تحلیل خمشی ورقهای دایرهای و حلقوی مدرج تابعی با تغییرات پلهای ضخامت با استفاده از یک حل دقيق فرم بسته جديد

استادیار، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه مازندران، مازندران، ایران محمد ملاعلی پور *

چکىدە

در این مقاله ورقهای دایرهای و حلقوی مدرج تابعی با تغییرات پلهای ضخامت بررسی گردیدهاند. تحلیل خمشی بوسیله یک حل دقیق جدید و بر اساس تئوری برشی مرتبه اول برای ورقهای پلهای با شرایط مرزی مختلف انجام شده است. ورقهای پلهای به چندین بخش با ضخامت ثابت تقسیم گردیدهاند. معادلات حاکم برای هریک از قسمتها بصورت مجزا نوشته شده، سپس شرایط پیوستگی مربوط به جابجاییها و نیروها در بین بخشهای مختلف اعمال شده است. براساس حل دقیق ارائه شده، ورقهای نامتقارن عرضی متشکل از قسمتهای پلهای متنوع قابل تحلیل میباشد. بارگذاری بر روی هر قسمت دلخواهی از ورق میتواند اعمال شود. خواص مکانیکی هر یک از قسمتها میتواند متفاوت باشد. همچنین نحوه تغییرات خواص برای هر قسمت میتواند بصورت مجزا در نظر گرفته شود. با توجه به اینکه نتایج تحلیل خمشی برای ورقهای دایرهای یا حلقوی پلهای تاکنون گزارش نشده است بنابراین دقت نتایج حاصل از حل دقیق پیشنهادی با مقایسه آنها با نتایج حل المان محدود سهبعدی استخراج شده توسط نرمافزار ABAQUS بررسی شده است. مطابقت مناسبی بین نتایج حل دقیق ارائه شده و نرمافزار آباکوس قابل مشاهده است. **واژههای کلیدی:** ورقهای پلهای، حل دقیق، تحلیل خمشی، تئوری ورق.

Bending Analysis of FG Circular and Annular Plates with Stepped Thickness Variations by Using a New Exact closed form Solution

Department of Mechanical Engineering, University of Mazandaran, Mazandaran, Iran M. Molla-Alipour

Abstract

In this paper, FG circular and annular plates with stepped thickness variations is examined. Bending analysis was performed for stepped plates with various boundary conditions by using a new exact solution based on the FSDT. Stepped plates are divided into multiple constant thickness segments. Governing equations are written for each segment, individually. Then, continuity conditions of displacements and forces are imposed between various segments. Based on the presented exact solution, transverse asymmetric plates with various stepped segments may be analyzed. Loads may be imposed on arbitrary parts of plates. Mechanical properties of each segment may be different. Also, variations of properties of each segment may be determined, individually. Results of bending analyses for the stepped circular/annular plates have not been reported yet, so accuracy of the results of the proposed exact solution is verified by comparing the results with those of the three-dimensional finite element extracted from the ABAQUS software. A good agreement is noticed between present exact solution and ABAQUS results.

Keywords: Stepped plates, Exact Solution, Bending analysis, Plate theory.

۱– مقدمه

بمنظور بهینهسازی استحکام و وزن ورقها، استفاده از ورقهایی با تغییرات پلهای ضخامت کاربردهای ویژهای در صنایع مختلف دارند. از سوی دیگر در برخی کاربردهای خاص، این ورقها باید بصورت پلهای ساخته شوند. با این وجود مطالعات انجام شده بر روی این نوع ورقها محدود بوده و عمدتا مربوط به ارتعاش آزاد ورق هایی با تغییرات ضخامت یا شرایط مرزی خاص میباشند. لذا تحلیل و بررسی این نوع ورقها و همچنین توسعه روشهای مختلف تحلیل از اهمیت ویژای برخوردار هستند.

هانگ و همکاران [1] ارتعاش آزاد ورق دایرهای پلهای را بررسی کردند. در این مطالعه ورق دایرهای بصورت کامل با شرایط مرزی آزاد در نظر گرفته شده است که دارای یک ناپیوستگی ضخامت میباشد. در این مطالعه دو حالت مورد تحلیل قرار گرفته است در حالت اول ضخامت نواحی داخلی و در حالت دوم ضخامت نواحی خارجی بیشتر

میباشد. زیانگ و ژانگ [۲] با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول، ارتعاش آزاد ورق دایرهای کامل با تعداد ناپیوستگی دلخواه را مورد مطالعه قرار دادند. حسینی هاشمی و همکاران [۳] ارتعاش آزاد ورق دایرهای پلهای مدرج تابعی را با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول مورد بررسی قرارد دادند. در مطالعه انجام شده از حل دقیق معادلات حاکم بر مبنای توابع پتانسیل و روش جداسازی متغیرها استفاده گردید و ورقهای دایرهای و حلقوی مورد بررسی قرار گرفت. با استفاده روش مربعات ديفرانسيل (DQM)^۲ و بر اساس تئوري كلاسيك ورق، وو و همکاران [۴] به تحلیل ارتعاش آزاد ورق دایرهای پلهای پرداختند. دوانا و همکاران [۵] ارتعاش آزاد ورق دایرهای پلهای همگن که از دو قسمت تشکیل شده است را بررسی کردند. ماشات و زنکور [۶] با استفاده از تئوری کلاسیک ورق، خمش قطاعی از ورق حلقوی که ضخامت آن در

^{*} نويسنده مكاتبه كننده، آدرس پست الكترونيكي: m.mollaalipour@umz.ac.ir تاریخ دریافت: ۹۴/۱۱/۲۲

¹ Functionally graded

² Differential Quadrature Method

تاريخ پذيرش: ۹۵/۱۰/۰۲

راستای شعاع بصورت یکنواخت تغییر میکند مورد بررسی قرار دادند. خمش ورق دایرهای متقارن با تغییرات یکنواخت ضخامت بنحوی که ورق در راستای عرضی نیز متقارن باشد توسط ویویو و وولو [۷] با استفاده از تئوری کلاسیک تحلیل گردید. با استفاده از حل تحلیلی مبتنی بر سریهای توانی، تحلیلهای متنوعی برروی ورقهای دایرهای متقارن محوری که ضخامت آنها در راستای شعاعی بصورت یکنواخت تغییر می کند انجام شده است. بر این اساس و با استفاده تئوری برشی مرتبه اول، على پور و شرعيات تحليل هاى كمانش [٨ و ٩]، ارتعاش آزاد [۱۱] و خمش [۱۲] را مورد بررسی قرار دادند. همچنین شرعیات و على پور [1۳] آناليز مودال ورق هاى مستقر بر بستر الاستيك را مورد بررسی قرار دادند. با استفاده از تئوری کلاسیک ورق و روش سریهای توانی نیز ارتعاش آزاد ورق های دایرهای با ضخامت متغیر یکنواخت توسط شرعیات و علی پور [۱۴ و ۱۵]، شرعیات و همکاران [۱۶] و علی-پور و همکاران [۱۷] مورد مطالعه قرار گرفته است. کارتونن و همکاران [۱۸] یک حل الاستیسیته برمبنای روش اجزای محدود برای تحلیل خمشی ورق های حلقوی ارائه کردند. و خمش ورق هایی همگن با ضخامت ثابت و وجود ۲ ناپیوستگی خواص در راستای شعاع مورد بررسی قرار گرفت. لاماکچیا و همکاران [۱۹] با استفاده از تئوری کلاسیک ورق، خمش غیرخطی ورقهای حلقوی با شرایط مرزی آزاد که تحت یک گشتاور خمشی محیطی قرار دارند را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیل مورد بررسی قرار دادند. مهرابیان و گلمکانی [۲۰] با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول خمش غیرخطی قطاعی از دایره که در راستای شعاعی تقویت شده است را بررسی کردند. با استفاده از تئوری کلاسیک ورق، هانگ و لی [۲۱] اثر نیروی محوری بر روی خمش ورق دایرهای متقارن و همگن که توسط حلقههایی تقویت شده-اند را مطالعه کردند.

بررسی مطالعات انجام شده توسط محققین مختلف نشان میدهد با وجود اینکه مطالعات گستردهای برروی ورقهای دایرهای ضخامت متغیر انجام شده است اما اکثر تحلیلها مربوط به ورقهایی است که ضخامت آنها بصورت یکنواخت تغییر کرده و در راستای عرضی متقارن باشند. از سوی دیگر اکثر مطالعاتی که بر روی ورقهای دایرهای با تغییرات پلهای ضخامت صورت گرفته نیز مربوط به ورقهای متقارن عرضی میباشد که ارتعاش آزاد این ورقها را بررسی میکند.

در این مقاله با استفاده از یک حل دقیق جدید و بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۱، خمش ورقهای دایرهای و حلقوی مدرج تابعی با تغییرات پلهای ضخامت مورد مطالعه قرار گرفته است. بدین منظور ورق پلهای بصورت چندین ورق ضخامت ثابت در نظر گرفته شده است که پیوستگیهای تنش و جابجایی در محل تماس قسمت-های مختلف اعمال گردیده است. حل دقیق ارائه شده دارای قابلیتهای مختلفی میباشد که با استفاده از این حل دقیق، ورقهای متقارن یا نامتقارن عرضی قابل تحلیل بوده، ترکیبهای مختلف شرایط مرزی میتواند تحلیل گردد، بارگذاری بر روی هر قسمت دلخواهی از ورق میتواند اعمال شود و خواص مکانیکی هر یک از قسمتها و همچنین نحوه تغییرات خواص برای هر قسمت میتواند بصورت مستقل و متفاوت از دیگر قسمتها تعیین گردد.

برای بررسی صحت و دقت حل دقیق پیشنهادی لازم است تا نتایج حاصله با نتایج مربوط به یک حل معتبر و دقیق مقایسه گردد. با توجه به اینکه تاکنون نتایجی برای خمش ورقهای دایرهای یا حلقوی پلهای گزارش نشده است دقت نتایج حاصل از حل دقیق پیشنهادی با مقایسه آنها با نتایج حل المان محدود سهبعدی استخراج شده توسط نرمافزار ABAQUS مورد ارزیابی قرار گرفته است که نشان دهنده دقت مناسب حل ارائه شده با وجود هزینه محاسباتی بسیار پایین آن می-باشد.

۲- معادلات حـاکم بـر ورق دایـرهای پلـهای و حـل دقیق آنها

برای تحلیل ورقهای دایرهای و حلقوی با تغییرات پلهای ضخامت، ابتدا معادلات حاکم برای هر یک از قسمتها نوشته شده است. سپس با برقراری شرایط پیوستگی جابجایی و نیرویی در محل تماس قسمتهای مختلف و همچنین اعمال شرایط تکیهگاهی، معادلات دیفرانسیل حاکم حل گردیده و توابع جابجایی در هر قسمت استخراج خواهد شد.

با نوشتن معادلات حاکم برای ورقهای دایرهای براساس تئوری برشی مرتبه اول [۲۲ و ۲۳]، میتوان معادلات هر یک از قسمتها را بصورت زیر بیان کرد. بالانویس i بیانگر قسمتهای مختلف ورق میباشد.



شکل ۱- پارامترهای هندسی و بارگذاری ورقهای پلهای

$$A^{(i)}\left(u_{0,rr}^{(i)} + \frac{u_{0,r}^{(i)}}{r} - \frac{u_{0}^{(i)}}{r^{2}}\right) +$$

$$B^{(i)}\left(\psi_{r,rr}^{(i)} + \frac{\psi_{r,r}^{(i)}}{r} - \frac{\psi_{r}^{(i)}}{r^{2}}\right) = 0$$
(1)

¹ First order Shear Deformation Theory

محمد ملاعلى يور

سپس با جایگذاری رابطه (۷) در روابط (۱) و (۲) و با دوبار انتگرالگیری از این روابط، معادلات جبری زیر حاصل خواهند شد:

$$A^{(i)}u_0^{(i)} + B^{(i)}\psi_r^{(i)} = K_1^{(i)}r + \frac{K_2^{(i)}}{r}$$
(λ)

$$B^{(i)}u_0^{(i)} + D^{(i)}\psi_r^{(i)} = q^{(i)}\frac{r^3}{16} +$$

$$\frac{K_3^{(i)}}{2}r\left(Ln(r) - \frac{1}{2}\right) + K_4^{(i)}r + \frac{K_5^{(i)}}{r}$$
(9)

با حل معادلات (۸) و (۹) توابع جابجایی u_0 و ψ_r محاسبه

$$u_{0}^{(i)} = \frac{B^{(i)}}{B^{(i)^{2}} - A^{(i)} D^{(i)}} \left[q^{(i)} \frac{r^{3}}{16} + K_{4}^{(i)} r + \frac{K_{5}^{(i)}}{r} \right]$$

$$\frac{K_{3}^{(i)}}{2} r \left(Ln(r) - \frac{1}{2} \right) - \frac{D^{(i)}}{B^{(i)}} \left(K_{1}^{(i)} r + \frac{K_{2}^{(i)}}{r} \right) \right]$$

$$\psi_{r}^{(i)} = \frac{A^{(i)}}{D^{(i)} A^{(i)} - B^{(i)^{2}}} \left[q^{(i)} \frac{r^{3}}{16} + K_{4}^{(i)} r + \frac{K_{5}^{(i)}}{r} + \frac{K_{5}^{(i)}}{r} + \frac{K_{3}^{(i)}}{2} r \left(Ln(r) - \frac{1}{2} \right) - \frac{B^{(i)}}{A^{(i)}} \left(K_{1}^{(i)} r + \frac{K_{2}^{(i)}}{r} \right) \right]$$

$$(11)$$

$$\begin{split} w_{,r}^{(i)} &= -\frac{A^{(i)}}{D^{(i)}A^{(i)} - B^{(i)^2}} \Biggl[\Biggl(K_4^{(i)} - \frac{B^{(i)}}{A^{(i)}} K_1^{(i)} \Biggr) \frac{r^2}{2} + \\ q^{(i)}\frac{r^4}{64} + \frac{K_3^{(i)}}{2}\frac{r^2}{2} (Ln(r) - 1) + K_5^{(i)}Ln(r) - \\ \frac{B^{(i)}}{A^{(i)}} K_2^{(i)}Ln(r) \Biggr] - \frac{r^2 q^{(i)}}{4\kappa^2 \overline{A}^{(i)}} + K_3^{(i)}Ln(r) + K_6^{(i)} \end{split}$$
(17)

⁽ⁱ⁾ تا ⁽ⁱ⁾ گوابت حاصل از انتگرالگیری هستند. بطور کلی برای ورق با m قسمت که دارای ضخامت یا بارگذاری متفاوتی هستند ۶m ثابت وجود خواهد داشت که از طریق اعمال شرایط پیوستگی و شرایط تکیهگاهی تعیین میگردند.

شرایط پیوستگی جابجایی و نیرویی در محل تماس قسمتهای مختلف بصورت زیر میباشد:

$$\begin{cases} u_{0}^{(i)} \\ \psi_{r}^{(i)} \\ w_{r}^{(i)} \\ N_{r}^{(i)} \\ M_{r}^{(i)} \\ Q_{r}^{(i)} \end{cases} \begin{vmatrix} u_{0}^{(i+1)} \\ \psi_{r}^{(i+1)} \\ w^{(i+1)} \\ N_{r}^{(i+1)} \\ M_{r}^{(i+1)} \\ Q_{r}^{(i+1)} \\ Q_{r}^{(i+1)} \end{vmatrix} _{r=r_{i}} \qquad i = 1, 2, ..., m-1$$

شعاع محل تماس قسمتهای مختلف (محلهای ناپیوستگی) میباشد که مولفههای جابجایی و نیرویی دو قسمت باید در این نقطه میباشد که مولفههای Q_r ، M_r ، N_r یکسان باشند. M_r ، N_r

$$B^{(i)} \Biggl(u_{0,rr}^{(i)} + \frac{u_{0,r}^{(i)}}{r} - \frac{u_{0}^{(i)}}{r^{2}} \Biggr) +$$

$$D^{(i)} \Biggl(\psi_{r,rr}^{(i)} + \frac{\psi_{r,r}^{(i)}}{r} - \frac{\psi_{r}^{(i)}}{r^{2}} \Biggr) -$$

$$\kappa^{2} \overline{A}^{(i)} \Biggl(\psi_{r}^{(i)} + w_{,r}^{(i)} \Biggr) = 0$$

$$\kappa^{2} \overline{A}^{(i)} \Biggl(\psi_{r,r}^{(i)} + w_{,rr}^{(i)} \Biggr) +$$

$$\kappa^{2} \overline{A}^{(i)} \frac{1}{r} \Biggl(\psi_{r}^{(i)} + w_{,rr}^{(i)} \Biggr) = q^{(i)}$$
(7)

مقادیر $D^{(i)}$ $B^{(i)}$ و $\overline{A}^{(i)}$ و $\overline{A}^{(i)}$ بصورت رابطه $\overline{A}^{(i)}$ مقادیر (۴) تعریف می گردند.

$$\begin{cases} A^{(i)} \\ B^{(i)} \\ D^{(i)} \end{cases} = \int_{h_b^{(i)}}^{h_t^{(i)}} \frac{E^{(i)}}{1 - v^{(i)^2}} \begin{cases} 1 \\ z \\ z^2 \end{cases} dz,$$

$$\overline{A}^{(i)} = \int_{h_b^{(i)}}^{h_t^{(i)}} \frac{E^{(i)}}{2(1 + v^{(i)})} dz$$
(f)

در حالتی که ورقهای مورد بررسی همگن باشند، رابطه (۴) برای هر یک از قسمتها میتواند بصورت زیر نوشته شود:

$$\begin{split} A^{(i)} &= \frac{E^{(i)}}{1 - v^{(i)^2}} \left(h_t^{(i)} - h_b^{(i)} \right) \\ B^{(i)} &= \frac{E^{(i)}}{2 \left(1 - v^{(i)^2} \right)} \left(h_t^{(i)^2} - h_b^{(i)^2} \right) \\ D^{(i)} &= \frac{E^{(i)}}{3 \left(1 - v^{(i)^2} \right)} \left(h_t^{(i)^3} - h_b^{(i)^3} \right) \\ \overline{A}^{(i)} &= \frac{E^{(i)}}{2 (1 + v^{(i)})} \left(h_t^{(i)} - h_b^{(i)} \right) \end{split}$$
(δ)

و برای ورقهای مدرج تابعی، این مقادیر با توجه به نحوه تغییرات خواص محاسبه خواهند شد. در این مطالعه تغییرات خواص در راستای خواص محاسبه فانون مخلوطها در نظر گرفته شده است. $E^{(i)} = (E_m^{(i)} - E_c^{(i)})V_f^{(i)}(z) + E_c^{(i)},$

$$V_{f} = \left(\frac{z - h_{b}^{(i)}}{h_{t}^{(i)} - h_{b}^{(i)}}\right)^{g^{(i)}}$$
(?)

زیرنویسهای m و c در روابط فوق نمایانگر خواص فلز و سرامیک بوده و V_f نیز نسبت حجمی فلز میباشد.

برای تحلیل ورقهای دایرهای با تغییرات پلهای ضخامت، ابتدا باید معادلات فوق برای هر یک از قسمتها حل گردیده و سپس با اعمال شرایط طبیعی مرکز ورق، شرایط پیوستگی بین هر یک از قسمتها و شرایط مرزی ثوابت مجهول تعیین گردد تا پاسخ نهایی برای هر یک از قسمتها بدست آید. بدین منظور ابتدا انتگرالگیری از رابطه (۳) رابطه زیر حاصل می شود:

$$\psi_r^{(i)} + w_{,r}^{(i)} = -\frac{rq^{(i)}}{2\kappa^2 \overline{A}^{(i)}} + \frac{K_3^{(i)}}{r}$$
(Y)

شعاعی و نیروی برشی عرضی میباشند که برای هریک از قسمتها بصورت زیر تعریف میگردند:

$$N_{r}^{(i)} = A^{(i)} \left(u_{0,r}^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{r} u_{0}^{(i)} \right) + B^{(i)} \left(\psi_{0,r}^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{r} \psi_{r}^{(i)} \right)$$
(14)

$$M_{r}^{(i)} = B^{(i)} \left(u_{0,r}^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{r} u_{0}^{(i)} \right) + D^{(i)} \left(\psi_{0,r}^{(i)} + \frac{v^{(i)}}{r} \psi_{r}^{(i)} \right)$$
(10)

$$Q_r^{(i)} = \kappa \overline{A}^{(i)} \left(\psi_r^{(i)} + w_r^{(i)} \right) \tag{19}$$

بدین ترتیب (۱-m)۶ شرط پیوستگی وجود خواهد داشت. شرایط تکیهگاهی ورق نیز برای شعاع داخلی قسمت (۱) و شعاع خارجی قسمت (m) اعمال می گردد.

شرایط مرزی گیردار، ساده و آزاد به ترتیب توسط روابط (۱۷) تا (۱۹) نشان داده شدهاند.

$$u_0 = 0, \quad \psi_r = 0, \quad w = 0,$$
 (17)

$$u_0 = 0, \quad M_r = 0, \quad w = 0,$$
 (1A)

$$N_r = 0, \ M_r = 0, \ Q_r = 0,$$
 (19)

برای ورق حلقوی شرایط تکیه گاهی برای مرزهای داخلی و خارجی باید برقرار گردد و برای ورق دایرهای کامل شرایط تکیه گاهی برای مرز خارجی و شرایط تقارن در مرکز ورق اعمال می گردد. به علت شرایط تقارن در مرکز ورق باید جابجایی شعاعی، شیب و نیروی برشی عرضی در آن صفر باشند:

$$u_0 = 0, \quad w_{,r} = 0, \quad Q_r = 0,$$
 (7.)

۳ شرط تکیهگاهی در مرز خارجی به همراه ۳ شرط تکیهگاهی در مرز داخلی ورق حلقوی و یا ۳ شرط تقارن در مرکز ورق داخلی وجود دارد که با اعمال آنها به همراه شرایط پیوستگی، ۶*m* رابطه جهت یافتن ثوابت در دسترس می باشد.

۳- نتايج و بحث

در این قسمت نتایج مربوط به خیز ورقهای دایرهای و حلقوی مدرج تابعی با تغییرات پلهای ضخامت ارائه شده است. نتایج برای ورق-های مدرج تابعی که خواص سطح رویین از جنس فلز آلومینیوم (E=70 GPa) بوده و بصورت خطی بتدریج به سرامیک (GPa) (GPa) در سطح زیرین میرسد ارائه شدهاند. در واقع نحوه تغییرات خواص طبق رابطه (۶) بصورت زیر خواهد بود.

$$E^{(i)} = 168 - 98 \left(\frac{z - h_b^{(i)}}{h_t^{(i)} - h_b^{(i)}} \right) GPa$$
(7)

ضرایب پواسون برای فلز و سرامیک ۰/۳ لحاظ شده و در تمامی حالات شعاع خارجی ورق ۱ میباشد. برای بررسی دقت و صحت نتایج حاصل از حل دقیق ارائه شده، نیاز است تا نتایج حاصله با نتایج بسیار

دقیق و معتبر مقایسه گردد. با توجه به اینکه تاکنون نتایجی در رابطه با خمش ورق های دایره ای یا حلقوی با تغییرات پله ای ضخامت ارائه نشده است. نتایج بدست آمده با نتایج حاصل از حل المان محدود سهبعدی (بعنوان یکی از دقیق ترین روش ها) که توسط نرم افزار ABAQUS استخراج گردیده، مقایسه شده است. در این قسمت ابتدا خیز ورق های دایره ای مدرج تابعی با شکل های هندسی و بارگذاری های مختلف بررسی شداند. سپس ورق های حلقوی با شرایط تکیه گاهی متنوع مورد مطالعه قرار گرفته اند.

بمنظور مدلسازی ورق هدفمند در نرمافزار ABAQUS که خواص در راستای ضخامت ورق تغییر می کند ابتدا ضخامت ورق به بخشهای مختلفی تقسیم شده و با توجه به چگونگی تغییرات خواص، جنس هر قسمت تعیین گردیده است. جهت اطمینان از دستیابی به پاسخ دقیق برای مواد هدفمند، تعداد بخشها بگونهای تعیین شد که با افزایش آنها تغییری در پاسخ بوجود نیاید. در مثالهای ارائه شده ضخامت هر بخش ۲۰۰۵ لحاظ شده است یعنی ضخامت ۲۱۰ ورق توسط ۲۰ بخش و جنس مختلف مدل گردیده است. از المانهای متقارن محوری مربعی با ۸ گره ((CAX8R) جهت مدلسازی اجزای محدود استفاده شده است که تعداد المانها نیز ۱۵۰۰ میباشد.

در شکل ۲ خیزهای ورق دایرهای پلهای با تکیهگاههای گیردار و ساده که دارای یک ناپیوستگی در ضخامت میباشند نشان داده شده است. ضخامت نواحی داخلی و خارجی به ترتیب ۱/۱ و ۲/۲ بوده و شعاع ناحیه داخلی (شعاع محل تماس) ۱/۵ میباشد. در این شکلها خیزهای ورق تحت نیروی گسترده ۱ مگاپاسکال برای ۳ حالت مختلف در محل اعمال بارگذاری نشان داده شده است.

۱) حالتی که تمام ورق تحت بارگذاری باشد.

۲) حالتی که تنها ناحیه داخلی تحت بارگذاری باشد.

۳) حالتی که تنها ناحیه خارجی تحت بارگذاری باشد.

مشاهده میگردد که برای ورق گیردار، تنها در نواحی بسیار کوچک در نزدیکی تکیهگاه خیز حالت دوم و سوم بسیار به یکدیگر نزدیک میباشند و در بقیه نواحی، خیز حاصل از بارگذاری حالت دوم اختلاف زیادی با خیز حاصل از بارگذاری حالت سوم دارد. اما برای ورق با تکیهگاه ساده، اختلاف خیزهای ناشی از بارگذاریهای حالات دوم و سوم چندان شدید نمیباشد. در واقع در نزدیکی تکیهگاه، خیز حاصل از حالت سوم اندکی بیشتر بوده و نواحی مرکزی ورق خیز حاصل از حالت دوم اندکی بزرگتر است. قابل ذکر است که نیروی برآیند حاصل از بارگذاری حالت سوم سه برابر حالت دوم است.

در شکلهای ۳ و ۴ خیزهای ورق دایرهای پلهای با تکیهگاه گیردار که دارای دو ناپیوستگی در ضخامت میباشند نشان داده شده است. خیزهای نشان داده شده در این شکلها مربوط به ورق تحت نیروی ثابت ۲۸۳kN میباشد که این نیرو بر روی ناحیه داخلی و در سه سطح مختلف با شعاعهای ۲۰۱، ۲/۰ و ۲/۰ توزیع شده است. در شکل ۳ ضخامت ورق در نزدیکی تکیهگاه افزایش مییابد که شعاع محلهای ناپیوستگی ۲/۰ و ۲/۰ بوده و ضخامت نواحی داخلی، میانی و خارجی بترتیب ۲/۰، ۵/۱۰ و ۲/۰ میباشد که ضخامت ورق در نزدیکی تکیهگاه تاپیوستگی ۳/۰ و ۲/۰ میباشد که ضخامت ورق در نزدیکی تکیهگاه کاهش مییابد ضخامتهای نواحی داخلی، میانی و خارجی بترتیب ۲/۰، ۵/۱۰ و ۲/۰ میباشند.







شکل ۴- خیز ورق دایرهای پلهای گیردار با دو ناپیوستگی ضخامت و کاهش ضخامت در نزدیکی تکیهگاه

در شکل ۵ خیز ورق نامتقارن عرضی با دو ناپیوستگی ضخامت در شعاعهای ۱/۳ و ۱/۶ نشان داده شدهاند. سطح رویین ورق مورد بررسی در این شکل بصورت پلهای بوده و سطح زیرین مسطح می،اشد. ضخامت ورق در نزدیکی تکیهگاه کاهش مییابد که ضخامتهای نواحی داخلی، میانی و خارجی بترتیب ۲/۰، ۱/۱۰ و ۱/۱ می،اشند. خیزهای نشان داده شده در این شکل برای ورق تحت نیروی ثابت می،اشد که در نواحی مختلفی توزیع شدهاند.

- ۱) حالتی که تمام ورق تحت بارگذاری باشد.
- ۲) حالتی که تنها ناحیه میانی تحت بارگذاری باشد.
- ۳) حالتی که تنها ناحیه خارجی تحت بارگذاری باشد.



شکل ۲- خیز ورق دایرهای پلهای با یک ناپیوستگی ضخامت در شعاع ۸/۵ و با تکیهگاه (الف) گیردار و (ب) ساده

با مقایسه شکلهای ۳ و ۴ مشخص است که با محدودتر شدن ناحیه بارگذاری در مرکز ورق، خیز نواحی مرکزی افزایش یافته ولی خیزهای مختلف در نزدیکی تکیهگاهها تفاوت چندانی ندارند. همچنین میتوان دریافت برای ورقی که ضخامت آن در نزدیکی تکیهگاه افزایش مییابد، سطح ناحیه بارگذاری در مرکز ورق تاثیر بیشتری بر خیزهای مرکز ورق دارد.



ناپیوستگی ضخامت و کاهش ضخامت در نزدیکی تکیهگاه

در شکلهای ۱ تا ۵، مقایسه نتایج حاصل از حل دقیق با نتایج حاصل از حل المان محدود سهبعدی نشان میدهد که برای شرایط مختلف بارگذاری و شکلهای هندسی مختلف متقارن و نامتقارن عرضی، حل ارائه شده از دقت بسیار مناسبی برخوردار است.

بمنظور بررسی حل دقیق ارائه شده برای ورقهای حلقوی مدرج تابعی، خیز مربوط به این ورقها با ترکیبهای مختلف شرایط مرزی در شکلهای ۶ و ۷ ارائه شدهاند. ورق مورد بررسی در این شکلها دارای ۴ ناحیه با ضخامتهای مختلف بوده و شعاع ناحیه داخلی ۲/۰ میباشد. شعاع محلهای ناپیوستگی ۴/۰، ۶/۰ و ۸/۰ بوده و ضخامتهای نواحی داخلی تا خارجی بترتیب ۵۰/۰، ۱/۰، ۱/۰ و ۲/۰ میباشد. خیزهای نشان داده شده مربوط به ورق تحت نیروی ثابت میباشد که در سه ناحیه مختلف توزیع شده است. در شکل ۶ ورق با مرز داخلی گیردار و مرز خارجی گیردار و آزاد نشان داده شده است. در شکل ۷ ورق با مرز خارجی گیردار و مرز داخلی ساده و آزاد ارائه شده است.

مشاهده میشود چنانچه بار گسترده بر تمام ورق حلقوی گیردار-گیردار و ساده-گیردار (شرط مرزیی که ابتدا بیان شده، مربوط به مرز داخلی میباشد) اعمال شود، خیز بیشینه در نزدیکی مرز داخلی ایجاد خواهد گردید. دلیل این اتفاق نیز به علت ضخامت کمتر نواحی داخلی و همچنین طول کمتر تکیهگاه در شعاع داخلی میباشد. مقایسه نتایج حاصل از حل دقیق و المان محدود سهبعدی نشان میدهد که حل ارائه شده برای ورقهای حلقوی پلهای با ترکیبات مختلف شرایط مرزی که دارای چهار ناحیه با ضخامتهای مختلف بوده و نسبت ضخامت ناحیه خارجی چهار برابر ناحیه داخلی است نیز از دقت بسیار مناسبی برخوردار است.



شکل ۶- خیز ورق حلقوی با سه ناپیوستگی ضخامت با تکیهگاه داخلی گیردار و تکیهگاه خارجی (الف) گیردار و (ب) آزاد





شکل ۸- (الف) مشتق اول (شیب) و (ب) مشتق دوم خیز ورق حلقوی با سه ناپیوستگی ضخامت با تکیهگاه خارجی گیردار و تکیه-گاه داخلی گیردار، ساده و آزاد

با توجه به اینکه این اختلاف در ابعاد کلی نمودار قابل مشاهده نمی-باشد برای دو حالت بصورت دقیقتر و با بزرگنمایی مشخص شده است. همانطور که قابل انتظار نیز میباشد مشتق دوم خیز در محل تماس قسمتهای مختلف کاملا متفاوت میباشد.

۴- نتیجه گیری و جمع بندی

در این مقاله برای اولین بار تحلیل خمشی ورقهای دایرهای و حلقوی مدرج تابعی با تغییرات پلهای ضخامت از طریق یک حل فرم بسته دقیق ارائه شده است. حل ارائه شده دارای قابلیتهای متعددی از قبیل تعیین دلخواه محل بارگذاری، تعیین جنس و یا نحوه تغییرات متفاوت خواص برای نواحی مختلف، تحلیل ورقهای نامتقارن عرضی و تحلیل ورق با ترکیبات مختلف شرایط مرزی میباشد. جهت بررسی صحت و روشها (روش المان محدود سهبعدی) مقایسه گردید و مشاهده گردید که نتایج بدست آمده برای ورقهای نسبتا ضخیم با ناپیوستگیها و شرایط مرزی مختلف از دقت مناسبی برخوردار است. در واقع با استفاده



مشتق خیز یا شیب ورق (W') و مشتق دوم خیز (W') ورقی که در شکلهای ۶ و ۷ مورد بررسی قرار گرفت برای حالتی که مرز خارجی گیردار و مرز داخلی گیردار، ساده و آزاد باشد در شکل ۸ نشان داده شد. بارگذاری یکنواخت ۱ مگاپاسکال روی تمام سطوح اعمال شده است. در واقع با اعمال شرایط پیوستگی Ψ_r , W_r و Q_r , مشخص است. در واقع با اعمال شرایط پیوستگی ردارند که به علت اختلاف است که خیز ورق در محل اتصال کاملا پیوسته ولی مشتق آن دقیقا خامت و در نتیجه اختلاف ناچیزی با یکدیگر دارند که به علت اختلاف فخامت و در نتیجه اختلاف \overline{A} در دو قسمت، قابل انتظار نیز می باشد. در واقع با اعمال شرایط پیوستگی زیروی برش عرضی چنانچه در مخامت و جنس یکسان باشد. شیب در محل اتصال کاملا پیوه در محل انتظار نیز می باشد. پر می مرضی حضی چنانچه در محل اعمال شرایط پیوستگی نیروی برش عرضی چنانچه در محل اعمال نیز دقیقا برابر خواهد بود.

[13] Shariyat M. and Alipour M. M., A power series solution for vibration and complex modal stress analyses of variable thickness viscoelastic twodirectional FGM circular plates on elastic foundations. Applied Mathematical Modelling, Vol. 37, nom. 5, pp. 3063–3076, 2013.

[14] Shariyat M. and Alipour M. M., Differential transform vibration and modal stress analyses of circular plates made of two-directional functionally graded materials, resting on elastic foundations, Archive of Applied Mechanics, Vol. 81, pp. 1289-1306, 2011.

[15] Shariyat M. and Alipour M. M., A Differential Transform Approach for Modal Analysis of Variable Thickness Two-Directional FGM Circular Plates on Elastic Foundations, ISME, Vol. 11, nom. 2, pp. 15-38, 2010.

[16] Shariyat M., Jafari A. A., and Alipour M. M., Investigation of the thickness variability and material heterogeneity effects on free vibration of the viscoelastic circular plates, Acta Mechanica Solida Sinica, Vol. 26, nom. 1, pp. 83–98, 2013.

[17] Alipour M. M., Shariyat M. and Shaban M., A semi-analytical solution for free vibration and modal stress analyses of circular plates resting on two-parameter elastic foundations, J. Solid Mechanics, Vol. 2, nom. 1, pp. 63-78, 2010.

[18] Karttunen A. T., Hertzen R., Reddy J. N. and Romanoff J., Exact elasticity-based finite element for circular plates, Computers and Structures, Vol. 182, pp. 219–226, 2017.

[19] Lamacchia E., Pirrera A., Chenchiah I. V. and Weaver P. M., Non-axisymmetric bending of thin annular plates due tocircumferentially distributed moments, Int. J. Solids and Structures, Vol. 51, pp. 622–632, 2014.

[20] Mehrabian M. and Golmakani M. E., Nonlinear bending analysis of radial-stiffened annular laminated sector plates with dynamic relaxation method, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 69, nom. 10, pp. 1272–1302, 2015.

[21] Huang Y. and Li X. F., Effect of radial reaction force on the bending of circular plates resting on a ring support, Int. J. Mechanical Sciences, Vol. 119, pp. 197-207, 2016.

[22] Reissner E., The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates, ASME Journal of Applied Mechanics, Vol. 12, pp. 69–76, 1945.

[23] Mindlin R. D., Influence of Rotatory Inertia and Shear in Flexural Motions of Isotropic Elastic Plates, ASME J. of Applied Mechanics, Vol. 18, pp. 1031– 1036, 1951. از حل ارائه شده، با صرف هزینه محاسباتی بسیار پایین میتوان به تحلیل خمشی ورقهای پلهای متنوع دست یافت.

۵- مراجع

[1] Hang L. T. T., Wang C. M. and Wu T. Y., Exact vibration results for stepped circular plates with free edges, Int. J. Mechanical Sciences, Vol. 47, pp. 1224-1248, 2005.

[2] Xiang Y. and Zhang L., Free vibration analysis of stepped circular Mindlin plates, J. Sound and Vibration, Vol. 280, pp. 633–655, 2005.

[3] Hosseini-Hashemi S., Derakhshani M. and Fadaee M., An accurate mathematical study on the free vibration of stepped thickness circular/annular Mindlin functionally graded plates, Applied Mathematical Modelling Vol. 37, pp. 4147–4164, 2013

[4] Wu T. Y., Wang Y. Y. and Liu G. R., Free vibration analysis of circular plates using generalized differential quadrature rule, Computer Methods Applied Mechanic Engineering, Vol. 191, pp. 5365–5380, 2002.

[5] Duana W. H., Wang C. M. and Wang C. Y., Modification of fundamental vibration modes of circular plates with free edges, J. Sound and Vibration Vol. 317, pp. 709–715, 2008.

[6] Mashat D. S. and Zenkour A. M., Hygrothermal bending analysis of a sector-shaped annular plate with variable radial thickness, Composite Structures Vol. 113, pp. 446–458, 2014.

[8] Alipour M. M. and Shariyat M., Semi-analytical buckling analysis of heterogeneous variable thickness viscoelastic circular plates on elastic foundations, Mechanics Research Communications, Vol. 38, pp. 594-601, 2011.

[9] Alipour M. M. and Shariyat M., A semianalytical solution for buckling analysis of variable thickness two-directional functionally graded circular plates with non-uniform elastic foundations. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 139, 664-676, 2013.

[10] Alipour M. M., Shariyat M. and Shaban M., A semi-analytical solution for free vibration of variable thickness two-directional-functionally graded plates on elastic foundations, Int. J. Mechanics and Materials in Design, Vol. 6, nom. 4, pp. 293-304, 2010.

[11] Alipour M. M. and Shariyat M., A power series solution for free vibration of variable thickness Mindlin circular plates with two-directional material heterogeneity and elastic foundations. J. Solid Mechanics. Vol. 3, nom. 2, 183-197, 2011.

[12] Alipour M. M. and Shariyat M., Stress analysis of two-directional FGM moderately thick constrained circular plates with non-uniform load and substrate stiffness distributions, Journal of Solid Mechanics, Vol. 2, nom. 4, 316-331, 2010.