مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۸۰، جلد ۴۷، شماره ۳، پاییز ۱۳۹۶، صفحه ۳۱-۴۰

تخمین شار گرمایی سطحی ناپایا در انتقال گرمای زیستی غیر خطی معکوس

مجتبی باغبان دانشجوی دکترا، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

محمد باقر آیانی* استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران

چکیده

در این مطالعه با حل مساله انتقال گرمای معکوس، شار گرمایی سطحی گذرا در یک بافت زنده تعیین می‌شود. خواص حرارتی بافت از قبیل رسانایی گرمایی، پرفیوژن خون و آهنگ متابولیسم به صورت تابعی از دما فرض شده‌اند. در نتیجه مساله یک مساله انتقال گرمای معکوس غیر خطی محسوب می‌شود. از مدل انتقال گرمای زیستی پنس به منظور مدلسازی رفتار حرارتی درون بافت استفاده شده است. از دو روش مجزای تخمین متوالی تابع و گرادیان مزدوج به همراه مساله الحاقی در تعیین شار گرمایی سطحی مجهول کمک گرفته شده است. با دو مثال دقت حل معکوس ارزیابی شده و مقایسه‌ای بین جواب‌های به‌دست آمده از دو روش انجام پذیرفته است. نتایج بیان‌گر دقت هر دو روش در تخمین شار گرمایی مجهول برای داده‌های دقیق می‌باشد. اثر خطای اندازه‌گیری، حدس اولیه و مکان اندازه‌گیری بر دقت حل معکوس مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد که حل معکوس از روش گرادیان مزدوج نسبت به روش ترتیبی قابل اعتمادتر است. در عین حال دقت هر دو روش با افزایش خطای اندازه‌گیری کاهش می‌یابد. مشاهده می‌شود که شار گرمایی مجهول را می‌توان با حدس اولیه‌ی دلخواه تخمین زد. همچنین نتایج نشان دهنده حساسیت بیشتر روش گرادیان مزدوج به مکان اندازه‌گیری دما است.

واژه‌های کلیدی: انتقال گرمای زیستی معکوس، روش تخمین متوالی تابع، روش گرادیان مزدوج، خواص متغیر، شار گرمایی سطحی گذرا.

Estimation of Time-dependent Surface Heat Flux in a Nonlinear Inverse Bio-heat Transfer Problem

M. Baghban Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

M. B. Ayani Department of Mechanical Engineering, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Abstract

This study deals with the solution of an inverse problem in a living tissue to estimate the time-dependent heat flux. The thermal properties such as thermal conductivity, blood perfusion and metabolic heat generation are considered temperature dependent. The Pennes bioheat model is applied to simulate thermal behavior. The Sequential Function Specification Method (SFSM) and Conjugate Gradient Method (CGM) with adjoint problem are applied to obtain the unknown surface heat flux. Two examples are considered to examine the accuracy and ability of the inverse analysis. A comparison of two methods in the solution of the nonlinear inverse bio-heat transfer problem is done. Results confirm the accuracy of both methods in estimating unknown surface heat flux for exact data. The effects of measurement error, initial guess and measurement location upon the precision of the estimated results are evaluated. Results demonstrate that the accuracy of conjugate gradient method is more than the sequential method .However, in both methods; the precision of the inverse solutions decrease by increasing measurement error. Results show the time-dependent surface heat flux can be obtained by any arbitrary initial guess. In addition, the conjugate gradient method is more sensitive to measurement location than the sequential method.

Keywords: Inverse bio-heat conduction problem, Sequential function specification method, Conjugate gradient method, Variables properties, Transient surface heat flux.

۱- مقدمه

مسائل انتقال گرما زیستی معکوس مزیت‌های فراوانی در درمان بیماری‌هایی چون سرطان دارند. به صورت کلی این مسائل را می‌توان به سه منظور به‌کار گرفت؛ تعیین خواص گرمایی از جمله رسانایی گرمایی، پرفیوژن خون و غیره، تشخیص شکل و مکان تومورها، تعیین شار گرمایی و یا شدت منبع گرمایی مورد نیاز برای یک درمان موفق.

از جمله مطالعاتی که در دسته اول انجام گرفته می‌توان به مطالعه یو و همکارانش [۱] اشاره کرد. در این مطالعه به کمک الگوریتم ژنتیک خواص حرارتی بافت از قبیل رسانایی گرمایی، ظرفیت گرمایی و پرفیوژن خون به طور هم‌زمان تعیین گردید. هیوانگ و هیوانگ [۲] از روش لونبرگ-مارکوارت برای تخمین هم‌زمان ظرفیت گرمایی حجمی و رسانایی گرمایی استفاده کردند. تعیین پرفیوژن خون وابسته به دما [۳-۵] از دیگر مطالعات انجام شده در این دسته است.

مطالعات انجام شده در دسته دوم محدود است. به عنوان مثال می‌توان به مطالعه پارتریج و ربل [۶] اشاره کرد که در آن روش المان مرزی با الگوریتم ژنتیک ترکیب شده و به کمک آن مکان و سایز تومورهای پوستی تشخیص داده شده است. داس و همکارانش در چند مطالعه به تعیین امکان وجود تومور، مکان و اندازه آن در هندسه یک بعدی [۷]، دوبعدی [۸, ۹] و سه‌بعدی [۱۰] پرداختند.

در دسته‌بندی سوم، چندین مطالعه به منظور تعیین شار گرمایی سطحی و یا تعیین توان منبع گرمایی خارجی انجام پذیرفته است. از جمله می‌توان به مطالعه رن و همکارانش [۱۱] اشاره کرد که در آن روش هموار سازی تیخونو و روش المان مرزی، قدرت منبع گرمایی در یک بافت زنده با هندسه پیچیده تعیین گردید. لولو و اسکات [۱۲] با روش گرادیان مزدوج، جمله منبع گرمایی را به گونه‌ای تعیین کردند که دوز حرارتی مطلوب درون بافت تامین گردد. زهانگ و همکارانش [۱۳] از روش کمینه مربعات برای تعیین قدرت لیزر در یک بافت استوانه‌ای

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: mbayani@um.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۴/۱۱/۰۲
تاریخ پذیرش: ۹۵/۰۲/۱۵

چند لایه و سه‌بعدی استفاده کردند. نواک و همکارانش [۱۴] با استفاده از الگوریتم ژنتیک آهنگ گرمای تولیدی وابسته به دما را تخمین زدند. یانگ [۱۵] شرط مرزی دما را در مساله انتقال گرمای زیستی غیر فوریه با استفاده از یک روش ترتیبی بدست آورد. مایچک [۱۶] به طور همزمان به تخمین پتانسیل الکترودهای میدان الکترومغناطیسی و تعداد نانوذره مورد نیاز درون تومور پرداخت. لی و همکارانش [۱۷] با روش گرادیان مزدوج و مساله الحاقی، شار گرمایی سطحی ناپایا را در مساله انتقال گرمای زیستی غیر فوریه تخمین زدند. یانگ [۱۸] با روش ترتیبی به تخمین شار گرمایی مجهول در یک بافت دو بعدی پرداخت. در مطالعه دیگر [۱۹] وی عبارت منبع گرمایی را به گونه‌ای تعیین کرد که سبب نابودی بافت تومور شده و در عین حال بافت سالم اسیب نبیند. لی و همکارانش [۲۰] به تخمین شار گرمایی گذرا روی سطح پوست در یک بافت چند لایه و با فرض انتقال گرمای غیرفوریه پرداختند. روش معکوس به کار گرفته شده در مطالعه آن‌ها بر مبنای روش گرادیان مزدوج استوار بود. جلالی و همکارانش [۲۱] با استفاده از روش گرادیان مزدوج، به طور همزمان پارامترهای کنترلی از قبیل قدرت منبع گرمایی و ضریب انتقال گرمای جابجایی روی سطح پوست را تخمین زدند. به تازگی باغبان و آیانی [۲۲]، در یک بافت سه لایه، به تخمین توان منبع گرمایی خارجی با استفاده از روش ترتیبی پرداختند.

بر اساس اطلاعات نویسندگان، در تمامی مطالعات معکوس انجام شده در انتقال گرمای زیستی خواص بافت ثابت فرض شده‌اند. از آنجا که موفقیت در درمان‌های حرارتی به پیش‌بینی دقیق دما بستگی دارد، در این مطالعه خواص حرارتی بافت از قبیل رسانایی گرمایی، ضریب پرفیوژن خون و گرمای متابولیسم تابعی از دما در نظر گرفته می‌شود. تمرکز مطالعه حاضر بر تخمین شار گرمایی وابسته به زمان در یک بافت زنده با دانستن دما در یک نقطه درون بافت است. از روش ترتیبی و روش گرادیان مزدوج به همراه مساله الحاقی به عنوان یک روش تمام دامنه در تخمین شار گرمایی سطحی گذرا کمک گرفته شده است و مقایسه‌ای بین دقت دو روش در حل مساله انتقال گرمای معکوس غیر خطی انجام پذیرفته است.

۲- مساله مستقیم

تا کنون چندین رابطه جهت مدل‌سازی رفتار گرما در درون بافت زنده ارائه شده است. در بین این مدل‌ها، مدل انتقال گرمای زیستی پنس [۲۳] نسبت به سایر مدل‌ها به علت سادگی و دقت قابل قبول بیشتر مورد توجه قرار گرفته است. بر اساس این مدل، آهنگ انتقال گرما بین بافت و خون متناسب با اختلاف دمای آن‌ها است. بر اساس این مدل، با فرض این‌که ضریب رسانایی گرمایی، پرفیوژن خون و گرمای متابولسیم تابعی از دما باشند، معادله حاکم بر توزیع دما درون بافت از رابطه زیر بدست می‌آید [۲۴]:

$$\rho c\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right)+\rho_b c_b\omega(T)(T_b-T)+q_m(T) \qquad (۱)$$

که در این رابطه ρ، c، k، ω و q_m به ترتیب بیان‌گر چگالی، ظرفیت گرمایی ویژه، ضریب رسانایی گرمایی، آهنگ پرفیوژن خون و گرمای متابولیسم‌اند و زیرنویس b به خون اشاره دارد. عبارت دوم در سمت راست معادله (۱) بیان‌گر تبادل گرمای جابجایی بافت با جریان خون است که برای ساده‌نویسی معادلات به شکل زیر بیان می‌شود:

$$W(T)=\rho_b c_b\omega(T)(T_b-T) \qquad (۲)$$

وابستگی رسانایی گرمایی و پرفیوژن خون با دما به کمک روابط زیر بیان می‌شوند:

$$k(T)=(1-\varphi)k_0+\varphi k_0 exp[\psi(T-T_b)] \qquad (۳)$$

$$W(T)=w_0 exp[\psi(T-T_b)] \qquad (۴)$$

که در این رابطه $\varphi=0.5$، $k_0=0.59\ \mathrm{W/mK}$، $\psi=0.5\ 1/\mathrm{K}$ و $w_0=2021\ \mathrm{W/m^3K}$ می‌باشد [۲۴]. گرمای متابولیسم وابسته به دمای بافت بوده و از رابطه توانی زیر تبعیت می‌کند [۲۵]:

$$q_m(T)=700\times 2^{(T-37)/10} \qquad (۵)$$

در دماهای کمتر از $65^{\mathrm{o}}\mathrm{C}$، عدم وابستگی ظرفیت گرمایی به دما گزارش شده است [۲۶]. شرایط مرزی برای معادله (۱) به شکل زیر نوشته می‌شود [۲۰]:

$$T(x,t=0)=\ 37^{\mathrm{o}}\mathrm{C} \qquad (۶)$$

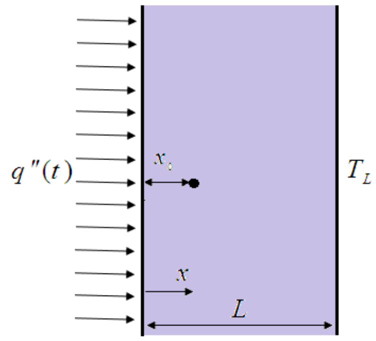
$$-k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}=q^{"}(t) \qquad (۷)$$

$$T(x=L,t)=T_L=\ 37^{\mathrm{o}}\mathrm{C} \qquad (۸)$$

در این روابطه L طول بافت است (شکل ۱). همچنین $q^{"}(t)$ شار گرمایی است که در مساله مستقیم معلوم فرض شده ولی در مساله معکوس مجهول است. با توجه به غیر خطی بودن مساله، از الگوریتم تکراری کمک گرفته شده است. گسسته سازی معادلات بر مبنای روش اختلاف محدود ضمنی [۲۷] انجام پذیرفته است.

۳- مساله معکوس

از نقطه نظر ریاضیات، مسائل انتقال گرمای معکوس در مقایسه با مسائل مستقیم به عنوان مسائل بدرفتار شناخته می‌شوند. این دسته-بندی به این دلیل است که در مسائل معکوس، وجود جواب، یکتایی جواب و ناپایداری نسبت به اغتشاشات کوچک باید بررسی شود. در حالی‌که در مسائل مستقیم، جوا ب وجود داشته و این جواب یکتا است و در صورتی که در داده‌های ورودی اغتشاشی صورت پذیرد، حل نسبت به آن پایدار است [۳۲]. روش‌های تحلیلی و عددی زیادی برای حل مساله‌های معکوس ارائه شده‌اند [۲۸-۳۰]. در مسائل ناپایا، کبزا [۳۱] روش‌های حل مساله‌های معکوس را به دو دسته روش‌های تمام دامنه و روش‌های ترتیبی دسته‌بندی نمود. روش‌های تمام دامنه، مانند روش گرادیان مزدوج، از تمامی داده‌های موجود در حل معکوس استفاده می‌کنند در حالی که در روش‌های ترتیبی از داده‌های زمانی موجود در یک بازه زمانی معین جهت تخمین تابع استفاده می‌شود. همین ویژگی روش‌های ترتیبی آن‌ها را در دسته روش‌های برخط قرار داده است. علاوه بر این روش‌های ترتیبی در مقایسه با روش‌های تمام دامنه نیاز به حافظه و زمان محاسباتی کمتری دارند. در مقابل، دقت روش‌های تمام دامنه برای مسائل خطی در مقایسه با روش‌های ترتیبی بیشتر است. در این مطالعه از هر دو روش ترتیبی و تمام دامنه در حل یک مساله انتقال گرمای معکوس غیر خطی استفاده شده است و نتایج آن‌ها در تخمین شار گرمایی مقایسه می‌شود.



شکل ۱- طرح کلی بافت

۳-۱- روش ترتیبی

روش تعیین تابع ترتیبی[1] اولین بار توسط بک معرفی گردید [۳۲]. این روش بر این اصل استوار است که برای تخمین شار گرمایی مجهول در یک زمان مشخص، از داده‌های دمایی استفاده شود که نزدیک به این زمان اندازه‌گیری شده باشند. چرا که در زمان‌های دورتر، دما نسبت به شار مجهول از حساسیت کمتری برخوردار است. در این روش، به‌منظور تخمین شار گرمایی وابسته به زمان، ابتدا شار گرمایی به N جزء تقسیم می‌شود.

$$q'' = [q''_1, q''_2, \dots, q''_{n-1}, q''_n, q''_{n+1}, \dots q''_N] \qquad (۹)$$

فرض می‌شود که تا مولفه $n-1$ ام شار گرمایی محاسبه شده و هدف محاسبه q''_n باشد. در روش ترتیبی به طور موقت فرض می‌شود که مولفه‌های شار گرمایی تا r گام زمانی آینده با یکدیگر برابر باشند:

$$q''_n = q''_{n+1} = \dots = q''_{n+r-1} \qquad (۱۰)$$

به منظور تخمین q''_n، تابع هدف به شکل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$J(q''_n) = \sum_{i=1}^{r} [Y_{n+i-1} - T_{n+i-1}(q''_n)]^2 \qquad (۱۱)$$

که در این رابطه Y دمای اندازگیری شده در مکان سنسور (x_0) است. مشتق تابع هدف J نسبت به مولفه شار مجهول q''_n در حالت کمینه باید صفر شود. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{dJ(q''_m)}{dq''_m} = 2\sum_{i=1}^{r} [Y_{m+i-1} - T_{m+i-1}(q''_m)][X_{m+i-1}] = 0 \qquad (۱۲)$$

که در این رابطه ضرایب ماتریس حساسیت X به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$X_{n+i-1} = \frac{\partial T_{n+i-1}}{\partial q''_n} \quad i = 1, \dots, r \qquad (۱۳)$$

با استفاده از بسط تیلور جمله $T_{m+i-1}(q''_n)$ حول حدس اولیه q^* و جایگذاری عبارت بدست آمده در معادله (۱۲) مولفه n ام شار به صورت زیر تعیین می‌گردد:

$$q''_n = q^* + \frac{\sum_{i=1}^{r} [Y_{n+i-1} - T_{n+i-1}(q''_n)][X_{n+i-1}]}{\sum_{i=1}^{r} [X_{n+i-1}]^2} \qquad (۱۴)$$

در مسائل معکوس خطی که ضرایب ماتریس حساسیت مستقل از پارامتر مجهول‌اند، جملات بعدی بسط تیلور صفر بوده و رابطه (۱۴) برای تعیین متغیر مجهول دقیق است. اما در مسائل معکوس غیر خطی، مشابه مطالعه حاضر، رابطه فوق یک رابطه تقریبی بوده و حل آن نیازمند یک الگوریتم تکراری است. بنابراین در هر مرحله، از معیار توقف زیر استفاده می‌شود:

$$\left|\frac{(q''_n - q''^{\,old}_n)}{q''_n}\right| < 0.0001 \qquad (۱۵)$$

که بالانویس old بیان‌گر مولفه شار گرمایی در تکرار قبل است.

۳-۱-۱- محاسبه ضرایب حساسیت

ضرایب ماتریس حساسیت نسبت به متغیر مجهول q''_n با مشتق‌گیری از معادلات حاکم (۱-۸) نسبت به q''_n به شکل زیر محاسبه می‌شوند:

$$\rho c \frac{\partial X}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(k(T)X) + \left(\frac{dW}{dT} + \frac{dq_m}{dT}\right)X \qquad (۱۶)$$

$$X(x,0) = 0 \qquad (۱۷)$$

$$-\left.\frac{\partial(k(T)X)}{\partial x}\right|_{x=0} = \begin{cases} 0 & t < t_n \\ 1 & t \geq t_n \end{cases} \qquad (۱۸)$$

$$X(x = L) = 0 \qquad (۱۹)$$

۳-۱-۲- الگوریتم تخمین شار در روش ترتیبی

با فرض یک گام زمانی (r) معین، مولفه n ام شار گرمایی مجهول با استفاده از پنج گام زیر محاسبه می‌شود:

۱. حدس اولیه برای q^* انتخاب شود. حدس مناسب انتخاب شار گرمایی در گام زمانی قبل (q''_{n-1}) است.
۲. با معلوم بودن شار گرمایی، از حل مستقیم، توزیع دما در نقطه اندازه‌گیری محاسبه شود.
۳. ضرایب ماتریس حساسیت با معادلات (۱۶-۱۹) محاسبه گردند.
۴. با استفاده از رابطه (۱۴) شار مجهول تعیین شود.
۵. شرط همگرایی (معادله (۱۵)) بررسی شود. اگر برقرار بود q''_n را پذیرفته و به گام اول رفته و مولفه بعدی شار (q''_{n+1}) تخمین زده شود. در غیر این‌صورت شار گرمایی بدست آمده از گام چهارم را به عنوان حدس اولیه پذیرفته و از گام دوم حل ادامه یابد.

۳-۲- روش تمام دامنه

روش گرادیان مزدوج یکی از پرکاربردترین روش‌های تمام دامنه در حل مسائل انتقال گرمای معکوس است. در این روش تابع هدف به صورت مجموع مربعات اختلاف دمای تخمین زده‌شده و دمای اندازه‌گیری شده در کل ناحیه حل بیان می‌شود.

$$J(q''(t)) = \int_{t=0}^{t_f} [T(x_0, t) - Y(t)]^2 dt \qquad (۲۰)$$

که در این رابطه t_f زمان پایانی اندازه‌گیری دما است. همچنین $T(x_0, t)$ بیان‌گر دمای تخمین زده‌شده در مکان سنسور (x_0) است و تابعی از $q''(t)$ می‌باشد. بر اساس این روش عمل هموارسازی در یک الگوریتم تکراری انجام شده و با استفاده از جهت مزدوج و اندازه گام مناسب تابع هدف بهینه می‌شود [۳۳]. فرایند تکراری روش گرادیان مزدوج برای کمینه کردن تابع هدف به‌صورت زیر است [۳۰]:

$$q''^{k+1}(t) = q''^{k}(t) - \beta^k d^k(t) \qquad (۲۱)$$

[1] Sequential Function Specification method (SFSM

که در آن β^k اندازه گام جستجو است و d^k جهت کاهش و بالانویس k شماره تکرار است. جهت کاهش بر حسب جهت گرادیان تابع هدف، $\nabla J(q'')$، و جهت کاهش در تکرار قبلی، d^{k-1}، به‌دست می‌آید[۳۰]:

$$d^k = \nabla J(q''^k) + \gamma^k d^{k-1} \tag{۲۲}$$

ضریب مزدوج γ^k به‌صورت زیر محاسبه می‌شود[۳۰]:

$$\gamma^k = \begin{cases} 0 & k = 0 \\ \dfrac{\int_{t=0}^{t_f}\left[\nabla J\left(q''^k(t)\right)\right]^2 dt}{\int_{t=0}^{t_f}\left[\nabla J\left(q''^{k-1}(t)\right)\right]^2 dt} & k = 1,2,.. \end{cases} \tag{۲۳}$$

با جایگذاری معادله (۲۱) در معادله (۲۰)، تابع هدف به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$J(q''^{k+1}) = \int_{t=0}^{t_f}\left[T\left(q''^k(t) - \beta^k d^k(t)\right) - Y(t)\right]^2 dt \tag{۲۴}$$

اگر عبارت $T(q''^k(t) - \beta^k d^k(t))$ با استفاده از سری تیلور مرتبه اول بسط یابد، اندازه گام زمانی جستجو به صورت زیر بدست می‌آید: [۳۰]:

$$\beta^k = \frac{\int_{t=0}^{t_f}\left[\Delta T\left(d^k(t)\right)\right]\left[T\left(q''^k(t) - \beta^k d^k(t)\right) - Y(t)\right] dt}{\int_{t=0}^{t_f}\left[\Delta T\left(d^k(t)\right)\right]^2 dt} \tag{۲۵}$$

در این رابطه، ΔT از حل معادله حساسیت محاسبه می‌شود.

۳-۲-۱- معادله حساسیت

برای تشکیل معادله حساسیت، در معادلات (۱-۸) به جای شار گرمایی (q'') و دما (T)، عبارت $q'' + \Delta q''$ و $T + \Delta T$ جایگزین می‌شود. حال اگر از عبارت به‌دست آمده روابط حاکم (معادلات (۱-۸)) کم شده و سپس از بسط تیلور مرتبه اول استفاده شود و از جملات مراتب بالای آن صرف‌نظر شود، آن‌گاه معادله حساسیت به همراه شرایط اولیه و مرزی به شکل زیر بیان می‌شود:

$$\rho c \frac{\partial \Delta T}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(k(T)\Delta T) + \left(\frac{dW}{dT} + \frac{dq_m}{dT}\right)\Delta T \tag{۲۶}$$

$$\Delta T(x, t = 0) = 0 \tag{۲۷}$$

$$-\left.\frac{\partial(k(T)\Delta T)}{\partial x}\right|_{x=0} = \Delta q''(t) \tag{۲۸}$$

$$\Delta T(x = L, t) = 0 \tag{۲۹}$$

در روابط فوق، با توجه به این‌که توزیع دما تابعی از شار گرمایی مجهول است، می‌توان نتیجه گرفت که معادله حساسیت به کمیت مجهول وابسته بوده و به عبارت دیگر مساله معکوس غیر خطی است.

۳-۲-۲- معادله الحاقی

برای یافتن معادله الحاقی، معادله (۱) در ضریب لاگرانژ ($\lambda(x,t)$) ضرب می‌شود و از عبارت به‌دست آمده در حوزه زمان و مکان انتگرال گرفته می‌شود. سپس نتیجه بدست آمده به سمت راست معادله (۲۰) اضافه شده و تابع هدف به شکل زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} J(q''(t)) = &\int_{x=0}^{L}\int_{t=0}^{t_f}[T(x,t) - Y(t)]^2\delta(x - x_0)dxdt \\ &+ \int_{x=0}^{L}\int_{t=0}^{t_f}\lambda(x,t)\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \rho_b c_b \omega(T)(T_b - T) \right. \\ &\left. + q_m(T) - \rho c\frac{\partial T}{\partial t}\right]dxdt \end{aligned} \tag{۳۰}$$

که در این رابطه δ تابع دیراک است. در معادله (۳۰) با افزودن ΔT و $\Delta q''$ به T و q'' و سپس کم کردن عبارت محاسبه شده از معادله (۳۰) تغییرات تابع هدف $J(q''(t))$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \Delta J(q''(t)) = &\int_{x=0}^{L}\int_{t=0}^{t_f}2[T(x,t) - Y(t)]\Delta T\delta(x - x_0)dxdt \\ &+ \int_{x=0}^{L}\int_{t=0}^{t_f}\lambda(x,t)\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k(T)\Delta T) + \left(\frac{dW}{dT} + \frac{dq_m}{dT}\right)\Delta T \right. \\ &\left. - \rho c\frac{\partial \Delta T}{\partial t}\right]dxdt \end{aligned} \tag{۳۱}$$

با انتگرال‌گیری جزء به جزء، انتگرال دوم معادله فوق ساده‌تر می‌شود. سپس با اعمال شرایط مرزی و اولیه معادله حساسیت، معادله الحاقی به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$k(T)\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \left(\frac{dW}{dT} + \frac{dq_m}{dT}\right)\lambda + \rho c\frac{\partial \lambda}{\partial t} + 2[T(x,t) - Y(t)]\delta(x - x_0) = 0 \tag{۳۲}$$

$$\lambda(x, t = t_f) = 0 \tag{۳۳}$$

$$-\left.\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right|_{x=0} = 0 \tag{۳۴}$$

$$\lambda(x = L, t) = 0 \tag{۳۵}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، معادله الحاقی یک مساله مقدار اولیه نیست. از این‌رو با تعویض متغیر $\xi = t_f - t$، معادله الحاقی به یک معادله مقدار اولیه تبدیل می‌گردد. در نهایت جمله زیر برای محاسبه $\Delta J(q''(t))$ باقی می‌ماند:

$$\Delta J(q''(t)) = \int_{t=0}^{t_f}\lambda(0,t)\Delta q'' dt \tag{۳۶}$$

از طرف دیگر، تغییرات تابع هدف به صورت زیر است [۲۸]:

$$\Delta J(q''(t)) = \int_{t=0}^{t_f}\nabla J(q''(t))\Delta q'' dt \tag{۳۷}$$

با مقایسه رابطه (۳۶) و (۳۷) گرادیان تابع هدف به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\nabla J(q''(t)) = \lambda(0,t) \tag{۳۸}$$

۳-۲-۳-شرط همگرایی

معیار همگرایی روش گرادیان مزدوج در حالتی که اندازه‌گیری داده‌های دمایی بدون خطا باشد، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$J(q''(t)) < \varepsilon \tag{۳۹}$$

که ε عدد کوچک و مثبت است. در حالتی که داده‌ها شامل خطای اندازه‌گیری باشند، با فرض این‌که $T(x_0,t) - Y(t) = \sigma$، شرط همگرایی با استفاده از معادله (۲۰) به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon = \int_{t=0}^{t_f}\sigma^2 dt = \sigma^2 t_f \tag{۴۰}$$

در این رابطه σ انحراف استاندارد از خطای اندازه‌گیری است.

۳-۲-۴- الگوریتم تخمین شار در روش گرادیان مزدوج

در روش گرادیان مزدوج، مراحل تخمین شار را می‌توان به‌صورت زیر خلاصه کرد:

۱. یک حدس اولیه برای شار انتخاب و $k = 0$ در نظر گرفته شود.
۲. با حل معادلات حاکم (۱-۸) توزیع دما محاسبه شود.

۳. شرط همگرایی چک شود. اگر برقرار باشد، از حل خارج شده در غیر این‌صورت به مرحله بعد بروید.

۴. با معلوم بودن $T(x_0,t)$ و $Y(x_0,t)$، معادله الحاقی حل شده و گرادیان تابع هدف از معادله (۳۸) محاسبه شود.

۵. جهت کاهش و ضریب مزدوج به کمک معادلات (۲۲) و (۲۳) محاسبه شود.

۶. با جایگذاری در معادله حساسیت، گام زمانی جستجو از معادله (۲۵) محاسبه شود.

۷. از معادله (۲۱) شار محاسبه شود. یک واحد به k اضافه شده و از گام دوم حل ادامه یابد.

۴- نتایج

در این مطالعه روش ترتیبی و روش گرادیان مزدوج به‌کار گرفته شد تا شار گرمایی مجهول روی یک بافت با خواص حرارتی وابسته به دما تخمین زده شود. حل مستقیم، معادلات حساسیت و معادله الحاقی با استفاده از روش اختلاف محدود ضمنی حل می‌شوند. شکل ۲ صحت حل مستقیم را با مقایسه با مطالعه [۲۴] به ازای شرایط هندسی و فیزیکی یکسان، تایید می‌کند. در هر دو روش معکوس، حدس اولیه برای شار صفر انتخاب شده است. دقت دو روش معکوس با استفاده از دو مثال استاندارد ارزیابی و با یکدیگر مقایسه می‌شود. زمان نهایی ۹۰ ثانیه با گام زمانی ۱ ثانیه و طول بافت $L = 0.01208 \text{ m}$ انتخاب گردید [۱۷]. نقطه اندازه‌گیری دما، نقطه‌ای درون بافت و در $x_0 = 2 \text{ mm}$ در نظر گرفته شده است. برای پرهیز از جرم معکوس [۳۴]، از گام زمانی کوچکتر در یافتن دمای اندازه‌گیری استفاده شده است.

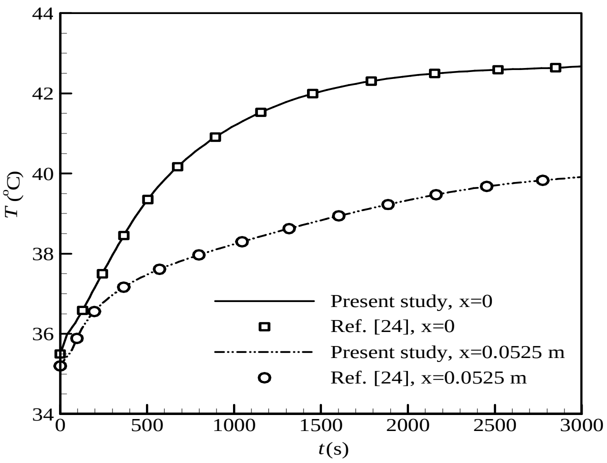
با اضافه نمودن خطا به دمای دقیق (Y_{ex}) به شکل زیر، خطای اندازه‌گیری شبیه‌سازی می‌شود:

$$Y = Y_{ex} + \mu\sigma \tag{۴۱}$$

در این رابطه، μ یک عدد تصادفی با توزیع نرمال و مقدار متوسط صفر و انحراف معیار یک می‌باشد. ارزیابی بهتر حل معکوس با تعریف خطای تخمین به شکل زیر امکان‌پذیر است:

$$E_{rms} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(q"_{ex}(t_i) - q"_{es}(t_i))^2}{N}} \tag{۴۲}$$

در رابطه بالا، زیرنویس ex و es به ترتیب بیان‌گر شار دقیق و شار تخمینی و N تعداد اندازه‌گیری زمانی است. با توجه به این که دمای اندازه‌گیری به کمک معادله (۴۱) شبیه‌سازی می‌شود، برای مقایسه بهتر نتایج، مساله بیست مرتبه حل و در هر مرتبه مقدار خطای اندازه‌گیری محاسبه می‌شود. شار گرمایی بدست آمده به ازای بیشترین خطای تخمین به عنوان شار گرمایی تخمین زده‌شده در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۲- اعتبار سنجی حل مستقیم

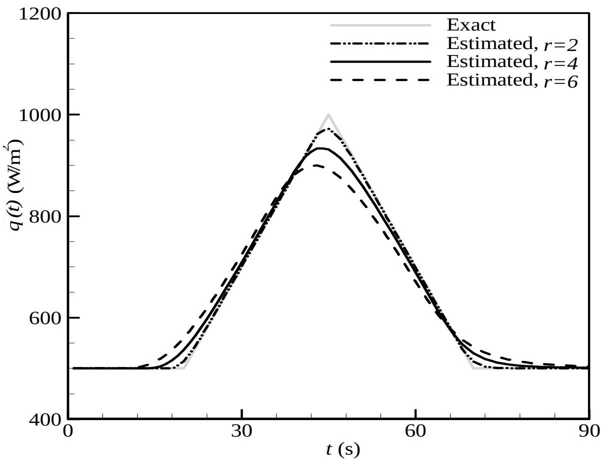
مثال ۱. در این مثال شار گرمایی دقیق به صورت تابع زیر بیان می‌شود:

$$q"_{ex}(t) = \begin{cases} 500 & 0 \le t \le 20, 70 \le t \le 90 \\ 20t + 10 & 20 \le t \le 45 \\ -20t + 1900 & 45 \le t \le 70 \end{cases} \tag{۴۳}$$

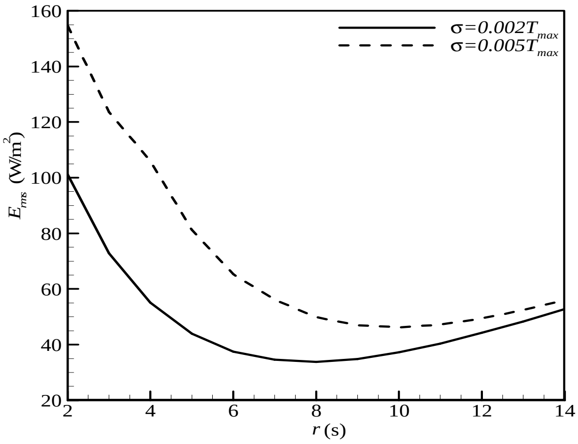
در ابتدا نتایج روش ترتیبی در تخمین شار گرمایی بررسی می‌شود. شکل ۳ شار گرمای تخمین‌زده‌شده را به ازای مقادیر متفاوت گام زمانی آینده، در حالتی که خطای اندازه‌گیری صفر است، نشان می‌دهد. علاوه بر این نتایج در جدول ۱ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که در حالت خطای اندازه‌گیری صفر، $r = 2$ کمترین مقدار خطای تخمین را سبب می‌شود. نتایج حاکی از دقت بالای روش در تخمین شار گرمایی مجهول برای داده‌های دقیق است. هم‌چنین منحنی تغییرات خطای تخمین با گام زمانی آینده به ازای $\sigma = 0.002T_{max}$ و $\sigma = 0.005T_{max}$ در شکل ۴ نشان داده شده است. مطابق این نمودار، با افزایش گام زمانی آینده، خطای تخمین تا یک مقدار حداقل کاهش یافته و پس از آن افزایش می‌یابد. مشاهده می‌شود که برای خطای اندازه‌گیری $\sigma = 0.002T_{max}$ و $\sigma = 0.005T_{max}$، گام زمانی $r = 8$ و $r = 10$ به‌ترتیب کمترین خطای تخمین را ایجاد می‌کنند. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که، اگر داده‌ها به خطای اندازه‌گیری آغشته شوند، تعداد گام زمانی بیشتری برای رسیدن به دقت مطلوب لازم است. شکل ۵ اثر خطای اندازه‌گیری را بر تخمین شار گرمایی در روش ترتیبی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که با افزایش خطای اندازه‌گیری، دقت تخمین شار گرمایی کاهش می‌یابد.

جدول ۱- خطای تخمین شار گرمایی به ازای خطای اندازه‌گیری و گام زمانی آینده متفاوت در مثال ۱ (روش ترتیبی)

گام زمانی آینده	$\sigma = 0$	$\sigma = 0.002\ T_{max}$	$\sigma = 0.005\ T_{max}$
$r = 2$	4.176	101.182	154.677
$r = 4$	7.861	55.0795	106.023
$r = 6$	16.400	37.499	65.335
$r = 8$	22.254	33.848	49.895
$r = 10$	32.637	37.274	46.216
$r = 12$	39.5,3	44.299	49.439
$r = 14$	44.,1,	52.771	56.,59



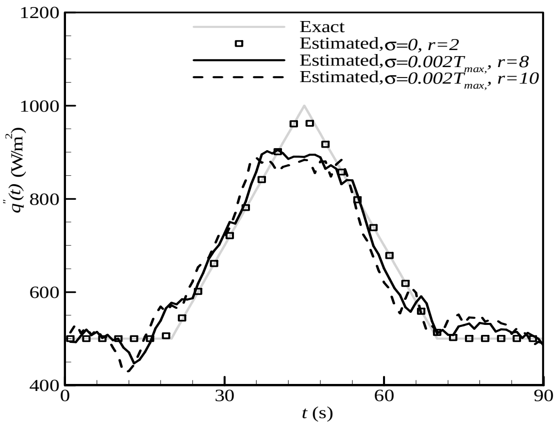
شکل ۳- مقایسه شار گرمایی دقیق و تخمین‌زده‌شده به ازای گام زمانی آینده متفاوت در مثال ۱، $\sigma = 0$ (روش ترتیبی)



شکل ۴- اثر گام زمانی آینده بر دقت تخمین شار گرمایی در مثال ۱ (روش ترتیبی)

در ادامه نتایج مربوط به روش گرادیان مزدوج ارائه می‌شود. شکل ۶ شار گرمایی تخمین زده‌شده را به ازای سه خطای اندازه‌گیری متفاوت نشان می‌دهد. معیار توقف در حالتی که خطای اندازه‌گیری صفر است، $\varepsilon = 0.001$ انتخاب شده است. خطای تخمین شار گرمایی نیز در جدول ۲ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش خطای اندازه‌گیری، خطای تخمین شار گرمایی افزایش می‌یابد.

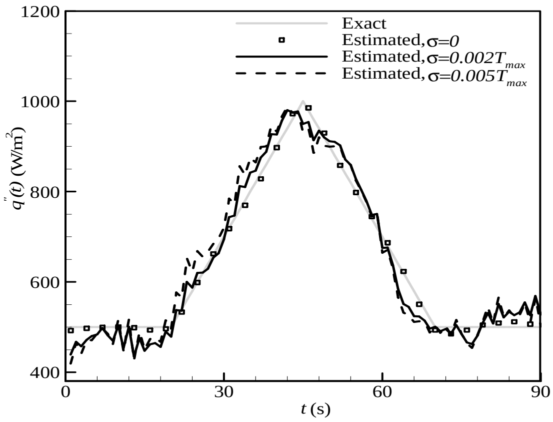
با مقایسه خطای تخمین گزارش شده در جداول ۱ و ۲ می‌توان نتیجه گرفت که دقت روش گرادیان مزدوج در تخمین شار گرمایی از دقت روش ترتیبی بیشتر است. در شکل ۷ توزیع دما در مکان سنسور به ازای دو روش معکوس مختلف در حضور خطای اندازه‌گیری $\sigma = 0.005T_{max}$ نشان داده شده است.



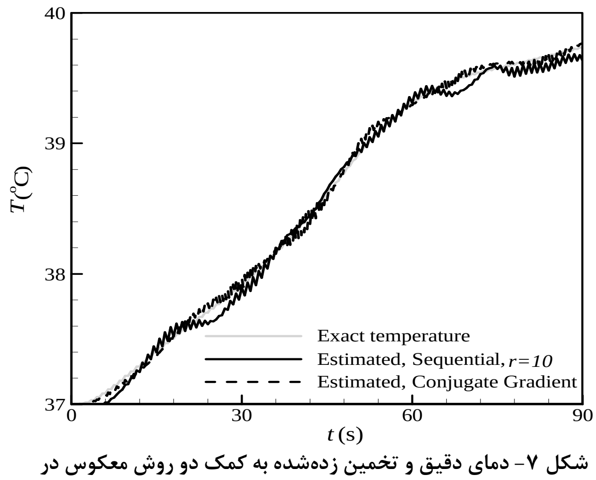
شکل ۵- مقایسه شار گرمایی دقیق و تخمین زده‌شده به ازای خطای اندازه‌گیری متفاوت در مثال ۱ (روش ترتیبی)

جدول ۲- خطای تخمین شار گرمایی به ازای خطای اندازه‌گیری متفاوت در مثال ۱ (روش گرادیان مزدوج)

$\sigma = 0.005\ T_{max}$	$\sigma = 0.002\ T_{max}$	$\sigma = 0$
42.363	32.098	۴.041



شکل ۶- مقایسه شار گرمایی دقیق و تخمین زده‌شده به ازای خطای اندازه‌گیری متفاوت در مثال ۱ (روش گرادیان مزدوج)

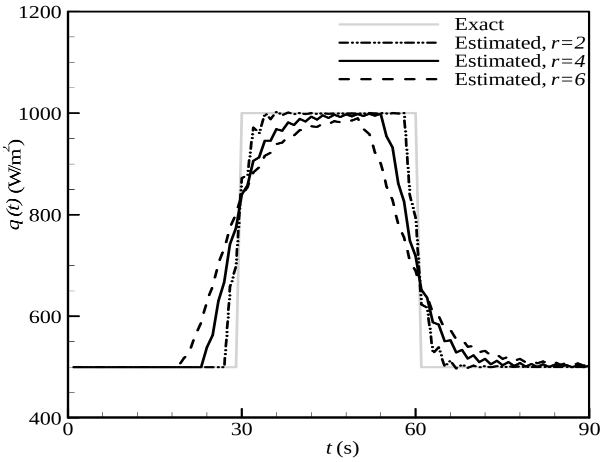


شکل ۷- دمای دقیق و تخمین زده‌شده به کمک دو روش معکوس در مثال ۱، $\sigma = 0.005T_{max}$

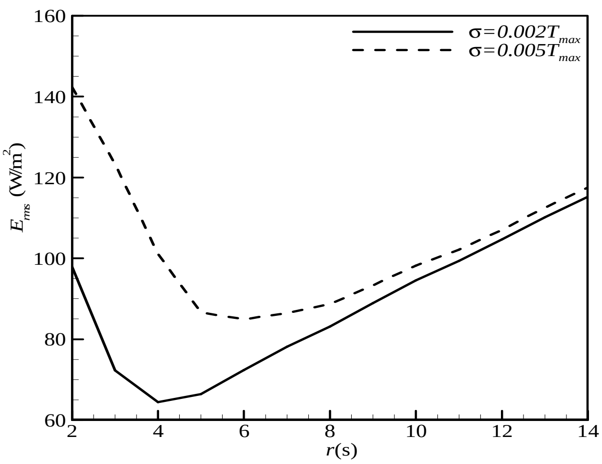
مثال ۲. در این مثال شار گرمایی دقیق به صورت تابع پله زیر بیان می‌شود:

$$q"_{ex}(t) = \begin{cases} 500 & 0 \le t \le 30, \quad 60 \le t \le 90 \\ 1000 & 30 \le t \le 60 \end{cases} \tag{۴۴}$$

شکل ۸ اثر گام زمانی آینده را بر دقت روش ترتیبی برای داده‌های بدون خطا نشان می‌دهد. همچنین مقدار خطا در جدول ۳ ارائه شده است. شکل ۹ تغییرات خطای تخمین را بر حسب گام زمانی آینده برای دو خطای اندازه‌گیری $\sigma = 0.002T_{max}$ و $\sigma = 0.005T_{max}$ نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد برای $\sigma = 0$، گام زمانی آینده ۲ کم‌ترین خطای تخمین را تولید می‌کند. در حالی‌که برای $\sigma = 0.002T_{max}$ و $\sigma = 0.005T_{max}$ تعداد گام زمانی آینده مورد نیاز به ترتیب 4 و ۶ است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که وقتی خطای اندازه‌گیری در داده‌ها وجود داشته باشد، تعداد گام زمانی آینده بیش‌تری لازم است تا دقت تخمین بهبود یابد. شار گرمایی تخمین زده‌شده در حضور خطای اندازه‌گیری در شکل ۱۰ رسم شده است. مشاهده می‌شود که برای تخمین مناسب‌تر شار گرمایی، می‌بایست خطای اندازه‌گیری در داده‌های ورودی کم شود.



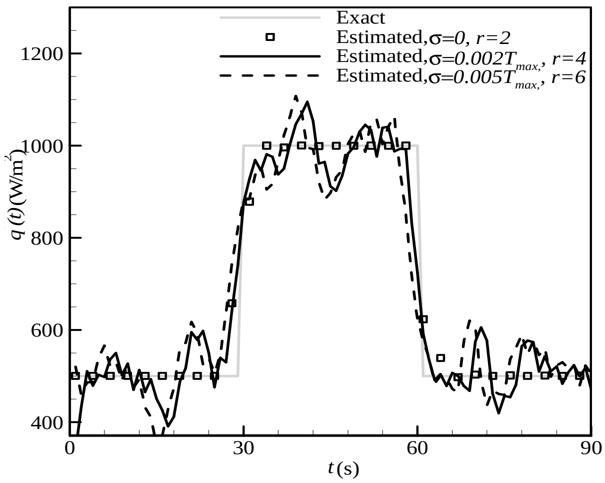
شکل ۸- مقایسه شار گرمایی دقیق و تخمین‌زده‌شده به ازای گام زمانی آینده متفاوت در مثال۲، $\sigma = 0$ (روش ترتیبی)



شکل ۹- اثر گام زمانی آینده بر دقت تخمین شار گرمایی در مثال ۲ (روش ترتیبی)

جدول ۳- خطای تخمین شار گرمایی به ازای خطای اندازه‌گیری و گام زمانی آینده متفاوت در مثال ۲ (روش ترتیبی)

$\sigma = 0.005\,T_{max}$	$\sigma = 0.002\,T_{max}$	$\sigma = 0$	گام زمانی آینده
142.267	97.901	42.818	$r = 2$
101.067	6۵.434	58.140	$r = 4$
84.932	72.386	69.009	$r = 6$
88.684	83.150	78.337	$r = 8$
98.226	94.517	92.978	$r = 10$
107.047	104.657	105.09	$r = 12$
117.507	115.254	110.42	$r = 14$



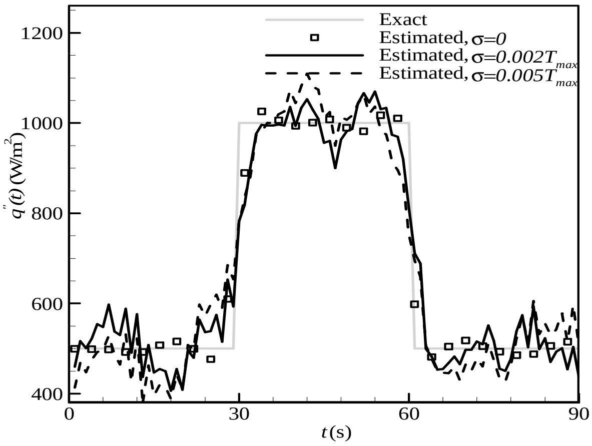
شکل ۱۰- مقایسه شار گرمایی دقیق و تخمین زده‌شده به ازای خطای اندازه‌گیری مختلف در مثال ۲ (روش ترتیبی)

شکل ۱۱ شار گرمایی تخمین زده‌شده به کمک روش گرادیان مزدوج را به ازای خطای اندازه‌گیری $\sigma = 0$، $\sigma = 0.005T_{max}$ و $\sigma = 0.01T_{max}$ نشان می‌دهد. خطای تخمین شار گرمایی نیز در جدول ۴ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که با افزایش خطای اندازه‌گیری، خطای تخمین شار گرمایی افزایش می‌یابد.

مقایسه دو روش معکوس در تخمین شار گرمایی با بررسی خطای E_{rms} گزارش شده در جداول ۳ و ۴ امکان‌پذیر است. به عنوان مثال، در اندازه‌گیری دقیق، مشاهده می‌شود که خطای تخمین در دو روش ترتیبی ($r = 2$) و گرادیان مزدوج به ترتیب ۴۲/۸۱۸ و ۳۴/۰۹۶ است. همچنین این خطا در حضور خطای اندازه‌گیری $\sigma = 0.002\,T_{max}$، در روش ترتیبی ($r = 4$)۶۵/۴۳۴ و در روش گرادیان مزدوج ۶۳/۶۲۵ است. نتایج بیان‌گر دقت بیشتر روش گرادیان مزدوج در مقایسه با روش ترتیبی در تخمین شار گرمایی مجهول در یک مساله انتقال گرمای زیستی غیر خطی است. توزیع دمای تخمین زده‌شده به کمک روش‌های معکوس در شکل ۱۲ رسم شده است. دمای تخمین زده‌شده در روش‌های معکوس به ازای خطای اندازه‌گیری $\sigma = 0.005\,T_{max}$بدست آمده‌اند. مشاهده می‌شود که هر دو روش در تخمین توزیع دمای بافت توانمند هستند.

اثر حدس اولیه بر دقت تخمین شار گرمایی در جدول ۵ گزارش شده است. مشاهده می‌شود که در هر دو روش، شار گرمایی می‌تواند به خوبی با حدس اولیه دلخواه تخمین زده شود.

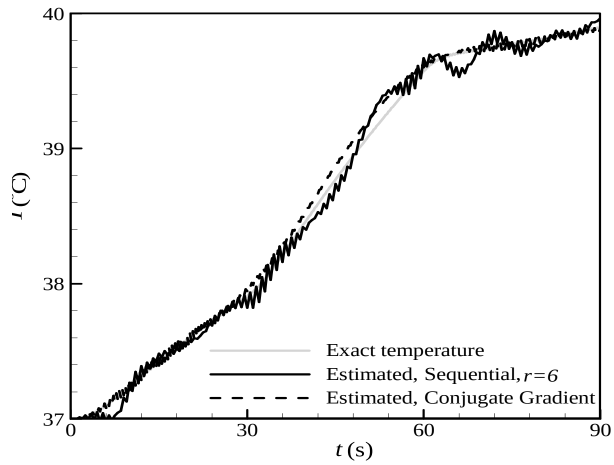
به منظور مطالعه اثر مکان اندازه‌گیری بر روی دقت روش معکوس، سه مکان مختلف در نظر گرفته می‌شود. خطای تخمین شار گرمایی در جدول ۶ برای هر دو روش با فرض خطای اندازه‌گیری صفر برای تابع پله ارائه شده است. همان‌طور که انتظار می‌رود با دور شدن از محل اعمال شار، دقت نتایج حاصل از هر دو روش معکوس کاهش می‌یابد. در عین حال مشاهده می‌شود که حساسیت روش گرادیان مزدوج به مکان اندازه‌گیری، نسبت به روش ترتیبی بیش‌تر است.



شکل ۱۱- مقایسه شار گرمایی دقیق و تخمین زده‌شده به ازای خطای اندازه‌گیری مختلف در مثال ۲ (روش گرادیان مزدوج)

جدول ۴- خطای تخمین شار گرمایی به ازای خطای اندازه‌گیری متفاوت در مثال ۲ (روش گرادیان مزدوج)

$\sigma = 0.005\ T_{max}$	$\sigma = 0.002\ T_{max}$	$\sigma = 0$
79.227	6۳.625	34.069



شکل ۱۲- دمای دقیق و تخمین زده‌شده به کمک دو روش معکوس در مثال۲، $\sigma = 0.005T_{max}$

جدول ۵- خطای تخمین شار گرمایی به ازای حدس اولیه متفاوت در مثال ۲ زمانی‌که $\sigma = 0$ (روش ترتیبی و گرادیان مزدوج)

	$q''(t) = 0$ (W/m²)	$q''(t) = 500$	$q''(t) = 1000$
روش ترتیبی	42.818	46.905	46.905
روش گرادیان مزدوج	34.069	28.406	30.530

جدول ۶- خطای تخمین شار گرمایی به ازای مکان اندازه‌گیری متفاوت در مثال ۲ زمانی‌که $\sigma = 0$ (روش ترتیبی و گرادیان مزدوج)

	$x_0 = 0$ (mm)	$x_0 = 2$	$x_0 = 3$
روش ترتیبی	34.503	42.818	44.814
روش گرادیان مزدوج	7.828	34.069	40.501

۵- نتیجه‌گیری

در این مطالعه روش ترتیبی و روش گرادیان مزدوج با موفقیت در تخمین شار گرمایی بر روی سطح یک بافت زنده با خواص گرمایی متغیر به کار گرفته شدند. رفتار گرمایی بافت به کمک مدل انتقال گرمای زیستی پنس شبیه‌سازی شد. دو مثال استاندارد برای ارزیابی حل معکوس در نظر گرفته شد و مقایسه‌ای بین نتایج بدست آمده از دو روش انجام پذیرفت. اثر خطای اندازه‌گیری، حدس اولیه و مکان اندازه‌گیری بر دقت هر دو روش معکوس بررسی شد. نتایج نشان داد در حالتی که خطای اندازه‌گیری صفر است، هر دو روش با دقت قابل قبولی شار گرمایی مجهول را تعیین می‌کنند؛ اما با افزایش خطای اندازه‌گیری دقت هر دو حل معکوس کاهش می‌یابد. با این وجود تخمین صورت گرفته در روش گرادیان مزدوج در مقایسه با روش ترتیبی قابل اعتمادتر است. همچنین مشاهده شد که شار گرمایی مجهول می‌تواند با حدس اولیه دلخواه تخمین زده شود. نتایج نشان داد که روش گرادیان مزدوج در مقایسه با روش ترتیبی نسبت به مکان اندازه‌گیری دما حساس‌تر است.

۶- فهرست علائم

C	ظرفیت گرمایی ویژه $\mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$
D	جهت کاهش
$\boldsymbol{E_{rms}}$	خطای تخمین شار گرمایی
J	تابع هدف
K	رسانایی گرمایی $\mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$
L	طول بافت m
N	تعداد اندازه‌گیری زمانی
q	آهنگ تولید گرما $\mathrm{Wm^{-3}}$
r	گام زمانی آینده
t	زمان **s**
T	دما °C
W	آهنگ تبادل گرما بین بافت و خون $\mathrm{Wm^{-3}}$
x	مکان m
X	ماتریس حساسیت
Y	دمای اندازه‌گیری شده °C

علائم یونانی

β	اندازه گام جستجو

$\boldsymbol{\gamma}$	ضریب مزدوج
$\boldsymbol{\delta}$	تابع دلتای دیراک
$\boldsymbol{\varepsilon}$	معیار توقف روش گرادیان مزدوج
$\boldsymbol{\lambda}$	ضریب لاگرانژ
$\boldsymbol{\mu}$	عدد تصادفی
$\boldsymbol{\rho}$	چگالی
$\boldsymbol{\sigma}$	خطای اندازه‌گیری
$\boldsymbol{\omega}$	آهنگ پرفیوژن خون $\mathrm{kgs^{-1}m^{-3}}$

زیرنویس

b	خون
es	تخمین زده‌شده
ex	دقیق
f	نهایی
m	متابولیسم
max	بیشترین
0	مکان اندازه‌گیری دما

بالانویس

Old	تکرار قبل
k	شمارنده تکرار
*	حدس اولیه

۷- مراجع

[1] Yue K., Zhang X., Yu F., Simultaneous Estimation of Thermal Properties of Living Tissue Using Noninvasive Method, *Int J Thermophys*, Vol. 28, No. 5, pp. 1470-1489, 2007.

[2] Huang C.-H., Huang C.-Y., An inverse problem in estimating simultaneously the effective thermal conductivity and volumetric heat capacity of biological tissue, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 31, No. 9, pp. 1785-1797, 2007.

[3] Partridge P.W., Wrobel L.C., A coupled dual reciprocity BEM/genetic algorithm for identification of blood perfusion parameters, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 19, No. 1, pp. 25-38, 2009.

[4] Trucu D., Ingham D., Lesnic D., Inverse temperature-dependent perfusion coefficient reconstruction, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 45, No. 5, pp. 542-549, 2010.

[5] Loulou T., Scott E.P., An inverse heat conduction problem with heat flux measurements, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 67, No. 11, pp. 1587-1616, 2006.

[6] Partridge P.W., Wrobel L.C., An inverse geometry problem for the localisation of skin tumours by thermal analysis, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol. 31, No. 10, pp. 803-811, 2007.

[7] Das K., Singh R., Mishra S.C., Numerical analysis for determination of the presence of a tumor and estimation of its size and location in a tissue, *Journal of Thermal Biology*, Vol. 38, No. 1, pp. 32-40, 2013.

[8] Das K., Mishra S.C., Estimation of tumor characteristics in a breast tissue with known skin surface temperature, *Journal of Thermal Biology*, Vol. 38, No. 6, pp. 311-317, 2013.

[9] Das K., Mishra S.C., Non-invasive estimation of size and location of a tumor in a human breast using a curve fitting technique, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 56, No. pp. 63-70, 2014.

[10] Das K., Mishra S.C., Simultaneous estimation of size, radial and angular locations of a malignant tumor in a 3-D human breast– A numerical study, *Journal of Thermal Biology*, Vol. 52, No. pp. 147-156, 2015.

[11] Ren Z., Liu J., Wang C., Jiang P., Boundary element method (BEM) for solving normal or inverse bio-heat transfer problem of biological bodies with complex shape, *J. of Thermal Science*, Vol. 4, No. 2, pp. 117-124, 1995.

[12] Loulou T., Scott E.P., Thermal dose optimization in hyperthermia treatments by using the conjugate gradient method, *Numerical Heat Transfer: Part A: Applications*, Vol. 42, No. 7, pp. 661-683, 2002.

[13] Zhang L., Dai W., Nassar R., A numerical method for optimizing laser power in the irradiation of a 3-D triple-layered cylindrical skin structure, *Numerical Heat Transfer, Part A: Applications*, Vol. 48, No. 1, pp. 21-41, 2005.

[14] Erhart K., Divo E., Kassab A., An evolutionary-based inverse approach for the identification of non-linear heat generation rates in living tissues using a localized meshless method, *International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow*, Vol. 18, No. 3/4, pp. 401-414, 2008.

[15] Yang C.-y., Boundary estimation of hyperbolic bio-heat conduction, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 54, No. 11, pp. 2506-2513, 2011.

[16] Majchrzak E., Paruch M., Identification of electromagnetic field parameters assuring the cancer destruction during hyperthermia treatment, *Inverse Problems in Science and Engineering; Formerly Inverse Problems in Engineering*, Vol. 19, No. 1, pp. 45-58, 2011.

[17] Lee H.-L., Lai T.-H., Chen W.-L., Yang Y.-C., An inverse hyperbolic heat conduction problem in estimating surface heat flux of a living skin tissue, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 37, No. 5, pp. 2630-2643, 2013.

[18] Yang C.-y., Boundary prediction of bio-heat conduction in a two-dimensional multilayer tissue, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 78, No. pp. 232-239, 2014.

[19] Yang C.-y., Determining the heat strength required in hyperthermia treatments, *International Communications in Heat and Mass Transfer*, Vol. 57, No. pp. 282-285, 2014.

[20] Lee H.-L., Chen W.-L., Chang W.-J., Yang Y.-C., Estimation of surface heat flux and temperature distributions in a multilayer tissue based on the hyperbolic model of heat conduction, *Computer methods in biomechanics and biomedical engineering*, Vol. 18, No. 14, pp. 1525-1534, 2015.

[21] Jalali A., Ayani M.-B., Baghban M., Simultaneous estimation of controllable parameters in a living tissue during thermal therapy, *Journal of Thermal Biology*, Vol. 45, No. pp. 37-42, 2014.

[22] Baghban M., Ayani M.B., Source term prediction in a multilayer tissue during hyperthermia, *Journal of Thermal Biology*, Vol. 5 ,۲No. pp. 187-191, 2015.

[23] Pennes H.H., Analysis of tissue and arterial blood temperatures in the resting human forearm, *Journal of applied physiology*, Vol. 1, No. 2, pp. 93-122, 1948.

[24] Bardati F., Gerosa G., On the solution of the non-linear bio-heat equation, *Journal of biomechanics*, Vol. 23, No. 8, pp. 791-798, 1990.

[25] Trobec R., Depolli M., Simulated temperature distribution of the proximal forearm, *Computers in Biology and Medicine*, Vol. 41, No. 10, pp. 971-979, 2011.

[26] Haemmerich D., dos Santos I., Schutt D.J., Webster J.G., Mahvi D.M., In vitro measurements of temperature-dependent specific heat of liver tissue, *Medical engineering & physics*, Vol. 28, No. 2, pp. 194-197, 2006.

[27] Ferziger J.H., Peric M., Computational methods for fluid dynamics, Springer Science & Business Media, 2012.

[28] Alifanov O.M., Inverse heat transfer problems, Springer Science & Business Media, 2012.

[29] Beck J.V., Blackwell B., Clair Jr C.R.S., Inverse heat conduction: Ill-posed problems, James Beck, 198.۵

[30] M.N. Ozisik, Inverse heat transfer: fundamentals and applications, CRC Press, 2000.

[31] Gutiérrez Cabeza J.M., Martín García J.A., A. Corz Rodríguez, A sequential algorithm of inverse heat conduction problems using singular value decomposition, *International Journal of Thermal Sciences*, Vol. 44, No. 3, pp. 235-244, 2005.

[32] Beck J.V., Surface heat flux determination using an integral method, *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 7, No. 2, pp. 170-178, 1968.

[33] Azimi P.G. A., Gholami S., Contact boundary condition estimation in fractional non-Fourier heat conduction problem using conjugate gradient method without/with adjoint problem, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 6, pp. 22-28, 2014. (In Persian.(

[35] Kaipio J., Somersalo E., Statistical and computational inverse problems, Springer Science & Business Media, 2006.