

## ارزیابی جرم افزوده ی یک وسیله زیر آبی با استفاده از روش المان مرزی

داوود میرزایی\*  
علی جعفریان  
محمدعلی بدری  
احمد رضا زمانی

کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران  
دانشجوی دکتری، پژوهشکده علوم و تکنولوژی زیردریا، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران  
استادیار، پژوهشکده علوم و تکنولوژی زیردریا، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران  
استادیار، پژوهشکده علوم و تکنولوژی زیردریا، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ایران

### چکیده

در پژوهش حاضر ضرایب جرم افزوده یک وسیله زیرآبی با استفاده از روش المان مرزی محاسبه شده است. جریان سیال با استفاده از روش المان مرزی بر روی شبکه‌ی مثلثی توسط نرم‌افزار GAMBIT تولید و سپس در کد المان مرزی حل می‌شوند و پس از آن ضرایب ماتریس جرم افزوده محاسبه گردیده اند. به منظور صحت سنجی کد، ضرایب جرم افزوده‌ی کره و بیضیگون با نسبت منطری مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل برای کره و بیضیگون با نتایج تحلیلی مقایسه و نشان داده شده است که حل المان مرزی از دقت بسیار مناسبی برخوردار می‌باشد. پس از آن هندسه‌ی وسیله زیرآبی سابوف جهت نشان دادن کاربرد عملی و راهبردی پژوهش حاضر، شبیه‌سازی شده است. نتایج ضرایب جرم افزوده‌ی محاسبه‌شده با استفاده از روش المان مرزی با نتایج تجربی مقایسه گردیده است. نتایج حاصل تطابق بسیار مناسبی با نتایج تجربی برای سابوف را نشان می‌دهد. قابل ذکر است که در روش المان مرزی از اثرات لزجت، اغتشاش و گردابه‌ها صرف نظر شده و معادلات اویلر و لاپلاس برای حل جریان مورد استفاده قرار گرفته است.

واژه‌های کلیدی: جرم افزوده، وسیله زیر آبی، روش المان مرزی.

## Evaluation of Added Mass for an Underwater Vehicle Using Boundary Element Method

A. Jafarian  
D. Mirzaei  
M. A. Badri  
A. R. Zamani

Department of Mechanical Engineering, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran  
Subsea R&D center, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran  
Subsea R&D center, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran  
Subsea R&D center, Isfahan University of Technology, Isfahan, Iran

### Abstract

In this paper, added mass coefficients of an underwater vehicle were calculate using boundary element method. Fluid flow was solve using boundary element method on triangular meshes created by GAMBIT. For verification purposes, added mass coefficient of typical ellipsoid and sphere in various aspect ratios were considered. The results for typical ellipsoid and sphere were compared with analytical results. As an applicable research, Suboff submarine was investigated. Added mass coefficients of Suboff submarine which was determine by boundary element method was compare with experimental results then. The results show good consistency in comparison with experimental one.

**Keywords:** Added Mass, Underwater Vehicle, Boundary Element Method.

معادلات حرکت جسم را به شدت تحت تأثیر قرار دهد و با توجه به خصوصیات جسم و سیال باید با دقت محاسبه شوند. به عنوان مثال می‌توان به بالن‌ها، وسایل زیرآبی‌ها، AUV، کشتی‌های هوایی و ... اشاره نمود [۶].

با توجه به اینکه طراحی وسیله زیرآبی به صورت تجربی دارای هزینه‌های بسیار بالایی می‌باشند استفاده از شبیه‌سازی به منظور دستیابی به طراحی بهینه و نیز مدلسازی برای اعمال تغییرات و بهینه کردن پارامترهای طراحی امری ضروری است. هر یک از روش‌های مختلف شبیه‌سازی عددی دارای نقاط ضعف و قوت خاص خود می‌باشند. علاوه بر آن هر یک از این روشها با ساده سازی هایی همراه هستند [۷-۸].

با توجه به آنکه وسیله زیرآبی در جریانهای دریایی مختلفی قرار می‌گیرد و به منظور ساده سازی و استفاده از روشی که دارای سرعت بالایی باشد می‌توان فرض وجود جریان ایده‌آل را برای شبیه‌سازی

### ۱- مقدمه

زمانی که یک جسم درون آب شتاب می‌گیرد، حرکت جسم، سیال اطراف جسم را تحت تأثیر قرار می‌دهد. این امر سبب افزایش انرژی جنبشی سیال اطراف می‌گردد [۱]. در واقع مفهوم جرم افزوده به اینرسی سیال اطراف جسم که در اثر حرکت جسم ایجاد شده است اشاره دارد. در معادلات دینامیک حرکت و نیز شبیه‌سازی هیدرودینامیک حرکت یک جسم در سیال، باید جرم افزوده مد نظر قرار گیرد. البته برای حالتی که جرم سیال متحرک حول جسم به نسبت جرم جسم کم می‌باشد این عبارت قابل صرف نظر می‌باشد [۲-۴]. از این‌رو در جریانهای اجسام در هوا معمولاً اثرات جرم افزوده صرف نظر می‌شود. اما زمانی که جسم مانند وسیله زیرآبی در داخل آب حرکت می‌کند با توجه به بالا بودن چگالی آب و زیاد بودن جرم آب در هنگام حرکت وسیله زیرآبی، جملات جرم افزوده حائز اهمیت می‌شوند و باید منظور گردند [۵]. مقادیر جرم افزوده گاهاً ممکن است

\* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: davodmirzaee@gmail.com

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

یک مسأله‌ی مقدار مرزی نیاز به حل معادله‌ی (۱)، معادله‌ی لاپلاس و شرایط مرزی حاکم که شرط مرزی نیومن و یا دریکله می‌باشد دارد. شرایط مرزی حاکم بر روی صفحه C عبارت است از:

$$\phi = f_1(x, y) \quad \text{for } (x, y) \in C_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f_2(x, y) \quad \text{for } (x, y) \in C_2 \quad (3)$$

که توابع  $f_1$  و  $f_2$  توابع مشخص از  $x, y, z$  می‌باشند و صفحات  $C_1, C_2$  نیز روبه‌های می‌باشند که هیچ تداخلی با یکدیگر نداشته و اجتماع آنها روبه‌بسته‌ی C را تشکیل می‌دهند. همچنین مشتق نرمال نیز به صورت

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \phi}{\partial y} + n_z \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

تعریف می‌گردد که  $n_x, n_y, n_z$  به ترتیب مؤلفه‌های بردار نرمال بر C در جهت  $x, y, z$  می‌باشند. در اینجا بردار نرمال  $[n_x, n_y, n_z]$  به صورت عمود و خارج بر رویه‌ی R در نظر گرفته می‌شود. همچنین بردار نرمال بر روی نقاط مختلف بر روی روبه C متفاوت خواهد بود و از اینرو این بردار تابع  $x, y, z$  می‌باشد.

چنانچه رابطه‌ی ارائه شده در معادله‌ی حاکم با معادله انتگرالی حاصل از قضیه‌ی گرین جایگزین گردد، خواهیم داشت:

$$\int_s \frac{\partial G}{\partial n_q}(p, q) \phi(q) dS_q + \frac{1}{2} \phi(p) = \int_s G(p, q) \frac{\partial \phi}{\partial n_q} dS_q \quad (2)$$

که تابع G تابع گرین می‌باشد. تابع G به لحاظ فیزیکی عبارت است از یک تابع چشمه که در نقطه‌ی q وجود دارد و در نقطه‌ی p اثر آن بررسی می‌شود.

## ۲-۲- بیان اپراتوری روابط

به منظور بیان روابط انتگرال مرزی استفاده از روابط عملگری بسیار سودمند خواهد بود و علاوه بر آن درک و بیان معادلات حاکم را نیز ساده‌تر خواهد نمود. اگر  $\zeta$  یک تابع بر روی S باشد، در این صورت رابطه‌ی انتگرالی آن برای تمامی نقاط P بر روی ناحیه‌ی S به صورت زیر خواهد بود. بدین ترتیب به جای بیان رابطه به صورت فوق می‌توان از روابط عملگری استفاده نمود تا در نهایت تابع V بدست آید. از اینرو خواهیم داشت:

$$\int_s G(p, q) \zeta(q) dS_q = v(p) \quad (P \in S) \quad (3)$$

$$\{L\zeta\}_s(p) = v(p) \quad (4)$$

که در رابطه‌ی فوق L بیانگر یک عملگر انتگرالی می‌باشد. بنابراین رابطه‌ی انتگرالی در نهایت به صورت

$$\{M\phi\}_s(p) + \frac{1}{2}\phi(p) = \{Lv\}_s(p)$$

$$\left\{ \left( M + \frac{1}{2}I \right) \phi \right\}_s(p) = \{Lv\}_s(p)$$

رابطه  $v(q) = \frac{\partial \phi}{\partial n_q}$  و M عبارت است از:

$$\{M\zeta\}_\Gamma(p) = \int_\Gamma \frac{\partial G}{\partial n_q}(p, q) \zeta(q) dS_q \quad (7)$$

## ۲-۳- حل عددی معادلات انتگرالی

استفاده نمود. البته این فرض خطاهایی را نیز در شبیه‌سازی دخیل خواهد نمود اما سبب افزایش سرعت شبیه‌سازی خواهد شد. یکی از روشهایی که از فرض وجود جریان ایده آل برای شبیه‌سازی استفاده می‌کند روش المان مرزی است. این روش در ابتدا با حل جریان پتانسیل حول جسم های سه بعدی با هندسه های مختلف توسط هس و اسمیت استفاده گردید [۹]. در روش المان مرزی با استفاده از حل جریان ایده‌آل و چیده‌شدن المان‌ها در مرز، شبیه‌سازی انجام می‌شود. با توجه با اینکه در این روش تنها بر روی سطح جسم المان وجود دارد میزان محاسبات بسیار کمتر از روش‌هایی مانند المان محدود می‌باشد و سرعت حل جریان به طور چشمگیری افزایش می‌یابد [۱۰]. از توابع گرین در روش المان مرزی استفاده می‌گردد به صورتی که دو مزیت مهم دارد. در ابتدا حل عددی معادلات انتگرالی توسط تابع گرین ساده تر شده و در ادامه با استفاده از توابع گرین زمان حل مسئله کمتر می‌گردد [۱۱]. تا کنون کارهای مختلفی با استفاده از روش المان مرزی انجام شده است. در پژوهش [۱۲] برای محاسبه میزان جرم افزوده بدنه های پیچیده و مدولار شناور، از روش المان مرزی با درجه بالا استفاده گردیده است. به صورتی که از تابع گرین موج برای حل قسمت خطی مسئله استفاده گردیده است. همچنین برای بررسی برهمکنش مسائل انتشار و تفرق برای دو قایق مستطیلی شکل حل گردیده است. در سال ۲۰۱۱ قاسمی و یاری با استفاده از روش المان مرزی بر روی یک شبکه‌ی مستطیلی ضرایب جرم افزوده را برای اجسام مختلف مانند پروانه محاسبه نمودند [۱۳]. لین و لیاو در سال ۲۰۱۱ به منظور افزایش سرعت المان مرزی در تعداد المان‌های بالا، یک روش المان مرزی بهینه ارائه نمودند و روش خود را برای بدست آوردن مشخصات هیدرودینامیکی اجسام در آب مورد استفاده قرار دادند [۱۴]. پژوهش دیگری برای محاسبه ضرایب جرم افزوده پروانه های اسکویو دار زیردریایی از روش المان مرزی استفاده شده است. نتایج بدست آمده با توجه به عدم وجود نتایج تجربی با نتایج پروانه های سری B صحت سنجی گردیده است. همچنین نتایج نشان دهنده اثرات غالب قطر، مساحت گسترده شده و ضخامت نسبت به بقیه پارامترها بر جرم افزوده است [۱۵].

با توجه به آنکه هدف اصلی در پژوهش حاضر امکان تحلیل هیدرودینامیکی با سرعت بالا بر روی یک وسیله‌ی زیر آبی می‌باشد از روش المان مرزی بر روی شبکه‌ی سطحی مثلثی که توسط نرم‌افزار GAMBIT که یک نرم‌افزار قدرتمند در تولید شبکه‌های مختلف است استفاده شده است.

## ۲- روش المان مرزی

### ۲-۱- معادلات حاکم

در روش المان مرزی، مسأله‌ی لاپلاس که یک مسأله‌ی مقدار مرزی است حل می‌شود. در این حل از جملات لزجت معادله‌ی ناویر استوکس صرف نظر شده و جریان به صورت ایده‌آل بررسی خواهد شد. با تعریف تابع پتانسیل، معادله‌ی لاپلاس سه بعدی بر فیزیک جریان حاکم خواهد بود.

مقادیر دقیق برای توابع  $\phi$  و  $v$  در نقاط هم‌مکان خواهند بود. بدین ترتیب رابطه‌ی تقریبی بین نقاط دقیق را می‌توان به صورت رابطه‌ی دقیق بین نقاط تقریبی تفسیر نمود. جمله‌ی سمت راست در روابط بالا، بیانگر مقدار انتگرال معین می‌باشد که برای بدست آوردن سمت چپ معادله باید تعیین گردد.

روابط مربوط به توابع مورد استفاده در فرمول‌بندی المان مرزی عبارتند از:

$$\{L_k \zeta\}_\Gamma(p) \equiv \int_\Gamma G_k(p, q) \zeta(q) dS_q \quad (12)$$

$$\{M_k \zeta\}_\Gamma(p) \equiv \int_\Gamma \frac{\partial G_k}{\partial n_q}(p, q) \zeta(q) dS_q \quad (13)$$

$$\{M_k^t \zeta\}_\Gamma(p) \equiv \frac{\partial}{\partial u_p} \int_\Gamma G_k(p, q) \zeta(q) dS_q \quad (14)$$

$$\{N_k \zeta\}_\Gamma(p; u_p) \equiv \frac{\partial}{\partial u_p} \int_\Gamma \frac{\partial G_k}{\partial n_q}(p, q) \zeta(q) dS_q \quad (15)$$

که  $\Gamma$  نشان دهنده‌ی مرز یا بخشی از مرز می‌باشد.  $n_q$  بردار یکه‌ی نرمال بر  $\Gamma$  در نقطه‌ی  $q$  می‌باشد و  $G_k(p, q)$  تابع گرین می‌باشد. همچنین تابع گرین برای حالت سه بعدی و برای معادله‌ی لاپلاس عبارت است از  $G_k(p, q) = \frac{1}{4\pi r}$ . بدین ترتیب اپراتور  $L$  به صورت زیر تجزیه شده است:

$$\{L_k \zeta\}_\Gamma(p) \approx \{L_k \tilde{\zeta}\}_{\tilde{\Gamma}(p)} \approx \sum_{j=1}^n \int_{\Delta\Gamma_j} G_k(p, q) \tilde{\zeta}(p_j) dS_q \approx \quad (16)$$

$$\sum_{j=1}^n \left[ \tilde{\zeta}(p_j) \{L_k \tilde{e}\}_{\Delta\Gamma_j}(p) \right]$$

سایر انتگرالها به صورت گسسته شده بر روی هر المان نوشته شده و در نهایت با استفاده از روابط فوق مقادیر انتگرالی بدست آمده و در کد اعمال گردیده است. الگوریتم حل عددی جریان بر روی هندسه‌ی مورد نظر در شکل ۱ آورده شده است.

### ۳- نتایج

در این جا نتایج حل المان مرزی برای حالت های مختلف ارائه شده است.

#### ۳-۱- تعیین جرم افزوده کره

در اینجا یک کره با استفاده از نرم‌افزار GAMBIT شبکه بندی شده است. مرکز این کره بر روی مبدأ مختصات قرار دارد. شبکه بندی مورد نظر یک شبکه بندی مثلثی با صفحات مشخص می‌باشد. همچنین شرایط مرزی نیومن بر روی سطح اعمال شده است. سطح یک کره با شعاع ۱ متر شبکه بندی شده است. شبکه‌ی درشت دارای تعداد ۸۰ المان و تعداد نقاط روی سطح نیز برابر ۴۲ نقطه می‌باشد. پس از المان‌بندی سطح جسم، شرایط مرزی اعمال شده است. شرایط مرزی برای مسأله‌ی حاضر شرط مرزی نیومن است و سرعت حرکت کره  $1 \text{ m/s}$  می‌باشد. پس از حل جریان، ضرایب جرم افزوده برای کره بدست آمده است.

به منظور حل روابط انتگرالی به صورت عددی، روابط انتگرالی به صورت یک دستگاه معادلات خطی تبدیل شده اند. رابطه‌ای که به منظور حل دستگاه معادلات خطی مورد استفاده قرار گرفته به صورت  $(M + \frac{1}{2}I)\underline{\phi} = L\underline{v}$  معرفی شده است. که بردارهای  $\phi$  و  $v$  بیانگر

مقادیر  $\phi(p)$  و  $\frac{\partial \phi}{\partial n_q}(P)$  خواهد بود و  $M$ ،  $L$  و  $I$  نشان دهنده‌ی ماتریس‌های حل عددی می‌باشند برای تبدیل معادله‌ی انتگرالی به معادله‌ی جبری از روش نقطه‌ای استفاده شده است. در این روش بدنه مورد نظر به بخش‌های مختلف به نام المان تقسیم بندی شده است. پس از این تقسیم بندی معادلات انتگرالی حاکم به دستگاه معادلات جبری تبدیل شده اند. در این روش المانهای مورد نظر المانهای ثابت هستند. بدین معنی که خواص مورد نظر در کل المان ثابت در نظر گرفته شده و مقدار آن به مقدار مرکز سلول مورد نظر اختصاص یافته است.

#### ۲-۴- حل ناحیه مورد نظر

رابطه‌ی زیر بیانگر رابطه‌ی بین انتگرال مرزی و حل ناحیه‌ی مورد نظر می‌باشد:

$$\phi(p) = \int_S G(p, q) \frac{\partial \phi}{\partial n_q} dS_q - \int_S \frac{\partial G}{\partial n_q}(p, q) \phi(q) dS_q \quad (8)$$

در اینصورت بطور خلاصه خواهیم داشت  $\phi(p) = \{L\phi\}_S - \{Mv\}_S$  ( $p \in D$ ) رابطه‌ی انتگرالی قضیه‌ی گرین برای حل در ناحیه‌ی مورد نظر می‌باشد. در اینجا و در گام ابتدایی فرض شده که سطح  $S = \sum_{j=1}^N \Delta S_j$  از مرز به صورت پانل‌های مختلفی تشکیل شده است. مقادیر مساحت المانهای مختلف تشکیل دهنده‌ی کل سطح مرز جسم خواهند بود. در روش استفاده شده مقادیر بر روی هر المان ثابت فرض گردیده است.

$$\phi(p) \approx \bar{\phi}, \quad v(p) \approx \bar{v}_j \quad (9)$$

با جای‌گذاری در داخل انتگرال‌های معادلات حاکم، معادله‌ی حاکم به فرم گسسته تبدیل خواهد شد. با باز نویسی و ساده سازی معادله خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \left( M + \frac{1}{2}I \right) e \right\} \Delta S_j(p_i) \phi_j \approx \sum_{j=1}^n \{Le\} \Delta S_j(p_i) v_j \quad (10)$$

که  $e$  تابع یکه می‌باشد مقدار ثابت ذکر شده برای هر المان به مرکز آن سلول اختصاص داده شده است. با تعیین فرم گسسته‌ی مورد نظر برای روابط انتگرال مرزی دستگاه معادلات به صورت زیر تشکیل خواهد شد:

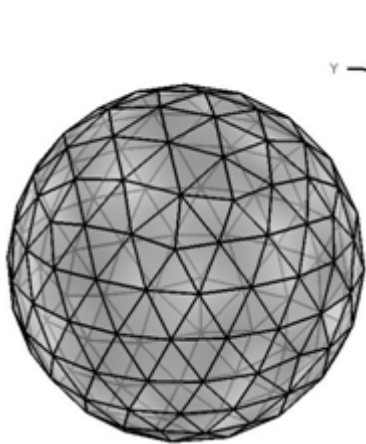
$$\sum_{j=1}^n \left\{ \left( M + \frac{1}{2}I \right) e \right\} \Delta S_j(p_i) \phi_j \approx \sum_{j=1}^n \{Le\} \Delta S_j(p_i) v_j \quad (11)$$

رابطه‌ی گسسته را به صورت رابطه برداری  $(M + \frac{1}{2}I)\underline{\phi} \approx L\underline{v}$

نشان داده که:

$$\underline{\phi}, \underline{v} \text{ و } [L]_{ij} = \{Le\}_{\Delta S_j}(p_i), \quad [M]_{ij} = \{Me\}_{\Delta S_j}(p_i)$$

۱۵۴ نقطه می‌باشد (شکل ۲). در این حالت نیز ضرایب جرم افزوده با استفاده از روش المان مرزی بدست آمده است و نتایج مقایسه ای سه نوع شبکه در جدول ۱ آورده شده است..



شکل ۲- المان بندی کره با شبکه بندی ریز

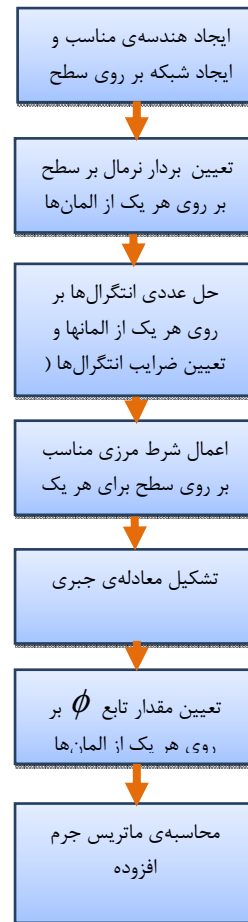
جدول ۱- ضرایب جرم افزوده کره

ضریب	BEM شبکه درشت	BEM شبکه متوسط	BEM ریز شبکه	تحلیلی ریز شبکه	درصد خطا شبکه ریز %
A11	۱/۸۷۲	۱/۹۴۱	۱/۹۹۴	۲/۰۹۴	۴/۷
A12	.	.	.	.	.
A13	.	.	.	.	.
A21	.	.	.	.	.
A22	۱/۸۷۴	۱/۹۴۳	۱/۹۸۹	۲/۰۹۴	۴/۹
A23	.	.	.	.	.
A31	.	.	.	.	.
A32	.	.	.	.	.
A33	۱/۸۶۸	۱/۹۶۳	۱/۹۹۴	۲/۰۹۴	۴/۳

همانگونه که ملاحظه میگردد با افزایش تعداد المان ها مقدار ضرایب قطری بدست آمده بسیار به مقدار تحلیلی نزدیک شده است.

### ۲-۳- تعیین جرم افزوده بیضیگون

در اینجا دو بیضی گون مختلف با دو نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک مورد بررسی قرار گرفته است. در حالت اول نسبت قطر بزرگ به قطر کوچک  $a/b=2$  بوده و حالت دوم مربوط به  $a/b=5$  می‌باشد. با استفاده از نرم افزار گمبیت شبکه بندی شده انجام است و مرکز این بیضی گون بر روی مبدأ مختصات قرار دارد. المانهای مختلف شبکه بندی مورد نظر یک شبکه بندی مثلثی با صفحات مشخص می‌باشد. همچنین شرایط مرزی نیز بر روی این سطوح به صورت شرط مرزی نیومن اعمال شده است. نتایج تحلیلی برای ضرایب جرم افزوده برای بیضی گون در جدول ۲ آورده شده است. نتایج مربوط به ماتریس جرم افزوده به صورت بدون بعد نشان داده شده است. علت بی بعد سازی نتایج آن است که بتوان نتایج را برای حجمهای مختلف بکار برد. در مورد بیضی گون به علت تقارن، ضرایب غیر قطری تماماً صفر می‌باشند و همچنین ضریب A44 نیز صفر می‌باشد. همچنین نتایج



شکل ۱- الگوریتم حل کد المان مرزی

ابتدا حل المان مرزی بر روی کره، سپس برای بیضیگون با دو نسبت منطری ۱ به ۲ و ۱ به ۵ انجام شده است و با حل تحلیلی مقایسه گردیده است. سپس نتایج برای وسیله زیر آبی SUBOFF با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است.

مقدار ضرایب جرم افزوده که با استفاده از روشهای تحلیلی برای جریان حول کره بدست می‌آید عبارت است از  $m_{vin} = \frac{2}{3}\pi a^3$  و  $m_{vin} = \frac{2}{3}\pi \times 1^3 = 2.094$  که مقادیر A11, A22, A33 تطابق بسیار خوبی

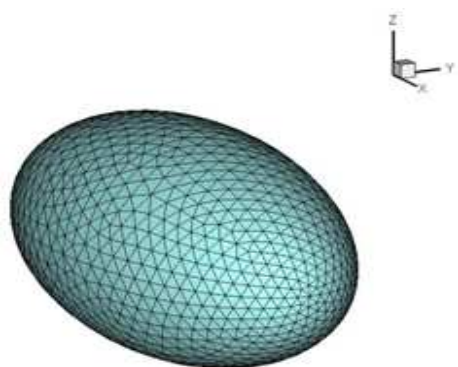
با مقدار تحلیلی دارد. سایر مقادیر نیز صفر بدست می‌آید که با حل تحلیلی تطابق بسیار خوبی دارد. علاوه بر آن ملاحظه می‌شود که با توجه به عدم تقارن شبکه ی مثلثی اعمال شده مقدار بدست آمده برای A11, A22, A33 مقدار کمی اختلاف دارند.

در گام بعد کره ی مورد نظر با شبکه ی متوسط بررسی شده است. در این حالت تعداد المانهای بکار رفته در سطح کره برای حل المان مرزی ۱۶۶ عدد بوده و تعداد نقاط بر روی کره نیز برابر ۸۵ عدد می‌باشد.

در این حالت هم مقادیر قطری دقت بسیار خوبی دارند و اختلاف با مقدار تحلیلی کاهش یافته است. در ضمن مقادیر غیر قطری مانند حالت قبل صفر می‌باشند و تطابق حل با حل تحلیلی بسیار خوب می‌باشد. در گام بعد از یک شبکه ی ریز برای تحلیل استفاده شده است. همانطور که در شکل ۲ ملاحظه می‌شود در این حالت تعداد المانها برابر است با ۳۰۴ و تعداد نقاط ایجاد شده بر روی سطح نیز

جدول ۲- ضرایب جرم افزوده بیضی گون با المان های متوسط با روش المان مرزی

ضریب	BEM	تحلیلی	درصد خطا %
A11	۰/۲۰۲	۰/۱۹۵	۳/۸
A22	۰/۷۰۶	۰/۷۳	۳/۲
A33	۰/۷۰۷	۰/۷۳	۳/۰۸
A44	.	.	.
A55	۰/۲۳۴	۰/۲۴	۲/۳۹
A66	۰/۲۳۴	۰/۲۴	۲/۳۸



شکل ۴- بیضیگون با شبکه‌ی محاسباتی ریز

جدول ۳- ضرایب جرم افزوده بیضی گون با المان های ریز با روش المان مرزی

ضریب	المان مرزی			تحلیلی	درصد خطا شبکه ریز %
	BEM شبکه درشت	BEM شبکه متوسط	BEM شبکه ریز		
A11	۰/۲۱۴	۰/۲۰۲	۰/۲۰۱۸	۰/۱۹۵	۳/۵
A22	۰/۶۷۱	۰/۷۰۶	۰/۷۵۵	۰/۷۳	۳/۴
A33	۰/۶۷۱	۰/۷۰۷	۰/۷۵۵	۰/۷۳	۳/۴۴
A44	.	.	۵-۱,۱×۱۰	.	.
A55	۰/۲۲۵	۰/۲۳۴	۰/۲۴۵	۰/۲۴	۲/۳۱
A66	۰/۲۲۵	۰/۲۳۴	۰/۲۴۵	۰/۲۴	۲/۳۱

حالت دوم) بیضی گون با نسبت قطر بزرگ به کوچک  $a/b=5$  در حالت اول برای بیضی گون با نسبت منطری ۵ به ۱ با تعداد ۱۳۰ نقطه و نیز ۲۵۶ المان ایجاد شده است. قطر بزرگ برابر ۲ متر و قطر کوچک برابر با  $0.4$  متر یعنی  $(a=1, b=0.2)$  می باشد. شبکه‌ی ابتدایی ایجاد شده در حالت اول یک شبکه‌ی درشت می باشد. در حالت شبکه‌ی متوسط مورد بیضی گون مورد نظر با تعداد ۲۴۱ نقطه و نیز ۴۷۸ المان ایجاد شده است. در ادامه شبکه‌ی ریز بر روی بیضیگون اعمال شده است و بیضی گون مورد نظر با تعداد ۴۵۶ نقطه و نیز ۹۰۸ المان ایجاد شده است (شکل ۵).

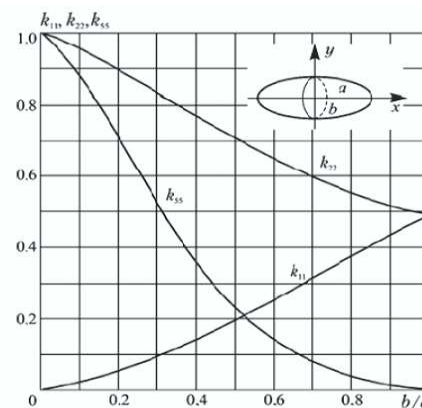
تحلیلی نشان می دهد که در این ضرایب  $A55=A66$  و  $A22=A33$  می باشد. در ضمن به منظور بی بعد سازی، ضرایب  $A11, A22, A33$  با  $\frac{4\pi}{15}ab^2(a^2+b^2)$  و ضرایب  $A55, A66$  با استفاده از ضریب  $\frac{4\pi}{15}ab^2(a^2+b^2)$  بی بعد شده است. در نتیجه خواهیم داشت:

$$A_{11} = K_{11} \times \frac{4\pi}{3} ab^2 \quad (17)$$

$$A_{22} = A_{33} = K_{22} \times \frac{4\pi}{3} ab^2 \quad (18)$$

$$A_{55} = A_{66} = K_{55} \times \frac{4\pi}{15} ab^2 (a^2 + b^2) \quad (19)$$

ضرایب  $k_{11}, k_{22}, k_{33}$  به صورت بی بعد در نمودار شکل ۳ نشان داده شده است. نمودار زیر برای نسبت قطرهای مختلف ارائه شده است و بدین ترتیب حالات مختلف را می توان با استفاده از این نمودار تقریب زد.



شکل ۳- ضرایب  $k_{11}, k_{22}, k_{33}$  برای بیضیگون [۱۴]

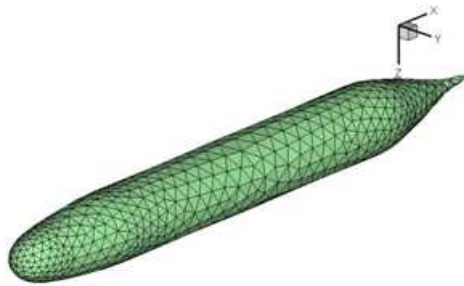
حالت اول) بیضی گون با نسبت قطر بزرگ به کوچک  $a/b=2$

در حالت اول بیضی گون مورد نظر با تعداد ۲۱۰ نقطه و نیز ۴۱۶ المان ایجاد شده است. قطر بزرگ برابر ۲ متر و قطر کوچک برابر با ۱ متر در نظر گرفته شده است یعنی  $(a=1, b=0.5)$  می باشد. در حالت بعدی تعداد المانهای مورد استفاده برای شبکه بندی بیضیگون افزایش یافته است. در این حالت بیضی گون مورد نظر با تعداد ۵۹۵ نقطه و نیز ۱۱۸۶ المان ایجاد شده است.

همچنین از شبکه بندی ریز بر روی بیضی گون استفاده شده است. در این حالت شبکه‌ی محاسباتی مورد نظر با تعداد ۱۱۸۷ نقطه و نیز ۲۳۷۰ المان ایجاد شده است. شکل ۴ به وضوح شبکه‌ی ریز مورد استفاده در حل المان مرزی را نشان می دهد.

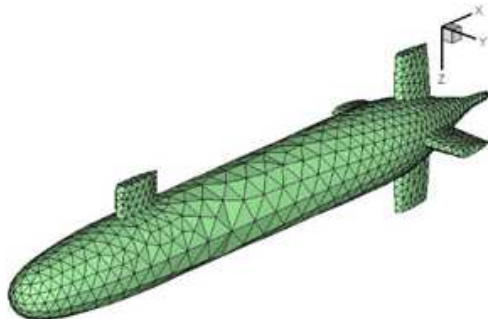
نتایج حاصل از شبیه سازی بر روی شبکه های مختلف مثلثی در جدول ۳ ارائه شده است و به وضوح دقت حل عددی با استفاده از روش المان مرزی را نشان می دهد. در حالت سبک ریز حداکثر خطای حل حدود ۴ درصد می باشد.

تقسیم شده‌اند. شکل ۶ بدنه‌ی سابوف بدون وجود سطوح مختلف کنترلی را نشان می‌دهد.

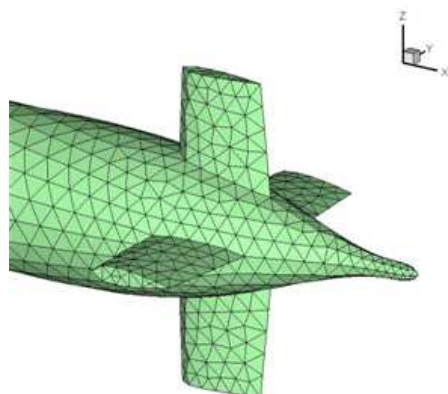


شکل ۵- شبکه بندی بدنه‌ی وسیله زیرآبی بدون الحاقات در نرم افزار GAMBIT

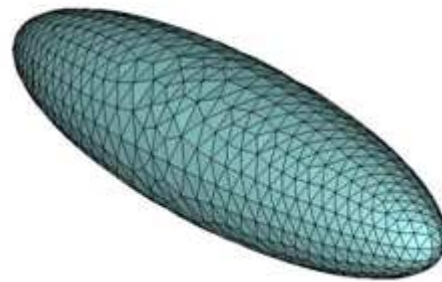
هندسه‌ی مورد نظر در GAMBIT شبکه بندی شده است. (شکل ۶) در این حالت حدوداً از ۲۰۰۰ المان برای شبیه سازی استفاده شده است. پس از آن هندسه‌ی اصلی وسیله زیرآبی در نرم افزار گمبیت ایجاد شده است. در شکل ۷ هندسه‌ی اصلی نشان داده شده است. در اینجا نیز به منظور شبیه‌سازی عددی سطح جسم در نرم‌افزار GAMBIT شبکه بندی شده است. در این حالت به منظور ایجاد هندسه‌ی مناسب از تعداد ۲۲۰۰ المان مثلثی برای شبکه بندی استفاده شده است. طول وسیله زیرآبی که به منظور بی‌بعد سازی استفاده شده است برابر با  $L=4.3561\text{ m}$  می‌باشد. پس از بی بعد سازی و بدست آوردن نتایج ضرایب جرم افزوده برای دو حالت بدنه‌ی تنها و بدنه به همراه سطوح کنترل نتایج در جدول ۵ آورده شده است.



شکل ۶- نمای کلی از شبکه مثلثی ایجاد شده بر روی سابوف



شکل ۸- شبکه بر روی انتهای سابوف و سطوح کنترل



شکل ۵- بیضیگون با نسبت منطری ۵ به ۱ و شبکه‌ی ریز

جدول ۴ مقادیر بدست آمده برای ضرایب جرم افزوده و نیز خطای حل المان مرزی در مقایسه با حل تحلیلی را نشان می‌دهد. چنانچه ملاحظه می‌شود، حل المان مرزی از دقت بسیار بالایی برخوردار بوده و با افزایش تعداد المان‌ها نیز دقت حل افزایش یافته است.

جدول ۴- ضرایب جرم افزوده بیضیگون با نسبت منطری ۵ به ۱ برای شبکه های مختلف

ضریب	BEM شبکه درشت	BEM شبکه متوسط	BEM شبکه ریز	تحلیلی	درصد خطا شبکه ریز %
A11	۰٫۰۵۵	۰٫۰۵۲	۰٫۰۵۱۵	۰٫۰۵	۳
A22	۰٫۸۲۵	۰٫۸۵۹	۰٫۸۷۳	۰٫۸۹۵	۲٫۳۷
A33	۰٫۸۲۱	۰٫۸۵۷	۰٫۸۷۴	۰٫۸۹۵	۲٫۳۴
A44	$\times ۴٫۷۲$ $۴-۱۰$	$۴-۱۰ \times ۱٫۹$	$\times ۹٫۶۷$ $۵-۱۰$	۰	۰
A55	۰٫۶۲۷	۰٫۶۵۱	۰٫۶۷۲	۰٫۷۲	۶٫۶۵
A66	۰٫۶۳۱	۰٫۶۵۷	۰٫۶۷۱۹	۰٫۷۲	۶٫۷

همانگونه که ملاحظه می‌شود المانهای قطری از دقت بسیار بالایی برخوردار هستند و تقریباً با حل تحلیلی یکسان می‌باشند.

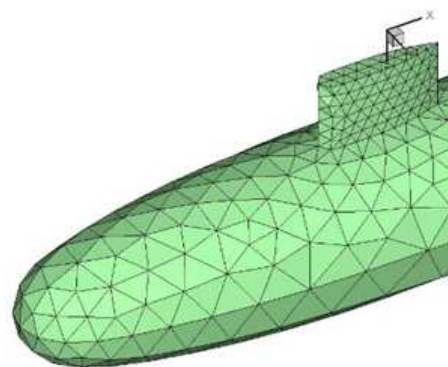
### ۳-۳- تعیین جرم افزوده برای وسیله زیرآبی سابوف

به منظور کاربردی نمودن پژوهش حاضر، ماتریس جرم افزوده زیردریایی سابوف در دو حالت محاسبه شده است. در حالت اول تنها بدنه مد نظر قرار گرفته و ملحقیات برجک و سطوح کنترل لحاظ نشده است. در حالت دوم کل هندسه بطور کامل شبیه‌سازی شده است و تمامی الحاقات به بدنه متصل می‌باشند. در اینجا نیز به منظور تعیین ضرایب جرم افزوده جسم با استفاده از نرم افزار گمبیت شبکه بندی شده است. شبکه بندی مورد نظر در این حالت نیز شبکه بندی مثلثی در کل سطح خارجی جسم می‌باشد. کل ناحیه‌ی حل صورت یک سطح بسته از مثلث‌ها شبکه بندی شده است. ضرایب جرم افزوده در ماتریس جرم افزوده نیز هر یک با توجه به نیروها و ممانهای مختلف بی‌بعد گردیده است. بدین منظور برای بی بعد سازی ضرایب A11, A22, A33

بر  $\frac{1}{2}\rho L^3$  تقسیم شده‌اند. همچنین ضرایب A44, A55, A66 بر  $\frac{1}{2}\rho L^5$

جدول ۵ - ضرایب جرم افزوده وسیله زیرآبی سابوف با روش المان مرزی [۱۶]

ضریب جرم افزوده	جرم افزوده بدنه و برجک	تجربی	درصد خطا %
A11	$10^{-4} \times 8/4$	-	-
A22	$10^{-2} \times 1/76$	۰/۰۱۶۱۸۶	۸/۹
A33	$10^{-2} \times 1/64$	۰/۰۱۴۵۲۹	۱۳/۰۵
A44	$10^{-6} \times 9/93$	-	-
A55	$10^{-4} \times 9/29$	۰/۰۰۰۸۶	۷/۹۹
A66	$10^{-2} \times 1/0.1$	۰/۰۰۰۸۹۷	۱۲/۵۲



شکل ۷- شبکه بر روی ابتدای سابوف و برجک

مقایسه‌ی نتایج بدست آمده برای وسیله زیرآبی با نتایج آزمایشگاهی نیز در جدول ۶ ارائه شده است. نتایج برای ضرایب A22, A33, A55, A66 آورده شده است که تطابق بسیار خوبی بین نتایج حاصل از حل المان مرزی و آزمایشگاهی دیده می‌شود. حداکثر خطای ایجاد شده در این حالت برای المانهای روی قطر اصلی برابر ۱۳ درصد می‌باشد.

#### ۴- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر از روش المان مرزی برای محاسبه‌ی جرم افزوده‌ی اجسام با هدف محاسبه‌ی جرم افزوده‌ی وسیله زیرآبی استفاده شده است. در روش المان مرزی از اثرات لزجت، اغتشاش و ایجاد گردابه‌ها صرف نظر شده و معادلات اویلر و لاپلاس برای حل جریان مورد استفاده قرار گرفته است. در این پژوهش، هندسه‌ی مورد نظر در نرم‌افزار GAMBIT شبکه‌بندی شده و جریان بر روی هندسه‌ی مورد نظر با استفاده از روش المان مرزی حل گردیده است. نتایج حل المان مرزی ابتداً برای هندسه‌ی کره و بیضی‌گون ارائه گردیده است که نتایج بدست آمده تطابق بسیار بالایی با نتایج تحلیلی دارند و ضرایب قطر اصلی با دقت بسیار بالایی محاسبه شده اند. پس از آن حل المان مرزی بر روی هندسه‌ی سابوف به صورت بدنه‌ی تنها و نیز بدنه با ملحقات و سطوح کنترل مورد ارزیابی قرار گرفته است. روند نتایج بدست آمده کاملاً با فیزیک حاکم تطابق دارد و نیز نتایج برای ضرایب مختلف با یکدیگر مقایسه شده است. ضرایب روی قطر اصلی با نتایج آزمایشگاهی تطابق بالایی نشان می‌دهد. مهمترین مشخصه این روش پایین آوردن زمان حل بوده که نسبت به روش های دیگر از جمله RANS زمان حل در مقابل دقت نتایج بسیار پایین تر می باشد و همچنین نسبت به روش های مانند تئوری نوار دقت مناسبتری داشته است.

جدول ۵- ضرایب جرم افزوده بیضی گون با المان های متوسط با روش المان مرزی

ضریب	بدنه تنها	بدنه و برجک
A11	$10^{-4} \times 1/0.4$	$8/4 \times 10^{-4}$
A22	$10^{-2} \times 1/53$	$1/76 \times 10^{-2}$
A33	$10^{-2} \times 1/53$	$1/64 \times 10^{-2}$
A44	$10^{-8} \times 2.59$	$9/93 \times 10^{-6}$
A55	$10^{-4} \times 7.57$	$9/29 \times 10^{-4}$
A66	$10^{-4} \times 7.64$	$1/0.1 \times 10^{-2}$

در جدول ۵ نتایج مربوط به ضرایب قطر اصلی برای دو حالت بدنه تنها و بدنه به همراه سطوح کنترل ارائه شده است. همانطور که در این جدول ملاحظه می‌شود برای هر دو حالت مقدار A22=A33 می‌باشد و تفاوت بسیار جزئی بچشم می‌خورد. همین روند در مورد ضرایب A55=A66 نیز وجود دارد که اختلاف جزئی ایجاد شده ناشی از سطوح کنترل می‌باشد. با توجه به ابعاد کوچک سطوح کنترل به نسبت کل بدنه، اثر آنها در جهات ۲،۳ و ۵،۶ کمتر دیده می‌شود و اختلاف این ضرایب جزئی است اما این اثر در مورد A44 بسیار شدیدتر است.

علاوه بر موارد فوق با مقایسه‌ی نتایج بدست آمده برای ضرایب مختلف بین دو حالت تفاوت زیادی مشاهده نمی‌شود. تفاوت اندک ایجاد شده ناشی از اثر سطوح کنترل بر روی جرم افزوده ناچیز می‌باشد و تنها در مورد ضریب A44 اختلاف شدید مشاهده می‌شود. در این حالت برای زمانی که سطوح کنترل وجود ندارند ضریب A44 تقریباً برابر با صفر از مرتبه بزرگی 7-10 می‌باشد. این اختلاف کاملاً فیزیکی بوده و ناشی از قرار گرفتن سطوح کنترل می‌باشد که عکس‌العمل وسیله زیرآبی نسبت به ممان پیچ را افزایش می‌دهد و سبب پایداری حرکتی وسیله زیرآبی می‌شود. در جدول ۶ ملاحظه می‌شود مقدار A44 برای حالتی که سطوح کنترل وجود دارد حدوداً ۴۰۰ برابر حالت بدون وجود سطوح کنترل است که این حالت کاملاً با فیزیک حاکم هم‌خوانی دارد.

## ۵-نمادها

بردار نرمال بر سطح المان	$n$
تابع گرین	$G$
عملگر انتگرالی	$L$
ماتریس ضرایب	$M$
نقطه مورد نظر در روی المان	$P$
سرعت	$v$
سطح المان	$s$
ضریب بدون بعد جرم افزوده	$K_{ii}$
المانهای ماتریس جرم افزوده	$A_{ij}$

## علامه یونانی

سطح	$\Gamma$
تابع دلخواه در نقطه q	$\zeta(q)$

## ۶-مراجع

- [1] Birkhoff G., Hydrodynamics: A study in logic, fact, and similitude, Princeton, 1950.
- [2] Brennen, C., A review of added mass and fluid inertial forces. 1982.
- [3] Drazin P.G. and Reid W.H., Hydrodynamic stability, Cambridge university press, 2004.
- [4] Drazin P.G. and Reid W.H., Hydrodynamic stability, Cambridge university press, 2004.
- [5] Khoury G.A., Airship technology. Vol. 10, Cambridge University Press, 2012
- [6] Tuveri M., Ceruti A. and Marzocca P., Added masses computation for unconventional airships and aerostats through geometric shape evaluation and meshing. International Journal of Aeronautical and Space Sciences., 15(3): pp. 241-257, 2014
- [7] Korotkin A.I., Added masses of ship structures. Vol. 88.: Springer 2008.
- [8] MacPherson, D., V.R. Puleo, and M.B. Packard, Estimation of entrained water added mass properties for vibration analysis. SNAME New England Section, 2007.
- [9] Hess J.L. and Smith A.M.O., Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies Report No. E.S. 40622, Douglas Aircraft Company, Inc., Long Beach, CA 1962.
- [10] Katsikadelis J.T., Boundary Elements: Theory and Applications: Theory and: Elsevier Applications 2002.
- [11] Clements D.L., Green's functions for the boundary element method, C.A. Brebbia, W.L. Wendland, G. Kuhn (Eds.), BEM IX, 1, CMP/Springer-Verlag Publishers, Southampton, pp. 14-20, 1987.
- [12] Choi Y.R. and Hong S.Y., An Analysis of Hydrodynamic Interaction of Floating Multi-Body Using Higher-Order Boundary Element Method, The Twelfth International Offshore and Polar Engineering Conference, Japan, 2002.
- [13] Ghassemi H., Yari E., The Added Mass Coefficient computation of sphere, ellipsoid and marine propellers using Boundary Element Method, Polish Maritime Research, Vol. 18, No. 1, pp. 17-26, 2011.
- [14] Lin Z., Liao S., Calculation of added mass coefficients of 3D complicated underwater bodies by FMBEM, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 16, No. 1, pp. 187-194, 2011.
- [15] Yari E. and Ghassemi H., Boundary Element Method Applied to Added Mass Coefficient Calculation of the Skewed Marine Propellers, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, Vol. 23, No. 2, pp. 25-31, 2016.
- [16] Yu-cun PAN, Huai-xin ZHANG and Qi-dou ZHOU, Numerical Prediction of Submarine Hydrodynamic