مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۷۹، جلد ۴۷، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۶، صفحه ۳۲۳-۳۳۲

شبیه‌سازی عددی جریان غیرلزج در رژیم ماوراء صوت بروش بدون شبکه با اعمال اثرات گاز داغ

میریوسف هاشمی* دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

بهزاد فکور دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید مدنی آذربایجان، تبریز، ایران

چکیده

در این تحقیق برای حل جریان غیر لزج ماوراء صوت از روش بدون شبکه مبتنی بر روش کمترین مربعات خطا و سری تیلور استفاده شده است. بمنظور پایدارسازی حل و جلوگیری از نوسانات ناخواسته خصوصاً در همسایگی موج ضربه‌ای از جملات مشتقات مرتبه دوم و چهارم به عنوان استهلاک مصنوعی استفاده شده است. در این تحقیق فرض شده است که واکنش های شیمیایی صورت گرفته در اثر بالا رفتن دما به صورت تعادلی بوده و از نمودارهای استخراج شده برای تخمین نسبت گرمای ویژه استفاده گردیده است. برای گسسته سازی زمانی معادلات حاکم از روش صریح چهار مرحله ای رانگ-کوتا استفاده شده و برای تسریع همگرائی از روش هموارسازی مانده ها و گام زمانی محلی استفاده شده است. نتایج حاصل از حل با روش بدون شبکه با نتایج روش حجم کنترل با توزیع نقاط یکسان مقایسه شده است و مقایسه ها نشان میدهد که استفاده از روش بدون شبکه در مقایسه با روش حجم محدود دارای همگرایی بهتر و زمان محاسباتی کمتری است. همچنین استفاده از مدل گاز واقعی و اثرات گاز داغ به جای استفاده از مدل گاز ایده آل منجر به محل دقیق موج ضربه‌ای می شود و توزیع دما و فشار پشت موج ضربه ای با واقعیت تطابق بهتری دارد.

واژه های کلیدی: روش بدون شبکه، جریان ماوراء صوت، گاز داغ، روش کمترین مربعات، استهلاک مصنوعی.

Numerical Simulation of Inviscid Flow in Hypersonic Regime Using a Meshless Approach and by Applying Hot Gas Effects

M.Y. Hashemi Mechanical Engineering Department, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

B. Fakoor Mechanical Engineering Department, Azarbaijan Shahid Madani University, Tabriz, Iran

Abstract

In this paper, a meshless approach utilizing least-squares error technique and Taylor series was used to numerically solve an inviscid hypersonic flow. Second and fourth order derivatives were used as artificial dissipation terms to stabilize the solution and prevent unwanted oscillations especially around the vicinity of shockwave. In this study, chemical reactions caused by increased temperature were assumed to be in equilibrium condition and derived graphs were used to estimate the specific heat ratio. We used an explicit four-stage Runge–Kutta method for temporal discretization of governing equations, and used local time-stepping and residual smoothing techniques to accelerate the convergence process. The results obtained from meshless approach were compared with those obtained from finite-volume method with identical point distribution, and this comparison showed that using meshless approach provides better convergence and lower computation time. Result also showed that replacing ideal gas model with real gas model and applying the hot gas effects lead to precise identification of shockwave's location, and provides a more accurate prediction of temperature and pressure distribution behind the shockwave.

Keywords: Meshless Method, Hypersonic Flow, Hot Gas, Least-Squares Method, Artificial Dissipation.

۱- مقدمه

بدلیل پیشرفت‌های اخیر در زمینه طراحی، ساخت و توسعه فضاپیماهای ماوراء صوت[1] و اهمیت ایمنی و کارآیی مناسب آنها، تحلیل آئرودینامیکی آنها بسیار حائز اهمیت می باشد. در رژیم مافوق صوت، پدیده های پیچیده ای همچون حضور امواج ضربه ای و انبساطی قوی، تداخل امواج با لایه مرزی، لایه موج ضربه‌ای نازک، لایه آنتروپی، کم بودن چگالی در ارتفاعات بالا و افزایش دما در پشت شوک و نزدیکی دیواره وجود دارد. از مهمترین این پدیده ها، افزایش دما در پشت شوک و در نزدیکی دیواره است که باعث ایجاد واکنش های شیمیایی در گازهای سازنده هوا شده و در نتیجه باعث تغییر در خصوصیات فیزیکی هوا همچون نسبت گرمای ویژه (γ)، لزجت (μ) و رسانایی گرمایی (k) می شود. با توجه به گرماگیر بودن این واکنشها، دمای جریان در نزدیکی دیواره دچار افت می شود. جزئیات تغییرات ساختار و خواص هوا با افزایش دما در فشار یک اتمسفر در مرجع [۱] آورده شده است.

انجام محاسبات آئرودینامیکی با استفاده از روش های کلاسیک و با $\gamma=1.4$ در اعداد ماخ بالاتر از ۳ منجر به بروز خطای قابل توجه در پیش بینی و شبیه سازی مدلهای واقعی می‌شود و هرچه عدد ماخ بالاتر می رود خطا بیشتر می گردد. از اینرو محققان با بررسی خواص ترمودینامیکی و فیزیکی هوا، نمودارها و برنامه های کامپیوتری مختلفی

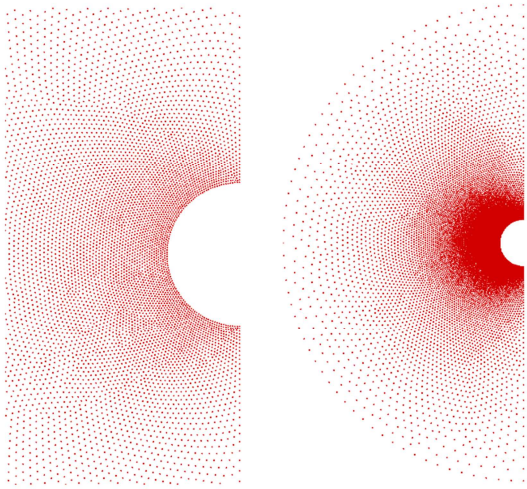
[1] Hypersonic flow

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: m.y.hashemi@azaruniv.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۴/۰۴/۱۰
تاریخ پذیرش: ۹۴/۰۷/۱۲

از جمله TGas و RGas را استخراج نموده و مورد استفاده قرار داده‌اند[۲].

با توجه به هزینه های زیاد آزمایشگاهی برای جریان ماوراء صوت، دینامیک سیالات محاساتی[1] (CFD) امروزه به یکی از مهمترین ابرازها برای بررسی و مدلسازی جریان اطراف پرنده‌های ماوراء صوت تبدیل شده است. یکی از چالش های مهم در این زمینه، تولید شبکه می باشد. برای حل جریان ماوراء صوت معمولا از روش تولید شبکه باسازمان یکپارچه استفاده می شود[۳]. ایجاد شبکه با سازمان حول هندسه های پیچیده بسیار مشکل و در مواقعی غیرممکن است. شبکه بی سازمان از این ایرادات مبراست. هاشمی و جهانگیریان از شبکه بی سازمان برای حل عددی جریان لزج لایه‌ای ماوراء صوت استفاده کرده‌اند[۴]. با این وجود این روش نیز معایب خاص خود از جمله صرف زمان بیشتر در تولید شبکه و همگرایی در حل معادلات حاکم را می طلبد. همچنین در پاره ای از موارد که هندسه در اثر عوامل محیطی تغییر پیدا می کند یا جسم در حال حرکت باشد یا در مسائل مانند حرکت های نسبی همچون موشک های چند مرحله‌ای و جدایش مخازن سوخت از شاتل نیاز است که این شبکه ها بازتولید شوند که در این صورت مدت زمان و انرژی بیشتری باید صرف گردد. در روش بدون شبکه برای پیش گیری از این مشکلات، نقطه‌هایی در فضای اطراف جسم پخش می شوند و این نقاط متناسب با تغییرات در هندسه و موقعیت می توانند جابجا شوند(شکل ۱). به این روش، روش بدون شبکه می گویند. در این روش برای نقطه های پخش شده در فضا میدان تاثیر[2] (همسایگی) تعریف می شود و نقاط داخل محدوده فوق برای آن نقطه را همسایه های آن نقطه در نظر می‌گیرند. در روش بدون شبکه امکان اضافه شدن نقاط یا حذف آنها و یا حرکت دهی نقاط در موارد سازگارسازی براحتی امکان پذیر است.



شکل۱- توزیع نقاط در اطراف سیلندر

لوهنر ثابت کرده است که هزینه تولید نقاط در یک میدان سه بُعدی به مراتب کمتر از تولید شبکه بی سازمان در همان میدان و هندسه است[۵]. عدم نیاز به اتصالات باعث رفع مشکلات عدیده در تولید و استفاده از شبکه‌ها خصوصا در مرزهای متحرک شده است. در روش بدون شبکه همانند روش اختلاف محدود و برخلاف روش حجم محدود، نیازی به محاسبه مساحت ها و حجم ها نیست. این مزایا سبب شده است که امروزه تلاشهای بسیاری برای استفاده از روش بدون شبکه در شبیه‌سازی جریان‌ها انجام شود.

معادلات حاکم در هر نقطه با استفاده از همسایه‌های آن که در میدان تاثیر قرار دارند گسسته‌سازی می‌کنند. برای تخمین مشتقات با استفاده از روش بدون شبکه، روش های مختلفی توسط پژوهشگران ارائه شده است [۶].

روش ذرات هیدرودینامیکی هموار شده[3] (SPH) جزء اولین روشهاست و برای اولین بار توسط موناهان معرفی شد. در روش فوق مقدار در یک نقطه مشخص بر اساس انتگرال توابع وزنی معروف به تابع کرنل و نقاط واقع در میدان نفوذ آن تخمین زده می‌شود. از روش فوق در حل عددی مسائل سیالاتی، سازه‌ای و آکوستیک استفاده شده است [۷]. کایلا از روش SPH برای مدل‌سازی آئروالاستیسته در یک هواپیما با سطوح کنترل متحرک در مقیاس بالا استفاده کرده است[۸]. روش بدون شبکه محلی پتروف-گالرکین[4] (MLPG) برخاسته از روش‌های عناصر متناهی می‌باشد. در روش MLPG لازم است که یک ناحیه انتگرال‌گیری محلی تعریف شود. این ناحیه را می‌توان با فرض یک شبکه زمینه کلی و یا نواحی انتگرال محلی بصورت اشکال ساده‌ای همچون مربع یا دایره در نظر گرفت[۹]. لین روش MLPG را برای حل معادلات جریان لزج تراکم ناپذیر بکار برده و برای پایدارسازی روش از یک روش بالا دست استفاده کرده است[۱۰]. روش بدون شبکه با توابع پایه شعاعی[5] (RBF) مستقل از جهت بوده و تنها بر اساس فاصله از نقطه تعریف می‌شوند. اغلب این توابع بصورت توابع گاوسی، اسپلاین صفحه‌ای، لگاریتمی و چندگانه می‌باشند. کانسا جزء اولین افرادی بود که در حل معادلات حاکم بر جریان از روش RBF استفاده کرد و همچنین وی توابع شعاعی نامتقارنی را برای افزایش دقت روش RBF ارائه داد [۱۱-۱۲]. امروزه عموماً بیشتر روش‌های بدون شبکه بکار گرفته شده روش نقاط محدود[6] (FPM) می‌باشند. در حالت کلی روش FPM مبتنی بر تخمین تابع بر اساس کمترین مربعات خطا با استفاده از نقاط همسایه در میدان تاثیر است. این توابع بدست آمده برای گسسته سازی معادلات حاکم استفاده می‌شوند. روش کمترین مربعات خطا در دینامیک سیالات محاسباتی مبتنی بر شبکه‌های محاسباتی برای رسیدن به دقت‌های بالا توسط محققانی چون ماوریپلیس مورد استفاده قرار گرفته است[۱۳]. روش FPM را می‌توان در دو گروه اصلی تقسیم بندی کرد: روش‌هایی که مشتقات بر اساس سری تیلور استخراج می‌شوند و روش‌هایی که مبتنی بر نمودار استخراج شده بر اساس مقادیر در نقاط همسایه صورت می‌گیرد. در روش FPM مبتنی بر سری تیلور یک تابع خطی بین نقطه مورد نظر و یکی از نقاط همسایه استخراج و از آن برای تخمین مشتق بین دو نقطه و تصحیح آن برای نقطه مورد نظر با استفاده از تمامی همسایه‌ها در

1 Computational Fluid Dynamics
2 Influence domain

3 Smooth Particle Hydrodynamics (SPH)
4 Meshless Local Petrov-Galerkin (MLPG)
5 Radial Basis Functions (RBF)
6 Finite Point Methods (FPM)

میدان تاثیر آن نقطه بر اساس کمترین مربعات خطا استفاده می‌شود. باتینا از اولین افرادی بود که از روش استخراج توابع بر اساس کمترین مربعات خطا با تابع وزنی ثابت برای حل معادلات جریان سیال بصورت لزج و غیر لزج استفاده کرد[۱۴]. روش مشابهی چند سال بعد توسط لیو ارائه شد[۱۵] و در ادامه راهکارهایی برای افزایش دقت و پایداری توسط اوناته و همکارانش ارائه گردید[۱۶]. لوهنر و همکارانش نیز استفاده از روش فوق را به سه بُعد و جریانهای تراکم پذیر توسعه دادند[۱۷]. روش کمترین مربعات خطا بر پایه سری تیلور و با استفاده از روش بالا دست برای حل عددی جریان تراکم پذیر توسط دشپانده و رامش استفاده شده است[۱۸]. با استفاده از روش فوق هاریش و پاواناکومار جدا شدن بوستر در پرتاب یک شاتل فضایی را مدل سازی کردند[۱۹]. مورینیشی و رائو مطالعاتی را بر روی دقت و سازگاری روش بدون شبکه مبتنی بر کمترین مربعات خطا بر اساس سری تیلور انجام داده‌اند[۲۰-۲۱]. جمسون و کتز با استفاده از روش CUSP به حل معادلات حاکم بر جریان غیرلزج پرداخته اند و از روش های مختلفی برای تخمین مشتقات از جمله سری تیلور با کمترین مربعات خطا، تخمین تابع با کمترین مربعات خطا و توابع شعاعی در تحقیقات خود استفاده کرده اند[۲۲و۲۳]. هاشمی و جهانگیریان با روش کمترین مربعات خطا و اضافه نمودن استهلاک مصنوعی بمنظور پایدارسازی آن به حل جریان غیر لزج و لزج در رژیم های زیرصوت، گذر صوت و مافوق صوت پرداخته اند[۲۴-۲۵]

در تحقیق حاضر برای گسسته سازی مکانی معادلات حاکم از روش کمترین مربعات خطا مبتنی بر سری تیلور استفاده شده است و بمنظور جلوگیری از ناپایداری حل خصوصا در محل موج ضربه ای از استهلاک مصنوعی مرکب از مشتقات دوم و چهارم استفاده شده است. هدف اصلی این تحقیق بررسی توانایی روش فوق در تسخیر امواج ضربه‌ای بسیار قوی بوجود آمده در جریان ماوراء صوت حول اجسام پَخ است.

۲- معادلات حاکم و گسسته سازی در محیط بدون شبکه

معادلاتی که در این تحقیق مورد بررسی قرار می گیرند معادلات حاکم بر جریان تراکم پذیر غیر لزج در فرم بقایی هستند و این معادلات در حالت دو بعدی بصورت زیر می‌باشند:

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}+\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y}=0 \qquad (۱)$$

که در آن

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho E\end{bmatrix},\mathbf{F}=\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2+p\\ \rho uv\\ (\rho E+p)u\end{bmatrix},\mathbf{G}=\begin{bmatrix}\rho v\\ \rho vu\\ \rho v^2+p\\ (\rho E+p)v\end{bmatrix} \qquad (۲)$$

در این رابطه ρ چگالی، u مولفه سرعت در راستای محور x، v مولفه سرعت در راستای محور y، ρE انرژی مخصوص کل و p فشار است. فشار و چگالی به ترتیب نسبت به فشار و چگالی جریان آزاد بی بعد شده اند. همچنین معادله حالت گاز برای بسته شدن دستگاه معادلات مورد استفاده قرار گرفته است. برای حل جریان ماوراء صوت هوا با واکنشهای تعادلی بصورت سریع دو روش موجود است که در یکی از روش‌ها اعداد جدول‌ها با یک زیربرنامه میانیابی به برنامه کامپیوتری اضافه می شود و با مشخص شدن دو خاصیت ترمودینامیکی بقیه متغیرها با میانیابی تعیین می شوند[۲۶] و در روش دیگر یک چندجمله‌ای برای داده‌های جدول‌ها استخراج و مورد استفاده قرار می گیرد. در این پژوهش از روش دوم استفاده شده است.

با حل معادلات حاکم بر حرکت سیال(معادلات ۱) مولفه های سرعت (u,v)، چگالی (ρ) و انرژی کل (E) بدست می آیند و در ادامه می توان انرژی داخلی را بصورت زیر محاسبه نمود.

$$e=E-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right) \qquad (۳)$$

حال با مشخص بودن مقدار دو متغیر ترمودینامیکی چگالی و انرژی داخلی می‌توان بقیه متغیرهای ترمودینامیکی را محاسبه نمود. ابتدا از رابطه زیر γ ی مؤثر که با $\hat{\gamma}$ نشان داده می‌شود، محاسبه می شود:

$$\hat{\gamma}=a_1+a_2Y+a_3Z+a_4YZ+a_5Y^2+a_6Z^2 +b_7YZ^2+a_8Z^3+\frac{a_9+a_{10}Y+a_{11}Z+a_{12}YZ}{1+\exp\left[\left(a_{13}+a_{14}Y\right)\left(Z+a_{15}Y+a_{16}\right)\right]} \qquad (۴)$$

که در آن $Y=Log\left(\rho/\ 1.225\right)$ و $Z=Log\left(e/78408.4\right)$ است و a_1 تا a_{16} ضرائب ثابت هستند [۱]. برای متغیرهای رابطه بالا، واحدها عبارتند از: $\left(N/m^2\right)$ برای فشار، $\left(kg/m^3\right)$ برای چگالی و $\left(m^2/Sec^2\right)$ برای انرژی داخلی. پس از تعیین $\hat{\gamma}$، بکمک مقدار انرژی داخلی و معادله حالت، مقدار فشار بصورت زیر محاسبه می گردد:

$$\left.\begin{array}{l} e=C_vT\ ,\hat{\gamma}=\dfrac{C_p}{C_v}\\ C_v=\dfrac{R}{\hat{\gamma}-1}\end{array}\right\}\Rightarrow e=\frac{RT}{\hat{\gamma}-1}=\frac{P}{(\hat{\gamma}-1)\rho}\Rightarrow P=\rho e\left(\hat{\gamma}-1\right) \qquad (۵)$$

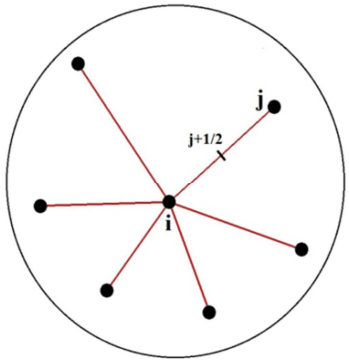
در روش بدون شبکه، معادلات حاکم همانند روش اختلاف محدود بصورت مستقیم گسسته سازی می شوند. برای گسسته سازی معادلات در میدان جریان به روش بدون شبکه از روش کمترین مربعات خطا استفاده شده است. این گسسته سازی با توجه به نقاط همسایه هر نقطه که در میدان نفوذ آن قرار دارند، صورت می پذیرد(شکل۲). حال اگر متغیر ϕ در نظر گرفته شود و هدف محاسبه مشتقات آن در نقطه i بکمک نقاط قرار گرفته در میدان نفوذ آن باشد، می توان از سری تیلور با دقت مرتبه یک بصورت زیر استفاده نمود(شکل ۲):

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_i\left(x_j-x_i\right)+\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_i\left(y_j-y_i\right)=\phi_j-\phi_i \qquad (۶)$$

رابطه فوق برای تمامی نقاط در میدان نفوذ نوشته شده و دستگاه معادلات تشکیل می‌شود. برای افزایش دقت و به عبارتی کاهش خطای قطع، تاثیردهی بیشتر نقاط نزدیک به نقطه i مد نظر قرار گرفته و از تابع وزن[1] ω_{ij} استفاده می‌شود. از روش کمترین مربعات خطا برای محاسبه مجهولات استفاده شده است. در این صورت مشتقات تابع در حالت دو بعدی چنین خواهند بود[۲۷]:

1 Weight Function

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_i=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\,(\phi_j-\phi_i)\;;\left.\frac{\partial\phi}{\partial y}\right|_i=\sum_{j=1}^{m}b_{ij}\,(\phi_j-\phi_i) \qquad (۷)$$



شکل۲- طرحواره نقطه و همسایه های آن

بعد از گسسته سازی معادلات به روش کمترین مربعات خطا، شکل نهایی معادله اویلر به صورت زیر خواهد بود[۲۴]:

$$\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\,\Delta\mathbf{F}_{ij}+\sum_{j=1}^{m}b_{ij}\Delta\mathbf{G}_{ij}=0 \qquad (۸)$$

که در آن $\Delta\mathbf{F}_{ij}$ و $\Delta\mathbf{G}_{ij}$ با توجه به شکل ۲ بصورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{F}_{ij}&=\mathbf{F}_j-\mathbf{F}_i\\ \Delta\mathbf{G}_{ij}&=\mathbf{G}_j-\mathbf{G}_i\end{aligned} \qquad (۹)$$

حال اگر شار در جهت بردار کمترین مربعات خطا یعنی (a,b) بصورت $\mathbf{H}=\mathrm{a}\,\mathbf{F}+\mathrm{b}\,\mathbf{G}$ تعریف شود، آنگاه معادله (۸) به شکل زیر در خواهد آمد:

$$\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m}\Delta\mathbf{H}_{ij}=0 \qquad (۱۰)$$

۳- استهلاک مصنوعی[1]

اگر از روش کمترین مربعات خطا برای یک نقطه با همسایه هایی با توزیع متقارن استفاده شود ملاحظه می گردد که گسسته سازی مکانی با روش کمترین مربعات خطا منجر به گسسته سازی مرکزی خواهد شد که با تحلیل پایداری میتوان نشان داد روش فوق ناپایدار است[۲۸]. در این پژوهش برای رفع نوسانات و پایدارسازی حل از روش افزودن استهلاک مصنوعی استفاده شده است. در این روش حذف نوسانات بوجود آمده با اضافه کردن مشتقات دوم و چهارم متغیرهای بقایی با ضرائب کنترلی صورت می گیرد. در این حالت شکل کلی گسسته سازی مکانی معادلات حاکم با اضافه نمودن استهلاک مصنوعی به شکل معادله (۱۱) می باشد[۲۴].

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m}\Delta\mathbf{H}_{ij}-\mathbf{D}_i=0\\ &\mathbf{D}_i=\left[\left(\nabla\left(\varepsilon^{(2)}\lambda\right)\nabla\mathbf{W}\right)-\left(\nabla^2\left(\varepsilon^{(4)}\lambda\right)\Delta^2\mathbf{W}\right)\right]_i\\ &\Delta\mathbf{W}_i=\sum_{j=1}^{m}(\mathbf{W}_j-\mathbf{W}_i)=\sum_{j=1}^{m}\mathbf{W}_j-m*\mathbf{W}_i\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

که در رابطه فوق ضرائب $\varepsilon^{(2)}$ و $\varepsilon^{(4)}$ ضرائب سازگاری می باشند که بوسیله حسگر شوک یعنی v_i روشن و خاموش می شود. حسگر شوک بر اساس دومین اختلاف‌های منطقه‌ای فشار کار می‌کند و برای هر نقطه i با همسایه j بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}&v_{ij}=\frac{\left|p_j-p_i\right|}{\left|p_j+p_i\right|}\;,\;\varepsilon_{ij}^{(2)}=k^{(2)}v_{ij}\\ &\varepsilon_{ij}^{(4)}=\max(0,k^{(4)}-\varepsilon_{ij}^{(2)})\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

که $k^{(2)}$ و $k^{(4)}$ دو ضریب انتخابی هستند و بصورت آزمایشی به دست می‌آیند که با توجه به رژیم جریان مقادیر خاصی دارند و مقادیر استاندارد این ضرایب برای جریان غیرلزج در محدوده زیر صوت و گذر صوت به صورت زیر می‌باشد[۲۹]:

$$\frac{1}{2}<k_2<1\;\;,\;\;\frac{1}{256}<k_4<\frac{1}{32} \qquad (۱۳)$$

و λ_{ij} بر اساس بیشینه مقادیر ویژه ماتریس‌های جاکوبی $\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{W}}$ و $\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial\mathbf{W}}$ محاسبه می شود که بصورت زیر است:

$$\lambda_{ij}=\left|\bar{u}\Delta x_{ij}+\bar{v}\Delta y_{ij}\right|+\bar{c}d_{ij} \qquad (۱۴)$$

در رابطه بالا $\bar{u}$ و $\bar{v}$ مؤلفه‌های سرعت و $\bar{c}$ سرعت صوت در نقطه میانی می‌باشند و مقادیر سرعت، فشار و چگالی با روش میانگین گیری در نقطه میانی بدست می‌آید.

۴- گسسته سازی زمانی

بکارگیری رابطه(۱۰) برای هر نقطه در میدان محاسباتی منجر به یک معادله دیفرانسیل معمولی نسبت به زمان می‌شود که بکارگیری آن برای تمام نقاط میدان منجر به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی نسبت به زمان می‌شود که با انتگرال گیری از این دستگاه معادلات می‌توان حالت دائم آن را بدست آورد.

$$\frac{\partial\mathbf{W}_i}{\partial t}+\mathbf{R}_i(\mathbf{W})=0 \qquad (۱۵)$$

برای گسسته سازی و حل معادله دیفرانسیل معمولی(۱۵) از روش صریح رانگ-کوتا مرتبه چهار استفاده شده است[۲۴]. برای کاهش حجم محاسبات، جمله های استهلاکی می توانند در مراحل ۱و۳ از مراحل رانگ-کوتا ۴ مرحله‌ای مورد محاسبه قرار گیرند. در این تحقیق برای افزایش سرعت همگرایی از گام زمانی موضعی و هموارسازی مانده‌ها (در مرحله ۲و۴) استفاده شده است [۳۰-۳۱]. هموارسازی مانده‌ها مطابق با رابطه زیر صورت گرفته است:

$$\overline{\mathbf{R}_i}=\mathbf{R}_i+\bar{\varepsilon}\,\Delta^2\overline{\mathbf{R}_i}\;, \qquad (۱۶)$$

1 Artificial Dissipation

که مقدار $\bar{\varepsilon}$ برابر 0.5 در نظر گرفته شده و با توجه به ضمنی بودن رابطه، حل آن با ۲ یا ۳ تکرار ژاکوبی صورت می‌گیرد[۳۲].

۵- شرایط مرزی

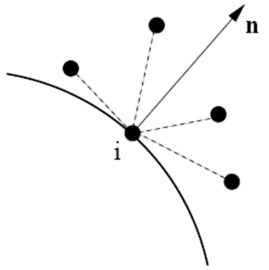
برای حل معادلات اویلر بر روی دیواره شرط عدم نفوذ بکار برده شده است و برای اعمال این شرط، بایستی سرعت در روی هر نقطه‌ای بر سطح جسم، دارای مقدار صفر در راستای بردار عمود بر سطح باشد. برای هر نقطه موجود بر روی مرز جسم، مقادیر با استفاده از روابط زیر محاسبه می‌شوند.

$$u_n = 0\ ;\ \frac{\partial u_t}{\partial n} = 0\ ;\ \frac{\partial H}{\partial n} = 0$$
$$\frac{\partial \rho}{\partial n} = 0\ ;\ \frac{\partial P}{\partial n} = -\frac{\rho u_t^2}{R} \qquad (۱۷)$$

در روابط (۱۷) u_n مولفه سرعت در راستای بردار عمود بر سطح، u_t مولفه سرعت در راستای بردار مماس بر سطح و R شعاع انحنای سطح جسم است. با توجه به روابط(۱۷)، می‌توان مقادیر بر روی مرز را با استفاده از ضرایب حاصل از روش کمترین مربعات خطا بصورت زیر حساب کرد(شکل ۳).

$$\varphi_i = \frac{\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\varphi_j - \frac{\partial \varphi_i}{\partial n}}{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}}\ ,\ \alpha_{ij} = n_x a_{ij} + n_y b_{ij} \qquad (۱۸)$$

در مرز خارجی میدان نیز از شرط مرزی مشخصه ها مبتنی بر متغیرهای ریمان استفاده شده است[۳۳].



شکل۳- نقطه روی مرز جسم

۶- نتایج

بمنظور نشان دادن کارآیی و قابلیت روش بدون شبکه در شبیه سازی جریان ماوراء صوت با امواج ضربه ای قوی در این قسمت به بررسی نتایج عددی بدست آمده از اجرای برنامه کامپیوتری توسعه داده شده پرداخته شده و نتایج حاصل شده با نتایج موجود در مراجع معتبر مقایسه شده است. تمامی محاسبات با کامپیوتر چهار هسته‌ای با قدرت پردازش ۲/۲ گیگا هرتز انجام شده است.

الف: جریان ماوراء صوت حول سیلندر با مقطع نیم دایره

از جمله مهمترین مواردی که می توان نتایج بدست آمده از برنامه کامپیوتری توسعه داده شده را مورد ارزیابی قرار داد فاصله لایه موج ضربه‌ای و شکل آن می باشد. برای اعتبارسنجی و نیز بررسی صحت برنامه کامپیوتری، اشکال بدست آمده برای موج ضربه ای با نتایج حاصل از بررسی های وارتمن[1]، آمبروسیو[2] و بلیگ[3] مقایسه می شود. وارتمن و آمبروسیو آزمایش‌های مختلفی بر روی جریان ماوراء صوت حول سیلندر و کره در ماخ های متفاوت انجام و رابطه ای را برای فاصله موج ضربه ای از دیواره در لبه حمله ارائه داده اند و رابطه ای نیز توسط بلیگ برای شکل موج ضربه ای بر اساس نتایج آزمایشگاهی ارائه شده است که بصورت زیر است:

$$\Delta = 0.386 r_b e^{\left(\frac{4.67}{M_\infty^2}\right)}$$
$$x = r_b + \Delta - r_c Cot^2\mu\left[\sqrt{1+\left(\frac{y\ \tan\mu}{r_c}\right)^2} - 1\right], \qquad (۱۹)$$
$$\mu = Arc\sin\left(\frac{1}{M_\infty}\right), r_c = 1.386 r_b \exp\left(1.8/\left(M_\infty - 1\right)^{3/4}\right)$$

و Δ فاصله موج ضربه ای از دیواره در لبه حمله است[۳۴-۳۵].

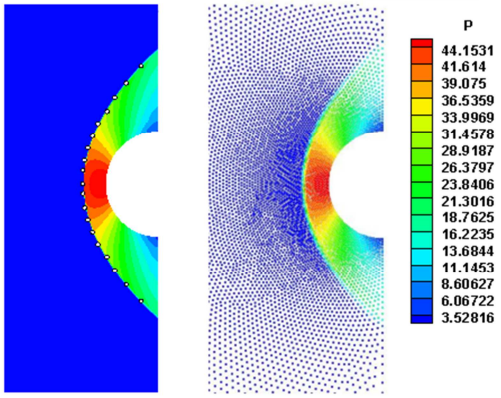
در شکل (۱) توزیع نقاط در اطراف سیلندر مشاهده می شود. بخاطر تغییرات زیاد متغیرهای جریان در نزدیکی دیواره جسم و تشکیل موج ضربه ای در آن ناحیه، تراکم نقاط تولید شده در آن ناحیه بیشتر منظور شده است. سیلندر دارای شعاعی به طول ۵/ ۰و مرز بیرونی میدان نیز نیم دایره ای به شعاع ۵ واحد است و میدان تعریف شده دارای۹۷۴۳ نقطه است که ۱۰۱ عدد از آنها بر روی سیلندر و ۱۵۹ عدد از آنها در روی مرز خارجی میدان است. شبکه مورد استفاده برای روش حجم محدود با همان توزیع نقاط دارای ۱۹۲۲۴ سلول و۲۸۹۶۶ لبه می‌باشد.

برنامه کامپیوتری نوشته شده برای شرایط محیطی ۵۲ کیلومتری از سطح زمین یعنی با دمای محیطی ۲۲۵ کلوین و فشار ۴۸/۶۷ پاسکال برای دو جریان ماوراء صوت با ماخ ۶ و ماخ ۱۰ اجرا شده است.

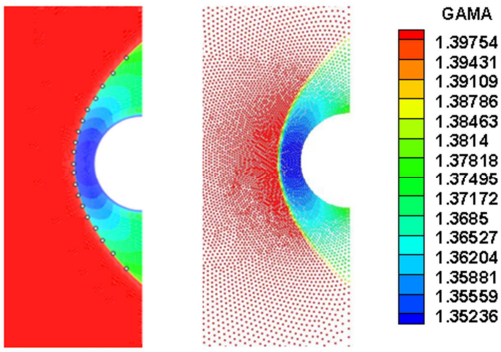
در شکل ۴ نتیجه برنامه کامپیوتری برای کانتور فشار اطراف سیلندر در جریان آزاد با عدد ماخ ۶ نشان داده شده و شکل موج ضربه‌ای با نتایج تجربی مقایسه شده است. مقدار فاصله موج ضربه ای از لبه حمله در نتایج آزمایشگاهی برابر $\Delta_{\exp.} = 0.224550$ می‌باشد و فاصله موج ضربه ای در نتیجه برنامه کامپیوتری تقریباً برابر $\Delta_{comp.} = 0.22532$ بدست آمده است و خطای آن در مقایسه با مقدار تجربی کمتر از ۱٪ است. در شکل ۵ کانتور نسبت گرمای ویژه در جریان ماوراء صوت با عدد ماخ ۶ نشان داده شده است و مشاهده می شود که مقدار γ تا مقدار ۱/۳۵ پایین آمده است. همچنین در شکل فوق همخوانی خوبی در شکل موج ضربه‌ای بین نتیجه برنامه کامپیوتری و نتایج آزمایشگاهی مشاهده میگردد.

ضرائب استهلاک k_2 و k_4 بکار رفته در این آزمایش به ترتیب ۱/۱ و ۰/۰۲۲۵ در نظر گرفته شده است. در شکل‌های ۶ و ۷ همگرایی روش بدون شبکه و روش حجم محدود با روش گسسته سازی مکانی همسان (روش مرکزی بهمراه استهلاک مصنوعی) آورده شده است.

1 Wartman
2 Ambrosio
3 Bllig

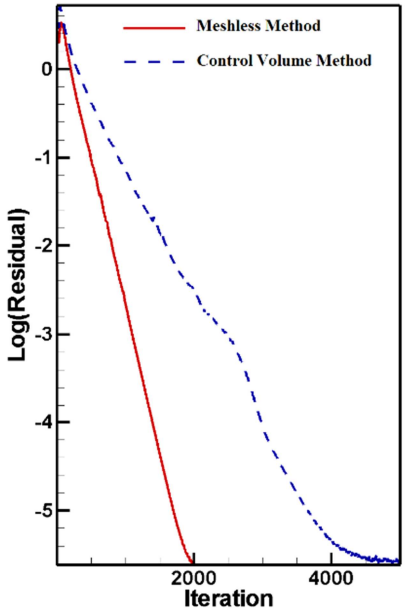


شکل۴-کانتور فشار حول سیلندر در عدد ماخ ۶ و مقایسه شکل موج ضربه‌ای با نتایج آزمایشگاهی(O)

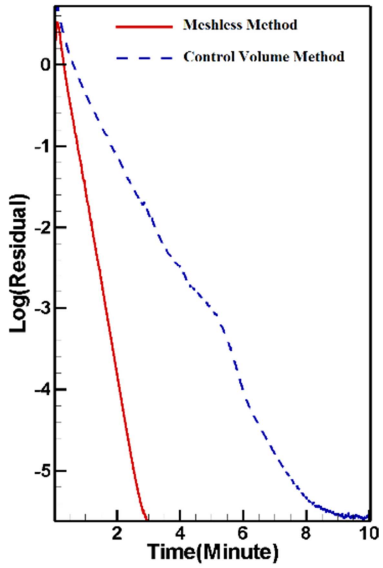


شکل۵-کانتور نسبت گرمای ویژه(γ) حول سیلندر در عدد ماخ ۶ و مقایسه شکل موج ضربه‌ای با نتایج آزمایشگاهی(O)

استفاده از هموارسازی مانده ها منجر به بالا بردن سرعت همگرائی می شود که در هر دو برنامه کامپیوتری توسعه داده شده با روشهای بدون شبکه و روش حجم محدود استفاده شده است. مقایسه نمودار همگرایی روش بدون شبکه و روش صریح حجم محدود مشخص می‌کند که روش بدون شبکه زمان محاسباتی را بصورت قابل ملاحظه‌ای کاهش داده است. این کاهش زمان محاسباتی روش بدون شبکه نسبت به روش حجم محدود صریح حدود ۷۰ درصد برای مسئله یکسان با توزیع نقاط یکسان بوده است. شبکه بی‌سازمان مثلثی حدود دو برابر تعداد نقاط میدان سلول دارد و اندازه سلول‌ها هم دارای ابعادی حدوداً نصف شعاع میدان نفوذ نقاط روش بدون شبکه با توزیع نقاط یکسان می‌باشد. در این حالت گام زمانی برای نقاط در ناحیه بدون شبکه حدود دو برابر گام زمانی سلول‌ها در شبکه بی‌سازمان است. بنابراین در روش بدون شبکه خطاها با سرعت بالایی میدان را ترک کرده و باعث افزایش نرخ همگرایی و کاهش زمان محاسباتی در آن می‌شود. با توجه به اینکه همسایه‌های هر نقطه در میدان با استفاده از لبه‌های متصل به آن انتخاب می‌شوند بنابراین روش بدون شبکه را می‌توان دارای رفتاری همچون روش سلول-گره در مقابل روش سلول مرکز با توزیع نقاط یکسان در نظر گرفت. مقایسه سلول-مرکز و سلول‌گره برای یک شبکه بی‌سازمان مثلثی توسط مظاهری و رمضانی [۳۶] صورت گرفته و نشان داده شده است که روش سلول-گره از لحاظ کارایی زمانی و حافظه بسیار به صرفه تر از روش سلول مرکز می‌باشد. دو روش فوق در مرجع [۳۷] توسط جمسون و ماوریپلیس برای شبکه باسازمان که تعداد سلول ها خیلی نزدیک به تعداد گره‌ها می‌باشد، مقایسه شده است. زمان محاسباتی بدست آمده برای هر دو روش تقریباً یکسان بوده ولی روش سلول-گره همگرایی بهتری را نشان داده و دیرتر دچار نوسان شده است. با دقت در شکلهای ۶ و ۷ ملاحظه می گردد که روش بدون شبکه همانند نتایج حاصل شده در مرجع[۲۴-۲۵] برای جریان ماوراء صوت نیز در تعداد تکرار کم و زمان محاسباتی پایین همگرا می شود.



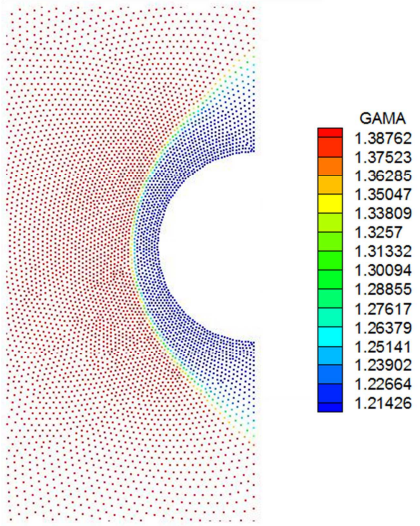
شکل۶- همگرائی بر حسب تکرار برای دو روش بدون شبکه و روش حجم محدود با روش عددی یکسان($M_\infty = 6$)



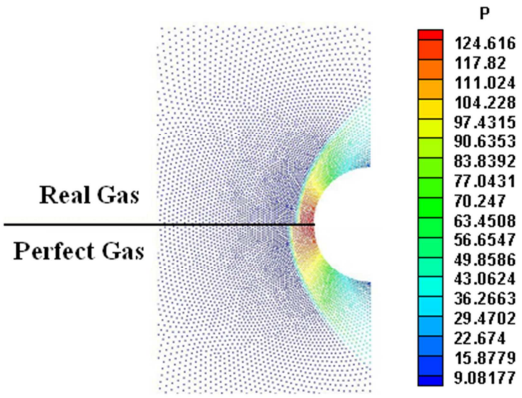
شکل۷- همگرائی بر زمان محاسباتی برای دو روش بدون شبکه و روش حجم محدود با روش عددی یکسان($M_\infty = 6$)

با بالا رفتن عدد ماخ جریان آزاد، دما پشت موج ضربه‌ای بیشتر شده و شدت واکنشهای شیمیایی نیز بیشتر می‌شود و مقدار γ بیشتر

پایین می آید. نتیجه برنامه کامپیوتری برای کانتور نسبت گرمای ویژه در ماخ ۱۰ در شکل ۸ نشان داده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌شود مقدار γ تا ۱/۲ پایین آمده است. در شکل ۹ نیز شکل موج ضربه‌ای برای عدد ماخ ۱۰ برای دو حالت گاز کامل[1] و گاز واقعی[2] باهم مقایسه شده و نشان می‌دهد که فرض گاز کامل می‌تواند منجر به خطای فاحش در شبیه سازی جریان‌های ماوراء صوت خصوصاً در ماخ-های بالا شود.



شکل۸- کانتور ضریب نسبت گرمای ویژه(γ) حول سیلندر در عدد ماخ ۱۰



شکل۹- کانتور فشار و شکل موج ضربه‌ای حول سیلندر در عدد ماخ ۱۰ برای دو حالت گاز واقعی و گاز کامل

ب: جریان ماوراء صوت حول مقطع هذلولوی

آزمایش دیگری برای بررسی دقّت روش بکار رفته در شبیه‌سازی جریان با گرادیان‌های زیاد خصوصاً جریان ماوراءصوت، جسمی با مقطع هذلولوی در مقابل جریانی با ماخ ۱۰ و با شرایط محیطی ارتفاع ۵۲ کیلومتری زمین در نظر گرفته شده است. در ارتفاع فوق $P=48.67Pa$ ، $\rho=0.00077kg/m^3$ می‌باشد. معادله محیطی جسم هذلولوی بصورت زیر است:

$$\left(\frac{x}{500mm}+1\right)^2-\left(\frac{y}{88mm}\right)=1.0 \qquad (۲۰)$$

در این مسئله ابتدا عدم وابستگی نتایج به توزیع نقاط مورد بررسی قرار گرفته و بهمین منظور چهار گونه توزیع نقاط در میدان منظور شده است که اطلاعات آنها در جدول (۱) ذکر گردیده است. معادلات حاکم با توزیع نقاط مختلف با اعمال اثرات گاز واقعی حل شده و همانند مراجع مختلف در ادبیات فن با مقایسه توزیع ضریب فشار روی جسم، استقلال نتایج از توزیع نقاط مورد بررسی قرار گرفته است. همانگونه که در شکل ۱۰ ملاحظه می شود نتایج حاصل برای توزیع ضریب فشار با توزیع نقاط شماره ۳ و ۴ دارای اختلاف بسیار ناچیز هستند و نشان می‌دهد که دیگر افزایش تعداد نقاط میدان از شماره ۳ به بعد تاثیری روی نتایج ندارد. در شکل ۱۱ نمایی از توزیع نقاط شماره ۳ مشاهده می شود که میدان دارای۷۳۲۶ نقطه است که ۱۰۱ عدد از آنها بر روی مرز جسم و ۱۴۹ عدد از آنها روی مرز بیرونی است. ضرائب استهلاک k_2 و k_4 بکار رفته به ترتیب ۱/۲۵ و ۰/۰۲ در نظر گرفته شده است.

در شکل ۱۲ کانتور نسبت گرمای ویژه نشان داده شده است و ملاحظه می‌گردد که مقدار آن از ۱/۲۴۵ تا ۱/۴ در میدان متغیر است. در شکل ۱۳ نیز کانتور فشار برای دو حالت منظور نمودن هوا به عنوان گاز کامل و گاز واقعی باهم مقایسه شده است و ملاحظه می‌گردد که اختلاف شکل موج ضربه‌ای و موقعیت آنها بسیار فاحش است. در شکل ۱۴ توزیع ضریب فشار روی مقطع هذلولوی با فرض گاز کامل برای هوا با نتایج دریکاکیس [۳۸] مقایسه شده و مشاهده می‌شود که تطابق بسیار خوبی باهم دارند. در شکل ۱۵ توزیع ضریب فشار روی جسم برای دو حالت گاز کامل و گاز واقعی باهم مقایسه شده است و ملاحظه می شود که اختلاف جزئی باهم دارند ولی فرض گاز کامل برای هوا و محاسبه نیروهای برآ[3] و پسا[4] می توانند اختلاف قابل ملاحظه‌ای با نتایج فرض گاز واقعی داشته باشند.

اگر فشار در پشت شوک عمودی که در نزدیکی نقطه سکون ایجاد شده است، محاسبه شود و بعد در اثر سکون جریان، فشار بصورت آنتروپی ثابت محاسبه گردد در این صورت ضریب فشار در نقطه سکون دارای رابطه‌ای به شکل زیر خواهد بود[۱]:

$$Cp_{\max}=\frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left\{\left[\frac{(\gamma+1)^2M_\infty^2}{4\gamma M_\infty^2-2(\gamma-1)}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[\frac{1-\gamma+2\gamma M_\infty^2}{\gamma+1}\right]-1\right\} \qquad (۲۱)$$

که با فرض $M_\infty \to \infty$:

$$Cp_{\max}=\left[\frac{(\gamma+1)^2}{4\gamma}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[\frac{4}{\gamma+1}\right] \qquad (۲۲)$$

حال اگر هوا را در جریان ماوراءصوت گاز کامل $(\gamma=1.4)$ منظور گردد، در آن صورت $Cp_{\max}=1.839$ خواهد شد و در نتایج حاصل

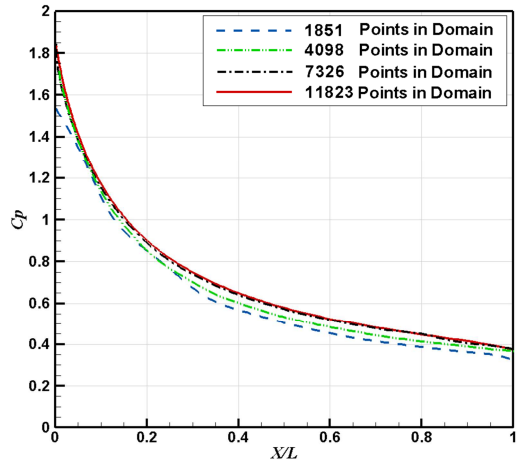
1 Perfect gas
2 Real gas

3 Lift
4 Drag

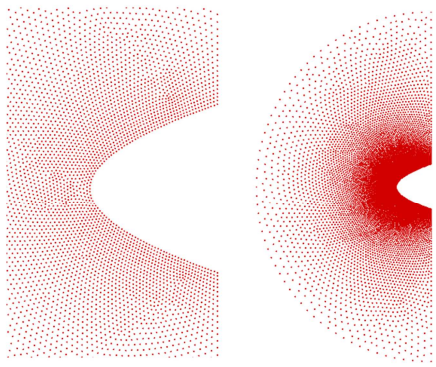
از اجرای برنامه کامپیوتری ملاحظه می‌شود که ضریب فشار ماکزیمم در نقطه سکون بوده و مقدار آن برابر با 1.83986 بدست آمده است. در شکل ۱۶ توزیع دما روی جسم برای حالت گاز کامل با نتایج عددی دریکاکیس[۳۸] مقایسه شده و مقایسه نشان از تطابق مطلوب برنامه کامپیوتری توسعه داده شده با نتایج مرجع فوق دارد. همچنین در شکل فوق نتیجه برنامه کامپیوتری با فرض گاز واقعی برای هوا آورده شده است. همانگونه که ملاحظه می‌گردد اختلاف برای دو حالت فرض گاز کامل و گاز واقعی برای هوا خصوصاً در لبه حمله بسیار قابل ملاحظه است و منظور کردن هوا به عنوان گاز کامل منجر به خطای زیادی در محاسبه دمای سطح جسم در جریان ماوراء صوت خواهد شد.

جدول ۱-اطلاعات توزیع نقاط در اطراف مقطع هذلولوی برای مطالعه توزیع نقاط

	تعداد کل نقاط میدان	تعداد نقاط روی جسم	تعداد نقاط روی مرز بیرونی
۱	۱۸۵۱	۴۱	۹۹
۲	۴۰۹۸	۷۱	۱۲۳
۳	۷۳۲۶	۱۰۱	۱۴۹
۴	۱۱۸۲۳	۱۳۱	۱۷۹

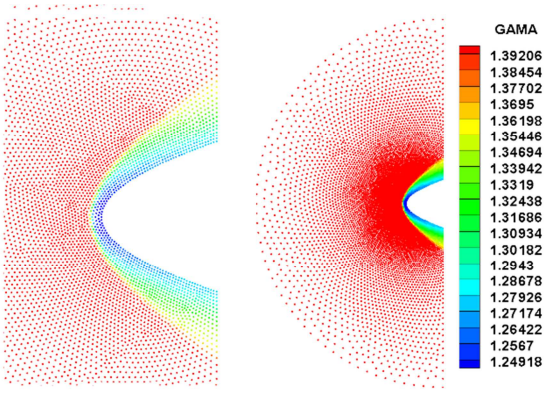


شکل۱۰- توزیع ضریب فشار حول مقطع هذلولوی برای توزیع نقاط مختلف

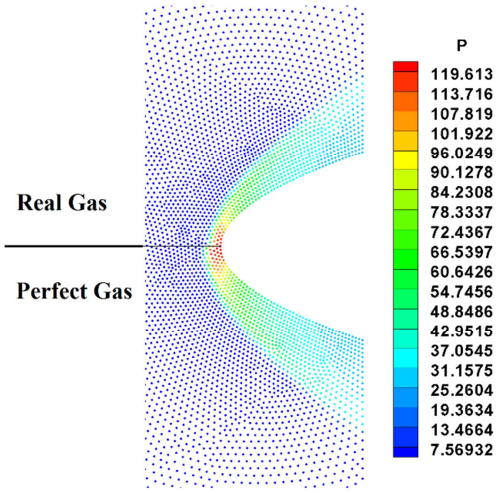


ب **الف**

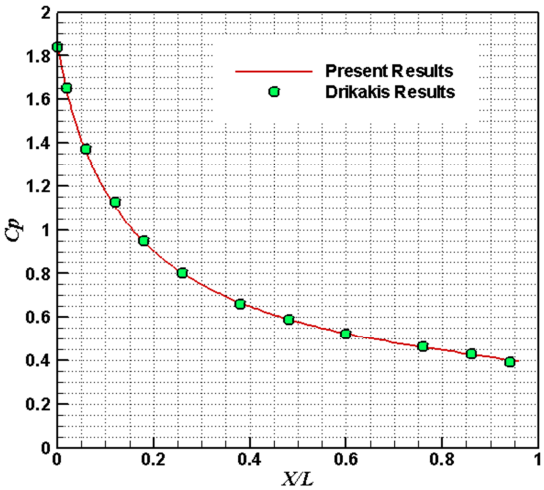
شکل۱۱- نمایی از توزیع نقاط تولید شده شماره ۳ در اطراف مقطع هذلولوی



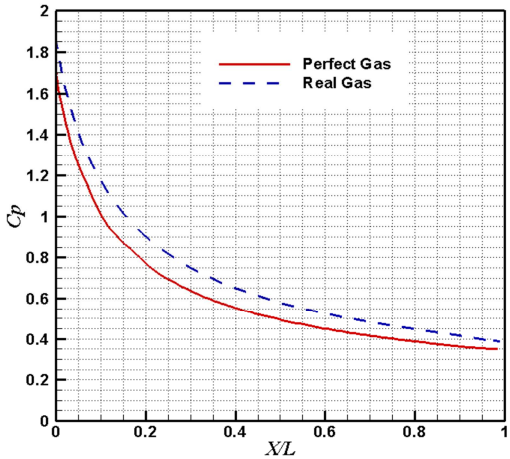
شکل۱۲- کانتور ضریب نسبت گرمای ویژه(γ) حول مقطع هذلولوی در عدد ماخ ۱۰



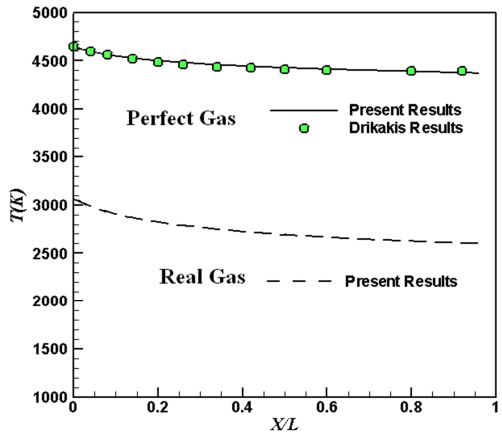
شکل۱۳-کانتور فشار حول مقطع هذلولوی در عدد ماخ ۱۰ برای دو حالت گاز واقعی و گاز کامل



شکل۱۴- مقایسه ضریب فشار بدست آمده روی مقطع هذلولوی با روش بدون شبکه و نتایج عددی مرجع[۲۳]برای گاز کامل



شکل۱۵- ضریب فشار بدست آمده روی مقطع هذلولوی با روش بدون شبکه در دو حالت حل با فرض گاز کامل و گاز واقعی



شکل۱۶- دمای بدست آمده روی مقطع هذلولوی با روش بدون شبکه در دو حالت گاز کامل و گاز واقعی و نتایج عددی مرجع[۲۳] برای گاز کامل

۷- نتیجه گیری

در این تحقیق جریان ماوراء صوت با در نظر گرفتن اثرات گاز داغ حول دو جسم سیلندر و هذلولوی با استفاده از روش بدون شبکه مدلسازی عددی شده است. با مقایسه نتایج حاصل از این روش با روش های تجربی و نیز شبیه‌سازی‌های انجام شده با روش های دیگر مانند حجم محدود روی شبکه بی سازمان این نتیجه حاصل می‌شود که روش بدون شبکه بکار گرفته شده دارای دقت و همگرائی بسیار خوبی است و نتایج بدست آمده مطابقت مطلوبی با نتایج تجربی و مراجع معتبر عددی دارد؛ لذا می توان این گونه اعلام کرد که روش بدون شبکه، توانایی مدل کردن و بررسی و آنالیز جریان ماوراءصوت با وجود امواج ضربه‌ای بسیار قوی را با سرعت و دقت مناسبی دارا می‌باشد.

۸- مراجع

[1] Anderson J.D., Hypersonic and High Temperature Gas Dynamic, second ed., McGrawHill, New York, 2006.

[2] Tannehill J.C., Mugge P.H., Improved curve fits for the thermodynamics properties of equilibrium air suitable for numerical computation using Time-Depend or Shock-Capture method, NASA-CR-178411, 1974.

[2] Johnston I.A., Simulation Of Flow around Hypersonic Blunt-Nosed Vehicles for the Calibration of Air Data System, A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy, University of Queensland , 1999.

[2] Hashemi M.Y., Jahangirian A., Simulation of high-speed flows by an unstructured grid implicit method including real gas effects, Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol.56, pp. 1281–1287, 2008.

[3] Lohner R., Onate E., A General Advancing Front Technique for Filling Space with Arbitrary Objects, International Journal for numerical methods in Engineering, Vol.64, No.12, pp. 1977-1991, 2004.

[4] Belytschko T., Krongauz Y., Organ D., Fleming M., Krysl P., Meshless methods: An overview and recent developments, Comput, Methods Appl. Mech. Eng., Vol.139, pp.3-47, 1996.

[5] Gingold R.A., Monaghan J.J., Smoothed Particle Hydrodynamics: Theory and Application to Nonspherical Stars, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol.181, pp.275-389, 1977.

[6]Lesoinne M., Kaila, V., Meshless aeroelastic simulations of aircraft with large control surface deflections, AIAA paper 2005-1089, AIAA 43rd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, January 2005.

[7] Atluri S.N., Kim H.G., Cho J.Y., A critical assessment of the truly meshless local petrov-galerkin (mlpg) and local boundary integral equation (lbie) methods, Computational Mechanics, Vol.24, pp.348-372, 1999.

[8] Lin H., Atluri S.N., The meshless local petrov-galerkin (mlpg) method for solving incompressible navier-stokes equations, CMES, Vol.2, No.2, pp.117-142, 2001.

[9] Kansa E.J., Multiquadrics-a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-i, Computers Math. Applic., Vol.19, pp.127-145, 1990.

[10] Kansa E.J., Multiquadrics-a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics-ii, Computers Math. Applic., Vol.19, pp.147-161, 1990.

[11] Mavriplis D.J., Revisiting the least-squares procedure for gradient construction on unstructured meshes, AIAA paper 2003-3986, AIAA 16th Computational Fluid Dynamics Conference, Orlando, FL, June 2003.

[12] Batina J.T., A gridless euler/navier-stokes solution algorithm for complex aircraft applications, AIAA paper 1993-0333, AIAA 31st Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, January 1993.

[13] Liu J., Su S., A potentially gridless solution method for the compressible euler/navier-stokes equations", AIAA paper 1996-0526, AIAA 34th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno, NV, January, 1996.

[14] Onate E., Idelsohn S., A mesh-free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems, Computational Mechanics, Vol.212, pp.83-292, 1998.

[15] Lohner R., Sacco C., Orlate E., Idelsohn S., A finite point method for compressible flow, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol.53, pp.1765-1779, 2002.

[16] Ramesh V., Deshpande S.M., Euler computations on arbitrary grids using lskum, In N. Satofuka, editor, Computational Fluid Dynamics 2000: Proceedings of the First International Conference on Computational Fluid Dynamics, pp. 783-784, Springer-Verlag, 2000.

[17] Harish G., Pavanakumar M., Store separation dynamics using grid-free Euler solver, AIAA paper 2006-3650, AIAA 24th Applied Aerodynamics Conference, San Francisco, CA, June 2006.

[18] Morinishi K., Effective accuracy and conservation consistency of gridless type solver, In N. Satofuka, editor, Computational Fluid Dynamics 2000: Proceedings of the First International Conference on Computational Fluid Dynamics, pp. 325-330. Springer-Verlag, 2000.

[19] Balasubramanyam S., Rao S.V.R., A grid-free upwind relaxation scheme for inviscid compressible flows, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.51, pp.159-196, 2006.

[20] Katz A., Jameson A. A Meshless Volume Scheme, 19th AIAA computational Fluid Dynamics Conference, AIAA paper 2009-3534, 2009.

[21] Katz A., Jameson A., A Comparison of Various Meshless Schemes Within Unified Algorithm, 47th AIAA aerospace sciences meeting and exhibit, AIAA paper 2009-0596, 2009.

[22] Hashemi M.Y., Jahangirian A., An efficient implicit mesh-less method for compressible flow calculations, Int. J. Numer. Meth. Fluids, Vol.67, pp. 754–770, 2011.

[23] Hashemi Y., Jahangirian A., Implicit fully mesh-less method for compressible viscous flow calculations, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol.235, pp. 4687–4700, 2011.

[24] Hlsenrath J., Klein M., Tables of Thermodynamics Properties of Air in Chemical Equilibrium Including Second Virial Correction From 1500 to 15000K, Arnold Engineering Development Center Report No. Aedc-Tr-65 - 68, 1965.

[25] Lou H, Baum J.D., Lohner R., A Hybrid Cartesian grid and gridless method for compressible flows, Journal of Computational Physics, Vol.214, pp. 618-632, 2006.

[26] Hoffmann K.A., Chiang S.T., Computational Fluid Dynamics for Engineers, Vol.1, second ed., Engineering Education System, 1993.

[27] Jameson A., Analysis and Design of Numerical Schemes for Gas Dynamics, Journal of Computational Fluid Dynamics, Vol.4, pp. 171-215, 1995.

[28] Jameson A., Schmidt W., Turkel, E., Numerical Solution of Euler Equations by Finite Volume Methods Using Rung-Kutta Time Stepping Schemes, AIAA paper 81-1259, 1981.

[29] Jahangirian A., Hadidoolabi M., Unstructured Moving grids for Implicit Calculation of Unsteady Compressible Viscos Flows, International Journal for numerical methods in Fluids, Vol.47, No.10, pp. 1107-1113, 2005.

[30] Mavriplis D.J., Jameson A., Martinelli L., Multigrid solution of the Navier–Stokes equations on the triangular meshes, In:27th sciences meeting, Reno, Nevada, USA, AIAA paper, pp. 9–12, 1989.

[31] Holmes D.G., Inviscid 2D solution on Unstructured, Adaptive Grids, Numerical Methods for Flows in Turbomachinery, Von Karman Institute for Fluid Dynamics Lecture Series (VKI-LS) 1989–06, 1989.

[32] Ambrosio A., Wortman A., Stagnation Point Shock Detachment Distance for Flow around Spheres and Cylinders, Journal of the Aerospace Sciences, Vol.29, No.7, pp. 875-875, 1962.

[33] Billig F.S., Shock-Wave Shapes around Spherical and Cylindrical-Nosed Bodies, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol.4, No.6, pp. 822–823, 1967.

[34] Ramezani A., Some Innovations in Numerical Simulation of Inviscid Three Dimensional Flow with Moving Boundaries, A thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy, Sharif University of Technlogy , 2009.

[35] Mavriplis D.J., Jameson A., Multigrid Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on Unstructured Triangular Meshes, AIAA paper 1987-0353, AIAA 25th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Reno. Drikakis D., Tsangaris S. On the Accuracy and Eficiency of CFD Methods in Real Gas Hypersonic, International Journal for Numerical Methods, Vol.16, pp. 759-775, 1993.