پیش‌پردازش اعمال می‌شود که از تصاویر، چهره شخص را در اندازه ۹۲×۱۱۲ قطع و استخراج می‌کند. در شکل ۶، تصاویر حاصل از پیش‌پردازش را بر روی تصاویر یکی از کلاس‌ها می‌بینید.

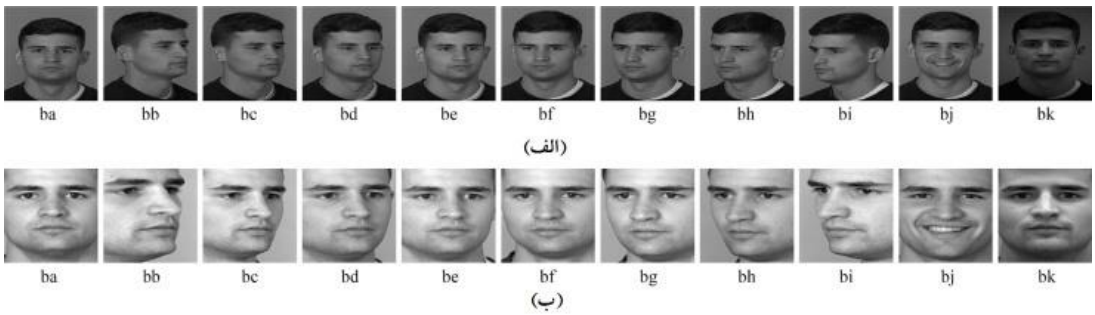


شکل ۴: روند تشکیل پایگاه داده و بازشناسی تصویر چهره با استفاده از الگوریتم پیشنهادی این مقاله

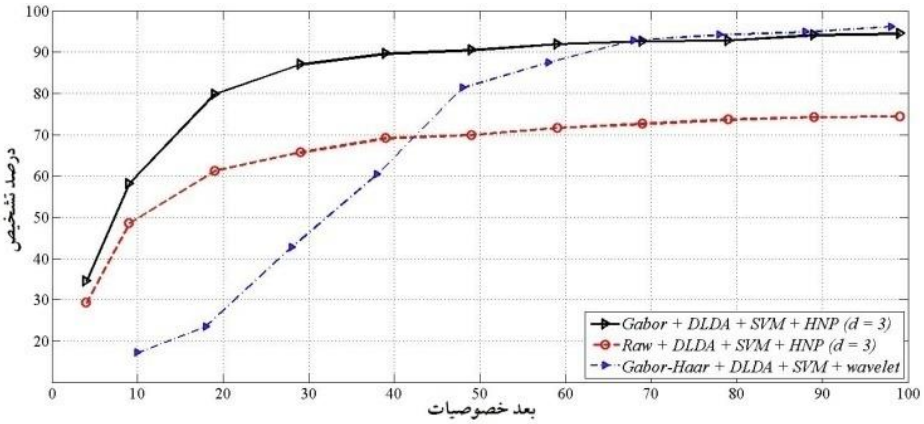
از بین این کلاس‌های موجود در پایگاه داده FERET، ۱۰۰ کلاس مختلف برای پیاده‌سازی و آزمایش روش پیشنهادی انتخاب شده است. همان‌طور که در شکل ۵ نیز دیده می‌شود، در هر کلاس ۱۱ تصویر مختلف در زوایای متفاوت وجود دارد. از این ۱۱ تصویر، ۵ تصویر برای تشکیل بانک اطلاعاتی (آموزش) و ۶ تصویر مابقی برای تست روش استفاده می‌شوند. برای تست دقت روش، ۱۰ بار به‌صورت تصادفی تصاویر دسته‌بندی شده و روش پیشنهادی روی آن‌ها اعمال شده است. نتایج حاصل در مقایسه با روش‌های ماقبل به‌صورت زیر است:

در ابتدا برای مقایسه، روش پیشنهادی در برابر روش‌هایی که در آن‌ها از تصاویر به‌صورت مستقیم و بدون انتقال به فضای تبدیل و روشی که در آن از روش حذفی برای کاهش حجم اطلاعات گابور استفاده شده، قرار داده شده است. اطلاعات و منحنی آورده‌شده در شکل ۷ از [۷] استخراج شده‌اند.

شکل ۵: تصاویر موجود در ۴ کلاس مختلف از پایگاه داده FERET [۲۲]



شکل ۶: تصاویر یکی از کلاس‌ها: (الف) تصاویر قبل از پیش‌پردازش، (ب) تصاویر حاصل از پیش‌پردازش [۷]



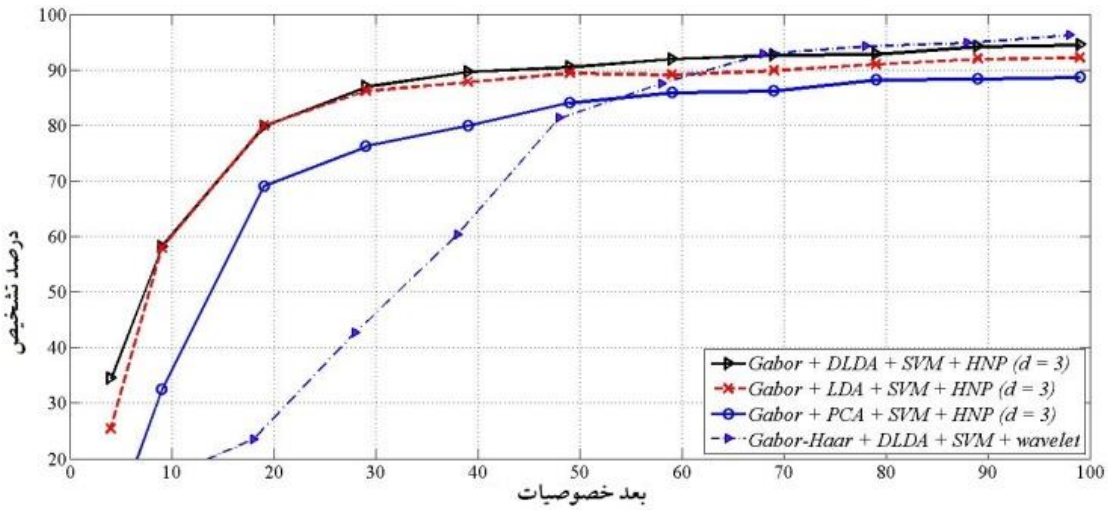
شکل ۷: نمودار مقایسه‌ای روش پیشنهادی برای مقایسه تأثیر تبدیل گابور-هار

همان‌طور که در شکل نیز دیده می‌شود؛ روش پیشنهادی، زمانی که بخشی از اطلاعات حذف می‌شود و بعد خصوصیات بیش از پیش کاهش می‌یابد؛ دارای دقت بسیار کمی است و به‌صرفه نمی‌باشد. اما وقتی حداقل ۷۰ درصد از اطلاعات حفظ می‌شود، نتیجه به‌شکل قابل توجهی بهبود می‌یابد. در جدول ۱ نتایج آورده‌شده در شکل ۷ با بیشترین بعد بردار خصوصیات به کار گرفته‌شده دیده می‌شود.

در شکل ۸ نمودارها برای نشان دادن تأثیر روش DLDA در برابر دیگر روش‌های موجود است. همچنین، در جدول ۲ داده‌های میانگین روش‌های مختلف با الگوریتم‌های DLDA، LDA، PCA به همراه روش پیشنهادی در این مقاله آورده شده است. در شکل ۹ نیز روش‌های کلاسه‌بندی مختلف با این روش مورد مقایسه قرار گرفته‌اند.

جدول ۱: درصد بازشناسی میانگین برای روش‌های بازشناسی چهره بر پایه بردار مستقیم حاصل از پیکسل‌های تصویر و بردار خصوصیات گابور همراه با زیرنمونه‌برداری و بردار خصوصیات گابور همراه با موجک هار

روش	درصد بازشناسی (٪)
تصویر مستقیم	۷۴/۵
گابور	۹۴/۵
گابور-هار	۹۶



شکل ۸: نمودار مقایسه‌ای روش‌های PCA و LDA و DLDA

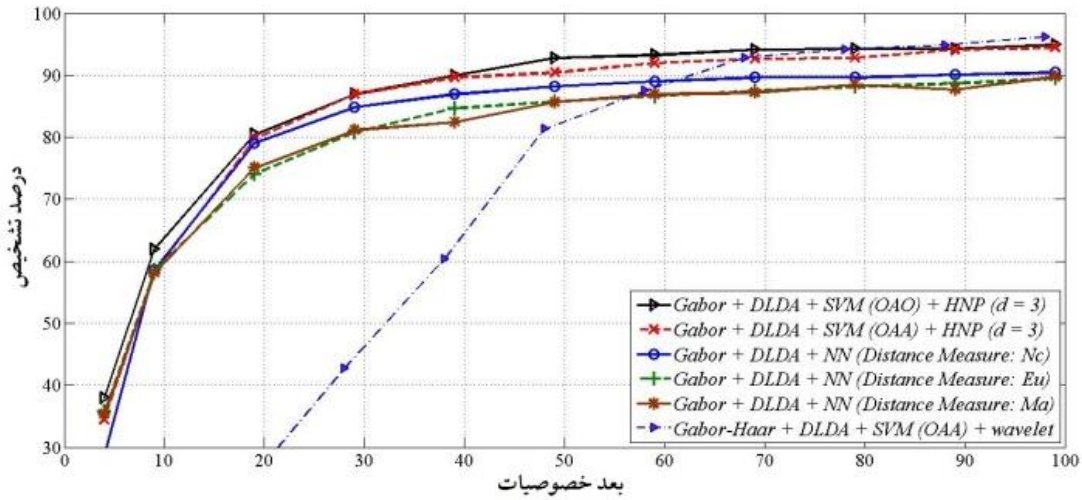
جدول ۲: درصد بازشناسی میانگین با روش‌های PCA، LDA، DLDA ارائه‌شده در [۷] و روش ارائه‌شده در این مقاله

روش	درصد بازشناسی (٪)
روش PCA	۸۸/۶۷
روش LDA	۹۲/۱۷
روش DLDA	۹۴/۵
روش پیشنهادی	۹۶

در شکل ۹، دو روش SVM و NN که همان روش نزدیک‌ترین همسایگی تصویر (همان داده و خصوصیات تصویر) مورد مقایسه قرار گرفته‌اند که نمودار مربوط به سه نوع همسایه‌بندی و تعریف فاصله آورده شده است. درصد بازشناسی میانگین این روش‌ها مربوط به بعد کامل خصوصیات در جدول ۳ آمده است. (برای مطالعه بیشتر در مبحث بازشناسی با نزدیک‌ترین همسایگی مراجعه شود به [۲۱،۶،۵].)

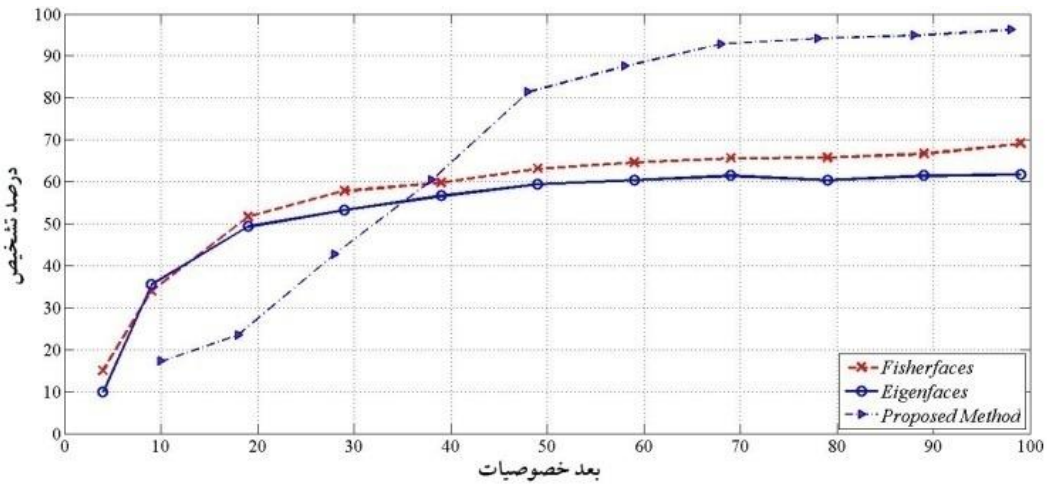
جدول ۳: درصد بازشناسی میانگین با روش‌های کلاسه‌بندی مختلف

روش	درصد بازشناسی (٪)
نزدیک‌ترین همسایگی با تابع فاصله Eu [۷]	۸۹/۳۳
نزدیک‌ترین همسایگی با تابع فاصله Ma [۷]	۸۹/۶۷
نزدیک‌ترین همسایگی با تابع فاصله Nc [۷]	۹۰/۳۳
روش SVM یک-به-کل [۷]	۹۴/۵
روش SVM یک-به-یک [۷]	۹۵
روش ارائه‌شده در این مقاله	۹۶



شکل ۹: نمودار مقایسه‌ای روش SVM و نزدیک‌ترین همسایگی

در شکل ۱۰ نمودارهای درصد بازشناسی روش‌های کلاسیک eigenface و fisherface آورده شده‌اند و همان‌طور که در نمودار نیز آشکار است؛ روش پیشنهادی در این مقاله در مقایسه با این روش‌ها به بعد خصوصیات تصویر حساس می‌باشد و با افزایش خصوصیات حفظ‌شده از تصاویر، درصد بازشناسی به‌طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد.



شکل ۱۰: نمودار مقایسه روش‌های بازشناسی چهره eigenface و fisherface و روش پیشنهادی

در جدول ۴، نتایج مقایسه‌ای بین روش‌های eigenface و fisherface و روش پیشنهادی در این مقاله ارائه شده‌اند.

جدول ۴: نتایج روش‌های eigenface، fisherface و روش ارائه‌شده

روش	درصد بازشناسی (٪)
روش eigenface	۶۱/۸۳
روش fisherface	۶۶/۱۷
روش پیشنهادی	۹۶

در ادامه، نتایج حاصل از اعمال روش پیشنهادی به روی پایگاه داده Yale [۲۳] و مقایسه آن با روش‌های فیلترگذاری یک‌ریخت در حوزه مکانی (HFSD) و فیلترگذاری یک‌ریخت در حوزه فرکانس (HFFreq) [۲] آمده است. جدول ۵ به مقایسه نتایج اعمال روش پیشنهادی با روش‌های اشاره‌شده می‌پردازد. این نتایج از [۲] برگرفته شده‌اند.

جدول ۵: نتایج روش‌ها HFSD و HFFreq [۲] و روش پیشنهادی بر روی پایگاه داده Yale

روش	درصد بازشناسی (٪)
روش HFFreq	۹۳/۸۵۳
روش HFSD	۹۷/۱۸۷
روش پیشنهادی	۹۸/۰۲۵

با توجه به نتایج ارائه‌شده در این بخش، درصد بازشناسی روش ارائه‌شده در این مقاله در مقایسه با روش‌های کلاسیک موجود به‌صورت قابل توجهی بهبود یافته و در مقایسه با روش ارائه‌شده در [۷] نیز افزایش بازشناسی به همراه کاهش حجم اطلاعات و بهینه‌سازی روش را در بر داشته است.

۵- جمع‌بندی

در این مقاله، روشی بر پایه آنالیز تفکیک خطی مستقیم با موجک‌های گابور و هار و کلاسه‌بندی بر اساس روش SVM ارائه شده است که با توجه به نتایج به‌دست‌آمده و بیان‌شده در بخش نتایج عددی و مقایسه انجام‌شده می‌توان تأثیر تغییرات اعمال‌شده به روی روش‌های قبلی و افزایش دقت و سرعت بازشناسی را دید. با آزمایش این روش بر روی پایگاه داده‌های FERET درصد بازشناسی ۹۶ درصد به‌دست آمده است که درصد نسبتاً خوب و قابل قبولی است. اما با توجه به اهمیت این موضوع، همچنان جای کار در این زمینه وجود دارد و با افزایش دقت و سرعت می‌توان به روش‌های بهتری دست یافت. همچنین در این مقاله از تغییرات زاویه تصاویر استفاده شده است و تغییرات سطح روشنایی و زاویه تابش روشنایی مدنظر گرفته نشده است و با در نظر گرفتن این تغییرات و استفاده از ابزار بیان‌شده در این مقاله و دیگر ابزارهای موجود در این زمینه، می‌توان این روش را بیشتر توسعه داد که نیازهای دیگری را رفع کند.

سپاسگزاری

این مقاله، مستخرج از گزارش نهایی طرح پژوهشی به همین نام با پشتیبانی مالی معاونت پژوهشی دانشگاه تبریز می باشد. بدین‌وسیله از معاونت پژوهشی دانشگاه تبریز به‌خاطر این پشتیبانی، تقدیر و تشکر می‌شود.

مراجع

[1] M. Verma, B. Raman, "Center symmetric local binary co-occurrence pattern for texture, face and bio-medical image retrieval", *J. Vis. Commun. Image R.*, vol. 32, pp. 224–236, 2015.

[2] H. Shahamat, A. A. Pouyan, "Face recognition under large illumination variations using homomorphic filtering in spatial domain", *J. Vis. Commun. Image R.*, vol. 25, pp. 970–977, 2014.

[۳] ح. صادقی، ف. آیت‌اللهی، ا. اسدالله راعی، «شناسایی حالت چهره با استفاده از نرمالیزاسیون هندسی و تبدیل موجک مختلط Dual-Tree»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۵، شماره ۳، صفحات ۷۹-۸۷، ۱۳۹۴.

[۴] س. شفیع‌پور یوردشاهی، م. ه. سیدعربی، ع. آقاگل‌زاده، «شناسایی چهره بر اساس ظاهر در رشته‌های ویدئویی»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۵، شماره ۲، صفحات ۷۵-۸۳، ۱۳۹۴.

[5] M. Turk, A. Pentland, "Eigenfaces for recognition", *J. Cogn. Neurosci*., vol. 3, no. 1, pp. 71-86, 1991.

[6] P. N. Belhumeur, J. P. Hespanha, D. J. Kriegman, "Eigenfaces vs. fisherfaces: recognition using class specific linear projection", *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell*., vol. 19, no. 7, pp. 711-720, 2002.

[7] S. Meshgini, A. Aghagolzadeh, H. Seyedarabi, "Face recognition using Gabor-based direct linear discriminant analysis and support vector machine", *Computers and Electrical Engineering*, vol. 39, no. 3, pp. 727-745, 2013.

[۸] ط. اکبرپور، س. دانشور، «افزایش کیفیت ادغام تصاویر MRI و PET با استفاده از ترکیب موجک گابور و مدل شبکیه»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۵، شماره ۴، صفحات ۲۳-۳۵، ۱۳۹۴.

[۹] ح. حیدری، ع. چاله‌چاله، «استفاده از الگوریتم بهبودیافته دسته ذرات به‌منظور تشخیص هویت افراد به‌کمک عنبیه»، *مجله مهندسی برق دانشگاه تبریز*، جلد ۴۷، شماره ۳، صفحات ۹۶۵-۹۷۶، ۱۳۹۶.

[10] D. Karimi, K. Rangzan, G. Akbarizadeh, M. Kabolizadeh, "Combined algorithm for improvement of fused radar and optical data classification accuracy", *Journal of Electronic Imaging*, vol. 26, no. 1, pp. 1-10, 2017.

[11] D. Karimi, G. Akbarizadeh, K. Rangzan, M. Kabolizade, "Effective supervised multiple-feature learning for fused radar and optical data classification", *IET Radar, Sonar & Navigation*, vol. 11, no. 5, pp. 768-777, 2017.

[12] W. Yu, L. Gan, S. Yang, Y. Ding, P. Jiang, J. Wang, S. Li, "An improved LBP algorithm for texture and face classification", *Signal, Image and Video Processing*, vol. 8, no. 1, pp. 155-161, 2014.

[13] Y. Peng, S. Wang, X. Long, B. L. Lu, "Discriminative graph regularized extreme learning machine and its application to face recognition", *Neurocomputing*, vol. 149, pp. 340–353, 2015.

[14] P. J. Van Fleet, *Discrete Wavelet Transformation*, Wiley Interscience, 2007.

[15] A. Haar, "Zur theorie der orthogonalen funktionensysteme", *Mathematische Annalen*, vol. 69, no. 3, pp. 331-371, 1910.

[16] H. Yu, J. Yang, "A direct LDA algorithm for high-dimensional data - with application to face recognition", *Pattern Recogn.*, vol. 34, no. 10, pp. 2067–2070, 2001.

[17] J. Lu, K. N. Plataniotis, A. N. Venetsanopoulos, "Face recognition using kernel direct discriminant analysis algorithms", *IEEE Trans. Neural Netw.*, vol. 14, no. 1, pp. 117-126, 2003.

[18] J. Yang, A. F. Frangi, J. Y. Yang, D. Zhang, Z. Jin, "KPCA plus LDA: a complete kernel Fisher discriminant framework for feature extraction and recognition", *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.*, vol. 27, no. 2, pp. 230–244, 2005.

[19] S. Abe, *Support Vector Machines for Pattern Classification*, second ed, London, Springer, 2010.

[20] C. W. Hsu, C. J. Lin, "A comparison of methods for multiclass support vector machines", *IEEE Trans. Neural Netw*., vol. 13, no. 2, pp. 415–425, 2002.

[21] C. J. Liu, H. Wechsler, "Gabor feature based classification using the enhanced Fisher linear discriminant model for face recognition", *IEEE Trans. Image Process.*, vol. 11, no. 4, pp. 467–476, 2002.

[22] P. J. Phillips, H. Moon, S. A. Rizvi, P. J. Rauss. "The FERET evaluation methodology for face-recognition algorithms", *IEEE Trans. Pattern Ana. Mach. Intell.*, vol. 22, no. 10, pp. 1090–1104, 2000.

[23] K. C. Lee, J. Ho, D. J. Kriegman, "Acquiring linear subspaces for face recognition under variable lighting", *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell*., vol. 27, pp. 684–698, 2005.

زیرنویس‌ها

[1]Principal Component Analysis (PCA)

[2]Linear Discriminant Analysis (LDA)

[3]Direct Linear Discriminant Analysis (DLDA)

[4]Support Vector Machine (SVM)

[5]Simple Polynomial (SP)