

بررسی اثر فرکانس بار حرارتی سیکلی در توزیع تنش ترموالاستیک مخزن کروی هدفمند به روش نیمه تحلیلی

فرید وکیلی تهامی*

فرامرز طلعتی

افشین عباسی

سید سعید شریفی

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

چکیده

مواد هدفمند کامپوزیت‌هایی غیر همگن هستند که معمولاً از ترکیب فلز و سرامیک تولید می‌شوند و دارای خواص منحصر به فرد از جمله مقاومت بالا در مقابل تنش‌های حرارتی و مکانیکی، عدم لایه‌لایه شدن و تمرکز تنش پایین می‌باشند. در این تحقیق، رفتار حرارتی-مکانیکی مخزن کروی ساخته شده از ماده هدفمند بررسی شده است که سطوح داخلی و خارجی آن به ترتیب آلومینا و آلومینیم می‌باشند و توزیع مواد از قانون توانی در راستای شعاعی تبعیت می‌کند. جداره داخلی مخزن تحت بار حرارتی متناوب و فشار ثابت می‌باشد و به دلیل برتری روش دوهمال در بررسی مسائل با شرایط مرزی متناوب زمانمند، از ترکیب این روش و گسسته‌سازی در حل مسئله استفاده شده است. نتایج حاصل با نتایج عددی بر مبنای روش اجزاء محدود مقایسه شده که تطبیق خوبی مشاهده شده است. تغییرات تنش ترمومکانیکی در مخزن مورد بررسی قرار گرفته و اثر فرکانس تغییرات دمای سیال داخل مخزن بر دامنه تنش‌ها و کرنش‌ها در جداره آن بررسی شده است. بر اساس نتایج، به ازای محدوده فرکانس خاصی از بار حرارتی، مقادیر دامنه تنش افزایش قابل ملاحظه‌ای دارند که می‌باید در طراحی مد نظر قرار گیرد. در فرکانس‌های بالاتر از این محدوده بحرانی، دامنه تنش‌ها و کرنش‌ها به صفر میل می‌کند. علاوه بر آن نشان داده شده است که فرکانس بحرانی مخزن با افزایش ضخامت جداره کاهش می‌یابد.

واژه‌های کلیدی: مخزن کروی، ماده هدفمند، روش دوهمال، بار حرارتی سیکلی.

Investigating the Effect of Cyclic Thermal Load Frequency on the Thermo-elastic Stress Distribution in FGM Spheres Using Semi-analytical Method

F. VakiliTahami

F.Talati

A. Abbasi

S. S. Sharifi

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Department of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

Abstract

Functionally Graded (FG) materials are inhomogeneous composites, usually made from a mixture of metals and ceramics, providing the specific benefits of both the constituents. These materials have some unique properties such as high strength under thermo-mechanical stresses, lack of stress concentration and delamination. Present study is concerned with determining the alternating temperature, stress and strain fields in an FG hollow sphere subjected to cyclic thermal loading and internal pressure. The inner surface of the sphere is considered to be made of alumina grading with power law up to the outer surface made from aluminum. Duhamel's principle is utilized to calculate the temperature field in the sphere since it is appropriate in analyzing the behavior of structures with alternating boundary conditions. By considering a quasi-static condition, the governing differential equation is solved by using discretization method. The results are compared with those obtained using finite element method and good agreement is observed. The effect of frequency of the thermal load on the amplitude of the stresses is also investigated. The results show that, there is a critical range of the frequency in which the amplitude of stresses become maximum and beyond this range, the stress and strain domain vanish. It has been shown that by increasing the thickness of the sphere, the critical frequency decreases significantly.

Keywords: Spherical Vessel, Functionally Graded Material, Duhamel's Principle, Cyclic Thermal Loading.

۱- مقدمه

همچنین در کامپوزیت‌های لایه‌ای^۱، تغییر ناگهانی خصوصیات مواد از یک لایه به لایه دیگر باعث ایجاد تنش‌های نامطلوب بین لایه‌ای در

مواد کامپوزیت به علت نسبت وزن به مقاومت و سفتی بالا، کاربرد وسیعی در صنایع مختلف بخصوص صنایع فضایی دارند. این درحالی است که کامپوزیت‌های لایه‌ای که به طور عموم مورد استفاده قرار می‌گیرند، در محیط‌های با شرایط دمایی بالا عملکرد خوبی ندارند.

¹ Laminated composites

فصل مشترک لایه‌ها می‌شود که این تنش‌ها می‌توانند باعث تغییر شکل پلاستیکی، ایجاد ترک و یا حتی جدایش لایه‌ها^۱ شوند. به همین دلیل در صنایع مدرن، تمایل شدیدی برای تولید مواد با تغییرات تدریجی خواص در آن‌ها وجود دارد تا نه تنها از خصوصیات مطلوب آلیاژهای مختلف در محل مورد نظر استفاده شود، بلکه از بروز مشکلات فوق نیز اجتناب گردد. انواع مخزن‌های تحت فشار در صنایع امروزه با استفاده از این مواد ساخته می‌شوند. در راستای توسعه چنین موادی، تحلیل حرارتی و تنش در آن‌ها مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است.

بیات و همکاران [۱] رفتار ترمومکانیکی کروی جدار ضخیم ساخته شده از مواد هدفمند را تحت بارگذاری ترکیبی به روش عددی و تئوری بررسی کردند. جباری و همکاران [۲] به تحلیل تنش‌های حرارتی ماندگار تک بعدی در یک استوانه توخالی هدفمند پرداختند. آنان با در نظر گرفتن تابع توانی حاکم بر خاصیت ماده و در حضور شرایط مرزی کلی مکانیکی و حرارتی به حل تحلیلی معادله رسانش گرمایی و معادله ناویر پرداختند. اسلامی و همکاران [۳] طی یک مطالعه حل عمومی تنش‌های حرارتی و مکانیکی ماندگار در یک کروی توخالی هدفمند را ارائه دادند. توزیع دما تابعی از شعاع کره بوده و شرایط مرزی مکانیکی و حرارتی در سطح داخلی و خارجی مخزن بصورت کلی در نظر گرفته شده‌اند. حل ترموالاستیسیته تحلیلی برای دیسک هدفمند تحت بارگذاری مکانیکی و توزیع دمای پایا توسط کالیکلو و همکاران [۴] ارائه شده است. در این حل از تئوری تغییر شکل جزئی الاستیسیته^۲ و توزیع خاصیت توانی استفاده شده است. حل نیمه تحلیلی ترمو الاستیسیته برای دیسک هدفمند توخالی و توپر که بصورت متقارن و چرخان می‌باشد، توسط حسینی کردخیلی و نقدآبادی [۵] ارائه شده است. آن‌ها دامنه شعاعی دیسک را به چندین لایه مجازی تقسیم نمودند بطوریکه در لایه‌ها قاعده‌ی توزیع خواص مکانیکی مانند قانون توانی حاکم باشد. با اعمال شرایط پیوستگی لازم بین زیرلایه‌ها و همچنین با در نظر گرفتن شرایط مرزی کلی به مجموعه‌ای از معادلات جبری دست یافتند. هنگ‌جون و همکاران [۶] به تحلیل الاستیک استوانه‌های توخالی ناهمگن پرداختند. دو نوع استوانه توخالی ناهمگن در این مطالعه بررسی شده است. یکی استوانه چند لایه‌ایست که هرلایه با لایه دیگر خواص مکانیکی متفاوتی دارد و دیگری استوانه‌ای جدار ضخیم که بصورت پیوسته و تحت تابعی خاص، خواص آن در راستای شعاعی تغییر می‌کند. تحلیل الاستیک سیلندر توخالی هدفمند تحت فشار توسط لی و پنگ [۷] ارائه شده است. این مطالعه برای یک توزیع کاملاً اختیاری از خواص فیزیکی راه‌حلی مناسب ارائه نموده است. بر اساس نتایج بدست آمده از این تحلیل، گرادیان موجود در توزیع خواص در جداره تاثیر خیلی زیادی در تنش‌های شعاعی ندارد، اما توزیع تنش‌های محیطی را تحت تاثیر قرار می‌دهد. طراحی بهینه چند هدفه دیسک دوار با ساختار هدفمند آلومینیوم سیلیکون کاربیدی با خواص وابسته به دما بر اساس رفتار خزشی توسط وکیلی تهامی و همکاران [۸] تحلیل شده است. در مطالعه‌ای دیگر وکیلی تهامی و همکاران [۹] به طراحی بهینه مخزن استوانه‌ای هدفمند بالایی

هیپوزالکتریک^۳ تحت بار متحرک با هدف تنیده کردن سازه پرداختند. آنان برای این هدف توزیع تنش دینامیک را از ترکیب تئوری مرتبه اول برشی^۴ و معادله ماکسول با اصل هامیلتون بدست آوردند.

همچنین تحقیقاتی بر روی تحلیل مکانیکی و حرارتی گذرا بر روی مخازن انجام شده‌است. حسینی و همکاران [۱۰] طی مطالعه‌ای به بررسی انتقال گرمای رسانشی گذرا در یک استوانه‌ی جدار ضخیم هدفمند به روش کاملاً تحلیلی و با استفاده از توابع بسل پرداختند. حسینی و همکاران [۱۱] در مطالعه‌ای دیگر، تحلیل ترموالاستیک گذرای سیلندر استوانه‌ای هدفمند را توسعه دادند. استوانه بصورت طول خیلی زیاد و کرنش صفحه‌ای در نظر گرفته شد. جباری و همکاران [۱۲] با روش تحلیلی تنش‌های حرارتی و مکانیکی تک بعدی را در یک استوانه هدفمند بدست آوردند. آنان منبع گرمای متحرک بصورت متقارن محوری و گذرا را در استوانه در نظر گرفتند. تحلیل ترمومکانیکی سیلندر جدار ضخیم هدفمند تحت بارهای مکانیکی و حرارتی افزایشنده در مرزهای سیستم توسط شائو و ما [۱۳] مورد مطالعه قرار گرفتند. خواص ترمومکانیکی ماده هدفمند بصورت وابسته به دما و متغیر در راستای شعاعی در نظر گرفته شده‌اند. اوتائو [۱۴] به تحلیل ترمو الاستیک گذرا در یک کره چند لایه با قانون ناهمگنی توانی تکه‌ای پرداخت. در این مطالعه پاسخ‌های دقیقی برای توزیع دما و تنش در حالت گذرا برای کره هدفمند ارائه شد. اوتائو و ایشیمهارا [۱۵] طی مطالعه‌ای دیگر، مسئله تنش‌های حرارتی گذرا در یک کره توخالی الکترومغناطیسی ترموالاستیک تحت بار حرارتی یکنواخت را تحلیل نمودند. نودا و همکاران [۱۶]، رفتار ترموالاستیک گذرا در یک دیسک هدفمند با قانون توانی را در شرایط تنش صفحه‌ای بررسی نمودند. وانگ [۱۷] رهیافتی برای بررسی حرارتی گذرا در استوانه توخالی هدفمند ارائه داد. وی بر اساس تئوری تقریب لایه‌ای^۵ پاسخ گذرای یک استوانه با توزیع خواص گرمایی کاملاً اختیاری را ارائه نمود.

در مطالعات فوق، تنش‌های حرارتی ناشی از بار گرمایی گذرا در مخازن با مواد هدفمند مورد بررسی قرار گرفته است، در حالی‌که تنش‌های حرارتی ناشی از بار حرارتی نوسانی علی‌رغم کاربرد وسیع آن در صنعت بصورت عمومی کمتر مورد بررسی قرار گرفته است. اکنون با استفاده از یک روش تحلیلی بر پایه اصل دوهمل^۶ به پیش‌بینی میدان توزیع دما در مخزن کروی هدفمند آلومینیم-آلومینا^۷ ($Al-Al_2O_3$) که شرط مرزی حرارتی آن از سطح داخل همرفتی با دمای نوسانی می‌باشد، پرداخته شده است. اصل دوهمل^۷ علاوه بر اینکه رهیافت ساده‌ای برای بدست آوردن پاسخ مسائل انتقال گرمای رسانشی با شرایط مرزی متغیر با زمان است بلکه بر خلاف روش‌های تحلیلی که تاکنون بکار برده شده است قابلیت حل مسئله را بدون بکارگیری توابع پیش‌فرض را دارد، بنابراین از دقت و عمومیت بیشتری برخوردار است [۱۸]. به همین دلیل از آن می‌توان در مراحل بعدی از جمله روش‌های بهینه سازی استفاده نمود. در این روش ابتدا از یک مسئله کمکی که در آن شرایط مرزی مستقل از زمان است، استفاده می‌شود و سپس با استفاده

³ Piezoelectric

⁴ First Order Shear Deformation Theory

⁵ Laminate Approximation Theory

⁶ Aluminum-Alumina

⁷ Duhamel's Principal

¹ Delamination

² Infinitesimal Deformation Theory of Elasticity

بطوریکه در شرایط مرزی آن به جای جمله زمان پارامتر $\bar{t}$ جایگزین شده و معادله دیفرانسیل حاکم برحسب $\bar{\theta}(\bar{r}, \bar{t}, \bar{t})$ بیان می شود:

$$\bar{r}^{m_1-m_2-m_3} \frac{\partial^2 \bar{\theta}}{\partial \bar{r}^2} + (m_1 + 2) \bar{r}^{m_1-m_2-m_3-1} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}} \quad (10)$$

$$\bar{\theta}|_{\bar{r}=1} - \bar{K}_l \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{r}}|_{\bar{r}=1} = \bar{T}_l(\bar{t}) \quad (11)$$

$$\bar{\theta}|_{\bar{r}=\frac{b}{a}} + \bar{K}_o \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{r}}|_{\bar{r}=\frac{b}{a}} = \bar{h}_o \bar{T}_o(\bar{t}) \quad (12)$$

$$\bar{\phi}(\bar{r}, 0, \bar{t}) = 1 \quad (13)$$

معادله دیفرانسیل بدست آمده یک معادله با شرایط مرزی مستقل از زمان است و براحتی قابل حل می باشد. پس از حل مسئله یا مدل کمکی، جواب معادله بر اساس اصل دوهامل بصورت زیر بدست می آید [۱۸]:

$$\bar{T}(\bar{r}, \bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \int_{\bar{t}=0}^{\bar{t}} \bar{\theta}(\bar{r}, \bar{t} - \bar{\tau}, \bar{\tau}) d\bar{\tau} \quad (14)$$

برای حل معادله دیفرانسیل کمکی (۱۰) پاسخ بصورت مجموع دو جواب $\bar{U}(\bar{r}, \bar{t})$ و $\bar{\psi}(\bar{r}, \bar{t}, \bar{t})$ در نظر گرفته می شود بطوریکه بترتیب در شرط مرزی بصورت ناهمگن و همگن صدق کنند.

$$\bar{\theta}(\bar{r}, \bar{t}, \bar{t}) = \bar{\psi}(\bar{r}, \bar{t}, \bar{t}) + \bar{U}(\bar{r}, \bar{t}) \quad (15)$$

با جایگذاری معادله (۱۵) در معادله دیفرانسیل (۱۰) و اعمال شرایط مرزی (۱۱) و (۱۲)، معادله دیفرانسیل معمولی (۱۶) به همراه شرایط مرزی (۱۷) و (۱۸) بدست می آیند:

$$\frac{d^2 U}{d\bar{r}^2} + \left(\frac{m_1+2}{\bar{r}}\right) \frac{dU}{d\bar{r}} = 0 \quad (16)$$

$$\bar{U}|_{\bar{r}=1} - \bar{K}_l \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{r}}|_{\bar{r}=1} = \bar{T}_l(\bar{t}) \quad (17)$$

$$\bar{U}|_{\bar{r}=\frac{b}{a}} + \bar{K}_o \frac{\partial \bar{U}}{\partial \bar{r}}|_{\bar{r}=\frac{b}{a}} = \bar{h}_o \bar{T}_o(\bar{t}) \quad (18)$$

پاسخ معادله دیفرانسیل فوق با در نظر گرفتن شرایط مرزی مربوطه بصورت زیر خواهد بود:

$$\bar{U}(\bar{r}, \bar{t}) = c_1(\bar{t}) + c_2(\bar{t}) \bar{r}^{-m_1-1} \quad (19)$$

که در آن:

$$c_1(\bar{t}) = \bar{T}_l(\bar{t}) + d_1(\bar{T}_o(\bar{t}) - \bar{T}_l(\bar{t})) \quad (19)$$

$$c_2(\bar{t}) = d_2(\bar{T}_o(\bar{t}) - \bar{T}_l(\bar{t})) \quad (20)$$

که در معادلات فوق:

$$d_1 = \frac{-\bar{h}_o[1 + \bar{K}_l(m_1 + 1)]}{d} \quad (21)$$

$$d_2 = \frac{\bar{h}_o}{d} \quad (22)$$

$$d = \bar{h}_o \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{-m_1-1} - 1 - \bar{K}_l(m_1 + 1) \right] - \quad (23)$$

$$\bar{K}_o(m_1 + 1) \left(\frac{b}{a}\right)^{-m_1-2} \quad (23)$$

تابع $\bar{\psi}(\bar{r}, \bar{t}, \bar{t})$ که پاسخ معادله به ازای قسمت همگن شرایط مرزی می باشد، بصورت معادله دیفرانسیل (۲۵)، همچنین شرایط مرزی (۲۶) و (۲۷) و شرط اولیه (۲۸) خواهد بود:

$$\bar{r}^{m_1-m_2-m_3} \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial \bar{r}^2} + (m_1 + 2) \bar{r}^{m_1-m_2-m_3-1} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{t}} \quad (24)$$

$$\bar{\psi}|_{\bar{r}=1} - \bar{K}_l \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{r}}|_{\bar{r}=1} = 0 \quad (25)$$

$$\bar{\psi}|_{\bar{r}=\frac{b}{a}} + \bar{K}_o \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{r}}|_{\bar{r}=\frac{b}{a}} = 0 \quad (26)$$

$$\bar{\psi}(\bar{r}, 0, \bar{t}) = 1 - \bar{U}(\bar{r}, \bar{t}) \quad (27)$$

برای حل معادله دیفرانسیل (۲۵) از روش جداسازی متغیرها استفاده شده و جواب معادله بشکل معادله (۲۹) فرض می شود که در

از انتگرال دوهامل پاسخ مسئله واقعی بدست می آید. پس از تعیین توزیع دما در جداره مخزن، با استفاده از روش گسسته سازی شبه تحلیلی تنش های حرارتی برای مخزن کروی هدفمند بدست آمده است. تغییرات تنش های ترمومکانیکی در مخزن بدست آمده و اثر فرکانس تغییرات دمای سیال داخل مخزن بر دامنه تنش ها و کرنش ها و همچنین بیشینه دما در دیواره آن بررسی شده است. همچنین به منظور نشان دادن دقت و کارایی مدل، نتایج حاصل با نتایج عددی مدل اجزاء محدود^۱ مقایسه شده است.

۲- تحلیل انرژی و تعیین میدان توزیع دما

به منظور بررسی توزیع دما لازم است انتقال گرما در مخزن کروی با لحاظ نمودن شرایط مرزی حل شود. معادله انتقال گرمای رسانشی در جهت شعاع برای مخزن کروی هدفمند در مختصات کروی بصورت زیر می باشد [۱۸]:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{K(r)} \frac{dK(r)}{dr} + \frac{2}{r}\right) \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\rho(r)C(r)}{K(r)} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

خواص فیزیکی ماده هدفمند چون رسانایی گرمایی $K(r)$ ، چگالی $\rho(r)$ و گرمای ویژه $C(r)$ بصورت تابع توانی در راستای ضخامت مخزن کروی با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b در نظر گرفته شده اند [۱۹، ۲۰]:

$$K(r) = K_l \left(\frac{r}{a}\right)^{m_1} \quad (2)$$

$$\rho(r) = \rho_l \left(\frac{r}{a}\right)^{m_2} \quad (3)$$

$$C(r) = C_l \left(\frac{r}{a}\right)^{m_3} \quad (4)$$

در روابط بالا K_l ، ρ_l و C_l خواص فیزیکی مربوط به سطح داخلی مخزن می باشد و m_1 ، m_2 و m_3 ثوابت مربوط به ماده هستند که معرف گرادیان توزیع مولفه ها در این ماده می باشند. فرض بر این است که کره از سطح داخلی و خارجی بترتیب در معرض انتقال گرمای جابجایی با سیالی با دمای $T_l(t)$ و $T_o(t)$ می باشد. شرط اولیه میدان دما برای مخزن T_0 می باشد. متغیرهای بی بعد زیر برای تسهیل در محاسبات در نظر گرفته شده اند:

$$\bar{T} = \frac{T}{T_0}, \bar{r} = \frac{r}{a}, \bar{h} = \frac{h}{h_l}, \bar{K} = \frac{K}{ah_l}, \bar{t} = \frac{K_l t}{\rho_l C_l a^2} \quad (5)$$

که در آن h_l ضریب انتقال گرمای جابجایی در داخل کره می باشد. با اعمال پارامترهای بی بعد فوق در مسئله، معادله دیفرانسیل و شرایط مرزی و اولیه بصورت زیر بدست می آیند:

$$\bar{r}^{m_1-m_2-m_3} \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial \bar{r}^2} + (m_1 + 2) \bar{r}^{m_1-m_2-m_3-1} \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{t}} \quad (6)$$

$$\bar{T}|_{\bar{r}=1} - \bar{K}_l \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}}|_{\bar{r}=1} = \bar{T}_l(\bar{t}) \quad (7)$$

$$\bar{T}|_{\bar{r}=\frac{b}{a}} + \bar{K}_o \frac{\partial \bar{T}}{\partial \bar{r}}|_{\bar{r}=\frac{b}{a}} = \bar{h}_o \bar{T}_o(\bar{t}) \quad (8)$$

$$\bar{T}(\bar{r}, 0) = 1 \quad (9)$$

بدلیل وابسته بودن شرایط مرزی به زمان، روش جداسازی متغیرها در حل معادله دیفرانسیل (۶) کارایی نخواهد داشت [۱۸]، لذا از اصل دوهامل برای حل این مسئله با شرط مرزی متغیر با زمان استفاده می شود. در این روش ابتدا یک مدل کمکی در نظر گرفته می شود

¹ Finite Element Model

نهایت به دو معادله دیفرانسیل معمولی (۳۰) و (۳۱) منجر می‌شود:

$$\bar{\psi}(\bar{r}, \bar{t}, \bar{\tau}) = R(\bar{r})G(\bar{t}, \bar{\tau}) \quad (28)$$

$$\frac{dG}{d\bar{t}} + \lambda^2 G = 0 \quad (29)$$

$$\bar{r}^2 \frac{d^2 R}{d\bar{r}^2} + (m_1 + 2)\bar{r} \frac{dR}{d\bar{r}} + \lambda^2 \bar{r}^{2-m_1+m_2+m_3} R = 0 \quad (30)$$

در معادلات فوق λ یک ثابت است که در روش جداسازی متغیرها استفاده شده است. جواب معادله (۳۰) بصورت رابطه (۳۲) و جواب معادله (۳۱) برحسب توابع متعامد بسل^۱ از مرتبه η بشکل رابطه (۳۳) بدست می‌آید [۲۱]:

$$G(\bar{t}, \bar{\tau}) = A(\bar{\tau}) \exp(-\lambda^2 \bar{t}) \quad (31)$$

$$R(\bar{r}) = \bar{r}^{-\beta} [D J_{\eta}(\gamma \bar{r}^q) + F Y_{\eta}(\gamma \bar{r}^q)] \quad (32)$$

که در آن‌ها، ثوابت موجود به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\beta = \frac{m_1 + 1}{2} \quad (33)$$

$$q = \frac{2 - m_1 + m_2 + m_3}{2\lambda} \quad (34)$$

$$\gamma = \frac{2 - m_1 + m_2 + m_3}{|-(m_1 + 1)|} \quad (35)$$

$$\eta = \frac{2 - m_1 + m_2 + m_3}{2} \quad (36)$$

جایگذاری روابط (۳۲) و (۳۳) در شرایط مرزی (۲۶) و (۲۷) و انجام ساده‌سازی‌های ریاضی یک دستگاه معادلات جبری خطی بر حسب مجهولات D و F بصورت معادله (۳۸) بدست می‌آید، که حل این معادله در ادامه توضیح داده شده است.

$$\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D \\ F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

در این معادله جبری، اعضای ماتریس ضرایب پس از اعمال ساده‌سازی‌ها بر روی توابع متعامد بسل به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$Q_{11} = (1 + \bar{K}_i \beta - \bar{K}_i \eta q) J_{\eta}(\gamma) + \bar{K}_i \gamma q J_{\eta+1}(\gamma) \quad (38)$$

$$Q_{12} = (1 + \bar{K}_i \beta - \bar{K}_i \eta q) Y_{\eta}(\gamma) + \bar{K}_i \gamma q Y_{\eta+1}(\gamma) \quad (39)$$

$$Q_{21} = \left[\bar{h}_o \left(\frac{b}{a} \right)^{-\beta} - \bar{K}_o (\beta - \eta q) \left(\frac{b}{a} \right)^{-\beta-1} \right] J_{\eta} \left(\gamma \left(\frac{b}{a} \right)^q \right) - \left[\bar{K}_o \gamma q \left(\frac{b}{a} \right)^{q-\beta-1} \right] J_{\eta+1} \left(\gamma \left(\frac{b}{a} \right)^q \right) \quad (40)$$

$$Q_{22} = \left[\bar{h}_o \left(\frac{b}{a} \right)^{-\beta} - \bar{K}_o (\beta - \eta q) \left(\frac{b}{a} \right)^{-\beta-1} \right] Y_{\eta} \left(\gamma \left(\frac{b}{a} \right)^q \right) - \left[\bar{K}_o \gamma q \left(\frac{b}{a} \right)^{q-\beta-1} \right] Y_{\eta+1} \left(\gamma \left(\frac{b}{a} \right)^q \right) \quad (41)$$

برای اینکه معادله (۳۸) دارای جواب‌های غیربدیهی باشد، می‌بایستی دترمینان ماتریس ضرایب آن صفر شود که این شرط منجر به یک معادله غیرخطی جبری بر حسب γ با بی‌شمار ریشه می‌گردد که مقادیر ویژه را نشان می‌دهند. به‌ازی هر مقدار ویژه جواب معادله (۳۸) را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$D_n = -[(1 + \bar{K}_i \beta - \bar{K}_i \eta q) Y_{\eta}(\gamma_n) + \bar{K}_i \gamma_n q Y_{\eta+1}(\gamma_n)] \quad (42)$$

$$F_n = +[(1 + \bar{K}_i \beta - \bar{K}_i \eta q) J_{\eta}(\gamma_n) + \bar{K}_i \gamma_n q J_{\eta+1}(\gamma_n)] \quad (43)$$

در این صورت رابطه (۲۹) بصورت یک مجموعه جواب بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\bar{\psi}(\bar{r}, \bar{t}, \bar{\tau}) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\bar{r}) G_n(\bar{t}, \bar{\tau}) \quad (44)$$

¹ Bessel

با اعمال شرط اولیه (۲۸) در رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\bar{\tau}) R_n(\bar{r}) = 1 - \bar{U}(\bar{r}, \bar{\tau}) \quad (45)$$

با ضرب طرفین رابطه در عبارت $\bar{r}^{m_3+m_2+2}$ و انتگرالگیری از ۱ تا $\frac{b}{a}$ شرط تعامد برقرار شده و خواهیم داشت:

$$A_n(\bar{\tau}) = \frac{1}{N} \int_1^{\frac{b}{a}} \bar{r}^{m_3+m_2+2} R_n(\bar{r}) (1 - \bar{U}(\bar{r}, \bar{\tau})) d\bar{r} \quad (46)$$

که در آن:

$$N = \int_1^{\frac{b}{a}} \bar{r}^{m_3+m_2+2} [R_n(\bar{r})]^2 d\bar{r} \quad (47)$$

جواب معادله کمکی دوهامل با توجه به رابطه (۱۵) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{\varnothing}(\bar{r}, \bar{t}, \bar{\tau}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\bar{\tau}) R_n(\bar{r}) \exp(-\lambda_n^2 \bar{t}) + C_1(\bar{\tau}) + C_2(\bar{\tau}) \bar{r}^{-m_1-1} \quad (48)$$

با جایگذاری معادله فوق در معادله (۱۴) میدان توزیع دما در مخزن کروی از ماده هدفمند بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\bar{T}(\bar{r}, \bar{t}) = \sum_{n=1}^{\infty} R_n(\bar{r}) \left[\frac{\Delta_n \exp(-\lambda_n^2 \bar{t}) + \zeta_n \Phi_n(\bar{t})}{\xi_n \Psi_n(\bar{t})} \right] + H_1(\bar{r}) \bar{T}_i(\bar{t}) + H_2(\bar{r}) \bar{T}_o(\bar{t}) \quad (50)$$

که در آن:

$$\Delta_n = \frac{1}{N} \int_1^{\frac{b}{a}} \bar{r}^{m_3+m_2+2} R_n(\bar{r}) d\bar{r} \quad (51)$$

$$\zeta_n = \frac{d_1 - 1}{N} \int_1^{\frac{b}{a}} \bar{r}^{m_3+m_2+2} R_n(\bar{r}) d\bar{r} \quad (52)$$

$$+ \frac{d_2}{N} \int_1^{\frac{b}{a}} \bar{r}^{1+m_3+m_2-m_1} R_n(\bar{r}) d\bar{r}$$

$$\xi_n = -\frac{d_1}{N} \int_1^{\frac{b}{a}} \bar{r}^{m_3+m_2+2} R_n(\bar{r}) d\bar{r} \quad (53)$$

$$- \frac{d_2}{N} \int_1^{\frac{b}{a}} \bar{r}^{1+m_3+m_2-m_1} R_n(\bar{r}) d\bar{r}$$

$$H_1(\bar{r}) = 1 - d_1 - d_2 \bar{r}^{-m_1-1} \quad (54)$$

$$H_2(\bar{r}) = d_1 + d_2 \bar{r}^{-m_1-1} \quad (55)$$

$$\Phi_n(\bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \int_{\bar{\tau}=0}^{\bar{t}} \bar{T}_i(\bar{\tau}) \exp(-\lambda_n^2 (\bar{t} - \bar{\tau})) d\bar{\tau} \quad (56)$$

$$\Psi_n(\bar{t}) = \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \int_{\bar{\tau}=0}^{\bar{t}} \bar{T}_o(\bar{\tau}) \exp(-\lambda_n^2 (\bar{t} - \bar{\tau})) d\bar{\tau} \quad (57)$$

دمای سیال داخل و خارج مخزن یعنی $\bar{T}_i(\bar{t})$ و $\bar{T}_o(\bar{t})$ می‌توانند توابعی کاملاً عمومی باشند که در این مقاله، به دلیل کاربرد و همچنین عمومیت مسئله، برای آن‌ها رفتار سیکلی در نظر گرفته شده است:

$$\bar{T}_i(\bar{t}) = \bar{T}_{avi} + \bar{T}_{ai} \sin(\bar{\omega}_i \bar{t}) \quad (58)$$

$$\bar{T}_o(\bar{t}) = \bar{T}_{avo} + \bar{T}_{ao} \sin(\bar{\omega}_o \bar{t}) \quad (59)$$

در این روابط $\bar{T}_{av}$ و $\bar{T}_{a}$ بترتیب دمای بی‌بعد متوسط و دامنه دمای بی‌بعد می‌باشند. $\bar{\omega}$ شکل بی‌بعد فرکانس زاویه‌ای دما می‌باشد که بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\bar{\omega} = \frac{\rho_i C_i \omega a^2}{K_i} f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (60)$$

استفاده از فرکانس بجای فرکانس زاویه‌ای مرسوم‌تر می‌باشد لذا، f نماد فرکانس بوده و بصورت رابطه زیر می‌باشد:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad (61)$$

۳- تحلیل تنش و کرنش ترموالاستیک

با توجه به اینکه مخزن هدفمند تحت بارهای ترکیبی حرارتی و مکانیکی قرار گرفته است، لذا علاوه بر تحلیل رسانش، تحلیل ترموالاستیک اهمیت بالایی دارد. معادله تعادل در مختصات کروی برای کره با چشم پوشی از اثر نیروهای اینرسی و نیروهای حجمی بصورت زیر خواهد بود:

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0 \quad (62)$$

معادله سازگاری کرنش‌ها نیز بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d\varepsilon_{\theta\theta}}{dr} + \frac{1}{r}(\varepsilon_{\theta\theta} - \varepsilon_{rr}) = 0 \quad (63)$$

برای مخزن کروی از ماده هدفمند مورد نظر، معادلات ساختاری بصورت زیر می‌باشند:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E(r)}[\sigma_{rr} - 2\nu\sigma_{\theta\theta}] + \alpha(r)T(r, t) \quad (64)$$

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{E(r)}[(1-\nu)\sigma_{\theta\theta} - \nu\sigma_{rr}] + \alpha(r)T(r, t) \quad (65)$$

با توجه به توزیع ماده هدفمند و فرض برقراری قانون توزیع توانی در راستای ضخامت مخزن، مقدار مدول یانگ و ضریب انبساط گرمایی در جداره کره به صورت زیر تعیین می‌شوند [۱۹، ۲۰]:

$$E(r) = E_i \left(\frac{r}{a}\right)^{m_4} \quad (66)$$

$$\alpha(r) = \alpha_i \left(\frac{r}{a}\right)^{m_5} \quad (67)$$

که در آن E_i و α_i به ترتیب مدول یانگ و ضریب انبساط گرمایی سطح داخلی مخزن می‌باشند. با جایگذاری معادلات (۶۴) و (۶۵) در معادله (۶۳) و با استفاده از معادلات (۶۲)، (۶۶) و (۶۷) به یک معادله دیفرانسیل معمولی بر حسب تنش شعاعی می‌رسیم:

$$r^2 \frac{d^2 \sigma_{rr}}{dr^2} + r(4-m_4) \frac{d\sigma_{rr}}{dr} - 2m_4 \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right) \sigma_{rr} = - \frac{2\alpha_i E_i r^{m_4+m_5+1} dT}{(1-\nu)a^{m_4+m_5} dr} - \frac{2\alpha_i E_i m_5 r^{m_4+m_5}}{(1-\nu)a^{m_4+m_5}} T \quad (68)$$

با بی‌بعدسازی پارامتر تنش بر اساس تعریف ارائه شده در رابطه (۶۹) و معادلات (۵)، معادله دیفرانسیل (۶۸) بصورت بی‌بعد همانند معادله (۷۰) خواهد بود:

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\alpha_i T_0 E_i} \quad (69)$$

$$\bar{r}^2 \frac{d^2 \bar{\sigma}_{rr}}{d\bar{r}^2} + \bar{r}(4-m_4) \frac{d\bar{\sigma}_{rr}}{d\bar{r}} - 2m_4 \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right) \bar{\sigma}_{rr} = - \frac{2\bar{r}^{m_4+m_5+1} d\bar{T}}{(1-\nu) d\bar{r}} - \frac{2m_5 \bar{r}^{m_4+m_5}}{(1-\nu)} \bar{T} \quad (70)$$

برای حل معادله دیفرانسیل (۷۰) از روش گسسته‌سازی شبه تحلیلی استفاده می‌شود. بر اساس شکل ۱ ضخامت مخزن به M لایه تقسیم‌بندی شده به طوری که هر لایه دارای خاصیت مکانیکی و حرارتی همگن باشد [۵]. بر اساس این روش ضرایب معادله دیفرانسیل (۷۰) در مرکز لایه m ام یعنی $\bar{r}_m$ محاسبه می‌شوند. در این صورت برای هر لایه یک معادله دیفرانسیل غیرهمگن با ضرایب ثابت به شکل رابطه (۷۱) برقرار می‌شود:

$$\bar{r}_m^2 \frac{d^2 \bar{\sigma}_{rr}^m}{d\bar{r}^2} + \bar{r}_m(4-m_4) \frac{d\bar{\sigma}_{rr}^m}{d\bar{r}} - 2m_4 \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right) \bar{\sigma}_{rr}^m = - \frac{2\bar{r}_m^{m_4+m_5+1} d\bar{T}}{(1-\nu) d\bar{r}} \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_m} - \frac{2m_5 \bar{r}_m^{m_4+m_5}}{(1-\nu)} \bar{T} \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_m} \quad (71)$$

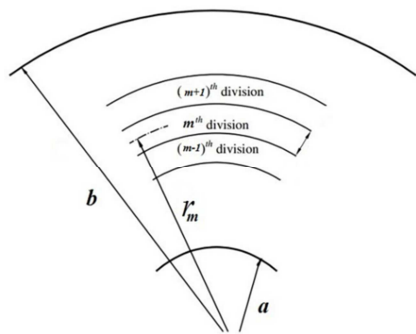
جواب عمومی و خصوصی معادله دیفرانسیل (۷۱) بصورت زیر می‌باشد:

$$\bar{\sigma}_{rr}^m(\bar{r}) = S_1^m \exp(X_1^m \bar{r}) + S_2^m \exp(X_2^m \bar{r}) + \frac{\bar{r}_m^{m_4+m_5+1}}{\bar{r}_m^{m_4+m_5+1}} \frac{d\bar{T}}{d\bar{r}} \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_m} + \frac{m_5 \bar{r}_m^{m_4+m_5}}{m_4(1-2\nu)} \bar{T} \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_m} \quad (72)$$

که در آن:

$$X_1^m = \frac{(m_4-4) + \sqrt{(m_4-4)^2 + 8m_4 \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)}}{2\bar{r}_m} \quad (73)$$

$$X_2^m = \frac{(m_4-4) - \sqrt{(m_4-4)^2 + 8m_4 \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)}}{2\bar{r}_m} \quad (74)$$



شکل ۱- تقسیم‌بندی شعاعی مخزن کروی

جواب معادله حاکم بر لایه m ام تنها در بازه‌ی زیر اعتبار دارد:

$$\bar{r}_m - \frac{\bar{z}}{2} \leq \bar{r} \leq \bar{r}_m + \frac{\bar{z}}{2} \quad (75)$$

با توجه به استفاده از M لایه، ضخامت بی‌بعد هر لایه بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{z} = \frac{b-a}{M} \quad (76)$$

پارامترهای S_1^m و S_2^m ثابت‌های حل معادله هستند که مربوط به لایه m ام می‌باشند و از طریق اعمال شرایط مرزی کلی و شرایط پیوستگی بین لایه‌ها بدست می‌آیند. مخزن کروی دارای فشار داخلی و خارجی P_i و P_o می‌باشد، پس شرایط مرزی بصورت زیر اعمال می‌شوند:

$$\bar{\sigma}_{rr}^1 \Big|_{\bar{r}=1} = - \frac{P_i}{\alpha_i T_0 E_i} \quad (77)$$

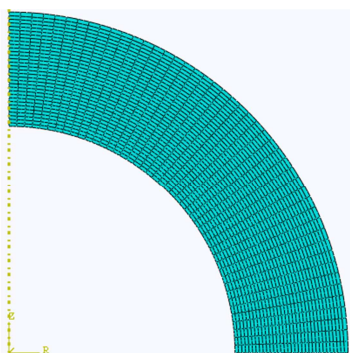
$$\bar{\sigma}_{rr}^M \Big|_{\bar{r}=\frac{b}{a}} = - \frac{P_o}{\alpha_i T_0 E_i} \quad (78)$$

پیوستگی تنش شعاعی در سطح داخلی و خارجی لایه‌های مجاور بصورت زیر تامین می‌شود:

$$\bar{\sigma}_{rr}^m \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_m + \frac{\bar{z}}{2}} = \bar{\sigma}_{rr}^{m+1} \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_{m+1} - \frac{\bar{z}}{2}} \quad (79)$$

$$\frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}^m}{\partial \bar{r}} \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_m + \frac{\bar{z}}{2}} = \frac{\partial \bar{\sigma}_{rr}^{m+1}}{\partial \bar{r}} \Big|_{\bar{r}=\bar{r}_{m+1} - \frac{\bar{z}}{2}} \quad (80)$$

در نظر گرفتن شرایط پیوستگی (۷۹) و (۸۰) برای تنش شعاعی و همچنین شرایط مرزی (۷۷) و (۷۸) که بر اساس فشار داخلی و خارجی مخزن می‌باشد، منجر به تشکیل یک دستگاه معادلات جبری بر حسب ثابت‌های S_1^m و S_2^m می‌گردد. با حل این دستگاه معادلات، ثابت‌های مربوط به معادله توزیع تنش که تعداد آن‌ها $2M$ می‌باشد، تعیین می‌شوند. در این صورت توزیع تنش مربوط به هر لایه با برقراری شرایط پیوستگی بین لایه‌ای به صورت یک توزیع نمایی بدست می‌آید که از کنار هم قرار دادن این توزیع‌ها، میدان کلی تنش شعاعی در مخزن محاسبه می‌شود. نکته قابل توجه اینکه، تمامی این مراحل در هر گام زمانی تکرار می‌شوند تا توزیع تنش در هر گام زمانی برای مخزن



شکل ۲- مدل اجزاء محدود مخزن کرووی در نرم افزار ABAQUS

جدول ۱- خواص مکانیکی و گرمایی مواد تشکیل دهنده مخزن کرووی هدفمند [۱۱، ۱۰]

خواصیت	نماد و واحد	آلومینا	آلومینیم
رسانایی گرمایی	k (W/mK)	۴۶	۲۰۴
چگالی	ρ (kg/m ³)	۳۸۰۰	۲۷۰۷
گرمایی ویژه	C (J/kgK)	۷۶۰	۸۹۶
مدول یانگ	E (GPa)	۳۸۰	۷۰
ضریب انبساط گرمایی	α (μK^{-1})	۷/۴	۲۳/۱

برای مقایسه دقیق نتایج حاصل از حل تحلیلی و حل عددی به روش المان محدود با استفاده از نرم افزار ABAQUS، توزیع دما در طول ضخامت جداره کروی هدفمند در چند زمان مختلف در شکل ۳ نشان داده شده است. با توجه به این نمودار توزیع دمای پیش‌بینی شده به روش دوهمال در هر زمانی از صحت و دقت قابل قبولی برخوردار است. همچنین می‌توان مشاهده کرد که توزیع دمای بدست آمده در زمان‌های طولانی که از حالت دمای گذرا دورتر است، بسیار دقیق‌تر می‌باشد. پس می‌توان بیان داشت که پاسخ‌های ترموالاستیک بدست آمده از روش گسسته سازی شبه تحلیلی نیز با استفاده از این نرم افزار صحت سنجی شده‌اند. همچنین می‌توان بیان داشت که در اثر بار حرارتی متناوب تنش شعاعی در سطوح داخلی مخزن در گستره‌ی قابل توجهی در نوسان است. همچنین شکل ۴ مقایسه توزیع تنش محیطی بی‌بعد در زمان‌های مختلف را نشان می‌دهد. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که تطبیق بسیار خوبی بین نتایج حاصل از روش گسسته‌سازی شبه تحلیلی و روش عددی بر مبنای اجزاء محدود در نرم‌افزار وجود دارد. با توجه به نوسانی بودن شرایط مرزی حرارتی تحلیل اجزاء محدود انجام شده در نرم‌افزار ABAQUS به صورت تحلیل ترموالاستیک گذرا انتخاب شده است. برای بدست آوردن یک گام زمانی بهینه برای تحلیل، از یک فرایند سعی و خطا با توجه به فرکانس بارگذاری حرارتی (۲ میلی‌هرتز) و سرعت تغییرات دما در نقاط مختلف مخزن و همچنین حداکثر تغییر دمای مجاز برای همگرایی پاسخ استفاده شده است. زمان کل ۷۰۰۰ ثانیه با گام زمانی بهینه ۱۰ ثانیه در این فرایند سعی و خطا برای تحلیل ترموالاستیک گذرا تعیین شده است. شایان ذکر است که در نرم‌افزار قابلیت انتخاب حداقل و حداکثر مقدار گام زمانی و حداکثر تغییر دمای مجاز برای تامین همگرایی حل وجود دارد که می‌توان از این گزینه‌ها نیز در چنین

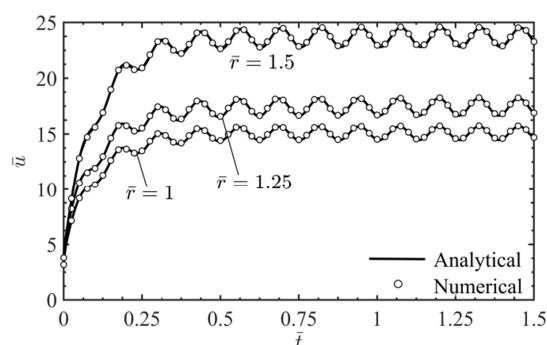
محاسبه گردد. لازم به ذکر است که تنش محیطی، کرنش شعاعی و محیطی به ترتیب از روابط (۶۲)، (۶۴) و (۶۵) بدست می‌آیند. در ادامه به ارائه‌ی نتایج بدست آمده از روش تحلیلی دوهمال و گسسته‌سازی پرداخته می‌شود.

۴- نتایج

در این پژوهش، ابتدا به منظور اطمینان از صحت روش حل تحلیلی ارائه شده، نتایج حاصل از حل تحلیلی با نتایج حل عددی برای حالت بارگذاری ترمو-الاستیک مقایسه شده‌اند. حل عددی به کمک نرم افزار المان محدود ABAQUS انجام شده است. در این مدل‌سازی از یک مدل هندسی دو بعدی بصورت شکل ۲ استفاده شده است. به دلیل وجود تقارن در بارگذاری، شرایط مرزی و جنس مخزن، تنها یک چهارم از کره مدل شده است. از یک المان هشت گره‌ای چهاروجهی متقارن محوری برای توصیف این نمونه استفاده شده است. مدل المان محدود نهایی دارای ۳۱۳۶ المان می‌باشد. در این مدل تغییرات خواص فیزیکی مخزن هدفمند در راستای شعاعی با در نظر گرفتن ۳۲ لایه پیاده‌سازی شده است به طوری که هر لایه دارای خاصیت فیزیکی ثابتی می‌باشد. گره‌های موجود در امتداد لبه‌ی افقی مدل در جهت R آزاد هستند، اما در جهت Z مقید شده‌اند تا بتوان تقارن مخزن کرووی را با یک هندسه دو بعدی بیان کرد. در این مطالعه موردی، شعاع داخلی و خارجی مخزن هدفمند به ترتیب ۰/۲۵ و ۰/۳۷۵ متر در نظر گرفته شده‌اند. سطح داخلی مخزن از جنس آلومینا (Al_2O_3) و سطح خارجی آن آلومینیم (Al) با خواص گرمایی و مکانیکی ارائه شده در جدول ۱ می‌باشد. با توجه به ساختار مفروض و ضخامت جداره مخزن کرووی، بر اساس معادلات (۲) تا (۴) و همچنین معادلات (۶۶) و (۶۷) که قانون توزیع توانی مواد را در مخزن نشان می‌دهند، ثوابت m_1, m_2, m_3, m_4 و m_5 به ترتیب مقادیر ۳/۶۷، ۰/۸۴، ۰/۴۱، ۰/۱۷۴ و ۲/۸۱ را اختیار می‌کنند. به منظور صحت سنجی نتایج و روشن شدن اثر شرایط مرزی در رفتار سازه دو مورد مطالعه انتخاب و نتایج آنها مورد بررسی قرار گرفته است.

۴-۱- مورد مطالعه اول

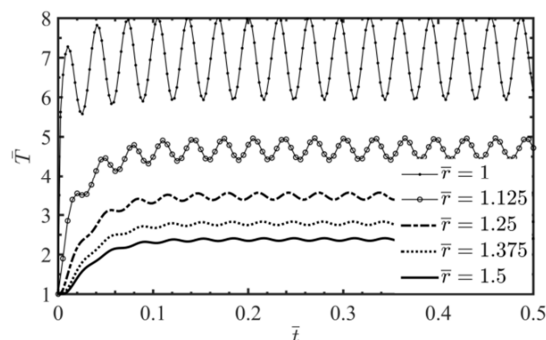
در این مثال، الگوی تغییر دمای سیال درون کره بصورت معادله (۵۸)، یعنی به صورت یک تابع سینوسی می‌باشد، به طوریکه دمای آن بین ۱۶۰ تا ۲۴۰ درجه سلسیوس با فرکانس ۲ میلی‌هرتز در حال نوسان می‌باشد. ضریب انتقال گرمایی همرفتی از سطح داخلی مخزن هدفمند $4600 \text{ W/m}^2\text{K}$ و سطح خارجی عایق فرض شده‌اند. دمای اولیه مخزن ۲۵ درجه سلسیوس و سطح داخلی تحت فشار ۵۰ MPa می‌باشد.



شکل ۵- تاریخچه جابجایی شعاعی در سه نقطه متفاوت از جداره بدست آمده با دو روش تحلیلی و عددی برای بارگذاری نوع اول

۴-۲- مورد مطالعه دوم

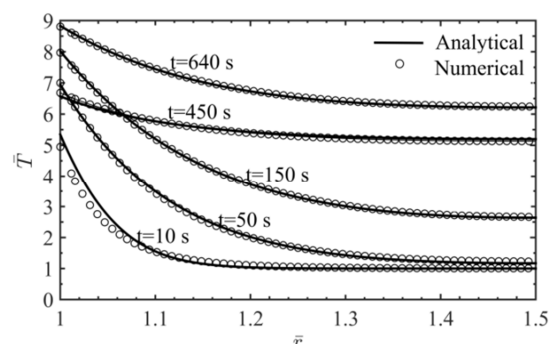
در بررسی موردی دیگر، توزیع دما، تنش‌های شعاعی، محیطی، ون-مایسز و کرنش‌های شعاعی مخزن در کروی هدفمند بررسی می‌شود. شرایط مرزی و مکانیکی این مطالعه مشابه مورد مطالعه اول می‌باشد با این تفاوت که سطح خارجی تحت انتقال گرمای جابجایی با هوای محیط با دمای ۲۵ درجه سانتیگراد و ضریب جابجایی $150 \text{ W/m}^2\text{K}$ می‌باشد. فشار داخلی اعمالی نیز به 80 MPa افزایش یافته است. همچنین فرکانس تغییرات دمای سیال داخل کره ۸ میلی‌هرتز در نظر گرفته شده است. شکل ۶ تاریخچه تغییرات دما در پنج نقطه مختلف از جداره مخزن کروی هدفمند را بر حسب زمان بی‌بعد نشان می‌دهد. با توجه به نمودارهای نشان داده شده در شکل، در هر نقطه از مخزن، دما با سرعت به حالت پایایی خود می‌رسد و در ادامه با توجه به سیکلی بودن شرایط مرزی، دما در هر نقطه بصورت سیکلی تغییر می‌کند. دمای سطوح داخلی دیواره کره‌ی هدفمند، مقدار بیشتری را نسبت به سطوح خارجی دارند. همچنین مشاهده می‌شود که دامنه تغییرات دما در سطح داخلی به مراتب بیشتر از سطح خارجی می‌باشد، به‌طوری‌که از سطح داخلی به سمت خارج دامنه دما کاهش می‌یابد. تاریخچه تغییرات تنش شعاعی بر حسب زمان در شکل ۷ نشان داده شده است. در اثر تغییرات میدان دمایی، تنش شعاعی نیز به تبع آن به صورت گذرا تغییر کرده و سپس به یک حالت پایایی نوسانی می‌رسد. تنش شعاعی در مخزن فشاری بوده و همچنین در حالت پایدار، قدر مطلق مقدار متوسط آن در سطح داخلی کره نسبت به سطوح خارجی بیشتر است.



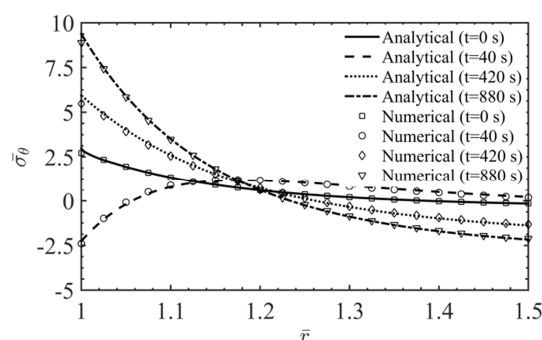
شکل ۶- تاریخچه تغییرات دما در پنج نقطه مختلف از مخزن کروی بر حسب زمان بی‌بعد برای بارگذاری نوع دوم

تحلیلی استفاده نمود. جابجایی‌های شعاعی بی‌بعد بدست آمده از سطح داخلی، خارجی و سطح میانی مخزن در طول زمان بصورت شکل ۵ ارائه شده‌اند. این شکل نشان می‌دهد که تاریخچه جابجایی شعاعی این سه نقطه از جداره مخزن با دقت بسیار قابل قبولی بدست آمده است. با توجه به این نمودار تا زمان حدود ۱۵۰۰ ثانیه، جابجایی مخزن بصورت گذرا بوده و بعد از آن به یک حالت پایایی نوسانی با دامنه ثابت می‌رسد. با توجه به تغییر نوسانی دمای سیال داخل مخزن، کرنش‌های حرارتی متأثر از آن و در نتیجه تنش‌ها نیز در حالت گذرا و پایدار، شکل نوسانی خواهند داشت. به‌طور کلی نتایج بدست آمده برای مثال مورد نظر نشان می‌دهند که سطح خارجی مخزن بیشترین جابجایی شعاعی را داشته در حالی که تنش محیطی در سطح داخلی همواره بیشینه است.

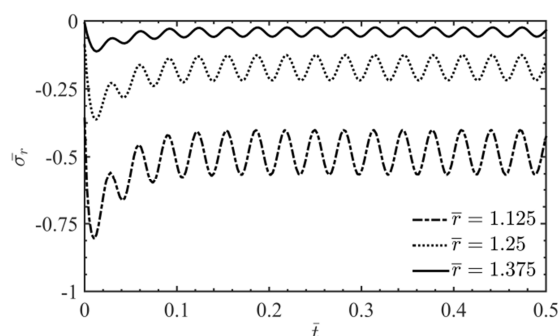
با توجه به صحت‌گذاری‌های انجام شده بر تحلیل حرارتی و ترموالاستیسیتک در مخزن کروی، می‌توان بیان داشت که روش تحلیلی بر اساس اصل دوهامل و روش گسسته‌سازی شبه تحلیلی برای حل معادلات دیفرانسیل حاکم، صحت و دقت بالایی را داشته و در ادامه می‌توان از نتایج این روش در بررسی تأثیر فرکانس بار حرارتی بر دامنه تنش‌ها، کرنش‌ها و جابجایی‌ها در سازه استفاده نمود. به همین منظور طی یک مطالعه موردی دیگر در قسمت بعد به توصیف وضعیت نوسانی میدان تنش، کرنش و دما در نقاط مختلف جداره کره‌ی هدفمند پرداخته شده است.



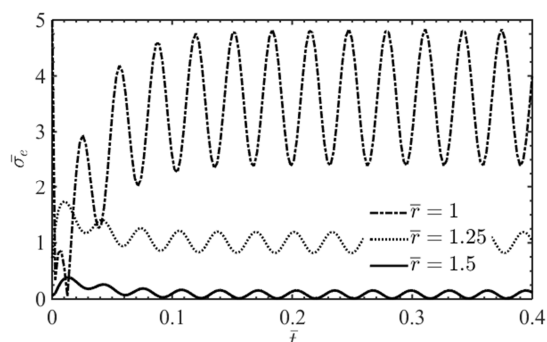
شکل ۳- توزیع دما در جداره مخزن کروی در زمان‌های مختلف به دست آمده از دو روش حل تحلیلی و عددی برای بارگذاری نوع اول



شکل ۴- توزیع تنش محیطی در زمان‌های مختلف به دست آمده از دو روش حل تحلیلی و عددی برای بارگذاری نوع اول



شکل ۷- تاریخچه تغییرات تنش شعاعی بی بعد در سه نقطه مختلف مخزن برحسب زمان بی بعد برای بارگذاری نوع دوم



شکل ۸- تاریخچه تغییرات تنش ون-مایسز بی بعد در سه نقطه مختلف مخزن برحسب زمان بی بعد برای بارگذاری نوع دوم

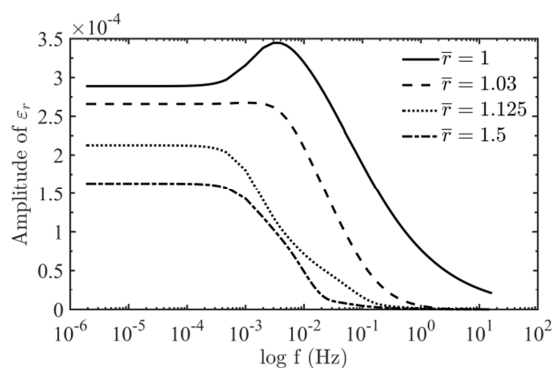
البته باید توجه داشت تنش ون-مایسز در کره، به تبع تغییرات گذرا و نوسانی شرایط مرزی، در حال تغییر می باشد. با توجه به شکل ۸ میزان این تنش در نقاطی از کره که به سطح داخلی نزدیکتر است، بیشتر می باشد. نتایج نشان می دهند که بطور کلی تنش های محیطی سطح داخلی کره دارای بیشترین مقدار دامنه و بیشترین مقدار متوسط هستند و در سطح خارجی دارای حداقل دامنه و مقدار متوسط می باشد. اما با توجه به شرایط مرزی مکانیکی بیان شده در تحلیل ترموالاستیک، تنش شعاعی دارای دامنه صفر در سطح داخلی و خارجی است، به طوریکه دامنه در طول شعاع کره ابتدا زیاد شده و سپس تا شعاع خارجی کاهش می یابد. در رابطه با کرنش شعاعی با توجه به شکل ۹ می توان بیان داشت که مقدار متوسط آن در راستای شعاعی افزایش یافته ولی مقدار دامنه این کرنش در سطح داخلی بیشینه می باشد و از شعاع داخلی به سمت شعاع خارجی کاهش می یابد.

بطور کلی نتایج نشان می دهند که مقادیر دما، تنش، کرنش و جابجایی در سازه متأثر از شرایط مرزی حرارتی و مکانیکی متغیر می باشند. همانطور که نتایج نشان می دهند، در اثر نوسان شرایط مرزی حرارتی، توزیع تنش و کرنش نیز در جداره مخزن نوسانی می باشند. به منظور تعیین اثر فرکانس تغییرات دمای سیال درون مخزن در تنش، کرنش و دمای بیشینه دیواره مخزن، این فرکانس از محدوده میکروهرتز تا حدود ۱۵ هرتز تغییر داده شده و به بررسی تغییرات دامنه پارامترهای مذکور در ضخامت کره هدفمند پرداخته شده است.

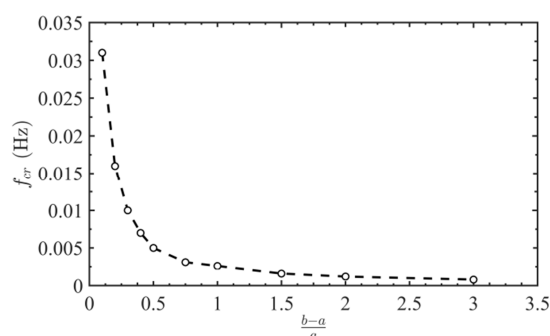
شکل ۱۰ تغییرات دمای بیشینه پنج نقطه مختلف در دیواره مخزن را در حالت پایا به ازای محدوده فرکانسی معین در مقیاس لگاریتمی نشان می دهد. همانطور که در این شکل مشاهده می شود دمای بیشینه در سطح داخلی مخزن از سطح خارجی بیشتر است.

علاوه بر آن نتایج نشان می دهند که با عبور فرکانس تحریک از یک محدوده بحرانی (۵ میلی هرتز)، مقدار دمای بیشینه و دامنه تغییرات دما کاهش می یابند. تغییرات دامنه تنش شعاعی با فرکانس در نقاط مختلف جداره کره در شکل ۱۱ نشان داده شده است. با توجه به شرایط مرزی مکانیکی (فشار داخلی ثابت)، مقدار دامنه تنش در سطوح داخلی و خارجی صفر است، اما دامنه این تنش از سطح داخلی مخزن تا یک چهارم از ضخامت جداره آن افزایش یافته و بعد از آن کاهش می یابد و در هر فرکانسی این الگوی تغییرات دیده می شود. قابل توجه است که تنش شعاعی در نقاط مختلف مخزن نیز در عبور از فرکانس بحرانی ۵ میلی هرتز به مقدار بیشینه خود می رسد. الگوی تغییرات دامنه تنش محیطی برحسب فرکانس نیز در شکل ۱۲ نشان داده شده است. این شکل نشان می دهد که در هر فرکانسی، دامنه این تنش بیشترین مقدار خود را در سطح داخلی دارد. همچنین در فرکانس بحرانی ۵ میلی هرتز در تمامی نقاط مخزن، دامنه تنش محیطی بیشینه است. به طور کلی می توان بیان داشت که با افزایش دامنه تنش های شعاعی و محیطی در محدوده فرکانس بحرانی، تنش ون-مایسز نیز افزایش می یابد. واضح است که وجود چنین فرکانس بحرانی در این سازه از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است، لذا بررسی دامنه کرنش ها در این محدوده فرکانسی اهمیت دارد. در شکل ۱۳ تغییرات دامنه کرنش شعاعی در چهار نقطه جداره مخزن کروی هدفمند ارائه شده است. مشاهده می شود که در محدوده فرکانس بحرانی دامنه کرنش تغییرات شدیدی دارد. همچنین با افزایش فرکانس به بیش از حدود ۱۰ هرتز دامنه نوسان کرنش نیز به طور شدیدی کاهش می یابد. قابل توجه است که کنترل دامنه تنش ها و کرنش ها جهت اجتناب از خستگی در سازه از اهمیت بالایی برخوردار است.

نتایج نشان می دهند که برای مخزن کروی هدفمند به ازای شرایط بارگذاری نوسانی حرارتی، محدوده فرکانسی مشخصی وجود دارد که به ازای آن دامنه تغییرات تنش حرارتی در جداره کره هدفمند به طور قابل ملاحظه ای افزایش می یابد، که این محدوده فرکانسی را می توان با عنوان "فرکانس بحرانی" معرفی کرد. مقدار این فرکانس به شرایط بارگذاری حرارتی از یک سو و از سوی دیگر به ابعاد هندسی به خصوص ضخامت مخزن بستگی دارد. از آنجا که در بیشتر مسائل مهندسی، نوع بارگذاری و حجم مخزن بدلیل نیازهای صنعتی از قبل تعیین شده اند، ضخامت مخزن به عنوان پارامتر طراحی به منظور اجتناب از شرایط بحرانی مطرح می شود. به همین دلیل، در شکل ۱۴ تغییرات فرکانس بحرانی برای مخزن کروی هدفمند مورد نظر به ازای ضخامت های بی بعد مختلف ارائه شده است. همانطور که در این شکل مشاهده می شود با افزایش ضخامت مخزن، فرکانس بحرانی به طور چشم گیری کاهش می یابد. نتایج نشان می دهد که در فرکانس های کمتر از ۲/۵ میکروهرتز انتخاب ضخامت مخزن حتی الامکان می بایستی در محدوده کمتر از ۲ برابر شعاع داخلی در نظر گرفته شود تا از بیشینه شدن تنش های حرارتی در مخزن جلوگیری شود. به این ترتیب انتخاب ضخامت مخزن به یک عامل دیگر یعنی فرکانس دمای کاری نیز وابسته می شود که در طراحی مخازن می بایستی در نظر گرفته شود.



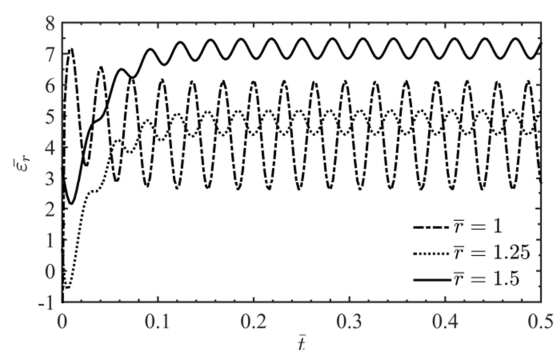
شکل ۱۳- تغییرات دامنه کرنش شعاعی برحسب فرکانس در چهار نقطه مختلف در مخزن کروی هدفمند



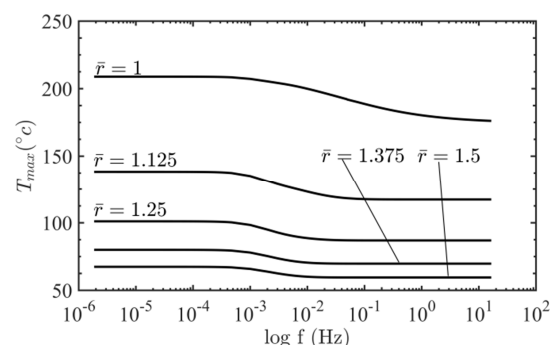
شکل ۱۴- تغییرات فرکانس بحرانی بر حسب ضخامت بی بعد در مخزن کروی هدفمند

۵- نتیجه گیری

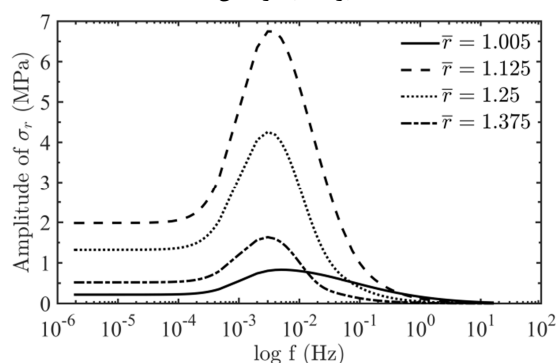
در این پژوهش، با استفاده از یک روش تحلیلی بر پایه اصل دوهامل به پیش‌بینی میدان توزیع دما، تنش و کرنش در مخزن کروی هدفمند آلومینیم-آلومینا تحت فشار داخلی ثابت که سطح داخلی آن در معرض انتقال گرمای همرفتی با دمای نوسانی می‌باشد، پرداخته شده است. مزیت عمده استفاده از روش تحلیلی، قابلیت آن برای حل مسائلی با شرایط مرزی متغیر با زمان می‌باشد. علاوه بر آن می‌توان رفتار الاستوپلاستیک و یا خزش سازه را نیز به کمک این روش حل، مورد بررسی قرار داد. مزیت دیگر استفاده از روش تحلیلی، توانایی الحاق آن به روش‌های بررسی دیگر از قبیل روش‌های بهینه‌سازی و غیره می‌باشد که از این مزیت در موضوع تحقیقات آینده استفاده خواهد شد. بطور کلی نتایج نشان می‌دهند که مقادیر دما، تنش، کرنش و جابجایی در سازه، متأثر از شرایط مرزی حرارتی و مکانیکی می‌باشند و در صورت نوسانی بودن شرایط مرزی یا بارگذاری، مقدار این متغیرهای ساختاری نیز در جداره‌ی مخزن بصورت نوسانی تغییر می‌کند، در حالی که در محدوده فرکانسی بالا (بیش از ۱۰ هرتز) برای شرایط مرزی حرارتی یا بارگذاری نوسانی، دامنه نوسان دما، تنش‌ها و کرنش‌ها در جداره مخزن به صفر میل می‌کند. از سوی دیگر، نتایج نشان می‌دهند که به ازای محدوده خاصی از فرکانس بارگذاری حرارتی دامنه تغییرات تنش حرارتی افزایش چشم‌گیری دارد که این محدوده را می‌توان "فرکانس بحرانی" در نظر گرفت. مقدار فرکانس بحرانی به عوامل مختلفی بستگی دارد که یکی از مهمترین آن‌ها ضخامت مخزن می‌باشد که مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ضخامت، مقدار فرکانس بحرانی بشدت کاهش یافته و در



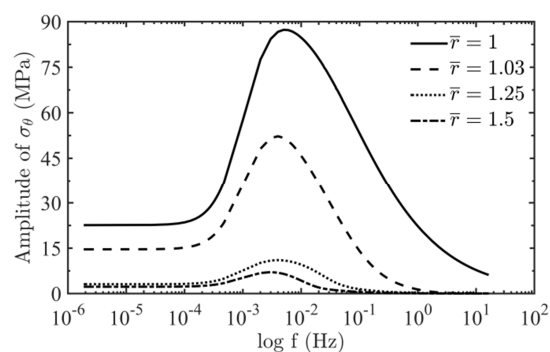
شکل ۹- تغییرات کرنش شعاعی بر حسب زمان (بی بعد) در سه نقطه مختلف مخزن کروی برای بارگذاری نوع دوم



شکل ۱۰- تغییرات دمای بیشینه در پنج نقطه مختلف جداره مخزن بر حسب فرکانس



شکل ۱۱- تغییرات دامنه تنش شعاعی بر حسب فرکانس در چهار نقطه مختلف در جداره مخزن کروی هدفمند



شکل ۱۲- تغییرات دامنه تنش محیطی بر حسب فرکانس در چهار نقطه مختلف در مخزن کروی هدفمند

ضخامت‌های بیش از ۱/۵ برابر شعاع داخلی، مقدار آن تثبیت می‌شود.

۶- مراجع

- Thermoelastic Hollow Sphere, *Materials*, Vol. 4, No. 12, pp. 2136-2150, 2011.
- [16] Noda N., Ootao Y., Tanigawa Y., Transient thermoelastic analysis for a functionally graded circular disk with piecewise power law, *Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 50, No. 3, pp. 831-839, 2012.
- [17] Wang H., An effective approach for transient thermal analysis in a functionally graded hollow cylinder, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Vol. 67, pp. 499-505, 2013.
- [18] Hahn D. W., Özışık M. N., Heat Conduction Fundamentals, *Heat Conduction*, Third Edition, pp. 1-39, 2012.
- [19] Tarn J.-Q., Exact solutions for functionally graded anisotropic cylinders subjected to thermal and mechanical loads, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 46, pp. 8189-8206, 2001.
- [20] Tutuncu N., Ozturk M., Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels, *Composites Part B: Engineering*, Vol. 32, No. 8, pp. 683-686, 2001.
- [21] Myint-U T., Debnath L., *Linear partial differential equations for scientists and engineers*: Springer Science & Business Media, 2007.
- [1] Bayat Y., Ghannad M., Torabi H., Analytical and numerical analysis for the FGM thick sphere under combined pressure and temperature loading, *Archive of Applied Mechanics*, Vol. 82, No. 2, pp. 229-242, 2012.
- [2] Jabbari M., Sohrabpour S., Eslami M., Mechanical and thermal stresses in a functionally graded hollow cylinder due to radially symmetric loads, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 79, No. 7, pp. 493-497, 2002.
- [3] M. Eslami, M. Babaei, R. Poultangari, Thermal and mechanical stresses in a functionally graded thick sphere, *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, Vol. 82, No. 7, pp. 522-527, 2005.
- [4] Çalloğlu H., Sayer M., Demir E., Stress analysis of functionally graded discs under mechanical and thermal loads, *Indian Journal of Engineering and Materials Sciences*, Vol. 18, No. 2, pp. 111-118, 2011.
- [5] Kordkheili S. H., Naghdabadi R., Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk, *Composite Structures*, Vol. 79, No. 4, pp. 508-516, 2007.
- [6] Xiang H., Shi Z., Zhang T., Elastic analysis of heterogeneous hollow cylinders, *Mechanics Research Communications*, Vol. 33, No. 5, pp. 681-691, 2006.
- [7] Li X.-F., Peng X.-L., A pressurized functionally graded hollow cylinder with arbitrarily varying material properties, *Journal of Elasticity*, Vol. 96, No. 1, pp. 81-95, 2009.
- [8] Vakili-Tahami F., Zehsaz M., Mohammad AlizadehFard A., Multi-objective optimum design of an FG Al-SiC rotating disc with temperature dependent properties based on creep behavior, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 14, No. 12, pp. 23-34, 2014 (In Persian).
- [9] Vakili-Tahami F., HassannejadQadim R., Mohammad AlizadehFard A., Raminnia M., Optimum design of functionally graded cylindrical shell with piezoelectric layer under moving load, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 15, No. 8, pp. 291-300, 2015 (In Persian).
- [10] Hosseini S. M., Akhlaghi M., Shakeri M., Transient heat conduction in functionally graded thick hollow cylinders by analytical method, *Heat and Mass Transfer*, Vol. 43, No. 7, pp. 669-675, 2007.
- [11] Hosseini S. M., Akhlaghi M., Analytical solution in transient thermo-elasticity of functionally graded thick hollow cylinders (Pseudo-dynamic analysis), *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, Vol. 3, No. 15, pp. 2019-2034, 2009.
- [12] Jabbari M., Mohazzab A. H., Bahtui A., One-dimensional moving heat source in a hollow FGM cylinder, *Journal of Pressure Vessel Technology*, Vol. 131, No. 2, pp. 021202, 2009.
- [13] Z. Shao, G. Ma, Thermo-mechanical stresses in functionally graded circular hollow cylinder with linearly increasing boundary temperature, *Composite Structures*, Vol. 83, No. 3, pp. 259-265, 2008.
- [14] Ootao Y., Transient thermoelastic analysis for a multilayered hollow sphere with piecewise power law nonhomogeneity, *Composite Structures*, Vol. 93, No. 7, pp. 1717-1725, 2011.
- [15] Ootao Y., Ishihara M., Transient Thermal Stress Problem of a Functionally Graded Magneto-Electro-