

کنترل بهینه در برنامه ریزی مسیر بازوهای مکانیکی افزونه با رابط نهایی انعطاف پذیر بر اساس حرکت صلب در مساله تعقیب مسیر

دانشجوی دکتری، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران
 استادیار، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران
 استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

سیدمحمدرضا فریطوس
 هادی همایی*
 شهرام هادیان جزی

چکیده

این مقاله روش کنترل بهینه حلقه باز را برای طراحی مسیر بهینه بازوهای مکانیکی با رابط نهایی انعطاف پذیر و پایه ثابت در مساله تعقیب مسیر توسعه خواهد داد. در این روش بدون در نظر گرفتن انعطاف پذیری، فضای جواب مفاصل برای حرکت صلب بازوی مکانیکی بدست می آید. با انتخاب مناسب بردار حالت، تابع هدف و قیدهای سیستم به فرم کلاسیک مساله بهینه سازی تبدیل می گردند. با استفاده از اصل کمینگی پونتریاگین، معادلات به مساله مقدار مرزی دو نقطه ای تبدیل می شود. جهت تصدیق روش ارائه شده، شبیه سازی برای بازوی مکانیکی انعطاف پذیر با سه رابط انجام شده است. نتایج به دست آمده و بررسی های صورت گرفته، کارآمدی روش ارائه شده را نشان می دهند.

واژه های کلیدی: بازوی مکانیکی افزونه، رابط انعطاف پذیر، تعقیب مسیر، کنترل بهینه.

Optimal Control in Path Planning of Redundant Manipulators with the Last Flexible Arm based on Rigid Motion in Trajectory Tracking

S. M. R. Faritus
 H. Homaei
 Sh. Hadian Jazi

Faculty of engineering, University of Shahrekord, Shahrekord, Iran
 Faculty of engineering, University of Shahrekord, Shahrekord, Shahrekord, Iran
 Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

Abstract

This paper develops open-loop optimal control approach for path planning of redundant manipulators with the last flexible arm and fixed base in trajectory tracking. In this method, regardless of flexibility, the space of joints answer is obtained for the rigid motion of manipulator. By proper selection of state vector, the cost function and system constraints are turned to classic form of optimization problem. By using Pontryagin's minimum principle, the obtained equations are changed into two point boundary value problem. To verify the proposed method, simulation for three-link flexible manipulator is conducted. The results and surveys show the effectiveness of the proposed methods.

Keywords: Redundant Manipulator, Flexible Arm, Trajectory Tracking, Optimal Control.

۱- مقدمه

ارتعاش پسماند خواهیم داشت [۷]. در بازوی مکانیکی انعطاف پذیر، کاهش ارتعاش بدون از دست دادن سرعت و دقت پاسخ و افزایش ظرفیت حمل بار دینامیکی، به عنوان یک مساله چالشی مهم در سطح بین المللی شناخته می شود [۸].

تعدادی از محققین از روش های غیر مستقیم در طراحی و بهینه کردن مسیر استفاده کردند. ویلسون و همکاران، کنترل بهینه حلقه باز زمانی را برای فرمولبندی طراحی مسیر بازوهای مکانیکی انعطاف پذیر بکار گرفتند و آنرا با استفاده از برنامه ریزی دینامیکی حل نمودند [۹]. کنترل بهینه می تواند بصورت حلقه باز و یا حلقه بسته بکار گرفته شود. افزایش توانایی سیستم برای باز تولید ورودی به صورت مناسب، کاهش حساسیت خروجی نسبت به ورودی، کاهش اثرات عوامل غیر خطی و اختلالات، از مهمترین ویژگی های وجود یک حلقه پشخورد در سیستم کنترلی هستند. در سیستم های مدار باز دقت سیستم به کالیبره کردن آن بستگی دارد. عمل کنترل حلقه باز، در شرایطی که رابطه بین ورودی و خروجی سیستم مشخص بوده و سیگنال های اختلال گر نیز وجود نداشته باشند، میتواند مورد استفاده قرار گیرد. این روش

می توان جهت کاهش ارتعاش و افزایش دقت در بازوهای مکانیکی از مواد سخت و قطعات حجیم استفاده کرد. پیامد آن علاوه بر بالا رفتن مصرف انرژی و هزینه های ساخت، افزایش اینرسی و کاهش سرعت در هنگام عکس العمل سریع خواهد بود. استفاده از رابط های سبکتر ضمن کاهش مصرف انرژی، سرعت و ایمنی عملیات را بالا می برد. از دیگر مزایای آن می توان به استفاده از عملگرهای کوچکتر، مانور بهتر و حمل و نقل آسانتر اشاره نمود. همچنین از نقطه نظر تجاری، بازوی های مکانیکی انعطاف پذیر می توانند به سرعت با نوسانات طراحی محصول سازگار شوند [۱]. از کاربردهای مهم بازوهای مکانیکی ماهر انعطاف پذیر می توان به استفاده آنها در پزشکی مثل پروتوتون تراپی، عملیات پلیسه گیری، صیقل کاری، سنگ زنی، رنگ زنی و شناخت الگو اشاره کرد [۲-۶]. با باریک و سبک شدن رابط ها، مساله انعطاف پذیری این اعضاء مطرح می گردد. در این شرایط به علت ارتعاش اعضای انعطاف پذیر، کنترل نقطه انتهایی مشکل خواهد بود. این ارتعاش وقتی پنجه به نقطه هدف می رسد باقیمانده و در سیستم

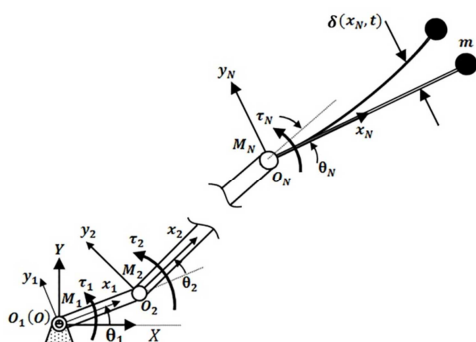
* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: hadii.homaei@gmail.com

کاهش حرکت الاستیک پایه ریزی خواهند شد. نظر به رفتار بازوهای مکانیکی انعطاف پذیر که ترکیبی از حرکت صلب و حرکت ارتعاشی است [۲۴]، در اولویت اول بدنال تعقیب مسیر پنجه بازوی مکانیکی صلب بوده و در میان پاسخ ها و فضای جوابی که برای حرکت صلب بازوی مکانیکی بعلت افزونگی درجات آزادی در مساله تعقیب مسیر وجود دارد، بدنال پاسخی هستیم که ارتعاشات سیستم را حداقل نماید. جهت جلوگیری از اشباع عملگرها، با انتخاب مناسب شاخص بهینه سازی به حداقل کردن مصرف انرژی در عملگرها و سیگنال های کنترل می پردازیم. با توجه به اینکه بهینه سازی فراگیر علیرغم محاسبات پیچیده، روشی دقیق و کارآمد است، در این تحقیق از بهینه سازی فراگیر استفاده شده است. در بهینه سازی فراگیر، مسیر بهینه بازوهای مکانیکی با کمینه کردن یک تابع هدف در کل مسیر و با در نظر گرفتن قیدهای سیستم، بدست می آید. قیدهای سیستم در این شرایط شامل معادلات دینامیکی و سینماتیکی و قیدهای نامساوی هستند. با انتخاب مناسب بردار حالت و سیگنال کنترل، ابتدا گشتاور و شتاب های مختصات تعمیم یافته بر حسب این دو بردار تعیین می شوند. سپس تابع هدف و قیدهای سیستم به شکل یک مساله کنترل بهینه حلقه باز استاندارد در می آیند. برای حل معادلات از روشی مبتنی بر اصل کمینگی پونتریاگین استفاده شده است. این روش جزو روشهای غیر مستقیم محسوب می شود و علت انتخاب آن، دستیابی به جواب های دقیق و قابل اطمینان در بازوی مکانیکی انعطاف پذیر افزونه است که سیستمی با درجات آزادی و غیر خطی های زیاد می باشد.

در بخش ۲ با استفاده از انرژی سیستم و با کمک معادلات لاگرانژ و روش مود فرضی، معادلات حرکت دینامیکی بازوی مکانیکی استخراج می گردد. در بخش ۳ فرمولبندی مساله بهینه سازی انجام گرفته و در نهایت معادلات به شکل استاندارد آن در آمده است. در بخش ۴ روش حل بر اساس اصل کمینگی پونتریاگین ارایه شده و شرایط مرزی مساله بهینه سازی مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. بخش ۵ شبیه سازی برای بازوی مکانیکی با سه رابط انجام گردیده و بخش ۶ به نتیجه گیری اختصاص داده شده است.

۲- معادلات حاکم

شکل ۱ بازوی مکانیکی شامل N رابط که رابط انتهایی آن انعطاف پذیر است و همراه بار را نشان می دهد.



شکل ۱- بازوی مکانیکی انعطاف پذیر با بازوی انتهایی انعطاف پذیر

کنترلی بعلت داشتن طبیعت خارج از خطی^۱ قابلیت حل مواردی مثل غیر خطی های و قیدهای زیاد در سیستم را دارد. لذا معمولا در تحلیل سیستم های غیر خطی مثل بهینه سازی مسیر در انواع بازوهای مکانیکی استفاده می شود [۱۱،۱۰]. در مراجع [۱۳،۱۲] از روش کنترل حلقه باز در بهینه سازی مسیر بازوهای مکانیکی در حرکت نقطه به نقطه استفاده شده است. اصل کمینگی پونتریاگین به عنوان یکی از روش های کنترل بهینه حلقه باز، برای تولید مسیر در بازوهای مکانیکی انعطاف پذیر با پایه متحرک در کارهای [۱۶-۱۴] بکار گرفته شدند. شوکلا و همکاران حساب تغییرات را بطور مستقیم در طراحی مسیر بهینه در بازوهای مکانیکی افزونه سری در فضاهای کاری مقید و دارای مانع به کار گرفتند [۱۷]. آنها با اصلاح شرایط مرزی در ابتدا و انتهای مسیر، موفق به یافتن نقطه شروع و چهارچوب مناسب تر شدند. لو و همکاران، روشی مبتنی بر ترکیب برنامه ریزی مسیر حلقه باز و کنترل پسخوردی را توسعه دادند. در روش آنها، زاویه مفاصل بصورت توابع چند جمله ای و انرژی ارتعاشی رابط انعطاف پذیر به عنوان تابع هدف تعریف می گردید [۱۸]. آنها از الگوریتم ژنتیک برای حل مساله بهینه سازی و تعیین مسیر بهینه استفاده کردند. روش برنامه ریزی دینامیکی بعنوان یکی از روشهای بهینه سازی در طراحی مسیر بهینه بازوهای مکانیکی، به کار گرفته شده است. استیلمن و همکاران، روش برنامه ریزی دینامیکی را با کمک یک الگوریتم برنامه ریزی مسیر بهینه زمانی پیشنهاد کردند [۱۹]. مسیر بصورت یک فضای مفصلی با یک پارامتر در نظر گرفته شده بود. با داخل کردن این پارامتر به معادلات دینامیکی، قیدهای تعریف شده روی گشتاورهای ورودی به مشتق دوم این پارامتر تبدیل می شدند. باکرو همکاران از روشی بر اساس فرایند تصمیم گیری مارکوف و برنامه ریزی دینامیکی در طراحی مسیر استفاده کردند [۲۰]. کورایم و همکاران مسیر بهینه را برای بازوهای مکانیکی صلب در حرکت نقطه به نقطه و تعقیب مسیر با استفاده از روش برنامه ریزی دینامیکی انجام دادند [۲۱]. آنها با استفاده از روشی مبتنی بر SQP^۲ موفق به افزایش سرعت همگرایی شدند. در سال های اخیر الگوریتم های تکاملی در طراحی مسیر بازوهای مکانیکی توسعه یافته است. آبه و کومورو، شبکه عصبی با الگوریتم یادگیری لانه زنبور^۳ را برای حداقل کردن ارتعاش پسماند و مصرف انرژی و تابع الحجه و قنبرزاده، الگوریتم رقابت امپریالیستی^۴ را برای حداقل کردن خطا بکار گرفتند [۲۳،۲۲].

این مقاله روش کنترل بهینه حلقه باز را برای طراحی مسیر بهینه بازوهای مکانیکی با پایه ثابت و رابط انعطاف پذیر انتهایی، در مساله تعقیب مسیر بکار خواهد گرفت. در کارهای انجام شده در این حوزه، بهینه کردن خطای تعقیب مسیر همراه با ارتعاشات اجزای انعطاف پذیر در نظر گرفته می شود، لذا ارتعاش سیستم به عنوان کمیتی مستقل لحاظ نمی گردد. در این شرایط، با وجود اینکه مقدار ارتعاش در معادلات بهینه سازی منظور می شود، تعقیب مسیر با لرزش همراه است. در این تحقیق ضمن توسعه روش کنترل بهینه حلقه باز در بازوی مکانیکی انعطاف پذیر با پایه ثابت، معادلات بر اساس حرکت صلب و

^۱off-line

^۲Sequential Quadratic Programming

^۳Particle Swarm Optimization

^۴Imperialist Competitive Algorithm

مشقتات زمانی آنها و جایگذاری در روابط (۴) و (۵)، معادلات حرکت استخراج می‌شود.

با مرتب کردن معادلات به شکل ماتریسی، $(N + M) \mathbf{n}$ معادلات دینامیکی بازوی مکانیکی بصورت ذیل خواهد شد:

$$\begin{bmatrix} C_{\theta\theta}(\theta, \phi) & C_{\theta\phi}(\theta, \phi) \\ C_{\theta\phi}^T(\theta, \phi) & C_{\phi\phi}(\theta, \phi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} + E(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \begin{bmatrix} \tau \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$E = D(\theta, \phi) \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + K(\theta, \phi) \begin{bmatrix} \theta \\ \phi \end{bmatrix} + F(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) \quad (7)$$

ماتریس اینرسی $C \in \mathcal{R}^{n \times n}$ متقارن است و شامل ماتریس های $C_{\theta\theta} \in \mathcal{R}^{N \times N}$ ، $C_{\theta\phi} \in \mathcal{R}^{N \times M}$ و $C_{\phi\phi} \in \mathcal{R}^{M \times M}$ می‌باشد. همچنین $D \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ماتریس میرایی، $K \in \mathcal{R}^{n \times n}$ ماتریس سختی و $F \in \mathcal{R}^n$ بردار مجموع نیروهای غیر خطی مثل کریولیس، جاذبه و گریز از مرکز است. $\ddot{\theta}$ ، $\ddot{\phi}$ ، θ ، ϕ به ترتیب بردارهای زاویه، سرعت و شتاب مفاصل و $\tau \in \mathcal{R}^N$ بردار گشتاور موتورها می‌باشد. علامت T بعنوان اندیس بالا، نشانه ماتریس ترانپوز است.

۳- فرمول بندی بهینه سازی در مساله تعقیب مسیر

حرکت بازوی مکانیکی به دو صورت نقطه به نقطه یا حرکت بر روی مسیری که از قبل مشخص شده است انجام می‌گردد. در این تحقیق حالت دوم یعنی حرکت بر روی مسیری مشخص مورد نظر می‌باشد. لذا یکی از قیدهای سیستم، قید سینماتیکی یا حرکت پنجه بازوی مکانیکی بر روی چنین مسیری است. در بازوی مکانیکی انعطاف پذیر، مسیر پنجه تابعی از زاویه مفاصل و انعطاف پذیری است. مابقی قیدها، معادلات دینامیکی حاکم بر سیستم یعنی مجموعه معادلات رابطه (۶) می‌باشند. بعلت وجود درجه آزادی اضافی در بازوی مکانیکی انعطاف پذیر افزونه، می‌توان ضمن حرکت بر روی مسیر مشخص شده، شاخص مناسبی نیز تعریف و در طول حرکت کمینه کرد.

دو روش بهینه سازی محلی و سراسری وجود دارد که در این مقاله روش دوم بکار رفته است. بهینه سازی سراسری یا فراگیر، تابع هزینه را در کل مسیر حرکت کمینه می‌کند و بصورت یک شاخص انتگرالی در طول مسیر تعریف می‌شود. روشی که در این بخش برای فرمولبندی مسیر بهینه مورد استفاده قرار می‌گیرد بر اساس روش کنترل بهینه حلقه باز است. استفاده از بهینه سازی فراگیر به صورت خارج از خط و حلقه باز علی‌رغم پیچیدگی های محاسباتی در سیستم هایی با درجات آزادی بالا، غیر خطی های زیاد و متغیر و قیدهای مختلف، روشی کارآمد و قدرتمند است [۲۷]. لذا کنترل بهینه می‌تواند کاندید مناسبی در کنترل بازوی مکانیکی انعطاف پذیر باشد. با این روش می‌توان اهداف مختلفی را هدف قرار داده و برآورده نمود.

در این بخش ابتدا تابع هدف را بصورت سرتاسری با تعریف یک شاخص انتگرالی که انتگرالده آن تابعی از متغیرهای حالت سیستم است، تعریف می‌کنیم. قیدهای نامساوی سیستم که از اشباع عملگرها، سرعت مفاصل و یا عبور از مقدار مجاز خطا ناشی می‌شود، در تابع هدف لحاظ می‌شود. سپس با کمک معادلات سینماتیکی حرکت و دینامیک حاکم بر سیستم، مشتق بردار متغیرهای حالت سیستم و انتگرالده بر حسب بردار حالت و یک متغیر جدید که در اصطلاح به متغیر کنترلی معروف است، بدست می‌آید. این حالت که حالت استاندارد کنترل بهینه است، با کمک اصل پونتریاگین به دستگاه

M_i ، τ_i و θ_i به ترتیب هاب، گشتاور هاب و زاویه نسبی مفصل بازوی i ام می‌باشند. XOY چهارچوب مختصات اینرسی و $X_iO_iY_i$ چهارچوب مختصاتی متحرک ایست که مرکز آن هاب بازوی i ام است. تیر انعطاف پذیر بصورت تیر اولر-برنولی در نظر گرفته می‌شود، به این معنی که از تاثیر تغییر شکل برشی و اینرسی چرخشی صرف نظر می‌گردد. بعلت وجود انعطاف پذیری، ابعاد سیستم نا محدود بوده لذا روش مود فرضی روشی مناسب جهت گسسته سازی خواهد بود [۲۵]. در این تحقیق از روش مود فرضی جهت تخمین تغییر شکل الاستیک تیر استفاده شده است. در این روش، تغییر شکل خمشی بازوی انعطاف پذیر بصورت ترکیب خطی حاصل ضرب توابع مودی و توابع زمانی در نظر گرفته می‌شود.

$$\delta(x_N, t) = \sum_{j=1}^M \psi_j(x_N) \phi_j(t) \quad (1)$$

$\delta(x_N, t)$ تغییر شکل خمشی تیر انعطاف پذیر در فاصله x_N از مفصل N ام در دستگاه مختصاتی $X_N O_N Y_N$ و لحظه t است. ψ_j توابع مودی، ϕ_j توابع تعمیم یافته وابسته-زمانی و M تعداد مودهای ارتعاشی می‌باشند. در مرجع [۲۶] طریقه محاسبه توابع مودی و فرکانس‌های طبیعی تیر انعطاف‌پذیر ارایه گردیده است. معادلات دینامیکی با محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم و استفاده از روش لاگرانژ انجام خواهد شد. انرژی جنبشی بازوی مکانیکی، برابر با مجموع انرژی جنبشی رابط ها، موتورها و بار است. لذا داریم:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \int_0^{L_i} \rho_i A_i \dot{R}_i^T \dot{R}_i dx_i + \frac{1}{2} m \dot{R}_m^T \dot{R}_m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (m_{M,i} \dot{R}_{M,i}^T \dot{R}_{M,i} + I_{M,i} \omega_{M,i}^2) \quad (2)$$

$\omega_{M,i}$ و $R_{M,i}$ به ترتیب بردارهای مکان و سرعت زاویه‌ای مرکز موتورهای مفصل رابط i ام و $m_{M,i}$ و $I_{M,i}$ جرم و ممان اینرسی آنها می‌باشد. همچنین R_m بردار مکان بار و R_i بردار مکان نقطه‌ای عمومی روی رابط انعطاف پذیر می‌باشد. ρ_i و A_i به ترتیب چگالی و سطح مقطع رابط i ام می‌باشند. انرژی پتانسیل بازوی مکانیکی از مجموع انرژی پتانسیل گرانشی و انرژی حاصل از تغییر شکل الاستیک در رابط انعطاف پذیر حاصل می‌گردد. این انرژی بصورت رابطه (۳) بدست می‌آید:

$$P = \frac{1}{2} E_N I_N \int_0^{L_N} \left[\frac{\partial^2 \delta(s, t)}{\partial s^2} \right]^2 ds + \sum_{i=1}^N \int_0^{L_i} \rho_i A_i y_i g dx_i \quad (3)$$

که در آن E_N ضریب سختی رابط انعطاف‌پذیر است. با جایگذاری رابطه (۱) در (۳) مقدار انرژی پتانسیل محاسبه می‌گردد. کار مجازی گشتاور τ_i برابر است با $\delta W_i = \tau_i \delta \theta_i$ ، می‌توان معادلات حرکت را با استفاده از روش لاگرانژ بصورت ذیل بدست آورد:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} = \tau_i ; i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_j} = 0 ; j = 1, 2, \dots, M \quad (5)$$

که $\mathcal{L} = T - P$ لاگرانژی و θ_i و ϕ_j مختصات تعمیم یافته، می‌باشند. با محاسبه مشتق لاگرانژی نسبت به مختصات تعمیم یافته و

ابعاد بردار ستونی معادله (۱۶) برابر با $2n$ است. از طرفی با مشتق گیری از رابطه (۱۱) داریم:

$$\zeta(\theta)\dot{\theta} = \dot{\sigma}_d(t) \quad (17)$$

$$\dot{\sigma}_d(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_d(t) \\ \dot{y}_d(t) \end{bmatrix} \quad (18)$$

اگر Z ابعاد فضای کاری پنجه باشد، ماتریس جاکوبی $\zeta \in \mathcal{R}^{Z \times N}$ بصورت ذیل بدست می آید:

$$\zeta_{ij} = \frac{\partial \sigma_i}{\partial \theta_j} \quad (19)$$

افزودگی درجات آزادی بازوی مکانیکی $r = N - Z$ می باشد. فضای پوچ ζ پیکربندی های مختلفی از بازوی مکانیکی را شامل می شود که به یک وضعیت مشخص از پنجه منجر می گردد. با استفاده از این خاصیت می توان از بین حالت های مختلف، حالتی را که یک مشخصه از سیستم را بهینه می کند، انتخاب کرد.

با مشتق گیری از رابطه (۱۷) داریم:

$$\zeta(\theta)\ddot{\theta} = \ddot{\sigma}_d(t) - \dot{\zeta}(\theta)\dot{\theta} \quad (20)$$

بردار سیگنال کنترل u و بردار کمکی V را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$u = [\ddot{\theta}_1 \quad \ddot{\theta}_2 \quad \dots \quad \ddot{\theta}_r]^T \quad (21)$$

$$V = [\ddot{\theta}_{r+1} \quad \ddot{\theta}_{r+2} \quad \dots \quad \ddot{\theta}_N]^T \quad (22)$$

معادله (۲۰) را با روابط (۲۱) و (۲۲) بازنویسی می کنیم.

$$[\zeta_1 \quad \zeta_2] \begin{bmatrix} u \\ V \end{bmatrix} = \ddot{\sigma}_d(t) - \dot{\zeta}(\theta)\dot{\theta} \quad (23)$$

بنابر این بردار شتاب زاویه ای مفاصل بازوی مکانیکی $\ddot{\theta}$ را بصورت زیر می توان نوشت:

$$\ddot{\theta} = \begin{bmatrix} \zeta_2^{-1} \{ \ddot{\sigma}_d(t) - \dot{\zeta}(\theta)\dot{\theta} - \zeta_1 u \} \\ G_1(X, u, t) \end{bmatrix} \quad (24)$$

با جایگذاری رابطه (۲۴) در (۱۰)، $\ddot{\phi}$ را بصورت ذیل بدست می آوریم:

$$\ddot{\phi} = -C_{\phi\phi}^{-1} (C_{\theta\phi}^T G_1(X, u, t) + E_{\phi}) + G_2(X, u, t) \quad (25)$$

مقدار τ با استفاده از معادله (۹)، (۲۴) و (۲۵) بصورت تابعی از u و X به دست می آید:

$$\tau = C_{\theta\theta} G_1(X, u, t) + C_{\theta\phi} G_2(X, u, t) + E_{\theta} = G_3(X, u) \quad (26)$$

روابط (۲۴) تا (۲۶) بردارهای G_1 ، G_2 و G_3 که تابعی از u و X هستند را جانشین بردارهای $\ddot{\theta}$ ، $\ddot{\phi}$ و τ می کنند. با جایگذاری رابطه (۲۶) در (۸) خواهیم داشت:

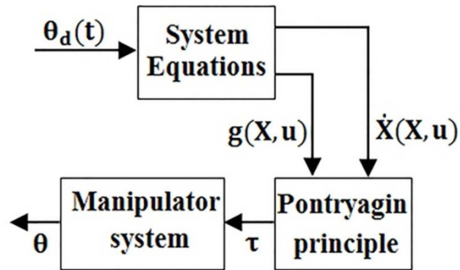
$$J = \int_{t_0}^{t_b} g(X, G_3(X, u)) dt \quad (27)$$

مقدار \dot{X} از روابط (۱۶)، (۲۴) و (۲۵) بدست می آید:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \\ G_1(X, u, t) \\ G_2(X, u, t) \end{bmatrix} = f(X, u) \quad (28)$$

معادلات (۲۷) و (۲۸) فرم استاندارد معادلات بهینه سازی می باشند. در بخش بعد به حل معادلات و شرایط مرزی مساله می پردازیم.

معادلات مرتبه اول تبدیل می شود که با حل آن گشتاورهای فرمان بدست می آید. با اعمال آنها به مفاصل ربات، مسیر حرکت که تابع متغیرهای حالت سیستم است بدست می آید. شکل ۲ نمودار بلوکی روش کنترل بهینه فوق الذکر را نشان می دهد.



شکل ۲- نمودار بلوکی کنترل بهینه حلقه باز

در شکل ۲، $\theta_d(t)$ بردار ورودی مطلوب، $g(X, u)$ انتگرالده تابع انتگرالی هدف، X بردار حالت سیستم، u متغیر کنترلی هستند. تابع هدف J را بصورت ذیل تعریف می کنیم:

$$J = \int_{t_0}^{t_b} g(\theta, \dot{\theta}, \phi, \dot{\phi}, \tau) dt \quad (8)$$

با بازنویسی رابطه (۶) میتوان قیدهای دینامیکی سیستم را بصورت ذیل بدست آورد:

$$C_{\theta\theta}(\theta, \phi)\ddot{\theta} + C_{\theta\phi}(\theta, \phi)\ddot{\phi} + E_{\theta}(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = \tau \quad (9)$$

$$C_{\theta\phi}^T(\theta, \phi)\ddot{\theta} + C_{\phi\phi}(\theta, \phi)\ddot{\phi} + E_{\phi}(\theta, \phi, \dot{\theta}, \dot{\phi}) = 0 \quad (10)$$

در این مرحله با فرض حرکت صلب ربات، قید سینماتیکی بصورت ذیل خواهد شد:

$$\sigma(\theta) = \sigma_d(t) \quad (11)$$

در این رابطه، $\sigma(\theta)$ بردار موقعیت پنجه بازوی مکانیکی و σ_d بردار مسیر مطلوب و تابعی از زمان می باشد. رابطه (۱۱) یک رابطه جبری غیر خطی است و به دلیل افزودگی درجات آزادی، جوابهای بی شماری برای زوایای مفاصل تولید خواهد کرد.

همچنین قیدهای نامساوی جهت محدود کردن سرعت و گشتاور مفاصل می تواند اعمال گردد:

$$\tau_i^- < \tau_i < \tau_i^+ \quad (12)$$

$$\dot{\theta}_i^- < \dot{\theta}_i < \dot{\theta}_i^+ \quad (13)$$

تابع هدف رابطه (۸) و معادلات دینامیکی روابط (۹) و (۱۰) به همراه قید سینماتیکی رابطه (۱۱) و قیدهای (۱۲) و (۱۳) تشکیل مساله کنترل بهینه را می دهند. قیدهای نامساوی میتواند با در نظر گرفتن جملاتی از مجذور سرعت مفاصل و گشتاورها در تابع هدف و با تنظیم ضرایب جریمه محقق گردد.

برای تبدیل معادلات به فرم استاندارد، باید این معادلات به شکل ذیل درآیند:

$$J = \int_{t_0}^{t_b} g(X, u) dt \quad (14)$$

$$\dot{X} = f(X, u, t) \quad (15)$$

برای این کار بردار حالت X را بصورت زیر تعریف می کنیم:

$$X = [\theta^T \quad \phi^T \quad \dot{\theta}^T \quad \dot{\phi}^T]^T \quad (16)$$

۴- روش حل و شرایط مرزی

دو روش مستقیم و غیر مستقیم برای حل معادلات کنترل بهینه وجود دارد. در روش مستقیم متغیرهای کنترلی و حالت، گسسته سازی شده و مساله کنترل بهینه به مساله برنامه ریزی غیر خطی مقید تبدیل می شود. سپس با در نظر گرفتن نقاط کمکی در مسیر مشخص شده، متغیر زمان از معادلات قید حذف میگردد [۲۸]. از معروف ترین روشهای مستقیم، می توان به روش های شوتینگ مستقیم و روش های با هم گذاری اشاره کرد [۲۹، ۳۰]. روشهای مستقیم تخمینی بوده و به نتایج دقیق منتج نمی گردند. این روشها اغلب زمانگیر بوده و بعلاوه وجود پارامترهای زیاد، کارایی لازم را ندارند [۹]. روشهای غیر مستقیم برای زمانی که درجات آزادی سیستم زیاد بوده و یا در بهینه سازی اهداف گوناگونی مد نظر باشد، کاندید مناسبی هستند [۳۱، ۳۲]. همچنین وقتی با مسایل پیچیده مثل تحلیل های ساختاری در مسایل کنترل بهینه مواجه هستیم، روش غیر مستقیم روشی کارآمد برای حل می باشد [۲۱].

با وجود پیچیدگی های محاسباتی و احتمال عدم همگرایی در روشهای غیر مستقیم، این روشها از جواب های نسبتا دقیق و قابل اطمینانی برخوردار هستند. معادله همیلتون-جاکوبی-بلمن و اصل کمینگی پونتریاگین دو روش شناخته شده در روشهای غیر مستقیم هستند که از حساب تغییرات برای تبدیل مساله بهینه سازی به مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل استفاده می کنند [۱۵]. در این مقاله از روشی مبتنی بر اصل کمینگی پونتریاگین جهت حل مساله کنترل بهینه استفاده شده است. در روش کمینگی پونتریاگین، مساله بهینه سازی به مجموعه ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه اول تبدیل می شود و شرایط مرزی این معادلات بصورت دو نقطه ای خواهد بود. این روش در مقایسه با دیگر تکنیکهای کنترل بهینه حلقه باز، نیازی به خطی سازی معادلات، دیفرانسیل گیری نسبت به پارامترهای مفاصل و استفاده از چند جمله ای به عنوان فرم حل، ندارد [۲۷]. اصل کمینگی پونتریاگین بیان می کند که اگر قانون کنترلی بهینه u^* که در سیستم دینامیکی رابطه (۲۸) صدق می کند، بخواهد تابع هدف رابطه (۲۷) را کمینه کند، باید معادلات همیلتون را در نقاط بهینه ارضاء نماید. با توجه به این اصل خواهیم داشت:

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} |_{x^*, u^*, \lambda^*} = 0 \quad (29)$$

$$+\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda} |_{x^*, u^*, \lambda^*} = \dot{X}^* \quad (30)$$

$$-\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X} |_{x^*, u^*, \lambda^*} = \lambda^* \quad (31)$$

جائیکه $\lambda \in \mathbb{R}^{2p}$ بردار ستونی متغیرهای شبه حالت است. همیلتونین \mathcal{H} بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathcal{H} = g + \lambda^T f \quad (32)$$

برای حل معادلات (۲۹) تا (۳۱)، مولفه های بردار u را از معادله (۲۹) استخراج کرده و در معادلات (۳۰) و (۳۱) جایگذاری می نماییم. با انجام این کار $2n$ متغیر خواهد ماند که سهم هر یک از متغیرهای بردار حالت و شبه حالت، نیمی از آن است و نیاز به همین تعداد شرط مرزی دارد. در روش پونتریاگین با کمک حساب تغییرات، شرایط مرزی بصورت ذیل بدست می آید [۳۳]:

$$\lambda^T \delta X = 0 \quad \text{در } t = t_s, t_f \quad (33)$$

رابطه (۳۳) شرایط مرزی در نقاط ابتدایی t_s و انتهایی t_f بیان می کند. با توجه به اینکه موقعیت پنجه بازوی مکانیکی در لحظه اول و آخر مشخص می باشد و نظر به مقدار افزونگی، شرایط ابتدایی و انتهایی هر یک Z شرط مرزی را تامین می نماید و در مجموع $2Z$ شرط مرزی در دو پایانه مسیر خواهیم داشت. از طرفی رابطه (۳۳) بیان می کند که در زمان های t_s و t_f ، بردار λ باید بر مجموعه معادلات قید عمود باشد. به عبارت دیگر بردار λ باید در فضای سطری ماتریس ژاکوبین قرار داشته باشد، بنابراین قرار گرفتن بردار λ در فضای ستونی ζ^T معادل است با حضور این بردار در فضای پوچ ماتریس $I_N - \zeta^T(\zeta^T)^{\#}$ معادل است با استفاده از جبر خطی می توان نوشت [۳۴]:

$$[I_N - \zeta^{\#} \zeta] \lambda = 0 \quad \text{در } t = t_0, t_f \quad (34)$$

$\zeta^{\#}$ شبه معکوس ماتریس جاکوبی است. رابطه (۳۴) دارای $n - 2n$ شرط مرزی در هریک از دو انتها است، در نتیجه مجموع شرایط مرزی $2n$ خواهد شد که برای حل معادلات (۲۹) تا (۳۱) کافی است.

۵- شبیه سازی و بررسی نتایج

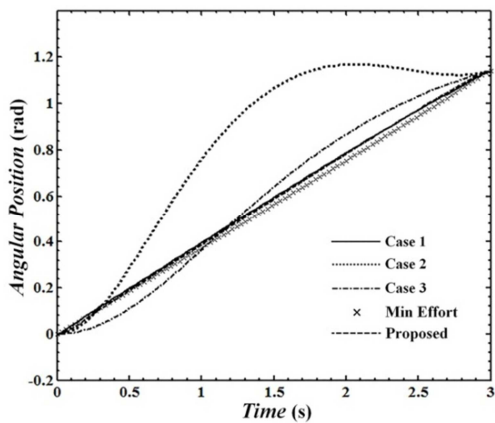
در این بخش جهت بررسی و کارآمدی روش ارائه شده، شبیه سازی انجام و نتایج مورد بحث و بررسی قرار خواهند گرفت. جهت این کار، بازوی مکانیکی با مشخصات جدول ۱ را در نظر بگیرید. بازوی مکانیکی از سه رابط ($N = 3$) تشکیل شده و فرض بر آن است که کلیه رابط ها و حرکت آنها در صفحه افقی هستند.

جدول ۱- جرم و ابعاد رابط های بازوی مکانیکی

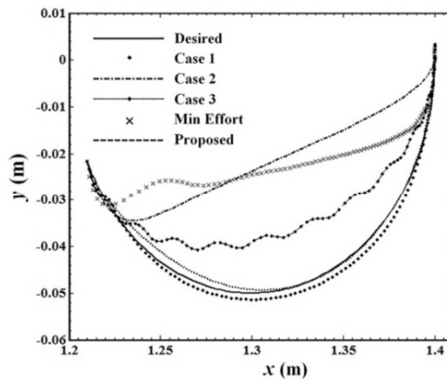
کمیت	واحد	بازوها		
		اول	دوم	سوم
طول	سانتیمتر	۳۰	۳۰	۸۰
عرض	میلیمتر	۱۰	۱۰	۲۰
ضخامت	میلیمتر	۱۵	۱۵	۲/۵
جرم	گرم	۱۲۲	۱۲۲	۱۰۸

جنس رابط ها از آلومینیوم بوده و چگالی و مدول یانگ آنها به ترتیب 2710 kg/m^3 و 71 GPa کیلوگرم بر متر مکعب و جرم هر رابط بر اساس ابعاد و جنس آن تعیین شده است. جرم و ممان اینرسی موتورها بترتیب 0.1 کیلوگرم و 0.25 کیلوگرم-متر مربع و جرم بار، 250 گرم می باشند. همچنین دو فرکانس اول ارتعاش در نظر گرفته شده است ($M = 2$). فرکانس های طبیعی اول و دوم بترتیب $6/27$ و $91/23$ هرتز هستند. فضای کاری بازوی مکانیکی در صفحه می باشد ($Z = 2$). از طرفی درجات آزادی بدون در نظر گرفتن انعطاف پذیری بازوی مکانیکی سه می باشد ($N = 3$). لذا یک درجه آزادی اضافی در سیستم وجود دارد ($r = 1$) که می توان از برای کمینه کردن شاخص مناسب و حصول به اهداف مورد نظر، بهره برد. مسیر حرکت پنجه ربات را در دستگاه XOY بصورت زیر در نظر می گیریم:

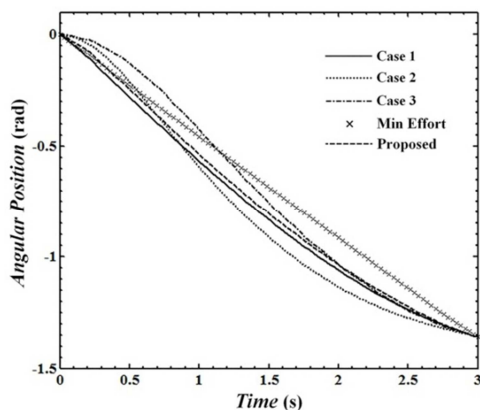
$$\sigma_d(t) = \begin{cases} x_d(t) = 1.3 + \frac{1}{10} \cos\left(\frac{2\pi}{7}t\right) \\ y_d(t) = -\frac{1}{20} \sin\left(\frac{2\pi}{7}t\right) \end{cases} \quad (35)$$



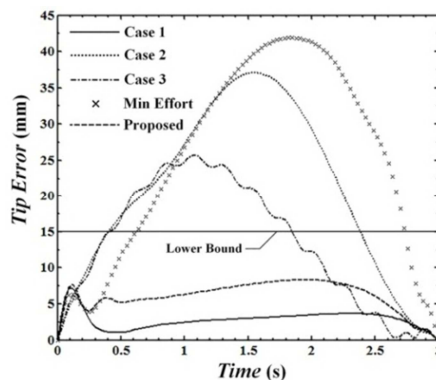
شکل ۷- مکان زاویه‌ای مفصل ۲



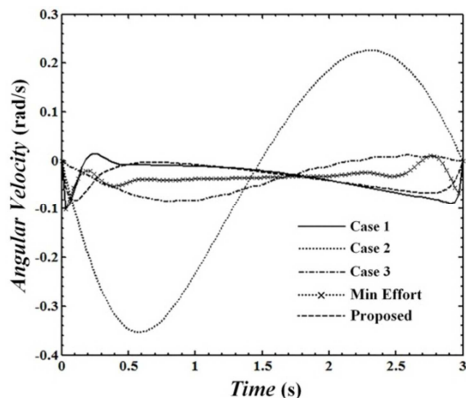
شکل ۳- مسیر پنجه



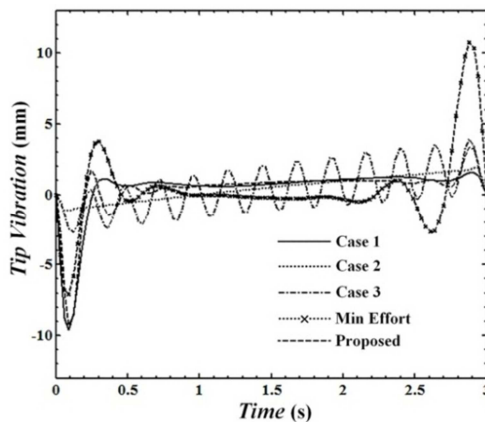
شکل ۸- مکان زاویه‌ای مفصل ۳



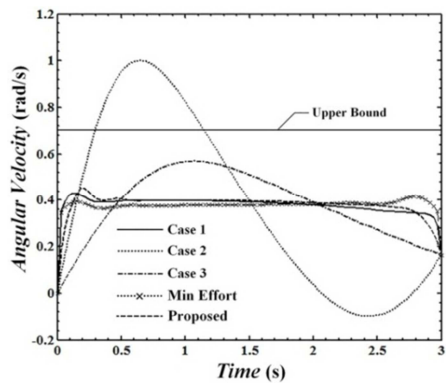
شکل ۴- خطای مسیر پنجه



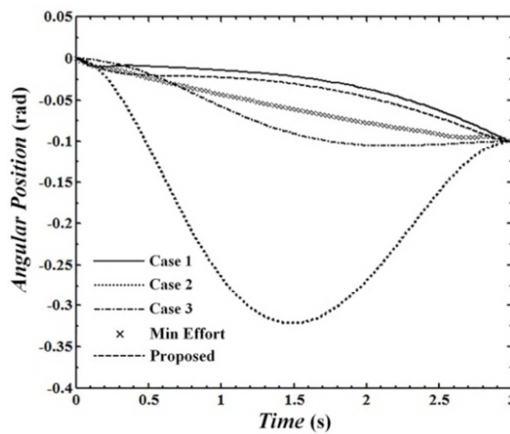
شکل ۹- سرعت زاویه ای مفصل ۱



شکل ۵- ارتعاش پنجه



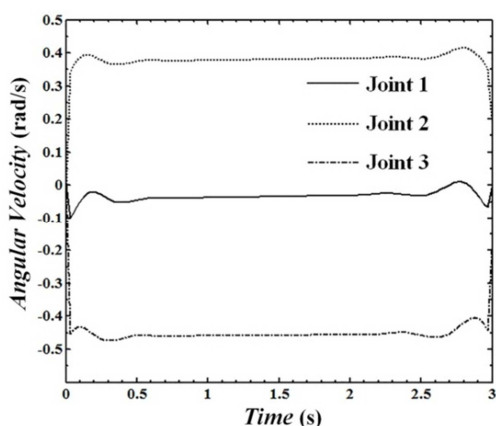
شکل ۱۰- سرعت زاویه ای مفصل ۲



شکل ۶- مکان زاویه ای مفصل ۱

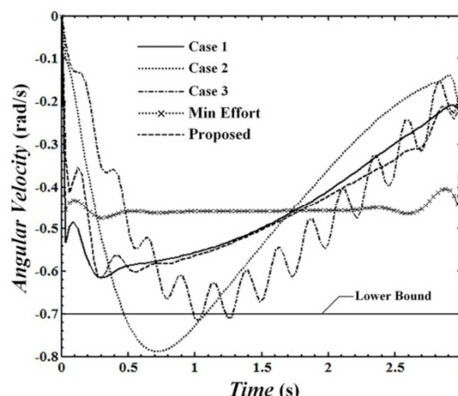
در حالت سوم که W_T به بیشینه خود می رسد، ارتعاش پنجه به صورت نوسانی شده و دامنه ارتعاش در میانه حرکت تا $2/85$ میلیمتر افزایش خواهد یافت. شکل های ۹ تا ۱۱ نشان می دهد در حالت سعی کمینه، سرعت به یک مقدار ثابت می رسد. شکل ۱۵، سرعت زاویه ای مفاصل را در این وضعیت نشان می دهد. این سرعت ها برای مفاصل های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب -0.04 ، 0.38 و -0.46 می باشند. بیشینه سرعت زاویه ای با کاهش W_V و افزایش W_ϕ ، افزایش می یابد. بطوریکه بیشینه سرعت در هر سه مفاصل در حالت ۱ رخ می دهد. مقدار قدر مطلق بیشینه سرعت در حالت ۱ برای مفاصل های ۱ تا ۳ به ترتیب برابر 0.35 ، $1/00$ و 0.79 می باشد.

در مفاصل های ۲ و ۳، اشباع سرعت اتفاق می افتد و سرعت از حد مجاز 0.7 تجاوز می کند. اشباع سرعت برای حالت سوم نیز رخ می دهد جاییکه قدر مطلق سرعت به مقدار بیشینه 0.72 رسیده است. شکل های ۱۲ تا ۱۴ نشان می دهند، گشتاورها در حالات ۲ و ۳ که به ترتیب ماتریس جریمه W_T و W_ϕ در بیشینه مقدار نسبت به مابقی ماتریس های جریمه هستند، به هم نزدیک بوده و اختلاف ناچیزی مشاهده می شود. با افزایش W_T نسبت به ماتریس های جریمه خطای مسیر و تغییر شکل خمشی، گشتاورها به خط راست نزدیک می شوند. شکل ۱۶ گشتاور مفاصل های ۱، ۲ و ۳ را در حالت سوم که $W_T \gg W_\phi$ است، نشان می دهد. شکل ۱۶ تغییرات خطی گشتاور را در این شرایط به خوبی نشان می دهد.

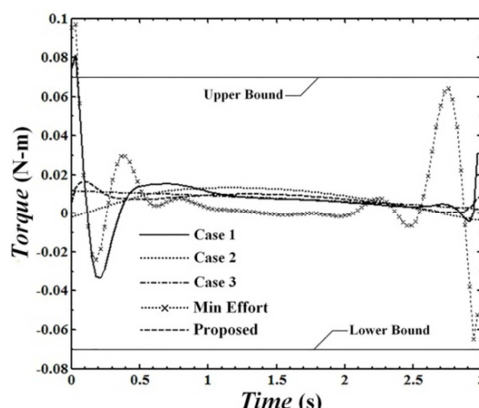


شکل ۱۵- سرعت ها در حالت سعی کمینه (حالت ۴)

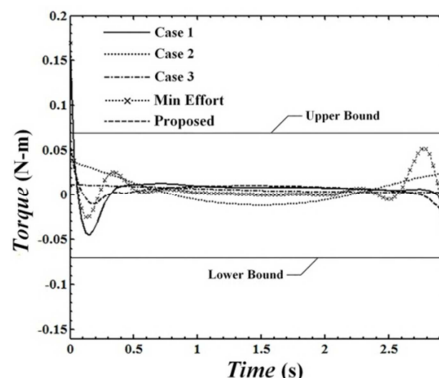
با توجه به حالت های در نظر گرفته شده برای ماتریس های جریمه در حالت اول (شرایط حدی) و نظر به اینکه هر یک از این حالات حداقل از یکی از قیدهای نامساوی سیستم عبور کرده و اشباع رخ می دهد، حالت پنجم پیشنهاد شده است.



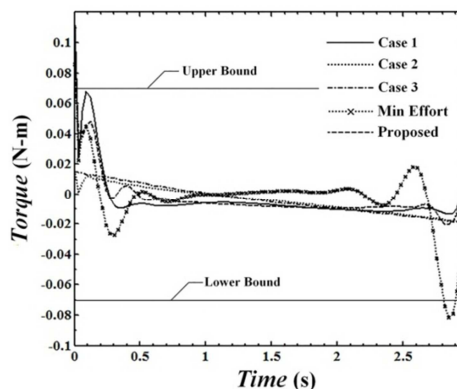
شکل ۱۱- سرعت زاویه ای مفاصل ۳



شکل ۱۲- گشتاور مفاصل ۱



شکل ۱۳- گشتاور مفاصل ۲

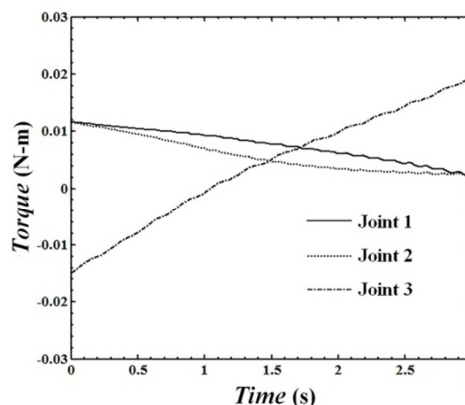


شکل ۱۴- گشتاور مفاصل ۳

گسسته سازی استفاده شد. بدنبال آن با محاسبه انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم و بکارگیری روش لاگرانژ، معادلات حرکت استخراج گردید. در این تحقیق با توجه به مدل غیر خطی بازوی مکانیکی که تحت قیدهای مختلفی قرار دارد، روش کنترل بهینه حلقه باز در نظر گرفته شد. برای تصدیق معادلات مدلسازی و تصدیق روش کنترلی ارایه شده، شبیه سازی برای بازوی مکانیکی با سه رابط که رابط انتهایی انعطاف پذیر است، انجام گردید. در این شرایط یک درجه آزادی اضافه وجود دارد که از آن در جهت کمینه کردن تابع هدف فراگیر استفاده شده است. بر اساس اهداف تعریف شده و قیدهای نامساوی، تابع هدف چهار منظوره لحاظ گردید. تابع بکار رفته شامل جملاتی از خطای مسیر، تغییر شکل الاستیک پنجه، سرعت مفاصل و مصرف انرژی در عملگرها می باشد. پاسخ سیستم در شرایط مختلف ماتریس های جریمه، مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفتند. بررسی نتایج نشان داد که حل منحصر به فردی که همزمان تمامی اهداف را ارضاء نماید، وجود ندارد. لذا می توان با تنظیم مناسب ماتریس های جریمه، مسیرهای مناسبی را برای برآورده کردن اهداف مورد نظر انتخاب کرد. بررسی پاسخ سیستم در شرایط متفاوت و نتایج بدست آمده حکایت از کارایی و دقت مناسب در روش ارایه شده را دارد.

۷- مراجع

- [1] Kiang C. T., Spowage A., Yoong C. K., Review of control and sensor system of flexible manipulator, Journal of Intelligent and Robotic Systems, Vol.77, No.1, pp. 187-213, 2015.
- [2] Flanz J., Design approach for highly accurate patient positioning system for NPTC, in: Proceedings of the PTOOG XXV and Hydrotherapy Symposium, Belgium, 1996.
- [3] I.C. Lin, L.C. Fu, Adaptive hybrid force/position control of a flexible manipulator for automated deburring with online cutting trajectory modification, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation 1 (1998) 818-825.
- [4] Chang L.H., Fu L.C., Nonlinear adaptive control of a flexible manipulator for automated deburring, Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation 4 (1997) 2844-2849.
- [5] Pfeiffer F., Bremer H., Figueiredo J., Surface polishing with flexible link manipulator, European Journal of Mechanics A/Solids 15 (1) (1996) 137-153.
- [6] Fukuda T., Flexibility control of elastic robot arms, Journal of Robotic Systems 2 (1) (1985) 73-88.
- [7] Yue S., Henrich D., Xu W.L., Tso S.K., Point-to-point trajectory planning of flexible redundant robot manipulators using genetic algorithms, Robotica, Vol. 20, No. 3, pp. 269-280, 2002.
- [8] Karami N., Korayem M. H., Shafei A. M., Rafee Nekoo S., Theoretical and experimental investigation of dynamic load carrying capacity of flexible-link manipulator in point-to-point motion, Modares Mechanical Engineering, Vol. 14, No. 15, pp. 199-206, 2015.
- [9] Wilson D. G., Robinett R.D., Eisler G.R., "Discrete dynamic programming for Optimized path planning of flexible robots", Proceeding of the International Conference on Intelligent Robot and Systems (IROS), Vol. 3, pp. 2918-2923, 2004.
- [10] Furuno S., Yamamoto M., Mohri A., Trajectory planning of mobile manipulator with stability consideration", Proceeding of IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Vol. 3, pp. 3403-3408, 2003.
- [11] Sentinella M. R., Casalino L., Genetic algorithm and indirect method coupling for low thrust trajectory optimization", Proceedings of 42nd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference, Sacramento, USA, 2006.
- [12] Haddad M., Chettibi T., Hanchi S., Lehtihet H. E., Optimal motion planner of mobile manipulators in generalized point-to-point task, 9th IEEE International Workshop on Advanced Motion Control, pp. 300-306, 2006.



شکل ۱۶- گشتاورها در حالت ۲

البته ذکر این نکته ضروری است که ماتریس های جریمه متفاوتی می تواند شرایط مورد نظر و قیدهای سیستم را ارضاء نماید. نتیجه گیری های مهم به طور خلاصه بصورت ذیل جمع بندی می گردد. زمان اولین و آخرین فراجش در خمش الاستیک به ماتریس های جریمه وابسته نبوده و مقدار متوسط قدر مطلق تغییر شکل الاستیک در حالت دوم تا نصف این مقدار برای حالت های ۱ و ۳ کاهش می یابد. در شرایطی که ماتریس های جریمه خطای مسیر، تغییر شکل خمشی، گشتاور و سرعت به عنوان اولویت اصلی در بیشینه مقدار خود نسبت به مابقی ماتریس های جریمه قرار گیرند، تغییرات این پارامترها به صورت خطی قابل تخمین خواهند بود. با استفاده از قیدهای نامساوی، محدودیت های گشتاور، سرعت و یا خطا به سیستم اعمال می شوند. در این شرایط در صورت انتخاب نامناسب ماتریس های جریمه، امکان آسیب رسیدن به سیستم (مثلا با اشباع عملگرها) وجود دارد. احراز شرایط بهینه برای تمامی شاخص ها بطور همزمان امکان پذیر نمی باشد و بسته به اولویت های در نظر گرفته شده، می توان آنها را برای نتیجه مورد نظر تنظیم نمود. برای این کار جهت پیش بینی تخمینی پاسخ سیستم (نسبت به ماتریس های جریمه)، می توان شرایط حدی این ماتریس ها را مشابه شرایط در نظر گرفته شده در حالت های ۱ تا ۴ مورد بررسی قرار داد.

۶- نتایج

در این مقاله کنترل بهینه حلقه باز برای طراحی مسیر بهینه بازوهای مکانیکی با پایه ثابت و رابط انعطاف پذیر انتهایی، در مساله تعقیب مسیر ارایه گردید. این تحقیق ضمن توسعه روش کنترل حلقه باز در بازوی مکانیکی در نظر گرفته شده، معادلات را بر اساس حرکت صلب و کاهش حرکت الاستیک بدست آورده است. در این استراتژی، در میان پاسخهای بی شماری که برای حرکت صلب بازوی مکانیکی افزونه وجود دارد، پاسخی که ارتعاشات سیستم را به عنوان اولویت اصلی حداقل می کند، جستجو می شود. با استفاده از بردار سرعت در معادله سینماتیک که از فرض حرکت صلب ربات نتیجه می شود و با تعریف مناسب بردار حالت و سیگنال کنترل، مقادیر شتاب ها و گشتاورها بر حسب این دو بردار استخراج شدند. سپس تابع هدف و قیدهای سیستم به فرم استاندارد یک مساله کنترل بهینه در آمدند. بعلاوه ابعاد نامحدود در اجزای انعطاف پذیر، از روش مود فرضی برای

- [32] Callies R., Rentrop P., Optimal control of rigid link manipulators by indirect methods, *GAMM-Mitteilungen*, Vol. 31, No. 1, pp. 27 – 58, 2008.
- [33] Kirk D. E., *Optimal Control Theory: an introduction*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 2012.
- [34] Homaei H., Keshmiri M., Optimal trajectory planning for minimization vibration of flexible redundant cooperative manipulators, *Advanced Robotic*, Vol.23, No.12-13, pp. 1799-1816, 2009.
- [13] Rahimi H. N., Korayem M. H., Nikoobin A., Optimal motion planning of manipulators with elastic links and joints in generalized point-to-point task, *33rd ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, pp. 1167-1174 , 2009.
- [14] Korayem M. H., Rahimi H. N., Nikoobin A., Path planning of mobile elastic robotic arms by indirect approach of optimal control, *International Journal of Advanced Robotic Systems*, Vol. 8, No. 1, pp. 10-20, 2011.
- [15] Korayem M. H., Rahimi H. N., Nikoobin A., Mathematical modeling and trajectory planning of mobile manipulators with flexible links and joint, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 36, No. 7, pp. 3229–3244, 2012.
- [16] Heidari H. R., Korayem M. H., Haghpanahi M., Battle V. F., Optimal trajectory planning for lexible link manipulators with large detection using a new displacements approach, *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 72, No. 3-4, pp. 287–300, 2013.
- [17] Shukla A., Singla E., Wahi P., Dasgupta B., A direct vibrational method for planning monotonically optimal paths for redundant manipulators in constrained workspaces, *Robotics and Autonomous System*, Vol. 61, No. 2, pp. 209-220, 2013.
- [18] Lou J., Wei Y., Li G., Yang Y., Xie F., Optimal trajectory planning and linear velocity feedback control of a flexible piezoelectric manipulator for vibration suppression, *Shock and Vibration*, 2015.
- [19] Stilman M., Atkeson C. G., Kuffner J. J., Zeglin G., Dynamic programming in reduced dimensional spaces: Dynamic planning for robust biped locomotion", *International Conference on Robotics and Automation*, Barcelona, Spain, pp. 2399-2404, 2005.
- [20] Bakker B., Zivcovic Z., Krose B., Hierarchical dynamic programming for robot path planning, *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robot and Systems(IROS)*, Edmonton, Canada, pp. 2756-2761, 2005.
- [21] Korayem M. H., Irani M., Charesaz A., Korayem A. H., Hashemi A., Trajectory planning of mobile manipulators using dynamic programming approach, *Robotica*, Vol. 31, No. 04, pp. 643-656, 2013.
- [22] Abe A., Komuro K., Minimum energy trajectory planning for vibration control of a flexible manipulator using a multi-objective optimization approach, *International Journal of Mechatronics and Automation*, Vol. 2, No. 4, pp. 286-294, 2012.
- [23] Tabealhojeh H., Ghanbarzadeh A., "Two steps optimization path planning algorithm for robot manipulators using imperialist competitive algorithm, *2th RSI/ISM International Conference on IEEE in Robotics and Mechatronics (ICROM)*, pp. 801-806 , 2014.
- [24] Chu M., Chen G., Jia Q. X., Gao X., Sun H. X., Simultaneous positioning and non-minimum phase vibration suppression of slewing flexible link manipulator using only jointactuator, *Journal of Vibration and Control*, Vol.20, No. 10, pp. 1488-1497, 2014.
- [25] Meirovitch L., *Analytical methods in vibrations*, Mcmillan, New York, USA, 1967.
- [26] Rao S. S., *Vibration of Continuous Systems*, 4th Edittion, Chapter 11, New Jersey: Wiley & Sons, 2007.
- [27] Korayem M. H., Nazemizadeh M., Dynamic load carrying capacity of flexible manipulators using finite element method and pontryagin's minimum principle, *Journal of Optimization in Industrial Engineering*, Vol. 6, No. 12, pp. 17-24, 2013.
- [28] Wachter A., Biegler L. T., On the implementation of an interior point filter line search algorithm for large scale nonlinear programming, *Mathematical programming*, Vol. 106, No. 1, pp.25-57, 2006.
- [29] Bock H. G., Plitt K. J., A multiple Shooting Algorithm for direct solution of optimal control problems, *Proceeding of the 9th IFAC World Congress*, pp. 242-247, 1984.
- [30] Hargraves C. R., Paris S. W., Direct trajectory optimization using programming and collocation, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 10, No. 4, pp. 338-342, 1987.
- [31] Bessonnet G., Chessé S., Optimal dynamics of actuated kinematic chains, Part 2: Problem statements and computational aspects, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 24, No. 3, pp. 472-490, 2005.