

مقایسه روش‌های اجزای محدود متداول و توسعه یافته در پیش‌بینی شکست نمونه با شیار کلیدی شکل تحت بارگذاری مود ترکیبی

کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران
استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران
دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اصفهان، اصفهان، ایران

علیرضا نصرنیا
فرهاد حاجی ابوطالبی*
مهرداد پورسینا

چکیده

مواد ترد به علت سختی قابل توجه و هم‌چنین شکل‌پذیری اندک، کاربرد زیادی در صنایع گوناگون مانند اتوموبیل‌سازی، دریایی و هوایی دارند. بنابراین بررسی رفتار خرابی و شکست مکانیکی این مواد یکی از مهم‌ترین چالش‌های مهندسين و محققين است. هدف اصلی این مقاله مقایسه کارایی روش اجزای محدود توسعه یافته با روش اجزای محدود متداول در پیش‌بینی ایجاد و رشد ترک در یک ماده ترد می‌باشد. برای این منظور ابتدا با به کارگیری مدل‌های آسیب موجود در نرم‌افزار اجزای محدود ABAQUS بر مبنای روش اجزای محدود متداول و توسعه یافته، پیدایش و رشد ترک در یک نمونه گرافیتی دارای شیار کلیدی شکل شبیه‌سازی می‌گردد. سپس، مقادیر زاویه ایجاد ترک و حداکثر نیروی قابل تحمل در قطعه تحت شرایط مختلف بارگذاری ترکیبی پیش‌بینی شده، با نتایج تجربی مقایسه و اعتبارسنجی می‌گردد. مقایسه نتایج عددی حاصل از شبیه‌سازی‌های روش اجزای محدود متداول و توسعه یافته با نتایج تجربی آشکار می‌کند که در مقایسه با روش اجزای محدود متداول، روش اجزای محدود توسعه یافته علاوه بر کاهش هزینه محاسبات و هم‌چنین حساسیت به اندازه المان‌ها در المان‌بندی، از دقت بالاتری برخوردار بوده و کارایی بیشتری در پیش‌بینی ایجاد و رشد ترک در مواد ترد دارد.

واژه‌های کلیدی: روش اجزای محدود متداول، روش اجزای محدود توسعه یافته، شکست نمونه با شیار کلیدی شکل، بارگذاری مود ترکیبی.

Comparison of the Conventional and Extended Finite Element Methods in Fracture Prediction of Keyhole Notch Specimen under Mixed Mode Loading

A. Nasrnia Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran
F. Haji Aboutalebi Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran
M. Poursina Department of Mechanical Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

Abstract

Due to the noticeable stiffness and also very low deformability, brittle materials have vast application in the various industries such as automobile, navy, and aero. Therefore, investigation of failure behaviour and mechanical fracture of these materials is one of the most important challenges of the engineers and researchers. The main aim of this paper is to compare the performance of the extended finite element method (XFEM) with the conventional finite element method (CFEM) in prediction of crack initiation and propagation in a brittle material. For this purpose first, applying the damage models based on the CFEM and XFEM available in ABAQUS finite element software, crack onset and growth in a graphite specimen with keyhole notch is simulated. Then, values of crack initiation angle and maximum load capacity in the sample under different mixed mode loading conditions are predicted, compared with experimental results and validated. Comparison of the numerical results obtained from the CFEM and XFEM simulations with the empirical results reveals that the XFEM in addition to decreasing the computational costs and also reducing sensitivity to the element size in the mesh has higher accuracy and more performance in prediction of crack initiation and propagation in the brittle materials, compared with the CFEM.

Keywords: Conventional Finite Elements Method (CFEM), Extended Finite Element Method (XFEM), Fracture of Keyhole Notch Specimen, Mixed Mode Loading.

۱- مقدمه

در مواد ترد به دلیل سریع بودن مرحله رشد ترک و ناپایدار بودن آن، انرژی لازم برای پیدایش ترک بخش عمده‌ای از کل انرژی شکست را مصرف نموده، به گونه‌ای که انرژی مصرف شده در مرحله رشد ترک بسیار ناچیز می‌باشد.

نتایج تحقیقات مختلف در زمینه خرابی و شکست مواد ترد باعث پدید آمدن نظریه مکانیک شکست الاستیک خطی^۱ گردید [۱-۳]. مکانیک شکست الاستیک خطی هنگامی که ماده در دامنه شکست الاستیک

بوده و شکست آن بسیار ترد باشد نتایج خوبی را ارائه می‌نماید. از این‌رو، نظریه‌های شکست الاستیک غیرخطی مانند مدل ترک چسبنده^۲ و ترک الاستیک معادل نیز پیشنهاد گردید [۴]. یکی از محدودیت‌های مدل‌های پیشنهادی بالا این است که وجود ترک اولیه در قطعه لازم می‌باشد.

در ادامه، با پیوند میان تحلیل‌های مقاومت مصالح و مکانیک شکست، هیلبربرگ و همکاران مدلی ارائه نمودند که در آن نیازی به وجود ترک اولیه در قطعه نداشت [۵]. پس از آن اکثر پژوهش‌ها بر روی ارائه چهارچوب ریاضی مناسب مکانیک شکست متمرکز گردید [۶ و ۷]. در

²Cohesive Zone Model (CZM)

¹Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM)

آغاز قرن بیستم یکی از مهم ترین تحقیقات، تلاش برای مدل سازی ناپیوستگی در درون المان بود که در انتها منجر به پایه گذاری بنیان های روش اجزای محدود توسعه یافته^۱ گردید [۸].

در سال های اخیر بیشتر پژوهش های مرتبط با شکست مواد ترد، معطوف به ارائه معیارهای نظری شکست قطعات با شیارهای مختلف شده است [۹-۱۱]. شیارها به منظور اهداف مختلفی مانند اتصال دو قطعه طراحی و استفاده می گردند. تمرکز تنش به وجود آمده اطراف شیار باعث ایجاد ترک در مرزهای شیار می شود. تاکنون روش های مختلفی به منظور تصحیح ترک های ایجاد شده در مرز شیار پیشنهاد گردیده است. یکی از این روش ها، ایجاد سوراخ به اندازه طول ترک در ناحیه ترک خورده می باشد. با استفاده از این روش، شیارهای متداول U شکل تبدیل به شیارهای کلیدی و سوزنی شکل می گردند. کلیدی یا سوزنی شکل بودن شیارها، بستگی به نسبت شعاع انحنا شیار به طول ترک دارد. شیارهای کلیدی شکل در نسبت های بزرگ تر از یک و شیارهای سوزنی شکل در نسبت های کوچک تر از یک ایجاد می شوند. به علت تغییر هندسه شیار، توزیع تنش اطراف شیار نیز دچار تغییر گردیده، از این رو به منظور بارگذاری ایمن، لازم است بار شکست برای هندسه جدید نیز تخمین زده شود.

طی سالیان اخیر مطالعات فراوانی در زمینه پیش بینی شکست در قطعات دارای شیار کلیدی شکل انجام شده که پایه و اساس آن ها مبتنی بر ارائه روابط نظری و استفاده از روش اجزای محدود متداول^۲ استوار بوده است. در این بین می توان به ارائه معیار کمینه چگالی انرژی کرنشی^۳ توسط لازارین و همکاران [۱۲] و همچنین توسعه معیار بیشینه تنش مماسی^۴ توسط تراسی و پیرهادی اشاره نمود [۹].

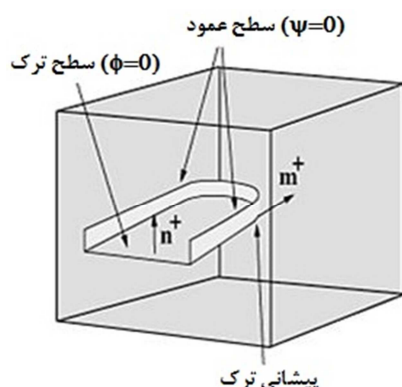
در پژوهش حاضر، به منظور مقایسه کارایی روش اجزای محدود توسعه یافته و متداول، مکانیزم جوانه زنی و رشد ترک در یک قطعه گرافیتی دارای شیار کلیدی شکل با استفاده از مدل های آسیب موجود در نرم افزار ABAQUS بر مبنای روش اجزای محدود توسعه یافته مورد مطالعه قرار می گیرد. سپس فرآیند شکست با استفاده از معیارهای روش اجزای محدود متداول نیز پیش بینی می شود. با مقایسه نتایج مسیر رشد ترک و همچنین نیروی لازم برای شکسته شدن نهایی قطعه با شیار کلیدی شکل پیش بینی شده توسط روش های اجزای محدود توسعه یافته و متداول با نتایج تجربی، به بررسی کارایی و دقت روش های بالا پرداخته می شود. مقایسه نتایج عددی و عملی آشکار می کند که روش اجزای محدود توسعه یافته ضمن کاهش قابل توجه حساسیت به المان بندی، از دقت بیشتر و بار محاسباتی کمتری نسبت به روش اجزای محدود متداول برخوردار می باشد. همچنین با مقایسه نتایج معیارهای روش اجزای محدود توسعه یافته، مشخص می گردد که معیارهای تنشی دارای دقت بهتری نسبت به معیارهای کرنشی می باشند.

۲- روش اجزای محدود توسعه یافته

روش اجزای محدود توسعه یافته در مقایسه با روش های مبتنی بر اجزای محدود متداول دارای برتری های بسیاری است. در روش های مبتنی بر اجزای محدود متداول برای مدل کردن ترک در شبکه، لازم است شبکه بندی با هندسه ناپیوستگی مطابقت داشته باشد. در هنگام شبیه سازی رشد ترک، به دلیل آن که در هر مرحله از رشد ترک باید شبکه بندی با هندسه ترک جدید تطابق داشته باشد، این محدودیت بیشتر احساس می گردد. به علاوه در روش های قبل برای محاسبه تکینگی در نوک ترک نیاز به استفاده از المان های بسیار ریز است که این امر باعث افزایش بار محاسباتی در مسئله خواهد گردید. روش اجزای محدود توسعه یافته با ارائه راهکاری جدید برای پیاده سازی ترک، توانسته بسیاری از عیوب مذکور را پشت سر بگذارد.

اولین بار بلچکو و بلک برای تعریف ناپیوستگی از تابع های غنی سازی^۵ استفاده نمودند [۸]. در این روش، از تابع های غنی شده مخصوص به همراه درجه های آزادی اضافی برای معرفی ترک به صورت غیرهندسی استفاده می شود. این تابع ها و درجه های آزادی اضافه گردیده، ناپیوستگی در میدان جابجایی و تنش بی نهایت را به صورت ریاضی به مدل اجزای محدود اضافه نموده و نیاز به وارد کردن ترک به صورت هندسی را برطرف می نمایند [۸]. پس از تحقیقات بلچکو و بلک، مویس و همکاران، مدلی ارائه نمودند که محدودیت های آن کمتر از مدل قبلی بود و همچنین در آن روشی برای مدل سازی گسترش ترک بدون نیاز به تغییر شبکه بندی پیشنهاد گردیده بود [۱۳].

در هنگام استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته، برای معرفی هندسه ترک از دو تابع علامت متعامد ϕ و ψ استفاده می گردد. تابع ϕ بیان گر سطح ترک و تابع ψ نشان دهنده سطح عمود بر سطح ترک می باشد. با تعریف بالا، تقاطع این دو تابع متعامد، جبهه ترک را بیان می نماید. مطابق شکل ۱، بردار n^+ جهت مثبت عمود بر سطح ترک و بردار m^+ جهت مثبت عمود بر جبهه ترک را نشان می دهد. تابع های ϕ و ψ در جهت مثبت سطوح دارای مقدار ۱، در جهت منفی مقدار -۱ و روی سطوح دارای مقدار صفر می باشند.



شکل ۱- تعریف جبهه ترک با دو تابع علامت ϕ و ψ [۱۴]

¹Extended Finite Element Method (XFEM)

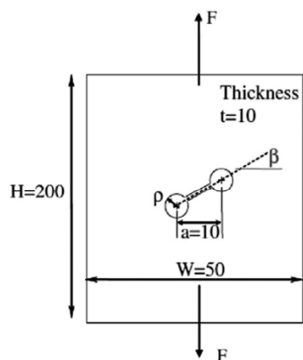
²Conventional Finite Element Method (CFEM)

³Minimum Strain Energy Density (MSED)

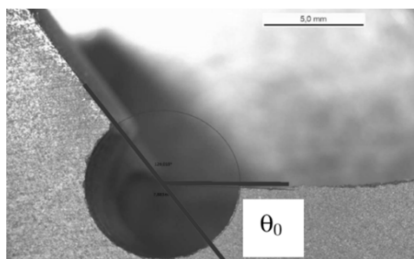
⁴Maximum Tangential Stress (MTS)

⁵Enrichment functions

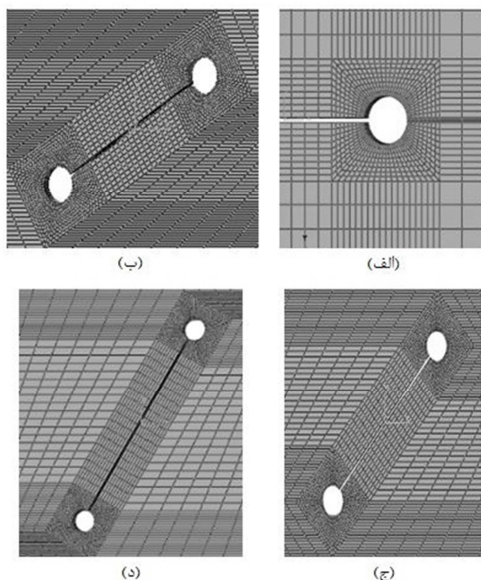
یک خالص (تغییر شکل کششی) به شیار اعمال گردیده و با افزایش زاویه بارگذاری، شرایط بارگذاری از حالت مود یک خالص به حالت مود ترکیبی تبدیل می‌شود. بارگذاری از نوع استاتیکی و درون صفحه‌ای بر روی شبکه‌ای متشکل از المان‌های سه‌بعدی پیوسته C3D8R اعمال می‌شود. شکل ۴ نحوه المان‌بندی قطعه را برای چهار راستای مختلف ۰، ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه نشان می‌دهد.



شکل ۲- هندسه و ابعاد قطعه شیاردار بر حسب میلی‌متر [۱۲]



شکل ۳- نحوه سنجش زاویه ایجاد ترک [۱۲]



شکل ۴- نحوه المان‌بندی نمونه با شیار کلیدی شکل (الف) بارگذاری مود اول خالص، (ب) راستای ۳۰ درجه، (ج) ۴۵ درجه و (د) ۶۰ درجه

به منظور پیش‌بینی شکست نمونه، مدل‌های شکست بر مبنای مکانیک آسیب معرفی شده در بخش قبل به کار گرفته شده و با استفاده از روش اجزای محدود توسعه یافته، نیرو و زاویه شکست به دست می‌آید. برای

۲-۱- معیارهای خرابی

هر معیار خرابی یا آسیب شامل سه مرحله، شروع، تکامل و رشد است. رابطه تنش- کرنش در المان بحرانی در ابتدا به صورت الاستیک خطی بوده، پس از رسیدن تنش یا کرنش به یک مقدار نهایی، افت تدریجی سفتی المان شروع شده و در نهایت با رسیدن سفتی به مقدار صفر، المان دچار تخریب کامل می‌گردد.

شروع خرابی به لحظه‌ای گفته می‌شود که پاسخ ماده در تعدادی از نقاط کاهش یابد. کاهش پاسخ ماده نیز زمانی شروع می‌شود که تنش‌ها یا کرنش‌ها، معیار مورد نظر را ارضاء نمایند.

نرم‌افزار ABAQUS برای مواد ترد دارای شش معیار آسیب مبتنی بر روش اجزای محدود توسعه یافته است. این مدل‌ها شامل معیار بیشینه تنش اصلی^۱، بیشینه کرنش اصلی^۲، بیشینه تنش نامی^۳، بیشینه کرنش نامی^۴، مربع تنش نامی^۵ و مربع کرنش نامی^۶ می‌باشند. در این معیارها تابعی عددی از تنش یا کرنش اصلی یا نامی تعریف شده و با رسیدن این تابع به مقدار ۱ یا بیشتر، خرابی در المان اتفاق می‌افتد [۱۴].

از میان معیارهای شش گانه بالا، تنها دو معیار اول (MPS و MPE) قادر به پیش‌بینی زاویه ایجاد ترک می‌باشند، بدین صورت که مطابق این معیارها ترک در راستای عمود بر تنش اصلی یا کرنش اصلی حداکثر ایجاد می‌شود. اما در سایر معیارها (MNE، MNS، QNE و QNS)، جهت ایجاد ترک قابل تشخیص نبوده و باید توسط کاربر تعیین گردد.

۳- شبیه‌سازی کشش قطعه با شیار کلیدی شکل

برای ارزیابی دقت معیارهای ارائه شده بر مبنای روش اجزای محدود توسعه یافته، آزمون کشش نمونه دارای شیار کلیدی شکل تحت بارگذاری‌های مختلف در نرم‌افزار ABAQUS مدل‌سازی می‌گردد. هدف از انجام این آزمون، پیش‌بینی ظرفیت تحمل بار کششی و همچنین مسیر ایجاد و رشد ترک در قطعات گرافیتی با شیار کلیدی- شکل می‌باشد. نتایج شبیه‌سازی بر پایه روش اجزای محدود توسعه یافته با نتایج شبیه‌سازی بر پایه روش اجزای محدود متداول و همچنین نتایج تجربی به دست آمده توسط لازارین و همکاران [۱۲] مقایسه می‌شود.

۳-۱- شبیه‌سازی توسط اجزای محدود توسعه یافته

به منظور پیش‌بینی ظرفیت بارکشی قابل تحمل و همچنین زاویه شکست در قطعه گرافیتی با شیار کلیدی شکل، هندسه نمونه مطابق با شکل ۲ در نرم‌افزار ایجاد می‌گردد. در این نمونه، شعاع سوراخ‌های انتهایی ρ ، فاصله افقی بین مرکز سوراخ‌ها a در نظر گرفته شده و زاویه ایجاد ترک θ_0 نیز مطابق شکل ۳ سنجیده می‌شود. با تغییر زاویه راستای شیار یا زاویه بارگذاری β ، ترکیب‌های متفاوتی از بارگذاری تحت مود اول و دوم ایجاد می‌شود. لازم به ذکر است زمانی که بار در امتداد نیمساز شیار اعمال گردد ($\beta = 0$)، تغییر شکل در شرایط مود

¹Maximum Principle Stress (MPS)

²Maximum Principle Strain (MPE)

³Maximum Nominal Stress (MNS)

⁴Maximum Nominal Strain (MNE)

⁵Quadratic Nominal Stress (QNS)

⁶Quadratic Nominal Strain (QNE)

این منظور، خواص مکانیکی مورد نیاز مطابق جدول ۱ تعریف می شود [۱۲]. هم چنین پارامترهای مورد استفاده در معیارهای آسیب توسط روابط موجود در مرجع [۱۴] مطابق جدول ۲، محاسبه گردیده و در معیارهای آسیب نرم افزار اعمال می شود.

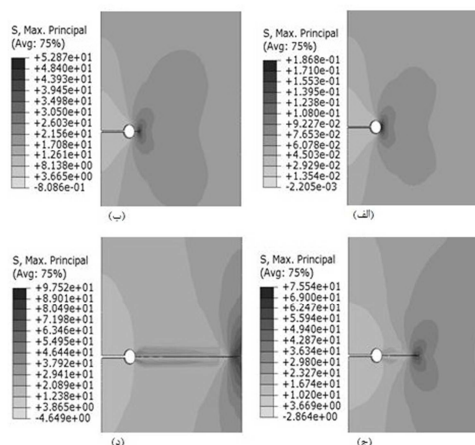
جدول ۱- خواص مکانیکی [۱۲]

مقدار	مشخصات ماده
۸۰۵۰	مدول الاستیسیته (MPa)
۳۳۵۴	مدول برشی (MPa)
۰/۲۰	ضریب پواسون
۴۶	استحکام نهایی کششی (MPa)
۳۰	استحکام نهایی پیچشی (MPa)
۱/۰۶	چقرمگی شکست مود یک ($MPam^{0.5}$)
۲/۸۴	چقرمگی شکست مود سه ($MPam^{0.5}$)

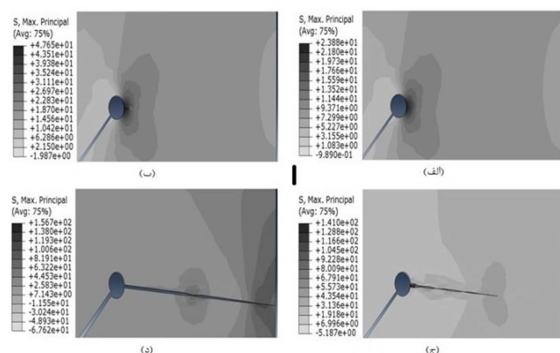
جدول ۲- خواص مکانیکی مورد نیاز معیارهای آسیب [۱۴]

مقدار	مشخصات ماده
۴۶	بیشینه تنش اصلی (MPa)
۰/۰۰۵۷۱۴	بیشینه کرنش اصلی
۴۵/۷۳	بیشینه تنش نامی عمودی (MPa)
۰/۰۰۵۷۳۰	بیشینه کرنش نامی عمودی
۲۹/۷۲۲	بیشینه تنش نامی برشی (MPa)
۰/۰۰۸۹۸۴	بیشینه کرنش نامی برشی
۰/۱۳۳۹	انرژی شکست مود یک ($MPam^{0.5}$)
۲/۳۰۸۵	انرژی شکست مود سه ($MPam^{0.5}$)

هر چند که در مواد ترد، مقدار انرژی شکست در مرحله رشد بسیار ناچیز است اما شبیه سازی برپایه روش اجزای محدود توسعه یافته، قادر به پیش بینی رشد ترک تا شکست نهایی می باشد. شکل های ۵ و ۶، مراحل پیدایش و رشد ترک تا شکست نهایی را برای قطعه با شیار کلیدی شکل تحت مود اول خاص و مود ترکیبی نمایش می دهد.



شکل ۵- مراحل رشد ترک در نمونه با شیار کلیدی شکل تحت بارگذاری مود یک خالص



شکل ۶- مراحل رشد ترک در نمونه با شیار کلیدی شکل تحت بارگذاری مود ترکیبی

۳-۲- شبیه سازی توسط اجزای محدود متداول

به منظور شبیه سازی با استفاده از روش اجزای محدود متداول و هم- چنین روابط نظری، از دو معیار حداکثر تنش مماسی و حداقل چگالی انرژی کرنشی استفاده می گردد.

۳-۲-۱- معیار حداکثر تنش مماسی

مطابق با این معیار شکست در ماده زمانی اتفاق می افتد که تنش مماسی در فاصله مشخصی از مرکز شیار به مقدار حداکثر که برابر با استحکام کششی است برسد [۱۲]. شرایط بارگذاری ترکیبی بر روی هندسه مشخص شده، به ازای بار آزمون کششی ۱۰۰۰N، در نرم افزار تعریف می گردد. با استفاده از مقادیر تنش به وجود آمده در رأس شیار به ازای بار آزمون ۱۰۰۰N و هم چنین روابط نظری مرجع [۱۲]، ضرایب شدت تنش محاسبه می گردند:

$$K_I^{key} = \frac{\sqrt{2\pi\rho}\sigma_{\max}}{3} \quad (1)$$

$$K_{II}^{key} = \lim_{r \rightarrow \rho} \left\{ \frac{\sqrt{2\pi\rho}\sigma_{r\theta}(r,0)}{[1+1.625(\rho/r) - 0.75(\rho/r)^2 - 1.875(\rho/r)^3]} \right\} \quad (2)$$

$$\frac{K_{eff,\rho}^{key}}{K_{eff,c}^{key,\rho}} = \frac{F_{app}}{F_{cr}} \quad (3)$$

$\sigma_{\max}$ و $\sigma_{r\theta}$ به ترتیب نشان دهنده فاصله بحرانی از مرکز شیار، شعاع شیار، استحکام کششی و تنش برشی می باشند. به علاوه $K_{eff,c}^{key,\rho}$ ، F_{app} و F_{cr} به ترتیب بیان گر ضریب شدت تنش معادل مربوط به بار آزمون ۱۰۰۰N، ضریب شدت تنش معادل مربوط به نیروی شکست، نیروی آزمون ۱۰۰۰N و نیروی شکست هستند.

با مقایسه ضرایب به دست آمده با ضرایب بحرانی و منحنی های شکست پیش بینی شده توسط ترابی و پیرهادی [۹] و هم چنین استفاده از رابطه ۳، ظرفیت تحمل نیرو پیش بینی می گردد. مراحل ذکر شده به ازای زوایای بارگذاری مختلف ۰، ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه تکرار می گردند. مطابق با این معیار زاویه ایجاد ترک در راستای عمود بر تنش مماسی حداکثر می باشد. از آنجایی که مرحله رشد ترک در مواد ترد انرژی ناچیزی

مصرف می‌کند، از این رو ترک در همان جهتی که ایجاد می‌شود گسترش نیز می‌یابد.

۳-۲-۲- معیار حداقل چگالی انرژی کرنشی

مطابق با این معیار شکست زمانی اتفاق می‌افتد که چگالی انرژی کرنشی در حجم کنترل مشخصی در اطراف شیار به مقدار بحرانی برسد. این مقدار بحرانی با استفاده از خواص ماده و مطابق با رابطه زیر تعریف می‌شود [۱۲]:

$$W_c = \frac{\sigma_u^2}{2E} \quad (4)$$

در رابطه بالا، E و W_c به ترتیب نشان‌دهنده استحکام کششی، مدول الاستیک و چگالی انرژی کرنشی ماده می‌باشند. برای محاسبه نیروی شکست، مانند معیار قبل، شرایط بارگذاری ترکیبی بر روی نمونه به‌ازای بار آزمون کششی $N = 1000$ ، در نرم‌افزار اعمال می‌گردد. چگالی انرژی کرنشی در طول حجم کنترل مشخص که وابسته به خواص ماده بوده نیز با استفاده از معادله (۵) قابل محاسبه می‌باشد:

$$R_0 = \frac{(1+\nu)(5-8\nu)}{4\pi} \left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_u} \right)^2 \quad (5)$$

K_{Ic} و ν به ترتیب نشان‌دهنده چقرمگی شکست و ضریب پواسون می‌باشند. محل قرارگیری حجم کنترل هلالی شکل در مود اول خالص در راستای محور تقارن و به‌اندازه مشخص R_0 از راس شیار می‌باشد. در حالت بارگذاری ترکیبی، شعاع حجم کنترل بدون تغییر باقی مانده اما راستای قرارگیری آن در جهت تنش اصلی حداکثر می‌باشد. در نهایت با استفاده از رابطه زیر نیروی شکست تعیین می‌گردد:

$$\frac{\bar{W}}{W_{cr}} = \left(\frac{F_{app}}{F_{cr}} \right)^2 \quad (6)$$

که در آن $\bar{W}$ ، W_{cr} ، F_{app} و F_{cr} به ترتیب نشان‌دهنده چگالی انرژی کرنشی به‌ازای نیروی آزمون $N = 1000$ ، چگالی انرژی بحرانی، نیروی آزمون $N = 1000$ و نیروی شکست می‌باشند. مطابق با این معیار ترک در راستای عمود بر تنش اصلی حداکثر ایجاد می‌شود [۱۲]. همان‌گونه که برای معیار قبل نیز بیان شد، از آنجایی که مرحله رشد ترک در مواد ترد انرژی ناچیزی مصرف می‌کند، از این رو ترک در همان جهتی که ایجاد می‌شود گسترش نیز خواهد یافت. با انجام شبیه‌سازی‌های عددی و روابط نظری ارائه شده، مقادیر زاویه ایجاد ترک و نیروی شکست بر مبنای روش اجزای محدود متداول نیز تعیین می‌گردد.

۴- نتایج

پس از انجام شبیه‌سازی‌ها، مقادیر زاویه ایجاد ترک و نیروی شکست بر مبنای دو روش اجزای محدود متداول و توسعه‌یافته حاصل گردید. در جدول‌های ۳ و ۴ به ترتیب مقادیر زاویه شکست پیش‌بینی شده توسط دو معیار روش اجزای محدود متداول (بیشینه تنش مماسی و کمینه چگالی انرژی کرنشی) و همچنین دو معیار مبتنی بر روش اجزای محدود توسعه‌یافته (بیشینه تنش اصلی و بیشینه کرنش اصلی) بیان شده و با نتایج حاصل از آزمون‌های تجربی مرجع [۱۲] مقایسه گردیده است. همچنین درصد خطای مربوط به پیش‌بینی هر معیار نسبت به مقدار تجربی متناظر آورده شده است. همان‌گونه که در

معرفی معیارهای اجزای محدود توسعه‌یافته بیان شد، از میان معیارهای شش‌گانه، تنها دو معیار (MPS و MPE) قادر به پیش‌بینی زاویه ایجاد ترک می‌باشند، بدین صورت که مطابق این معیارها ترک در راستای عمود بر تنش اصلی یا کرنش اصلی حداکثر ایجاد می‌شود. اما در سایر معیارها (QNE، QNS، MNE، MNS) جهت ایجاد ترک قابل تشخیص نبوده و باید توسط کاربر تعیین گردد. مطابق جدول‌های ۳ و ۴ هر دو روش اجزای محدود متداول و توسعه‌یافته از دقت مناسبی در پیش‌بینی زاویه ایجاد ترک در صفحات با شیار کلیدی شکل برخوردار می‌باشند.

جدول ۳- نتایج زاویه شکست پیش‌بینی شده توسط روش اجزای-

محدود متداول و نتایج تجربی [۱۲]					
β	θ_{Exp}	θ_{MTS}	%Err	θ_{MSED}	%Err
۳۰	۳۶/۱۰	۳۸/۰۵	۵/۴۰	۳۲/۰۹	۱۱/۱۱
۴۵	۴۹/۶۰	۵۴/۹۷	۱۰/۸۳	۴۷/۴۵	۴/۳۳
۶۰	۶۳/۷۰	۵۹/۰۱	۷/۳۶	۶۷/۳۰	۵/۶۵

جدول ۴- نتایج زاویه شکست پیش‌بینی شده توسط روش اجزای-

محدود توسعه‌یافته و نتایج تجربی [۱۲]					
β	θ_{Exp}	θ_{MPS}	%Err	θ_{MPE}	%Err
۳۰	۳۶/۱۰	۳۲/۰۹	۱۱/۱۱	۳۳/۷۵	۶/۵۱
۴۵	۴۹/۶۰	۴۷/۴۵	۴/۳۳	۴۷/۲۲	۴/۸۰
۶۰	۶۳/۷۰	۶۷/۳۰	۵/۶۵	۷۰/۹۸	۱۱/۴۳

در جدول‌های ۵ و ۶ نیز به ترتیب مقادیر نیروی شکست پیش‌بینی شده توسط روش اجزای محدود متداول (بیشینه تنش مماسی و کمینه چگالی انرژی کرنشی) و همچنین شش معیار مبتنی بر روش اجزای محدود توسعه‌یافته (بیشینه تنش اصلی، بیشینه کرنش اصلی، بیشینه تنش نامی، بیشینه کرنش نامی، مربع تنش نامی و مربع کرنش نامی) بیان شده و با نتایج حاصل از آزمون‌های تجربی مرجع [۱۲] مقایسه گردیده است. درصد خطای مربوط به پیش‌بینی هر معیار نسبت به مقدار تجربی متناظر نیز آورده شده است.

با مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی بر پایه دو روش اجزای محدود متداول و توسعه‌یافته، مشخص می‌گردد که اگرچه هر دو روش ظرفیت تحمل نیرو در صفحات با شیار کلیدی شکل و حالت بارگذاری ترکیبی را با دقت مناسب تخمین زده‌اند، اما معیارهای تنش مبتنی بر روش اجزای محدود توسعه‌یافته ضمن داشتن دقت بالاتر نسبت به روش‌های مبتنی بر اجزای محدود متداول، باعث کاهش مشکلات این روش اعم از الزام به دراختیار داشتن منحنی‌های شکست به‌منظور پیش‌بینی ایجاد ترک، وابستگی به نحوه المان‌بندی و هزینه محاسباتی بالا می‌گردند.

علاوه بر این، در مدل‌هایی که روش اجزای محدود توسعه‌یافته استفاده می‌گردد، هرچند که مرحله رشد ترک سهم ناچیزی از انرژی شکست

جدول ۶- نتایج نیروی شکست پیش‌بینی شده توسط معیارهای روش اجزای محدود توسعه یافته و نتایج تجربی [۱۲]

β	F_{Exp}	F_{MPS}	F_{MPE}	F_{MNS}	F_{MNE}	F_{QNS}	F_{QNE}	%Err	%Err	%Err	%Err	%Err
[۱۲]	(KN)	(KN)	(KN)	(KN)	(KN)	(KN)	(KN)					
۰	۳/۹۹	۳/۹۲	۴/۴۰	۳/۷۱	۷/۰۲	۴/۵۰	۱۲/۷۸	۳/۷۲	۶/۷۷	۴/۴۷	۱۲/۰۳	
۳۰	۴/۱۳	۳/۹۰	۴/۳۵	۳/۹۲	۵/۰۸	۴/۴۴	۷/۵۱	۳/۹۱	۵/۳۳	۴/۴۱	۶/۷۸	
۴۵	۴/۱۲	۳/۸۶	۴/۶۵	۳/۸۵	۶/۵۵	۴/۷۲	۱۴/۵۶	۳/۸۳	۷/۰۴	۴/۴۶	۸/۲۵	
۶۰	۴/۱۱	۳/۹۶	۴/۵۳	۳/۹۰	۵/۱۱	۴/۳۷	۶/۳۳	۳/۸۴	۶/۵۷	۴/۳۶	۶/۰۸	

۶- مراجع

- [1] Griffith A.A., The phenomenon of rupture and flow in solids, philosophical transactions, Vol. 221, pp. 163-198, 1920.
- [2] Irwin G.R., Analysis of stress and strains near the end of a crack traversing a plate, Applied Mechanics, Vol. 24, pp. 109-114, 1957.
- [3] Rice J.R., Path-independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and crack, Applied Mechanics Transactions Vol. 35, pp. 379-386, 1968.
- [4] Barenblatt G., The mathematical theory of equilibrium cracks in brittle fracture, Advances in Applied Mechechanics, Vol. 7, pp. 55-129, 1962.
- [5] Hillerborg A., Modeer M., Petersson P., Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements, Cement and Concrete Research, Vol. 6, pp. 773-782, 1976.
- [6] Carter B.J., Lajtai E.Z., Ayari M.L., Criteria for brittle fracture in compression, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 37, pp. 59-74, 1990.
- [7] Fischer K.F., Review of brittle fracture criteria in case of static and cyclic mixed mode loading, Theoretical and Applied Fracture Mechanics, Vol. 1, pp. 117-131, 1984.
- [8] Belytschko T., Black T., Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing, Numerical Method in Engineering, Vol. 45, pp. 601-620, 1999.
- [9] Torabi A.R., Pirhadi E., Stress-based criteria for brittle fracture in key-hole notches under mixed mode loading, European Journal of Mechanics and Solids, Vol. 49, pp. 1-12, 2014.
- [10] Berto F., Campagnolo A., Ayatollahi M., V-notches subjected to combined tension and torsion loadings: the application of the fictitious notch rounding concept", Engineering Fracture Mechanics, Vol. 148, pp. 82-96, 2015.
- [11] Campagnolo A., Berto F., Leguillon D., Lagoda T., Mode II loading in sharp V-notched components: a comparison among some recent criteria for brittle fracture assessment, Procedia Structural Integrity, Vol. 2, pp. 1845-1852, 2016.
- [12] Lazzarin P., Berto F., Ayatollahi A.R., Brittle failure of inclined key-hole notches in isostatic graphite under in-Plane mixed mode loading, Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures, Vol. 36, pp. 942-955, 2013.
- [13] Moes N., Dolbow J., Belytschko T., A finite element method for crack growth without remeshing, Numerical Method in Engineering, Vol. 149, pp. 131- 150, 1999.
- [14] ABAQUS 6.14 Help Documentation. ABAQUS Theory Manual.

مصرفی را شامل می‌شود اما مرحله پیدایش و رشد ترک تا شکست نهایی در نظر گرفته خواهد شد. با مقایسه نیروی منجر به شکست که توسط معیارهای مبتنی بر روش اجزای محدود توسعه یافته پیش‌بینی شده، می‌توان نتیجه گرفت معیارهایی که مؤلفه‌های آن‌ها بر اساس تنش نوشته می‌شود (MNS، MPS، QNS) از دقت بالاتری نسبت به معیارهای کرنشی (MNE، MPE، QNE) برخوردار می‌باشند. کمترین خطا در محاسبه نیروی شکست برابر با ۱/۷۵ درصد، متعلق به معیار بیشینه تنش اصلی و همچنین بیشترین خطا برابر با ۱۴/۵۶ درصد، مربوط به معیار بیشینه کرنش نامی است. معیارهای مبتنی بر روش اجزای محدود متداول (MTS و MSSED) نیز عملکردی مابین معیارهای تنشی و کرنشی داشته، به گونه‌ای که میانگین درصد خطای آن‌ها در نیروی شکست به ترتیب برابر با ۵/۰۶ و ۵/۲۶ درصد است.

جدول ۵- نتایج نیروی شکست پیش‌بینی شده توسط روش اجزای-

محدود متداول و نتایج تجربی [۱۲]					
β	F_{Exp}	F_{MTS}	%Err	F_{MSSED}	%Err
[۱۲]	(KN)	(KN)		(KN)	
۰	۳/۹۹	۴/۳۹	۱۰/۰۳	۴/۲۰	۵/۲۶
۳۰	۴/۱۳	۴/۳۰	۴/۱۲	۴/۴۸	۸/۴۷
۴۵	۴/۱۲	۴/۰۰	۲/۹۱	۴/۳۱	۴/۶۱
۶۰	۴/۱۱	۳/۹۸	۳/۱۶	۴/۲۲	۲/۶۸

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش با مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی ایجاد و رشد ترک در یک نمونه گرافیتی دارای شیار کلیدی شکل به روش اجزای محدود توسعه یافته و متداول با نتایج آزمون‌های تجربی، آشکار گردید که معیارهای تنشی (MNS، MPS، QNS) از دقت بهتری نسبت به معیارهای کرنشی (MNE، MPE، QNE) و همچنین معیارهای مبتنی بر روش اجزای محدود متداول (MTS و MSSED) برخوردار می‌باشند. معیارهای مبتنی بر روش اجزای محدود متداول عملکردی مابین معیارهای اجزای محدود تنشی و کرنشی دارند به گونه‌ای که دقت آن‌ها نسبت به معیارهای تنشی کمتر و نسبت به معیارهای کرنشی بیشتر است. به علاوه با مقایسه معیارهای مبتنی بر روش اجزای محدود توسعه یافته و متداول مشخص گردید که روش اجزای محدود توسعه یافته ضمن کاهش بار محاسباتی و حساسیت به نحوه المان‌بندی، نیازی به در اختیار داشتن روابط نظری و همچنین منحنی‌های شکست مورد نیاز در روش اجزای محدود متداول ندارد.