

تحلیل کمانش حرارتی ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهتی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی

دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد الیگودرز، الیگودرز، ایران

* شهروز یوسف‌زاده

چکیده

در این مقاله کمانش حرارتی ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهتی تحت دو نوع بارگذاری حرارتی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات تحلیل شده و دمای بحرانی کمانش در شرایط مرزی گیردار بدست آورده شده است. معادلات تعادل و پایداری ورق دایره‌ای بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات با استفاده از روش انرژی و معادلات اویلر استخراج شده و پس از آن معادلات پایداری با توجه به شرایط مرزی مسئله و استفاده از سریهای توانی و با نوشتن برنامه کامپیوتی حل شده است. سپس دمای بحرانی کمانش حرارتی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات بدست آمده و نتایج بصورت جداول و نمودارها ارائه شده و تاثیر پارامترهای مختلف از جمله نسبتیهای کسر حجمی بر دمای بحرانی برسی و مورد مقایسه با نتایج بدست آمده از مقالات موجود قرار گرفته است که از نعمتی حل مسئله نیز اطمینان کافی حاصل شده است. نتایج نشان می‌دهد که در نسبتیهای کسر حجمی مختلف در جهت شعاع (μ)، افزایش نسبت کسر حجمی در جهت ضخامت (n) تاثیر چندانی در دمای بحرانی کمانش ندارد. همچنین اگر نسبت کسر حجمی در جهت شعاع مثبت باشد، دمای بحرانی کمانش با افزایش این نسبت افزایش و در صورت منفی بودن کاهش می‌یابد. علاوه بر این، برای ورق با ضخامت ثابت، دمای بحرانی کمانش با افزایش نسبت ضخامت بر شعاع ورق (h/a) افزایش یافته و با افزایش نسبت کسر حجمی کاهش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: ورق دایره‌ای، کمانش حرارتی، مواد تابعی مدرج، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی.

Thermal Buckling Analysis of a 2-Directional FGM Circular Plate Using First-Order Shear Deformation Theory

Sh. Yousefzadeh

Department of Mechanical Engineering, Islamic Azad University Aligudarz Branch, Aligudarz, Iran

Abstract

In this research, the critical buckling temperatures of a 2-Directional FGM circular plate under the two types of temperature rise are calculated based on first order shear deformation plate theory (FSDT) in the cases of clamped support edge. The equilibrium and stability equations for 2-Directional FGM circular plate are derived according to FSDT and using the energy method and Euler equations and then the stability equations are solved by series method and computer programming and the critical buckling temperatures are derived. At the end, the results are illustrated by tables and graphs and the effect of various parameters such as the volume fraction indexes on the critical buckling temperatures are studied and compared with results of some other articles. The results show that for different values of volume fraction indexes in r-direction (μ), the volume fraction index in z-direction (n) has a little effect on the critical buckling temperatures. Also when μ is positive, the critical buckling temperatures are decreased by increasing μ but when μ is negative, vice versa. Also, for FGM thickness constant, critical buckling temperature is increased by increasing the aspect ratio (h/a), while decreased by increasing volume fraction exponent.

Keywords: Circular Plate, Thermal Buckling, Functionally Graded Materials, First-Order Shear Deformation Theory.

۱- مقدمه

مواد هدفمند یا مدرج تابعی (FGM)¹ نسل جدیدی از مواد مرکب می‌باشند که اولین بار توسط دانشمندان ژاپنی در سال ۱۹۸۴ معرفی شدند [۱]. خواص مواد مدرج تابعی بطور بیوسته از یک سطح تا سطح دیگر تغییر می‌کند. این خصوصیت باعث می‌گردد که مشکل ناپیوستگی تنش در مواد مرکب لایه‌ای بر طرف شده و توزیع تنش یکنواخت شود. یکی دیگر از مزایای مواد مدرج تابعی مقاومت بالای آنها در مقابل دماهای بسیار زیاد است که موجب بهره گیری از این مواد به عنوان سپر حرارتی می‌شود. معمولاً مواد مدرج تابعی از دو جنس متفاوت مثل سرامیک و فلز ساخته می‌شوند تا همزمان خواص عالی مکانیکی و حرارتی را داشته باشد. با توجه به ویژگی‌های

1 Functionally Graded Materials

2 Homogeneous

منتظر طبق روش تغییر مکان مجازی استخراج شدند. آنها نشان دادند که کمانش ورق دایروی با فرض دوشاخگی^۵ بصورت نامتقارن انجام می شود [۷]. چاری و همکاران به مطالعه کمانش حرارتی یک ورق دایروی ساخته شده از مواد متخلخل با لایه های محرك پیزوالکتریک با شرایط مرزی گیردار پرداختند. برای تعیین معادلات تعادل و پایداری از روش تغییرات استفاده شد. آنها تأثیر پارامترهای مختلف از جمله میزان تخلخل را روی دمای بحرانی کمانش مورد بررسی قرار دادند [۸].

ردی^۶ و خدیر ارتعاشات و کمانش یک ورق مستطیلی را با استفاده از روش های تحلیلی و عددی مورد بررسی قرار دادند و نتایج یکسانی از هر دو روش بدست آورده اند. نتایج نشان دادند که فرکانس های طبیعی و بار بحرانی کمانش با افزایش نسبت طول بر ضخامت افزایش می یابد [۹]. درویزه و همکاران به تحلیل کمانش حرارتی پوسته های استوانه ای مرکب نسبتاً ضخیم تحت بار حرارتی متقارن محوری پرداختند. در این تحقیق از روش نیمه تحلیلی المان محدود برای رفتار کمانش حرارتی پوسته های استوانه ای استفاده شده است. برای محاسبه ماتریس سختی هندسی، از تئوری های ساده شده و ساده نشده ساندرز استفاده شده است. نتایج این تحقیق نشان داد که دمای بحرانی کمانش حرارتی در تئوری ساده نشده بالاتر از تئوری ساده شده می باشد [۱۰].

نجفی زاده و عنوان، به تحلیل کمانش مکانیکی ورق دایره ای *FGM* با لایه های پیزوالکتریک بر اساس تار خنثی و با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل بر شی صفحات با شرایط مرزی گیردار پرداختند. نتایج این تحقیق نشان داد که با افزایش نسبت ضخامت لایه پیزوالکتریک بر ضخامت ورق، مقدار بار بحرانی کمانش افزایش می یابد [۱۱]. کریزووسکی^۷ و استاووسکی معادلات ورق دایره ای تو خالی لایه ای را با استفاده از اصل همیلتون برای تحلیل کمانش و تعیین فرکانس های طبیعی ارتعاش بدست آورده اند. در این پژوهش اثر پارامترهای همچون برش عرضی، اینرسی دورانی، شرایط مرزی روی بار بحرانی کمانش و فرکانس های طبیعی مورد بررسی قرار گرفتند [۱۲]. در سال ۲۰۱۵ ساتوری و همکاران به تحلیل کمانش یک پوسته استوانه ای از جنس مواد *FGM* دو بعدی تقویت شده با پایه های طولی تحت نیروهای عرض و جانی پرداختند. فرض شد خواص مادی استوانه در جهات طولی و ضخامت متغیر است. آنها معادلات تعادل را طبق تئوری مرتبه سوم تغییر شکل بر شی تعیین و به حل معادلات پایداری با روش *DQM* پرداختند. آنها پس از بررسی تأثیر پارامترهای مختلف روی نیروی کمانش به این نتیجه رسیدند که پایه های تقویتی تأثیر بسزایی روی نیروی کمانش بحرانی دارد [۱۳].

در این مقاله تحلیل کمانش حرارتی ورق دایره ای ساخته شده از مواد تابعی با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل بر شی صفحات انجام شده است. ابتدا معادلات تعادل و پایداری با استفاده از معادلات اویلر استخراج شده و سپس با حل غشایی معادلات تعادل، نیروهای پیش کمانش بدست آمده است. با حل معادلات پایداری دمای بحرانی کمانش محاسبه شده و تأثیر پارامترهای مختلف از جمله نسبت کسر حجمی در راستای شعاع روی دمای بحرانی کمانش مورد بررسی قرار گرفته و نتایج در قالب جداول و نمودارها ارائه شده و در حالت خاص (تغییر خواص فقط در جهت ضخامت) با نتایج تئوری ها و مقایسه قرار گرفته است.

استفاده می شود. یکی از پدیده های بسیار مهم در ورقها که موجب شکست آنها می شود کمانش^۱ ورق است. لذا دانشمندان همواره در پی ساختن موادی هستند که در مقابل این پدیده مقاومت خوبی داشته باشد. نجفی زاده و اسلامی به تحلیل کمانش ورق دایره ای مدرج تعابعی تحت بارگذاری شعاعی پرداختند و با استفاده از فرموله کردن تغییرات معادلات تعادل و پایداری بدست آورده اند و با استفاده از این معادلات نیروهای پیش کمانش و بارهای بحرانی کمانش را محاسبه کردند. معادلات بر مبنای تئوری کرشهف^۲ و روابط کرنش جابجایی غیرخطی ساندرز^۳ بوده اند. [۲]

نجفی زاده و حیدری به تحلیل کمانش ورق دایره ای مدرج تعابعی تحت بارگذاری شعاعی پرداختند و با استفاده از تئوری تغییر شکل بر شی مرتبه بالا معادلات تعادل و پایداری را بدست آورده و تغییرات ماده بصورت تابع توانی از *Z* فرض شده است و با استفاده از روش تغییرات معادلات دیفرانسیل جزئی پایه بدست آمده است و تحلیل کمانش ورق دایره ای مدرج تعابعی تحت فشار شعاعی یکنواخت مورد بررسی قرار گرفته است نتایج بصورت جزئی ارائه شده است. نتایج با بارهای کمانش ورق دایره ای مدرج تعابعی بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل بر شی مقایسه شده است [۳].

ونگ^۴ و ما به تحلیل خمس متقارن و کمانش ورق دایره ای مدرج تعابعی با استفاده از تئوری مرتبه سوم تغییر شکل بر شی پرداختند. و روابط بین نتایج حاصله از کمانش ورق دایره ای مدرج تعابعی با استفاده از تئوری مرتبه سوم تغییر شکل بر شی برای خمس متقارن و کمانش ورق دایره ای مدرج تعابعی با ورق دایره ای ایزوتروپیک بر مبنای تئوری کلاسیک بدست آورده. در تحلیل های انجام شده خواص مکانیکی بصورت تابعی مدرج که در راستای ضخامت متغیر است و نیز از قانون توانی یکنواخت نسبت حجمی ترکیبات پیروی می کند فرض شده است. اثرات خواص مدرج مواد و تغییر شکل بر شی بر خمس و کمانش صفحات مدرج در چارچوب تئوری مرتبه اول و مرتبه سوم مورد بررسی قرار گرفته است و نیز مقایسه ای بین نتایج کمانش ورق دایره ای مدرج تعابعی با استفاده از تئوری مرتبه سوم تغییر شکل بر شی برای حل های تئوری مرتبه اول ورق ها و تئوری کلاسیک ورق ها بررسی شده است که نشان داده که تئوری مرتبه اول بر شی نشان دادن تأثیر تغییر شکل بر شی بر خمس متقارن و کمانش صفحه دایره ای مدرج تعابعی کفایت می کند و مرتبه بالاتر و ترکیب تئوری های مختلف لزومی ندارد [۴].

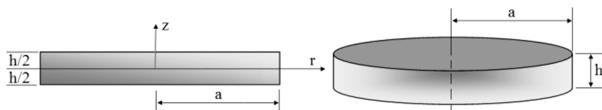
شهرجردی و همکاران به تحلیل خمس متقارن و کمانش ورق دایره ای مدرج تعابعی با استفاده از تئوری بدون قید تغییر شکل بر شی مرتبه سوم پرداختند و راه حل ارائه شده برای تغییر شکل ها، نیروها، ممان های بحرانی و نهایی کمانش و خمس با استفاده از تئوری کلاسیک می باشد [۵]. نجفی زاده و حیدری به تحلیل کمانش ورق دایره ای مدرج تعابعی در جهت ضخامت تحت بارهای مختلف حرارتی پرداختند که با استفاده از تئوری تغییر شکل مرتبه بالا معادلات تعادل و پایداری را بدست آورده و نتایج را با نیروهای دمای بحرانی کمانش در حالات تئوری تغییر شکل مرتبه اول بر شی و کلاسیک مقایسه نمودند [۶].

قیاسیان و همکاران کمانش حرارتی یک ورق دایروی نسبتاً ضخیم *FGM* را تحت دو نوع بارگذاری حرارتی مورد مطالعه قرار دادند. معادلات تعادل براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل بر شی استخراج شده و شرایط مرزی

1 Buckling
2 Kirchhoff
3 Sanders
4 Wang

۳- معادلات تعادل و پایداری

در این مقاله، ورق دایره‌ای مورد نظر از جنس مواد تابعی دو-جهته به شعاع a و ضخامت h می‌باشد. ورق تحت بارگذاری حرارتی قرار گرفته است. در شکل ۲ طرحواره یک ورق دایره‌ای و نحوه استقرار محورهای مختصات نمایش داده شده است.



شکل ۲- مشخصات هندسی یک ورق دایره‌ای

با استفاده از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی و با در نظر گرفتن مدل ردی^۳ می‌توان تغییر مکانهای (U,V,W) را به ترتیب در جهت‌های (r,θ,z) بصورت زیر نوشت [۱۶ و ۱۷]:

$$\begin{aligned} U(r,\theta,z) &= u(r,\theta) + z\phi_r(r,\theta) \\ V(r,\theta,z) &= v(r,\theta) + z\phi_\theta(r,\theta) \end{aligned} \quad (7)$$

$$W(r,\theta,z) = w(r,\theta) \quad \text{که } \phi_\theta \text{ و } \phi_r \text{ به ترتیب چرخش حول محورهای } r \text{ و } \theta \text{ می‌باشد.}$$

$$\phi_r = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad \phi_\theta = \frac{\partial V}{\partial z} \quad (8)$$

رابطه بین کرنش‌ها و جابجایی‌ها در دستگاه مختصات استوانه‌ای عبارتند از [۱۷]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{U}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \\ \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{V}{r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} \right) \frac{\partial W}{\partial \theta} \\ \varepsilon_{rz} &= \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial z} \\ \varepsilon_{\theta z} &= \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial \theta} \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \varepsilon_{zz} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

با جایگذاری روابط (۷) در روابط (۹) روابط کرنش-جابجایی به شکل [۱۰] در می‌آید [۱۷]:

$$\bar{\varepsilon}_{rr} = \bar{\varepsilon}_{rr} + zk_{rr}, \quad \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} = \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + zk_{\theta\theta}, \quad \bar{\varepsilon}_{r\theta} = \bar{\varepsilon}_{r\theta} + zk_{r\theta}, \quad \bar{\varepsilon}_{\theta z} = \bar{\varepsilon}_{\theta z} \quad (10)$$

که هر عبارت شامل دو مولفه کرنش در صفحه میانی و انحنای می‌باشد که مولفه‌های کرنش در صفحه میانی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2, \quad \bar{\varepsilon}_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ \bar{\varepsilon}_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \bar{\varepsilon}_{rz} &= \phi_r + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \bar{\varepsilon}_{\theta z} = \phi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (11)$$

و همچنین انحنایان نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$k_{rr} = \phi_{r,r}, \quad k_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \phi_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} \phi_r, \quad k_{r\theta} = \frac{1}{r} \phi_{r,\theta} + \phi_{\theta,r} - \frac{1}{r} \phi_\theta \quad (12)$$

که در آن کاما، " بیانگر مشتق جزئی می‌باشد. رابطه (۱۰) را می‌توان به شکل کلی کرنش-تغییر مکان نوشت:

۲- روابط حاکم بر خواص مواد مدرج تابعی

مواد مدرج تابعی کامپوزیت‌هایی هستند که لایه‌های آنها از سرامیک و فلز خالص تشکیل شده و بین لایه‌ها از ترکیبی از فلز و سرامیک پر شده است که خواص مکانیکی آنها بطور ملایم و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند. خواص مواد تابعی بصورت زیر تعریف می‌شود [۱]:

$$P(z) = P_c V_c + P_m V_m \quad (1)$$

که در آن، V_c و V_m به ترتیب نسبت حجمی فلز و سرامیک بوده و هر کدام بصورت زیر می‌باشد [۱]:

$$V_c = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n, \quad V_m = 1 - V_c \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه (۲) در رابطه (۱) داریم:

$$P(z) = P_m + P_c \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n \quad (3)$$

که در آن، P_m و P_c به ترتیب خواص فلز و سرامیک می‌باشد. پس مدول الاستیستی، ضریب انبساط گرمایی و چگالی طبق رابطه (۳) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} E(z) &= E_c V_c + E_m (1 - V_c), \quad \alpha(z) = \alpha_c V_c + \alpha_m (1 - V_c) \\ \rho(z) &= \rho_c V_c + \rho_m (1 - V_c) \end{aligned} \quad (4)$$

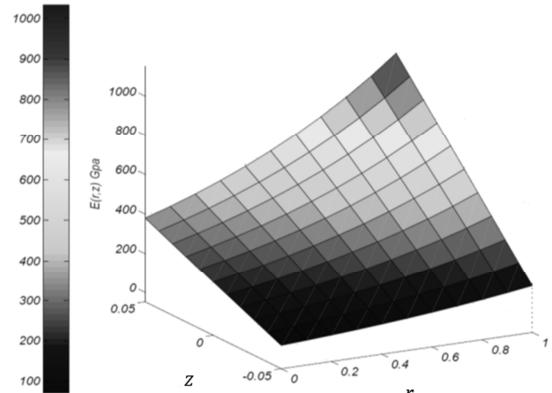
ضریب پواسون نیز ثابت در نظر گرفته می‌شود:

$$\nu(z) = \nu \quad (5)$$

برای تعریف خواص ماده مانند مدول الاستیستی، ضریب انبساط رسانایی گرمایی از نوع مواد مدرج تابعی دو جهتی از روابط زیر استفاده می‌کنیم [۱۴ و ۱۵]:

$$\begin{aligned} E &= E(r,z) = \left[E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \right] e^{\mu \frac{r}{a}} \\ \alpha &= \alpha(r,z) = \left[\alpha_m + (\alpha_c - \alpha_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \right] e^{\mu \frac{r}{a}} \\ K &= K(r,z) = \left[K_m + (K_c - K_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \right] e^{\mu \frac{r}{a}} \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن n و μ نسبت کسر حجمی^۱ به ترتیب در راستای ضخامت و شعاع می‌باشد. مدول الاستیستی مطابق رابطه (۶) در یک حالت خاص طبق نمودار شکل ۱ می‌باشد:



شکل ۱- نمایش تغییرات مدول الاستیستی در دو جهت

$$\begin{aligned}
 Q_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{rz} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{rz} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\varepsilon}_{rz} dz \\
 &= e^{\frac{\mu r}{b}} \left[\frac{A}{2(1+\nu)} [\bar{\varepsilon}_{rz}] \right] = e^{\frac{\mu r}{b}} Q_r \\
 Q_\theta &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{\theta z} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{2(1+\nu)} \bar{\varepsilon}_{\theta z} dz \\
 &= e^{\frac{\mu r}{b}} \left[\frac{A}{2(1+\nu)} [\bar{\varepsilon}_{\theta z}] \right] = e^{\frac{\mu r}{b}} Q_\theta
 \end{aligned} \tag{17}$$

به طریق مشابه $M_{r\theta}$ و M_θ هم تعیین می‌شوند. در این روابط، A, B, C, T_k, T_m به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \right] dz = h \left(E_m + \frac{1}{n+1} (E_c - E_m) \right) \\
 B &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \right] Z^2 dz \\
 &= \frac{h^3}{12} \left(E_m + \frac{3(n^2+n+2)}{(n+1)(n+2)(n+3)} (E_c - E_m) \right) \\
 C &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left[E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^n \right] zdz = \frac{nh^2}{2(n+1)(n+2)} (E_c - E_m) \\
 T_k &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(r, z) \alpha(r, z) T(r, z) zdz \quad T_m = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E(r, z) \alpha(r, z) T(r, z) dz
 \end{aligned} \tag{18}$$

در حالت کلی، معادله انرژی پتانسیل کل برای ورق دایره‌ای ساخته شده از مواد تابعی تحت بارهای مکانیکی و حرارتی بصورت زیر می‌باشد [۱۷ و ۱۸]:

$$V = U + \Omega \tag{19}$$

در رابطه فوق V انرژی پتانسیل^۱ کل ورق، U انرژی کرنشی^۲ و Ω پتانسیل ناشی از کار نیروهای خارجی^۳ می‌باشد که انرژی کرنشی ورق به شکل زیر تعریف می‌شود [۱۹]:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{+h/2} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij} r dr d\theta dz \tag{20}$$

و یا

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_{-h/2}^{+h/2} (\varepsilon_{rr} \sigma_{rr} + \varepsilon_{\theta\theta} \sigma_{\theta\theta} + \varepsilon_{r\theta} \sigma_{r\theta} + \varepsilon_{rz} \sigma_{rz} \\
 &\quad - \varepsilon_{\theta z} \sigma_{\theta z} - \alpha T (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})) r dr d\theta dz
 \end{aligned} \tag{21}$$

است. انرژی Ω برای بار مکانیکی عبارت است از:

$$\Omega = - \int_0^r \int_0^{2\pi} (p_r u + p_\theta v + p_z w) r dr d\theta \tag{22}$$

که در آن p_θ و p_z شدت بار مکانیکی وارد بر ورق به ترتیب در جهت‌های r و z است. با جایگذاری روابط تنش-کرنش در انرژی پتانسیل

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + z (\phi_{r,r}) \\
 \varepsilon_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + z \left(\frac{1}{r} \phi_{\theta,\theta} + \frac{1}{r} \phi_r \right) \\
 \varepsilon_{r\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{v}{r} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} + z \left(\frac{1}{r} \phi_{r,\theta} + \phi_{\theta,r} - \frac{1}{r} \phi_\theta \right) \\
 \varepsilon_{rz} &= \phi_r + \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\theta z} = \phi_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta}
 \end{aligned} \tag{13}$$

با استفاده از قانون هوک روابط تنش-کرنش را به شکل زیر داریم:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu) \alpha T]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{rr} - (1+\nu) \alpha T]$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{rz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{rz}, \quad \sigma_{\theta z} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{\theta z} \tag{14}$$

که رابطه مدول برشی به شکل زیر است:

$$G(r, z) = \frac{E(r, z)}{2(1+\nu)} \tag{15}$$

شكل کلی منتجه نیروها عبارت است:

$$\begin{aligned}
 N_{ij} &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}(r, z) dz, \quad M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}(r, z) z dz \\
 Q_i &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{iz}(r, z) z dz
 \end{aligned} \tag{16}$$

که $i, j = r, \theta$ است. با جایگذاری روابط (۱۰) و (۱۴) در روابط (۱۶) منتجه نیروها بصورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
 N_r &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu) \alpha T] dz \\
 &= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} [\bar{\varepsilon}_{rr} + zk_{rr} + \nu(\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + zk_{\theta\theta}) - (1+\nu) \alpha T] dz
 \end{aligned}$$

$$= e^{\frac{\mu r}{b}} \left[\frac{A}{1-\nu^2} [\bar{\varepsilon}_{rr} + \nu \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}] + \frac{C}{1-\nu^2} [k_r + \nu k_{\theta\theta}] - \frac{T_m}{1-\nu} \right] = e^{\frac{\mu r}{b}} N_r$$

$$M_r = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta} - (1+\nu) \alpha T] z dz$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E}{1-\nu^2} [\bar{\varepsilon}_{rr} + zk_r + \nu(\bar{\varepsilon}_{\theta\theta} + zk_{\theta\theta}) - (1+\nu) \alpha T] z dz$$

$$= e^{\frac{\mu r}{b}} \left[\frac{C}{1-\nu^2} [\bar{\varepsilon}_{rr} + \nu \bar{\varepsilon}_{\theta\theta}] + \frac{B}{1-\nu^2} [k_r + \nu k_{\theta\theta}] - \frac{T_k}{1-\nu} \right] = e^{\frac{\mu r}{b}} M_r$$

1 Potential Energy

2 Strain Energy

3 External Forces

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial w_1}{\partial r} N_{r0} + \frac{\partial w_1}{\partial \theta} N_{r\theta 0} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial \theta} N_{\theta 0} + \frac{\partial w_1}{\partial r} N_{r\theta 0} \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial r} (r Q_{r1}) + \frac{\partial}{\partial \theta} (Q_{\theta 1}) = 0 \\ & r Q_{r1} + M_{\theta 1} - \frac{\partial}{\partial r} (r M_{r1}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{r\theta 1}) = 0 \\ & r Q_{\theta 1} - M_{r\theta 1} - \frac{\partial}{\partial r} (r M_{r\theta 1}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{\theta 1}) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

در معادلات فوق زیرنویس ۱ مربوط به حالت پایداری و N_{r0} , $N_{\theta 0}$ و $N_{r\theta 0}$ نیروهای پیش کمانش می باشند.

۴- تحلیل کمانش حرارتی

حال به بررسی کمانش ورق در حالت متقارن محوری و در معرض بارگذاری حرارتی می پردازیم. نیروهای پیش کمانش N_{r0} , $N_{\theta 0}$ با استفاده از معادلات تعادل (۲۳) و با حذف دوران های قبل از کمانش بصورت زیر حاصل می شوند:

$$\begin{aligned} A_1 \left[\frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_0}{dr} - \frac{1}{r^2} u_0 \right] + C_1 \left[\frac{d^2 \phi_{r0}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_{r0}}{dr} - \frac{1}{r^2} \phi_{r0} \right] \\ + \frac{\mu}{a} A_1 \left[\frac{du_0}{dr} + \nu \frac{u_0}{r} \right] + \frac{\mu}{a} C_1 \left[\frac{d\phi_{r0}}{dr} + \nu \frac{\phi_{r0}}{r} \right] = 0 \\ \frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_0}{dr} - \frac{1}{r^2} u_0 + \frac{\mu}{a} \left[\frac{du_0}{dr} + \nu \frac{u_0}{r} \right] = 0 \\ \frac{d^2 u_0}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_0}{dr} - \frac{1}{r^2} u_0 = 0 \end{aligned} \quad (27)$$

که A_1 و C_1 طبق رابطه (۳۴) می باشد. با ادغام معادلات فوق به یک معادله و حل آن، به جواب ساده زیر می رسیم:

$$u_0 = c_1 r + \frac{c_2}{r} \quad (28)$$

شرایط مرزی ورق دایره ای بصورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{cases} u_0 = \text{finite} & r = 0 \\ u_0 = 0 & r = a \end{cases} \quad (29)$$

با جایگذاری معادلات دوم و سوم رابطه (۲۷) در معادله اول و حل معادله

بدست آمده، مقدار ϕ_{r0} مشابه u_0 به دست می آید. با استفاده از معادلات (۲۷) تا (۲۹) نیروهای پیش کمانش بصورت زیر بدست می آید:

$$N_{r0} = N_{\theta 0} = -\frac{T_m}{1-\nu}, \quad N_{r\theta 0} = 0 \quad (30)$$

۵- بررسی کمانش ورق تحت افزایش یکنواخت دما

فرض می کنیم دمای اولیه ورق T_1 بوده و ورق در لبه ها دارای تکیه گاه گیردار باشد. با این شرط مرزی، دمای نهایی ورق را به T_2 می رسانیم. برای یافتن اختلاف دمای بحرانی ($\Delta T = T_2 - T_1$) تنش های حرارتی پیش کمانش، شرایط مرزی باید تعریف شود. اختلاف دمای بحرانی کمانش در حالت افزایش یکنواخت دما بصورت زیر تعریف می شود:

$$T(z) = T_{cr} = \Delta T = T_2 - T_1 \quad (31)$$

شرایط مرزی برای تکیه گاه گیردار بصورت زیر است:

$$u_1(0) = \phi_{r1}(0) = \text{Finite}, \quad w_1(0) = \frac{dw_1(0)}{dr} = 0 \quad (32)$$

کل (۱۹) و انتگرال گیری در جهت ضخامت و با اعمال معادلات اویلر [۱۷] بر تابع انرژی، پنج معادله تعادل زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \frac{N_r - N_\theta}{r} + \frac{\mu}{b} N_r + e^{\frac{\mu r}{b}} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{-\frac{\mu r}{b}} N_r \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{r\theta}) + p_r = 0 \\ 2N_{r\theta} + r \frac{\mu}{b} N_{r\theta} + re^{\frac{\mu r}{b}} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{-\frac{\mu r}{b}} N_{r\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_\theta) + p_\theta = 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial w}{\partial r} N_r + \frac{\partial w}{\partial \theta} N_{r\theta} \right] + \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} N_\theta + \frac{\partial w}{\partial r} N_{r\theta} \right] \\ + \frac{\partial}{\partial r} (r Q_r) + \frac{\partial}{\partial \theta} (Q_\theta) + p_z r = 0 \\ r Q_r + M_\theta - \frac{\partial}{\partial r} (r M_r) - \frac{\partial}{\partial \theta} (M_{r\theta}) = 0 \\ r Q_\theta - M_{r\theta} - \frac{\partial}{\partial r} (r M_{r\theta}) - \frac{\partial}{\partial \theta} (M_\theta) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

معادلات پایداری ورقها به وسیله روش تغییراتی^۱ به دست می آید. بسط تیلور انرژی پتانسیل کل عبارت است از [۱۷] و [۲۰]:

$$\Delta V = \delta V + \frac{1}{2!} \delta^2 V + \frac{1}{3!} \delta^3 V + \dots \quad (24)$$

که در این رابطه δV در واقع اولین تغییرات V و $\delta^2 V$ دومین تغییرات V می باشد. بدین مفهوم که $\delta^2 V$ می تواند دو حالت داشته باشد. (الف) در صورتی که $\delta^2 V > 0$ باشد. ورق برای کلیه تغییر مکان های مجازی در حالت تعادل پایدار می باشد. (ب) در صورتی که $\delta^2 V < 0$ باشد. ورق برای کلیه تغییر مکان های مجازی در حالت تعادل ناپایدار می باشد. در صورتی که $\delta^2 V = 0$ را در نظر بگیریم می توانیم معادلات پایداری ورق را بدست آوریم. باز بحرانی در واقع مقدار نیرویی است که باعث به هم خوردن پایداری در تعادل یک مجموعه باشد. یا به عبارت دیگر باز بحرانی کمترین نیرویی است که به ازای آن $\delta^2 V > 0$ باشد. بنابراین با مساوی صفر قرار دادن $\delta^2 V$ می توان باز بحرانی را برای یک سازه بدست آورد که این باز می تواند حاصل یک نیروی خارجی یا حاصل از انسپاکس گرمایی یک ورق باشد. این اصل توسط ترفنت^۲ اثبات شده است [۱۷] و [۲۱]. برای بررسی امکان وجود تعادل در همسایگی، یک مقدار کوچک به مؤلفه های جابجایی اضافه می کنیم: $u \rightarrow u_0 + u_1$, $v \rightarrow v_0 + v_1$, $w \rightarrow w_0 + w_1$

$$\phi_r \rightarrow \phi_{r0} + \phi_{r1}, \quad \phi_\theta \rightarrow \phi_{\theta 0} + \phi_{\theta 1} \quad (25)$$

در رابطه (۲۵) جابجایی های $(\phi_{\theta 0}, \phi_{r0}, w_0, v_0, u_0)$ در واقع همان مقادیر جابجایی در حالت تعادل اولیه تحت بارگذاری شعاعی می باشند و جابجایی های $(u_1, \phi_{r1}, w_1, v_1)$ مقادیر کوچک تغییر مکان مجازی و نشانگر یک نمو بسیار کوچک از حالت تعادل می باشد. با جایگذاری روابط (۲۵), (۱۰) و (۱۵) و استفاده از معادلات اویلر معادلات پایداری ورق دایره ای بصورت زیر بدست می آید:

$$\begin{aligned} \frac{N_{r1} - N_{\theta 1}}{r} + \frac{\mu}{b} N_{r1} + e^{\frac{\mu r}{b}} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{-\frac{\mu r}{b}} N_{r1} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{r\theta 1}) = 0 \\ 2N_{r\theta 1} + r \frac{\mu}{b} N_{r\theta 1} + re^{\frac{\mu r}{b}} \frac{\partial}{\partial r} \left(e^{-\frac{\mu r}{b}} N_{r\theta 1} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} (N_{\theta 1}) = 0 \end{aligned}$$

¹Variational Method
²Trefftz

که در آن، $\frac{\mu}{a} = \gamma$. با حل معادله مرتبه دوم فوق و با ساده سازی جواب بدست آمده در نهایت دمای بحرانی کمانش حاصل می‌شود.

۶- بررسی کمانش ورق تحت افزایش غیرخطی دما در جهت ضخامت

در این حالت، رسانایی گرمایی ورق K ، تابعی از ضخامت و شعاع ورق می‌باشد. رسانایی گرمایی بصورت رابطه (۲) در نظر گرفته می‌شود. معادله مربوط رسانش گرمای پایدار بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$-\frac{d}{dz} \left(K(r, z) \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (40)$$

با استفاده از روابط (۲) و (۴۰) داریم:

$$-\frac{d^2 T}{ds^2} + \frac{nK_{cm}s^n - 1}{K_m + K_{cm}s^n} \frac{dT}{ds} = 0 \quad (41)$$

که $s = \frac{2z + h}{2h}$ است. با حل معادله فوق و ساده‌سازی جواب بدست آمده

در نهایت به رابطه دمای بحرانی کمانش در حالت افزایش غیرخطی دما در جهت ضخامت می‌رسیم.

۷- جداول و نمودارها

در این مقاله ورق دایرمه از جنس FGM دو جهته با ترکیبی از آلومینیوم و آلومین استفاده شده است و برای آنکه بتوانیم جواب را با جواب مقالات قبلی کار شده مقایسه نماییم از همان مقادیر ثابت‌ها مطابق جدول ۱ استفاده می‌کنیم : [۲۲ و ۱۸]

جدول ۱- خواص مکانیکی فلز و سرامیک

| خواص مکانیکی فلز | خواص مکانیکی سرامیک |
|---|--|
| $E_m = 70 \text{ GPa}$ | $E_c = 780 \text{ GPa}$ |
| $\alpha_m = 23 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ | $\alpha_c = 7.8 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ |
| $K_m = 204 \text{ (W / mK)}$ | $K_c = 10.4 \text{ (W / mK)}$ |
| $\nu = 0.3$ | $\nu = 0.3$ |

در جداولهای ۲ و ۳ دمای بحرانی کمانش ورق دایرمه ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت برای ورق با لبه تکیه‌گاه گیردار و $n=0$ و $n=1$ برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به شعاع h/a و کسر نسبت حجمی در راستای شعاع μ ارائه شده است. همانطوری که از این جداول پیداست، با افزایش h/a نیروی بحرانی کمانش با در نظر گرفتن مقادیر مختلف μ افزایش می‌یابد. همچنین در این جداول نتایج حاصل از این تحقیق برای حالت خاص $\mu = 0$ با سایر مراجع مقایسه شده است که تطابق خوبی بین این نتایج به چشم می‌خورد.

در جداولهای ۴ و ۵ دمای بحرانی کمانش ورق دایرمه ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری متغیر در جهت ضخامت برای ورق با لبه تکیه‌گاه گیردار و $n=1$ و $n=0$ برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به شعاع h/a و کسر نسبت حجمی در راستای شعاع μ ارائه شده است. همانطوری که از این جداول پیداست، با افزایش h/a نیروی بحرانی کمانش با در نظر گرفتن مقادیر مختلف μ افزایش می‌یابد. همچنین در این جداول نتایج حاصل از این تحقیق برای حالت خاص $\mu = 0$ با سایر مراجع مقایسه شده است که در این حالت نیز تطابق خوبی بین این نتایج وجود دارد.

با توجه به حالت تقارن محوری برای ورق دایرمه ای می‌توانیم از v_1 و $\phi_{\theta 1}$ و همچنین کلیه مشتقهای نسبت به θ صرف نظر کنیم که در ادامه خواهیم دید با نوشتن معادلات پایداری بر اساس میدان جابجایی، دستگاه پنج معادله پایداری (۲۶) به یک دستگاه سه معادله بر حسب جابجایی‌ها به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} A_1 & \left[\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} - \frac{u_1}{r^2} + \frac{\mu}{a} \left(\frac{du_1}{dr} + v \frac{u_1}{r} \right) \right] \\ & + C_1 \left[\frac{d^2 \phi_{r1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_{r1}}{dr} - \frac{1}{r^2} \phi_{r1} + \frac{\mu}{a} \left(\frac{d\phi_{r1}}{dr} + v \frac{\phi_{r1}}{r} \right) \right] = 0 \\ A_2 & \left[\phi_{r1} + \frac{dw_1}{dr} + r \frac{d\phi_{r1}}{dr} + r \frac{d^2 w_1}{dr^2} + \frac{\mu}{a} \left(r \phi_{r1} + r \frac{dw_1}{dr} \right) \right] e^{\frac{\mu r}{a}} \\ & + \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_1}{dr} N_{r0} \right) = 0 \\ B_1 & \left[\frac{d^2 \phi_{r1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_{r1}}{dr} - \frac{1}{r^2} \phi_{r1} + \frac{\mu}{a} \left(\frac{d\phi_{r1}}{dr} + v \frac{1}{r} \phi_{r1} \right) \right] \\ & + C_1 \left[\frac{d^2 u_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_1}{dr} - \frac{u_1}{r^2} + \frac{\mu}{a} \left(\frac{du_1}{dr} + v \frac{u_1}{r} \right) \right] \\ & - A_2 \left[\phi_{r1} + \frac{dw_1}{dr} \right] = 0 \end{aligned} \quad (33)$$

که در آن

$$\begin{aligned} A_1 & = \frac{A}{1-v^2}, \quad B_1 = \frac{B}{1-v^2}, \quad C_1 = \frac{C}{1-v^2} \\ A_2 & = \frac{A}{2(1+v)}, \quad B_2 = \frac{B}{2(1+v)}, \quad C_2 = \frac{C}{2(1+v)} \end{aligned} \quad (34)$$

با جایگذاری معادله اول در معادله سوم رابطه (۳۳) داریم:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{d^2 \phi_{r1}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\phi_{r1}}{dr} - \frac{1}{r^2} \phi_{r1} + \frac{\mu}{a} \left(\frac{d\phi_{r1}}{dr} + v \frac{1}{r} \phi_{r1} \right) \right] \\ & - \beta \left[\phi_{r1} + \frac{dw_1}{dr} \right] = 0 \end{aligned} \quad (35)$$

$$\beta = A_2 \left/ \left(B_1 - \frac{C_1^2}{A_1} \right) \right. \quad \text{که در آن}$$

معادله دوم رابطه (۳۳) را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} & \left[\phi_{r1} + \frac{dw_1}{dr} + r \frac{d\phi_{r1}}{dr} + r \frac{d^2 w_1}{dr^2} \right] e^{\frac{\mu r}{a}} + \\ & \frac{\mu}{a} \left[r \phi_{r1} + r \frac{dw_1}{dr} \right] e^{\frac{\mu r}{a}} - \frac{d}{dr} \left(r \frac{dw_1}{dr} \alpha \right) = 0 \end{aligned} \quad (36)$$

$$\text{که در آن } \alpha = -\frac{N_{r0}}{A_2} \cdot \text{ با استفاده از تغییر متغیرهای زیر:}$$

$$\begin{aligned} Y & = \frac{dw_1}{dr}, \quad Y' = \frac{d^2 w_1}{dr^2} \\ q & = \phi_{r1} e^{\frac{\mu r}{a}} + \left(e^{\frac{\mu r}{a}} - \alpha \right) Y \end{aligned} \quad (37)$$

معادله (۳۶) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$q + rq' = 0 \quad (38)$$

پس از حل معادله (۳۸) و استفاده از معادله (۳۷) و جایگذاری در معادله (۳۶) داریم:

$$\frac{d^2 \phi_{r1}}{dr^2} + \left(\frac{1}{r} + \gamma \right) \frac{d\phi_{r1}}{dr} + \left(\gamma \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \beta \frac{\alpha}{e^{\frac{\mu r}{a}}} \right) \phi_{r1} = 0 \quad (39)$$

جدول ۲- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت برای ورق باله تکیه‌گاه گیردار و $n=0$

| [۱۸] CPT | [۲۲] FSDT | [۶] HSDT | مقاله حاضر (FSDT) | | | | | |
|-------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|-----------|--------------|------------|-------|
| $\mu = 0$ | $\mu = 0$ | $\mu = 0$ | $\mu = 1$ | $\mu = +0/5$ | $\mu = 0$ | $\mu = -0/5$ | $\mu = -1$ | h/a |
| ۱۲/۷۱۶ | ۱۲/۷۱۲ | ۱۲/۷۰۸ | ۷/۰۴۲ | ۶/۲۳۹ | ۱۲/۷۱۳ | ۲۵/۷۵۷ | ۵۲/۷۰۷ | ۰/۰۱ |
| ۵۰/۸۶ | ۵۰/۷۹۵ | ۵۰/۷۶۹ | ۱۲/۱۵۵ | ۲۴/۹۳۱ | ۵۰/۸ | ۱۰/۹۲۱ | ۲۱۰/۷۱۱ | ۰/۰۲ |
| ۱۱۴/۴۴۹ | ۱۱۴/۰۹ | ۱۱۲/۹۹۲ | ۲۷/۲۹۹ | ۵۵/۹۹۵ | ۱۱۴/۱۰۲ | ۲۳۱/۱۶۷ | ۴۷۳/۶۵۷ | ۰/۰۳ |
| ۲۰۳/۴۶۵ | ۲۰۳/۳۳۳ | ۲۰۲/۰۶۲ | ۴۸/۰۴۳ | ۹۹/۲۹۷ | ۲۰۲/۳۵۵ | ۴۰۹/۹۵۸ | ۸۴۰/۹۸۹ | ۰/۰۴ |
| ۳۱۷/۹۱۴ | ۳۱۵/۱۶ | ۳۱۴/۵۴۳ | ۷۵/۳۷۴ | ۱۵۴/۶۵۴ | ۳۱۵/۱۹۴ | ۶۳۸/۵۵ | ۱۳۱۱/۹۹۳ | ۰/۰۵ |

جدول ۳- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت برای ورق باله تکیه‌گاه گیردار و $n=1$

| [۱۸] CPT | [۲۲] FSDT | [۶] HSDT | مقاله حاضر (FSDT) | | | | | |
|-------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|-----------|--------------|------------|-------|
| $\mu = 0$ | $\mu = 0$ | $\mu = 0$ | $\mu = 1$ | $\mu = +0/5$ | $\mu = 0$ | $\mu = -0/5$ | $\mu = -1$ | h/a |
| ۵۹/۰۷ | ۵۹/۰۶ | ۵۹/۰۴ | ۱/۴۱۳ | ۲/۸۹۸ | ۵/۹۰۶ | ۱۱/۹۶۶ | ۲۴/۴۸۴ | ۰/۰۱ |
| ۲۳/۶۳ | ۲۳/۰۳ | ۲۳/۵۹۲ | ۵/۶۴۸ | ۱۱/۵۸۵ | ۲۳/۶۰۵ | ۴۷/۸۲۵ | ۹۷/۹۰۲ | ۰/۰۲ |
| ۵۳/۱۶۹ | ۵۳/۰۹ | ۵۲/۹۸۹ | ۱۲/۶۸۹ | ۲۶/۰۲۷ | ۵۳/۰۳۵ | ۱۰/۷/۴۴۷ | ۲۲۰/۱۰۶ | ۰/۰۳ |
| ۹۴/۵۲ | ۹۴/۰۸۱ | ۹۳/۹۷۱ | ۲۲/۵۰۸ | ۴۶/۱۷۲ | ۹۴/۰۹۱ | ۱۹۰/۸۲۳ | ۳۹۰/۸۷۷ | ۰/۰۴ |
| ۱۴۷/۶۹۴ | ۱۴۶/۸۱۵ | ۱۴۶/۳۶۸ | ۳۵/۰۶۹ | ۷۱/۹۴۹ | ۱۴۶/۶۳۱ | ۲۹۷/۰۶۲ | ۶۰۹/۹۲۸ | ۰/۰۵ |

جدول ۴- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی متغیر برای ورق باله تکیه‌گاه گیردار و $n=0$

| [۱۸] CPT | [۲۲] FSDT | [۶] HSDT | مقاله حاضر (FSDT) | | | | | |
|-------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|-----------|--------------|------------|-------|
| $\mu = 0$ | $\mu = 0$ | $\mu = 0$ | $\mu = 1$ | $\mu = +0/5$ | $\mu = 0$ | $\mu = -0/5$ | $\mu = -1$ | h/a |
| ۲۵/۴۳۳ | ۲۵/۴۲۹ | ۲۵/۴۱۶ | ۶/۰۸۴ | ۱۲/۴۷۹ | ۲۵/۴۲۷ | ۵۱/۵۱۴ | ۱۰/۵/۴۱۵ | ۰/۰۱ |
| ۱۰۱/۴۵۵ | ۱۰۱/۵۹ | ۱۰۱/۵۳۸ | ۲۴/۳۱۱ | ۴۹/۸۶۲ | ۱۰۱/۶۰۱ | ۲۰۵/۴۲۲ | ۴۲۱/۴۲۲ | ۰/۰۲ |
| ۲۲۸/۸۹۸ | ۲۲۸/۱۸ | ۲۲۷/۹۸۴ | ۵۴/۵۹۸ | ۱۱۱/۹۹ | ۲۲۸/۰۵ | ۴۶۲/۴۳۴ | ۹۴۷/۳۱۵ | ۰/۰۳ |
| ۴۰۵/۸۲۱ | ۴۰۴/۶۶۶ | ۴۰۴/۱۲۳ | ۹۶/۰۷ | ۱۹۸/۵۹۵ | ۴۰۴/۱۱ | ۸۱۹/۹۱۶ | ۱۶۸۱/۹۷۹ | ۰/۰۴ |
| ۶۳۵/۸۲۸ | ۶۳۰/۳۲ | ۶۲۹/۰۸۵ | ۱۵۰/۷۴۹ | ۳۰۹/۳۰۹ | ۶۳۰/۰۳۸۹ | ۱۲۷۷/۱۰۱ | ۲۶۲۳/۹۸۶ | ۰/۰۵ |

جدول ۵- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی متغیر برای ورق باله تکیه‌گاه گیردار و $n=1$

| [۱۸] CPT | [۲۲] FSDT | [۶] HSDT | مقاله حاضر (FSDT) | | | | | |
|-------------|--------------|-------------|-------------------|--------------|-----------|--------------|------------|-------|
| $\mu = 0$ | $\mu = 0$ | $\mu = 0$ | $\mu = 1$ | $\mu = +0/5$ | $\mu = 0$ | $\mu = -0/5$ | $\mu = -1$ | h/a |
| ۱۵۳۷۸ | ۱۵۱/۷۳ | ۱۵۱۳۷۱ | ۲/۶۷۹ | ۷/۵۴۶ | ۱۵۳۷۶ | ۳۱/۱۵۳ | ۶۳/۷۴۸ | ۰/۰۱ |
| ۶۱/۵۱۲ | ۶۱/۴۴ | ۶۱/۴۱۸ | ۱۴/۰۷۵ | ۳۰/۱۵۹ | ۶۱/۴۵۳ | ۱۲۴/۰۳ | ۲۵۴/۸۷۱ | ۰/۰۲ |
| ۱۳۸/۴۳۳ | ۱۳۸/۰۳۷ | ۱۳۷/۹۴۷ | ۳۳/۰۳۴ | ۶۷/۷۵۶ | ۱۳۸/۰۶۷ | ۲۷۹/۷۲ | ۵۷۳/۰۰۷ | ۰/۰۳ |
| ۲۶۴/۰۵ | ۲۴۴/۸۹۷ | ۲۴۴/۶۳۷ | ۵۸/۰۵۶ | ۱۲۰/۰۲۰ | ۲۴۴/۰۹۵ | ۴۹۶/۲۵۴ | ۱۰۱۷/۵۸ | ۰/۰۴ |
| ۲۸۴/۴۵۳ | ۳۸۱/۶۴۶ | ۳۸۱/۰۴۳ | ۹۱/۲۹۶ | ۱۸۷/۰۳۰ | ۳۸۱/۷۲۹ | ۷۷۳/۳۴۸ | ۱۵۸۷/۸۳۹ | ۰/۰۵ |

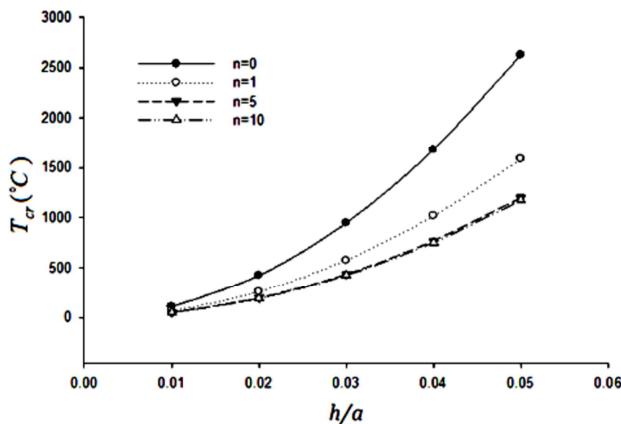
دماهی بحرانی کمانش با افزایش n کاهش می‌یابد که این کاهش از $n=1$ متوогف می‌شود. در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ نمودار دمای بحرانی کمانش T_{cr} ورق دایره‌ای بر حسب n در حالت بارگذاری حرارتی یکنواخت برای مقادیر مختلف μ رسم شده است. همانطوری که این نمودارها نشان می‌دهند دمای بحرانی کمانش با افزایش n برابر باشد که این افزایش برای مقادیر منفی μ بیشتر از مقادیر مثبت و صفر (حالت همگن) می‌باشد.

در شکل‌های ۱۳ و ۱۴ نمودار دمای بحرانی کمانش T_{cr} ورق دایره‌ای بر حسب n در حالت بارگذاری حرارتی غیریکنواخت برای مقادیر مختلف μ رسم شده است. همانطوری که این نمودارها نشان می‌دهند دمای بحرانی کمانش با افزایش n برابر باشد که این افزایش با افزایش n کاهش می‌یابد. در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نمودار دمای بحرانی کمانش T_{cr} ورق دایره‌ای بر حسب n در حالت بارگذاری حرارتی غیر یکنواخت برای مقادیر مختلف μ رسم شده است. همانطوری که این نمودارها نشان می‌دهند دمای بحرانی کمانش با افزایش n برابر باشد که این افزایش برای مقادیر منفی μ بیشتر از مقادیر مثبت و صفر (حالت همگن) می‌باشد.

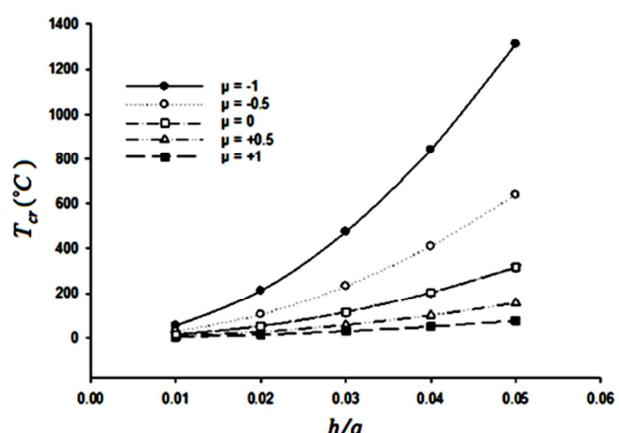
در شکل‌های ۱۷ و ۱۸ نمودار دمای بحرانی کمانش T_{cr} ورق دایره‌ای بر حسب n در حالت بارگذاری حرارتی غیریکنواخت برای مقادیر مختلف μ رسم شده است. همانطوری که این نمودارها نشان می‌دهند دمای بحرانی کمانش با افزایش n برابر باشد که این افزایش با افزایش n کاهش می‌یابد.

در شکل‌های ۱۹ و ۲۰ نمودار دمای بحرانی کمانش T_{cr} ورق دایره‌ای بر حسب n در حالت بارگذاری حرارتی به ترتیب یکنواخت و غیریکنواخت برای مقادیر مختلف μ رسم شده است. همانطوری که این نمودارها نشان می‌دهند دمای بحرانی کمانش با افزایش n برابر باشد که این افزایش برای مقادیر منفی μ بیشتر از مقادیر مثبت و صفر (حالت همگن) می‌باشد.

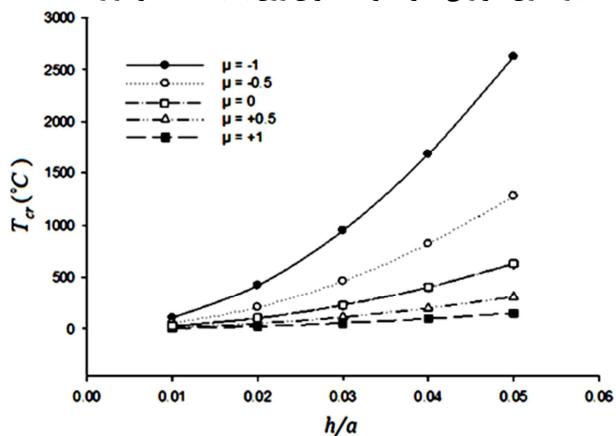
در شکل‌های ۲۱ و ۲۲ نمودار دمای بحرانی کمانش T_{cr} ورق دایره‌ای بر حسب n در حالت بارگذاری حرارتی به ترتیب یکنواخت و غیریکنواخت برای مقادیر مختلف μ رسم شده است. همانطوری که این نمودارها نشان می‌دهند دمای بحرانی کمانش با افزایش n برابر باشد که این افزایش برای مقادیر منفی μ بیشتر از مقادیر مثبت و صفر (حالت همگن) می‌باشد.



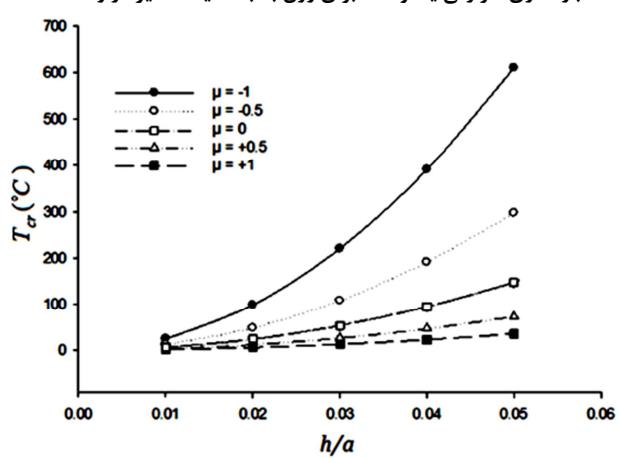
شکل ۶- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی غیریکنواخت برای ورق با لبه تکیه‌گیردار و $\mu = 1$



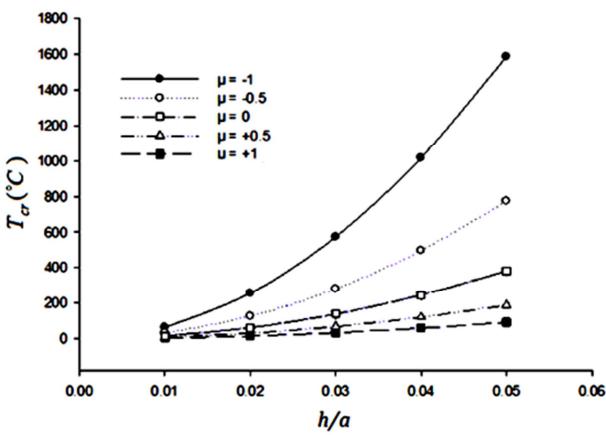
شکل ۳- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت برای ورق با لبه تکیه‌گاه گیردار و $n=1$



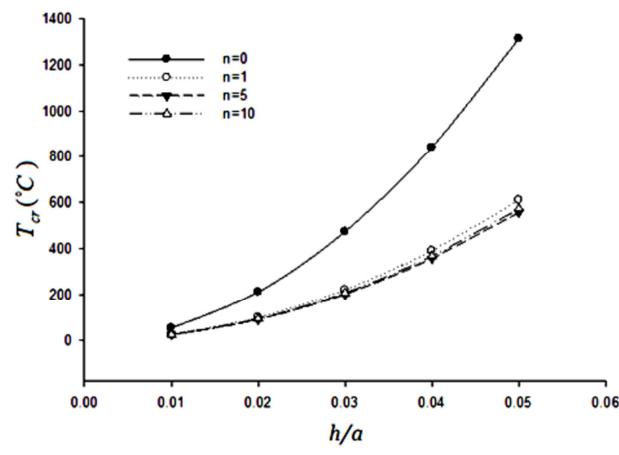
شکل ۷- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی غیریکنواخت برای ورق با لبه تکیه‌گیردار و $n=0$



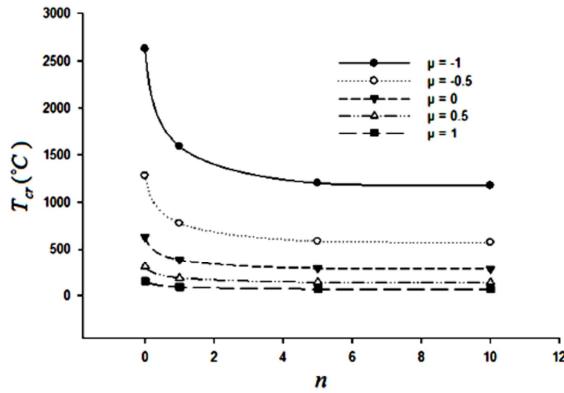
شکل ۴- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت برای ورق با لبه تکیه‌گیردار و $n=1$



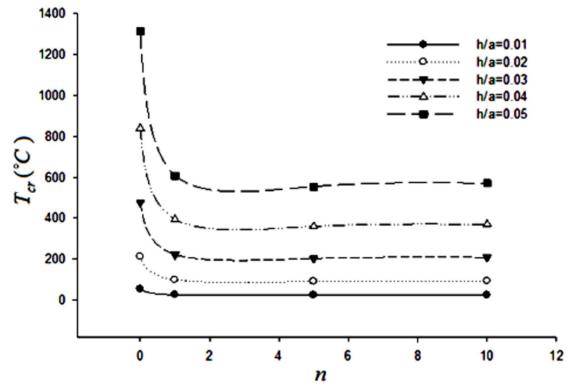
شکل ۸- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی غیریکنواخت برای ورق با لبه تکیه‌گیردار و $n=1$



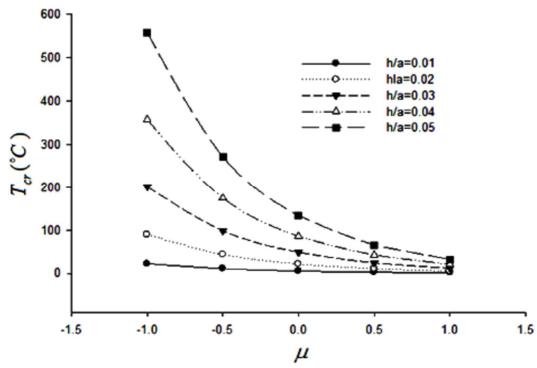
شکل ۵- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی غیریکنواخت برای ورق با لبه تکیه‌گیردار و $n=1$



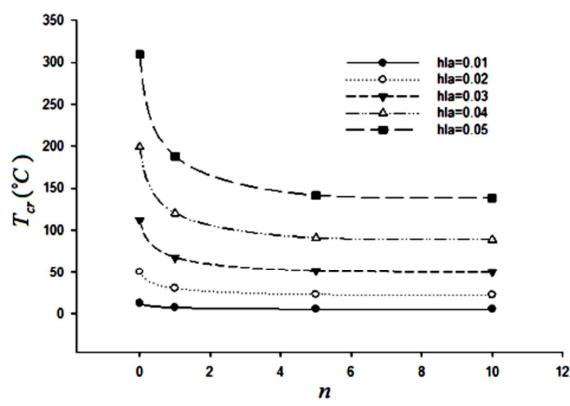
شکل ۱۲- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت برای ورق بالبه تکیه‌گاهی گیردار و $h/a=0.05$



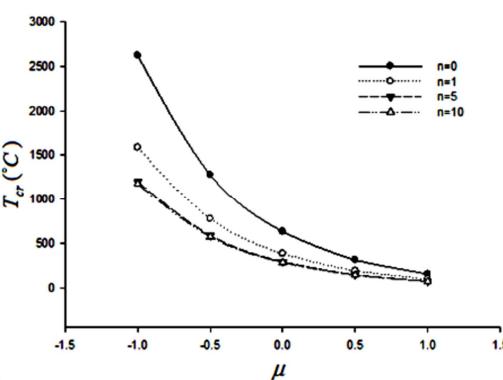
شکل ۹- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت برای ورق بالبه تکیه‌گاهی گیردار و $\mu = -1$



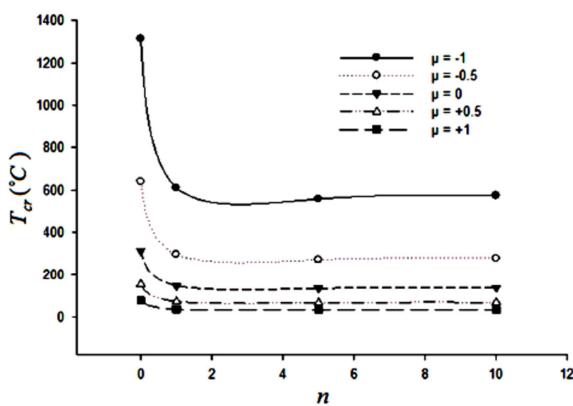
شکل ۱۳- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت برای ورق بالبه تکیه‌گاهی گیردار و $n=5$



شکل ۱۰- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی غیریکنواخت برای ورق بالبه تکیه‌گاهی گیردار و $\mu = 0.5$

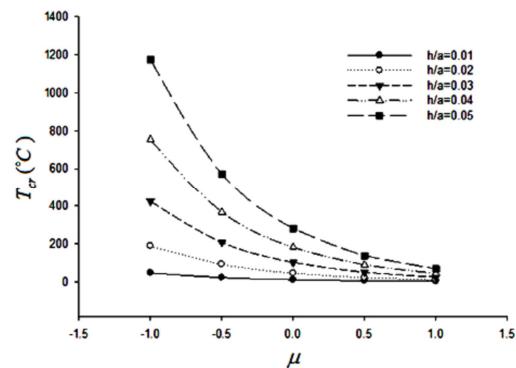


شکل ۱۴- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری یکنواخت برای ورق بالبه تکیه‌گاهی گیردار و $h/a=0.05$

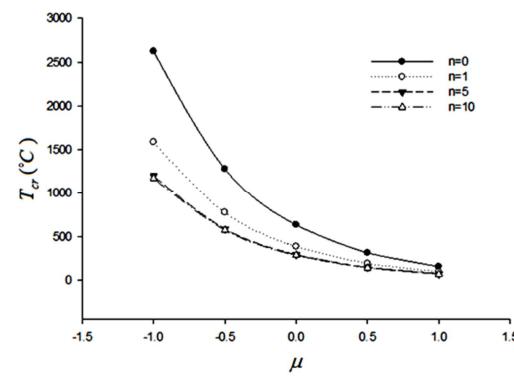


شکل ۱۱- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری یکنواخت برای ورق بالبه تکیه‌گاهی گیردار و $h/a=0.05$

- [3] Najafizadeh M. M., Heydari H.R., Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory, European Journal of Mechanics A/Solid 23(6): pp. 1085- 1100, 2004.
- [4] Ma L. S., Wang T.J., Nonlinear bending and post buckling of a functionally graded circular plate under mechanical and thermal loading. International Journal of Solid and Structures;40:3311–30, 2003.
- [5] Shahjerdi A., Bayat M., Mustapha F. Sapuan S.M., Zahari, R. Free Vibration Analysis of Functionally Graded Quadrangle Plates Using Second Order Shear Deformation Theory. Australian Journal of Basic and Applied Sciences. 4(5): pp. 893- 905, 2010.
- [6] Najafizadeh M. M., Heydari H.R., An exact solution for buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory under uniform radial compression. International Journal of Mechanical Sciences. 50(3): pp. 603- 612, 2008.
- [7] Ghiasian S. E., Kiani Y., Sadighi M., Eslami M. R., Thermal buckling of shear deformable temperature dependent circular/annular FGM plates. International Journal of Mechanical Sciences. 81, pp. 137-148, 2014.
- [8] Jabbari M., Joubaneh, E. F., Mojahedin A. Thermal buckling analysis of porous circular plate with piezoelectric actuators based on first order shear deformation theory. International Journal of Mechanical Sciences. 83, pp. 57-64, 2014.
- [9] Reddy J. N., Khdeir A. A., Buckling and vibration of laminated composite plate using various plate theories. AIAA Journal; 27(12): pp.1808-17, 1989.
- [10] Darvizeh M., Darvizeh A., Thermal buckling analysis of moderately thick composite cylindrical shells under axisymmetric thermal loading. Iranian Journal of Mechanical Engineering; 6(1): pp. 99-107, 2007
- [11] Najafizadeh M. M. Onvan, A. Mechanical buckling analysis of a FGM circular plate with actuator-actuator piezoelectric layers, based on neutral-Axis' position and using first-order shear deformation plate theory. Iranian Journal of Mechanical Engineering; 6(1): pp. 43-56, 2010
- [12] Krivevsky G., Stavsky Y., Refined theory for vibrations and buckling of laminated isotropic annular plates". International Journal of Mechanical Sciences.38(5): pp. 539-55, 1996.
- [13] Satouri S., Kargarnovin M. H., Allahkarimi F., Asanjarani A., Application of third order shear deformation theory in buckling analysis of 2D-functionally graded cylindrical shell reinforced by axial stiffeners. Composites Part B: Engineering. 79, pp. 236-253, 2015.
- [14] Shen H. S., Functionally Graded Materials: Nonlinear Analysis of Plates and Shells", CRC Press, Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2009.
- [15] Alipour M. M., Shariyat M., Stress Analysis of Two-directional FGM Moderately Thick Constrained Circular Plates with Non-uniform Load and Substrate Stiffness Distributions". Journal of Solid Mechanics Vol. 2, No. 4, pp. 316- 331, 2010.
- [16] Reddy J. N., Cheng Z.Q., Three dimensional trenchant deformations of functionally graded rectangular plates. European Journal of Mechanics A/Solids;20: pp. 841–855, 2001.
- [17] Brush D.O., Almroth B.O., Buckling of bars, plates and shells. New York: McGraw Hill; 1975.
- [18] Najafizadeh M. M., Eslami M.R., Buckling analysis of circular plates of functionally graded materials under uniform radial compression. International Journal of Mechanical Sciences 44(12): pp. 2479- 2493, 2002.
- [19] Suresh S., Mortensen A., Fundamentals of functionally graded materials, Barnes and Noble Publications; 1998.
- [20] Fuchiyama T., Noda N., Tsuji T., Obata Y., Analysis of thermal stress and stress intensity factor of functionally gradient materials". Ceramic Transactions Functionally Gradient Materials. 34: pp.425– 32, 1993.
- [21] Najafizadeh M. M., Eslami M. R., First-order theory- based thermoelastic stability of functionally graded material circular plates. AIAA Journal 40(7): pp. 1444- 1450, 2002.
- [22] Najafizadeh M. M., Hedayati B., Mechanical stability analysis of FGM circular plates using first order shear deformation theory. ISME Iranian Journal of Mechanical Engineering 5(1): pp. 18- 34, 2004.



شکل ۱۵- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی غیرتکنواخت برای ورق باله تکیه‌گیردار و $n=10$



شکل ۱۶- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای مدرج تابعی دو-جهته تحت بارگذاری حرارتی غیرتکنواخت برای ورق باله تکیه‌گیردار و $h/a=0.05$

۸- نتیجه گیری

در این مقاله دمای بحرانی کمانش حرارتی یک ورق دایره‌ای از جنس مواد تابعی دو-جهته تحت دو نوع بارگذاری حرارتی یکنواخت و غیرتکنواخت بر اساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات برای حالت باله‌گیردار مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج جداول و نمودارهای بخش قبل، به شرح ذیل قابل بررسی می‌باشد:

- ۱- دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای، با افزایش نسبت طول به ضخامت h/a افزایش می‌باید که این افزایش برای مقادیر منفی نسبت کسر حجمی μ بیشتر از مقادیر مثبت و صفر می‌باشد.
- ۲- در کاهش دمای بحرانی کمانش ورق دایره‌ای بر حسب نسبت کسر حجمی در جهت ضخامت n افزایش نسبت کسر حجمی در جهت شعاع μ بیشتر از یک تاثیری بر مقدار دمای بحرانی کمانش ندارد.
- ۳- نتایج حاصل از تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی به دلیل در نظر گرفتن چرخشهای در حالت خاص $\mu = 0$ به نتایج حاصل از تئوری مرتبه بالای تغییر شکل برشی نزدیکتر است. این موضوع نشان می‌دهد که جوابهای حاصل از دقت کافی برخوردار هستند.

۱۰- مراجع

- [1] Yamanouchi M., Koizumi M., Functionally gradient materials. Proceeding Of The First International Symposium On Functionally Graded Materials, 1991.
- [2] Najafizade, M. M., Eslami M.R., Thermoelastic Stability of orthotropic circular plates. Journal of Thermal Stresses 25(10): pp. 985- 1005, 2002.