

بررسی رشد ترک در مواد تابعی مدرج از جنس آلومینیم-آلومینا

سوران حسنی فرد*

دانشیار، گروه مهندسی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

مهدی مرسلی

دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه لینکوپینگ، سوئد

چکیده

در این مقاله از تست خمش چهار نقطه‌ای جهت بدست آوردن مسیر رشد ترک در مواد تابعی مدرج استفاده شده است. نمونه‌های مورد آزمایش یک ماده‌ی تابعی مدرج از جنس آلومینیم و آلومینا می‌باشد. مقادیر فاکتور شدت تنش در مود یک و دو با روش انتگرال J و با کمک گرفتن از شبیه‌سازی عددی به دست آمده و از مقادیر به دست آمده‌ی K_I و K_{II} برای تخمین مسیر رشد ترک به وسیله‌ی معیارهای ماکزیمم تنش مماسی، گرادیان تنش معادل و $(K_{II})_{min}$ استفاده شده است. نتایج بدست آمده نشان داد که مقادیر بدست آمده از طریق معیارهای ماکزیمم تنش مماسی و $(K_{II})_{min}$ نزدیک مقادیر تجربی می‌باشد ولی نتایج حاصل از گرادیان تنش معادل تفاوت بسیاری با مقادیر تجربی دارد.

واژه‌های کلیدی: رشد ترک، شکست، مواد تابعی مدرج.

Investigating Crack Growth in Aluminum-alumina Functionally Graded Materials

S. Hassanifard
M. Morsali

Faculty of Mechanical Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran
Linköping University, Sweden

Abstract

In this research study, fracture behavior of Functionally Graded Materials (FGMs) is investigated. The FGM is supposed to be formed of aluminum and alumina. For experimental purposes, four point bending test was used. The results were then compared by finite element analysis. Maximum Tangential Stress (MTS), $(K_{II})_{min}$ and Gradient Equivalent Stress (GES) criteria were used to estimate crack initiation angles. Stress Intensity Factors (SIF's) were extracted from J-Integral parameters. MTS and $(K_{II})_{min}$ criteria show good agreement with experimental results, however GES method does not confirm with experimental results. The numerically calculated crack direction shows good consistency with fractured specimens.

Keywords: Crack growth, Fracture, Functionally graded materials.

واکنش آلومینیم و آهن اکسید جهت بدست آوردن کامپوزیت، $Al-Al_2O_3$ استفاده شده است [۷]. ژنگ و همکاریانش از واکنش اکسید مس و آلومینیم برای بدست آوردن کامپوزیت $Al-Al_2O_3$ استفاده کرده‌اند [۸]. با توجه به کاربرد روز افزون مواد تابعی مدرج در صنایع مختلف بررسی پدیده‌ی شکست خستگی و استاتیکی و نحوه رشد و انتشار مسیر ترک در اینگونه مواد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برای تخمین مسیر رشد ترک معیارهایی همچون $(K_{II})_{min}$ ، بیشینه نرخ آزادسازی انرژی [۹]، تنش مماسی بیشینه [۱۰]، چگالی انرژی کرنشی [۱۱] و گرادیان تنش معادل [۱۲] وجود دارند.

برای محاسبه‌ی فاکتورهای شدت تنش روش‌های گوناگونی وجود دارد که از جمله‌ی آنها می‌توان به نرخ آزاد سازی انرژی و انتگرال J اشاره کرد. از محاسبه‌ی J_I و J_{II} می‌توان برای محاسبه‌ی مدهای شکست K_I و K_{II} استفاده کرد [۱۳]. مقدار حاصل از انتگرال J مستقل از مسیر محاسبه‌ی انتگرال می‌باشد [۱۴]. مقدار انتگرال J برابر با نرخ آزادسازی انرژی می‌باشد. از روش انتگرال J می‌توان برای محاسبه‌ی شکست در ناحیه‌ی پلاستیک با اعمال محدودیت‌هایی استفاده نمود.

در تحقیقی که توسط شیخی و همکاریانش در سال ۲۰۱۵ انجام شده، فاکتورهای شدت تنش برای ترک‌های سه‌بعدی در مواد تابعی مدرج تحت اثر مود ترکیبی شکست، توسط روش المان محدود توسعه یافته بدست آمده‌اند. نتایج تحقیق نشان داده است که استفاده از

۱- مقدمه

مواد تابعی مدرج جزو کامپوزیت‌های پیشرفته می‌باشند که برای اولین بار در سال ۱۹۸۰ توسط ژاپن و در صنایع هوا فضا مورد استفاده قرار گرفتند [۱]. این نوع کامپوزیت‌ها به دلیل داشتن ویژگی‌های متنوع و داشتن خواص متفاوت چندین ماده بسیار مورد توجه محققین قرار گرفته‌اند. استفاده از مواد تابعی مدرج باعث کم‌تر شدن تنش سطحی بین اجزاء کامپوزیت می‌شود و این به دلیل تغییر آهسته ضریب انبساط حرارتی در طول گرادیان مواد تابعی مدرج می‌باشد. روش‌های متعددی برای ساخت مواد تابعی مدرج پیشنهاد شده است که از جمله‌ی آنها می‌توان به متالورژی پودر [۲، ۳]، ریخته‌گری گریز از مرکز [۴] و واکنش‌های شیمیایی [۵] اشاره نمود.

از روش‌های ساخت کامپوزیت آلومینیم-آلومینا به روش واکنش‌های شیمیایی می‌توان به تحقیقات مایتی و همکاریانش اشاره کرد [۶]. آنها در این آزمایش از واکنش آلومینیم و TiO_2 جهت بدست آوردن کامپوزیت $Al-Al_2O_3$ استفاده کرده‌اند. در آزمایش دیگری که توسط مایتی و همکاریانش انجام شده از

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: hasanifard@tabrizu.ac.ir

گرادیان تنش معادل ون مایرز در حال کاهش باشد. گرادیان تنش معادل به صورت زیر می‌باشد:

$$Gr = -\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial r} \quad (5)$$

معادلات زیر برای یافتن مسیر رشد ترک باید صادق باشد.

$$\frac{\partial Gr}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 Gr}{\partial \theta^2} \leq 0 \quad (6)$$

راستای رشد ترک را می‌توان از معادله‌ی زیر پیدا کرد:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3}{2}K_I^2 - \frac{9}{2}K_{II}^2\right) \sin(2\theta) - [(1-2\nu)^2 K_I^2 \\ & + (v^2 + v - 1)K_{II}^2] \sin\theta \\ & + K_I K_{II} [3 \sin(2\theta) - 2(1-2\nu)^2 \cos\theta] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

۳-۲- روش $(K_{II})_{min}$

روش $(K_{II})_{min}$ بیان می‌کند که ترک در مسیری رشد می‌کند که مود دوم فاکتور شدت تنش صفر باشد [۹]:

$$\begin{aligned} K_{II}(\theta) = & \frac{1}{4} \left[\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] K_I \\ & + \frac{1}{4} \left[\cos \frac{\theta}{2} + 3 \cos \frac{3\theta}{2} \right] + \sin(2\theta) \sqrt{\frac{\pi r_c}{2}} T \end{aligned} \quad (8)$$

با قرار دادن معادله فوق برابر صفر، زاویه رشد ترک مشخص می‌شود. انتگرال J برای اولین بار توسط چرپانوف و رایس معرفی شده است که می‌توان گفت یکی از پارامترهای مکانیک شکست می‌باشد. مقدار این انتگرال برابر با نرخ آزادسازی انرژی (G) می‌باشد [۱۹، ۱۸]. انتگرال J یک انتگرال بر روی یک کانتور بسته مانند آنچه در شکل ۲ نشان داده شده و مقدار انتگرال مستقل از شکل کانتور است که مقدار آن از معادله‌ی (۹) بدست می‌آید [۲۰].

$$\begin{aligned} J_k = & \int (W n_k - \sigma_{ij} n_j U_{ik}) ds = 0, \\ W = & \int \sigma d\epsilon : K = 1, 2 \end{aligned} \quad (9)$$

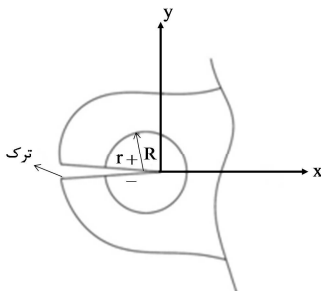
در حالت کلی می‌توان J را به صورت معادله‌ی (۱۰) نوشت:

$$J = J_I + J_{II} \quad (10)$$

از طریق J_I و J_{II} می‌توان مقدار K_I و K_{II} را با استفاده از روابط زیر بدست آورد [۱۳]:

$$J_I = \frac{1}{E^*} (K_I^2 + K_{II}^2) \quad (11)$$

$$J_{II} = -\frac{2}{E^*} (K_I \cdot K_{II}) \quad (12)$$



شکل ۲- کانتور در نزدیکی ترک برای محاسبه‌ی انتگرال J

۳- آزمون تجربی

پودر آلومینیم با دانه‌بندی ۱۸۰nm و پودر آلومینا با دانه‌بندی ۳۰۰nm تهیه شد. سپس این نمونه‌ها با درصد‌های مشخص شده در

روش المان محدود توسعه یافته از دقت کافی برای تجزیه و تحلیل مسائل مود ترکیبی شکست در اینگونه مواد برخوردار است [۱۵].

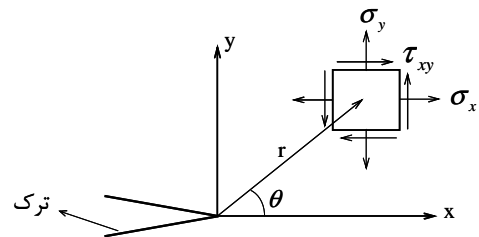
در مقاله حاضر، از روش‌های تنش مماسی بیشینه، $(K_{II})_{min}$ و گرادیان تنش معادل برای تخمین مسیر رشد ترک استفاده شده است. هدف اصلی این مقاله تعیین مسیر رشد ترک در مواد تابعی مدرج آلومینیم-آلومینا توسط تست خمش چهار نقطه‌ای می‌باشد. برای مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش‌های عددی، از نتایج تست‌های آزمایشگاهی استفاده شده است.

۲- مبانی تئوری

۲-۱- روش تنش مماسی بیشینه

روش تنش مماسی بیشینه اولین بار توسط سیه و اردوگان ارائه شده است [۱۶]. این روش بیان می‌کند که ترک در راستایی رشد خواهد کرد که میزان تنش مماسی به بیشترین مقدار خود برسد برای تحقق یافتن این شرط باید معادلات (۱) برقرار باشند. در شکل ۱ مقادیر تنش در مختصات استوانه‌ای و در نزدیکی ترک به صورت طرحواره نشان می‌دهد.

$$\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta^2} < 0 \rightarrow \theta = \theta_0 \quad (1)$$



شکل ۱- مقادیر تنش در نزدیکی ترک در مختصات استوانه‌ای

رابطه‌ی تنش مماسی با فاکتورهای شدت تنش به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta\theta} = & \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[K_I \cos \frac{\theta}{2} - \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \right] + T \sin^2 \theta \\ & + O(r^{\frac{1}{2}}) \end{aligned} \quad (2)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲) در رابطه‌ی (۱) به نتایج زیر می‌رسیم.

$$\begin{aligned} [K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1)] \\ - \frac{16T}{3} \sqrt{2\pi r_c} \cos \theta_0 \sin \frac{\theta_0}{2} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه‌ی (۳) اگر از مقدار تنش T صرف نظر کنیم رابطه‌ی

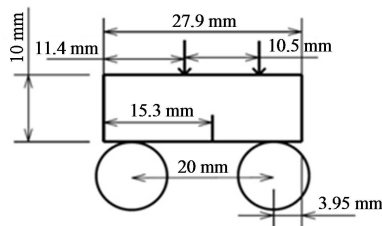
بدست آمده معیار تنش مماسی بیشینه خواهد بود:

$$[K_I \sin \theta_0 + K_{II} (3 \cos \theta_0 - 1)] = 0 \quad (4)$$

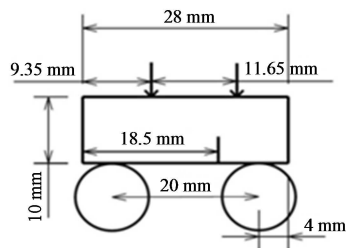
اسمیت و همکارانش نقش تنش T را برای اولین بار مورد بررسی قرار دادند و روش تنش مماسی بیشینه بهبود یافته را معرفی کرده‌اند [۱۷]. آلیها و همکارانش نقش تنش T را در رشد ترک بررسی کرده‌اند [۱۰].

۲-۲- روش گرادیان تنش معادل

روش گرادیان تنش معادل اولین بار توسط فنگ و زو ارائه شده است [۱۲]. مطابق این روش ترک در مسیری رشد می‌کند که بیشینه

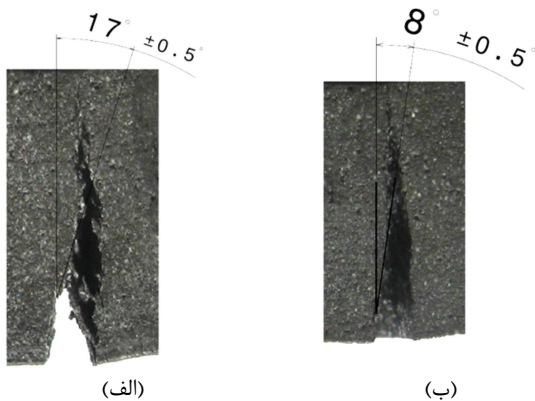


شکل ۵- شرایط مرزی و شرایط بارگذاری آزمایش اول



شکل ۶- شرایط مرزی و شرایط بارگذاری آزمایش دوم

شکل ۷ نمونه‌های آزمایش شده در تست خمش چهار نقطه‌ای را نشان می‌دهد. شکل ۷(الف) مربوط به آزمایش اول و شکل ۷(ب) مربوط به آزمایش دوم می‌باشد.



شکل ۷- مسیر رشد ترک در الف- آزمایش اول ب- آزمایش دوم

۴- شبیه‌سازی عددی

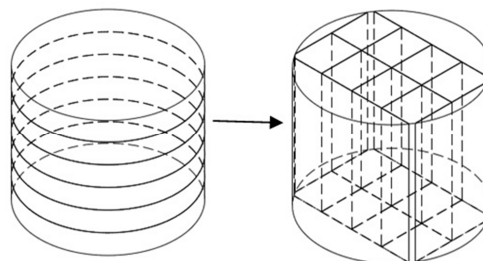
برای حل عددی مسأله از نرم افزار اجزای محدود Ansys استفاده شده است. نوع المان مورد استفاده، Plane 82 با شرایط کرنش صفحه‌ای و اعمال ضخامت صفحه مورد نظر می‌باشد. به دلیل اینکه تغییر خصوصیات مکانیکی مواد در راستای گرادیان و اعمال این خصوصیات و نیز رشد ترک، مسائل پیچیده‌ای هستند، برای رفع این مشکل و اعمال خصوصیات گرادیانی مدل، با استفاده از کدنویسی در نرم افزار Ansys، مدول الاستیسیته تابعی از دما فرض گردید و دما تابعی از مؤلفه‌ی X مختصات دکارتی معرفی شد. لازم به ذکر است که این روش صرفاً برای تعریف خصوصیات گرادیانی مدل مورد استفاده قرار گرفته و تحلیل گرمایی مد نظر نیست. مشخصات مربوط به آلومینیم و آلومینا در جدول ۱ ذکر شده است.

شکل ۳ تهیه شدند. نمونه‌ها برای ترکیب یکنواخت در دور ۱۸۰ rpm به مدت یک ساعت قرار گرفتند. نمونه‌ها پس از آماده شدن و ترکیب یکنواخت در داخل ماتریس ریخته شدند.

100% Al
90%Al+10%Al ₂ O ₃
80% Al +20%Al ₂ O ₃
70% Al +30%Al ₂ O ₃
60% Al +40%Al ₂ O ₃
50% Al +50%Al ₂ O ₃

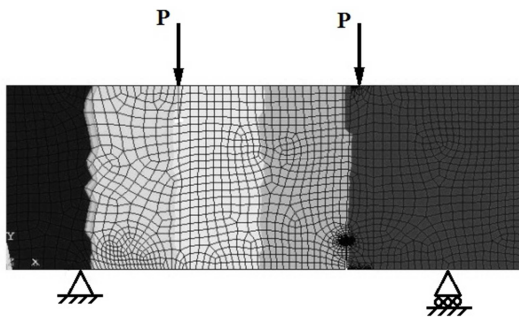
شکل ۳- نحوه‌ی تغییر گرادیان در طول ماده تابعی مدرج از جنس آلومینیم - آلومینا

سپس نمونه با استفاده از دستگاه تست کشش-فشار پنج‌تایی آملسر تحت فشار ۲۵ تن قرار گرفت. برای خروج آسان نمونه‌ها از ماتریس از روغن گرانیث در دیواره‌های ماتریس استفاده شد. نمونه‌ی پرس شده توسط بیرون انداز از ماتریس خارج شد. سپس نمونه‌ها در دمای ۶۸۰ °C به مدت یک ساعت زینتر شدند تا تف جوشی در نمونه‌ها شکل گیرد. نمونه‌ها مطابق شکل ۴ توسط وایرکات به چندین قسمت تقسیم شدند. نمونه‌های سالم با ایجاد یک ناچ مورد آزمایش قرار داده شد.



شکل ۴- نحوه‌ی برش ماده تابعی مدرج با دستگاه برش سیمی

از تست خمش چهار نقطه‌ای برای آزمایش نمونه‌ها استفاده شده است. برای این کار از یک جیگ برای اعمال شرایط تکیه‌گاهی و فیکس کردن نمونه‌ها استفاده شد. شرایط مرزی و اندازه‌ی نمونه‌ها به صورت شماتیک در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده‌اند. لازم به ذکر است که در شکل‌های ۵ و ۶ سمت راست نمونه‌ها آلومینیم خالص بوده و با حرکت به سمت چپ، درصد آلومینا افزایش پیدا می‌کند. نمونه‌ها در شرایط بارگذاری تقریباً یکسان ولی با موقعیت متفاوت ناچ قرار گرفته‌اند. شکل ۵ شرایط بارگذاری و شرایط مرزی در آزمایش اول و شکل ۶ شرایط بارگذاری و شرایط مرزی در آزمایش دوم را نشان می‌دهد.



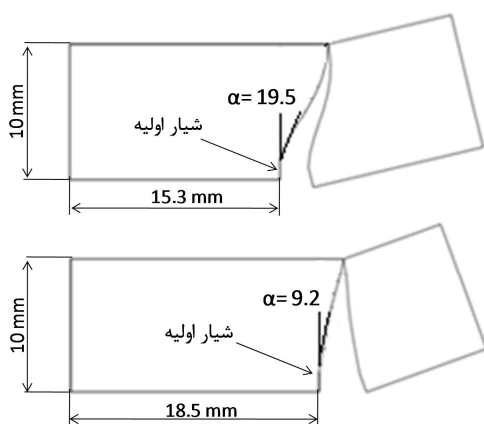
شکل ۹- نحوه‌ی مش‌بندی و موقعیت ترک در آزمایش دوم

مرحله‌ی بعدی در نرم افزار Ansys محاسبه‌ی انتگرال‌های J_I و J_{II} می‌باشد. برای محاسبه انتگرال‌ها ابتدا چگالی انرژی کرنشی، تانسور تنش و بردارهای نرمال وارد بر مسیر مشخص شده از نرم افزار استخراج گردید. سپس با استفاده از محاسبات ذکر شده J_I و J_{II} بدست آمد.

از طریق J_I و J_{II} فاکتورهای شدت تنش از روابط (۱۱) و (۱۲) محاسبه شد. اکنون با استفاده از معیارهای تنش مماسی بیشینه و گرادینان تنش معادل و $(K_{II})_{min}$ مسیر رشد ترک را می‌توان به صورت عددی محاسبه نمود.

از معیارهای پیش‌بینی مسیر انتشار ترک نظیر معیار تنش مماسی بیشینه، حداکثر نرخ انرژی کرنشی آزاد شده و چگالی انرژی کرنشی مینیمم برای مواد همگن و ایزوتروپ و یا موادی که می‌توان برای آنها فرضیه همگن و ایزوتروپ بودن موضعی را اعمال نمود، می‌توان استفاده نمود [۲۲]. در این مقاله نیز از فرض همگن و ایزوتروپ بودن موضعی ماده در نوک ترک استفاده شده و لذا این موضوع خللی به نتایج وارد نمی‌سازد.

مسیر رشد ترک طبق محاسبات انجام شده توسط معیار تنش مماسی بیشینه برای شرایط مرزی متناظر با آزمایش‌های اول و دوم بصورت نشان داده شده در شکل ۱۰ تخمین زده شده است. مقایسه نتایج آزمایش‌ها و تخمین عددی زاویه رشد ترک با استفاده از معیارهای ذکر شده، در جدول ۲ ارائه شده است.



شکل ۱۰- مسیر تخمینی رشد ترک توسط معیار تنش مماسی بیشینه متناظر با: (الف) آزمایش اول و (ب) آزمایش دوم

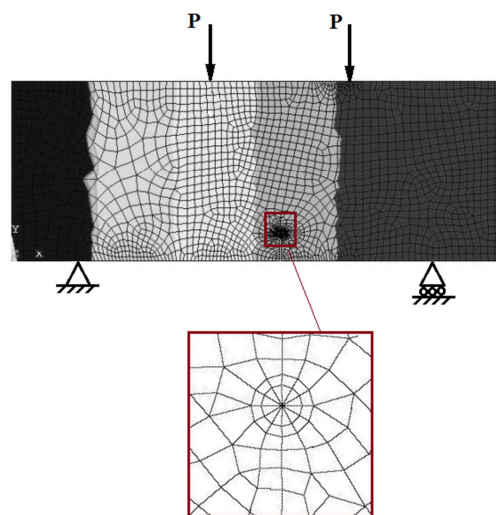
جدول ۱- خصوصیات مکانیکی آلومینیم و آلومینا

ماده	ضریب پواسون	مدول الاستیسیته (GPa)
آلومینیم	۰/۳۴	۷۰
آلومینا	۰/۲۲	۳۷۵

برای اعمال شرایط تست خمش چهار نقطه‌ای ابتدا محل تکیه‌گاه‌ها و سپس نیروها مطابق آنچه در آزمایش عملی انجام داده شد وارد گردید.

در شبیه‌سازی عددی ترک‌ها، موقعیت شیارهای اولیه دقیقاً مطابق نمونه‌های ساخته شده، ایجاد گردید. برای مش‌بندی صفحات، از مش‌بندی آزاد با المان‌های صفحه‌ای ایزوپارامتریک استفاده شده و جهت حصول نتایج دقیق‌تر در اطراف ترک از المان‌های ریزتر استفاده شده است. در این مقاله به منظور مطالعه رشد ترک از روش المان محدود معمولی به جای استفاده از روش‌های المان محدود توسعه یافته (XFEM) و یا بدون مش (meshless) استفاده شده است. لازم به ذکر است که استفاده از هر کدام از این روش‌ها دارای مزایا و معایبی می‌باشند. به عنوان مثال، در مسائل مربوط به رشد ترک در هر مرحله از رشد، بایستی ترک به‌روزرسانی شده و دوباره مش‌بندی انجام شود ولی در روش المان محدود توسعه یافته و یا بدون مش نیازی به این امر نیست. به عنوان یک نمونه از کاربرد روش المان محدود توسعه یافته در بحث انتشار ترک، می‌توان به تحقیق اربابی و همکارانش در سال ۲۰۱۴ که در مورد رشد ترک در کامپوزیت‌های تقویت شده توسط میکرو ذرات می‌باشد، اشاره نمود [۲۱].

شکل‌های ۸ و ۹ به ترتیب مدل‌های مش‌بندی شده و محل تکیه-گاه‌ها و موقعیت ترک‌ها را در مورد نمونه‌های آزمایش اول و دوم نشان می‌دهد.



شکل ۸- نحوه‌ی مش‌بندی و موقعیت ترک در آزمایش اول

شکل ۹ نحوه‌ی مش‌بندی و محل تکیه‌گاه‌ها و موقعیت ترک را در مورد نمونه‌ی ۲ نشان می‌دهد.

۷- مراجع

- [1] V. Cannillo, M. Montorsi, C. Siligardi, A. Sola, G. de-Portu, L. Micele and G. Pezzotti, Microscale computational simulation and experimental measurement of thermal residual stresses in glass-alumina functionally graded materials, *J. Eur. Ceram. Soc.*, Vol. 26, No. 8, pp. 1411-1419, 2006.
- [2] Y. Watanabe, Y. Inaguma, H. Sato and E. Miura-Fujiwara, A novel fabrication method for functionally graded materials under centrifugal force: The centrifugal mixed-powder method, *J. Mater.*, Vol. 2, No. 4, pp. 2510-2525, 2009.
- [3] A. Shahrjerdi, F. Mustapha, M. Bayat, S. M. Sapuan and D. L. A. Majid, Fabrication of functionally graded Hydroxyapatite-Titanium by applying optimal sintering procedure and powder metallurgy, *Int. J. Phys. Sci.*, Vol. 6, No. 9, pp. 2258-2267, 2011.
- [4] S. Nan-Chou, J. Lay-Huang, D. Fwu-Lii and H. Hwa-Lu, The mechanical properties of Al_2O_3 /aluminum alloy A356 composite manufactured by squeeze casting" *J. Alloy. Compd.*, Vol. 419, No. 1-2, pp. 98-102, 2006.
- [5] Z. He, J. Ma and G. E. B. Tan, Fabrication and characteristics of alumina-iron functionally graded materials, *J. Alloy. Compd.*, Vol. 486, No. 1-2, pp. 815-818, 2009.
- [6] P. C. Maity, S. C. Panigrahi and P. N. Chakraborty, Preparation of Al- Al_2O_3 in-situ particle composites by addition of Fe_2O_3 particles to pure Al melt, *Scripta. Metall. Mater.*, Vol. 28, No. 5, pp. 549-552, 1993.
- [7] P. C. Maity and P. N. Chakraborty, Preparation of aluminium-alumina in-situ particle composite by addition of titania to aluminum melt, *J. Mater. Sci. Lett.*, Vol. 16, pp. 1224-1226, 1997.
- [8] Z. Jing, Y. Huashun, C. Hongmei, M. Guanghui, Al-Si/ Al_2O_3 in situ composite prepared by displacement reaction of CuO/Al system, *Journal of Research and Development*, Vol. 7, No. 1, pp. 19-23, 2010.
- [9] M. Tilbrook and M. Hoffman, Implementation of the local symmetry criterion for crack-growth simulations, *Structural Integrity and Fracture International Conference (SIF'04)*, pp. 339-344, 2004.
- [10] M. R. M. Aliha and M. R. Ayatollahi, Analysis of fracture initiation angle in some cracked ceramics using the generalized maximum tangential stress criterion, *Int. J. Solids. Struct.*, Vol. 49, No. 13, pp. 1877-1883, 2012.
- [11] J. M. Koo and Y. S. Choy, A new mixed mode fracture criterion: maximum tangential strain energy density criterion, *Eng. Fract. Mech.*, Vol. 39, No. 3, pp. 443-449, 1991.
- [12] H. Zuo and Y. Feng, A universal crack extension criterion based on the equivalent stress gradient: I. theory and numerical verification, *Acta. Mech. Solida. Sin.*, Vol. 25, No. 1, pp. 100-110, 2012.
- [13] S. S. Bhadauria, K. K. Pathak and M. S. Hora, Finite element modeling of crack initiation angle under mixed mode (I/II) fracture, *J. Solid. Mech.*, Vol. 2, No. 3, pp. 231-247, 2010.
- [14] Y. Heng Chen and T. Jian Lu, on the path dependence of the J-Integral in notch problems, *Int. J. Solids. Struct.*, Vol. 41, No. 3-4, pp. 607-618, 2004.
- [15] J. Sheikhi, M. Poorjamshidian, S. Peyman, Mixed-mode stress intensity factors for surface cracks in functionally graded materials using enriched finite elements, *Journal of Solid Mechanics*, Vol. 7, No. 1, pp. 1-12, 2015.
- [16] F. Erdogan and G. C. Sih, On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *J. Basic. Engng. ASME. Trans.*, Vol. 85, No. 4, pp. 519-525, 1963.
- [17] D. J. Smith, M. R. Ayatollahi and M. J. Pavier, The role of T-stress in brittle fracture for linear elastic materials under mixed mode loading, *Fat. Fract. Engng. Mater. Struct.* Vol. 24, No. 2, pp. 137-150, 2001.
- [18] G. P. Cherepanov, The propagation of cracks in a continuous media, *J. Appl. Math. Mech.*, Vol. 31, No. 3, pp. 476-488, 1967.

جدول ۲- نتایج بدست آمده از محاسبات عددی و داده‌های

تجربی		مقایسه نتایج عددی و تجربی
نمونه ۱ (درجه)	نمونه ۲ (درجه)	
۱۹/۵	۹/۲	معیار تنش مماسی بیشینه
۰/۷	۰/۳	معیار گرادیان تنش معادل
۱۸/۳	۶/۸	معیار $K_{II}=0$
17 ± 0.5	8 ± 0.5	نتایج آزمایش‌های تجربی

همچنانکه مشاهده می‌شود، نتایج حاصل از هر سه معیار در مورد تخمین مسیر رشد ترک در مقایسه با نتایج تست‌های ۱ و ۲ تجربی، روند درستی را از نقطه نظر کمتر بودن انحراف ترک زمانی که موقعیت ناچ طوری است که در آن محل درصد الومینا بیشتر است، پیش‌بینی نموده‌اند ولی از نظر مقدار زاویه ترک، تطابق نتایج حاصل از دو معیار تنش مماسی بیشینه و $(K_{II})_{min}$ با نتایج تست تجربی به مراتب بهتر از پیش‌بینی توسط روش گرادیان تنش معادل می‌باشد.

۵- بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، پدیده شکست در مواد تابعی مدرج از جنس آلومینیم-آلومینا، مد نظر قرار گرفت و برای این منظور نمونه‌هایی از این ماده تابعی مدرج جهت انجام آزمون‌های تجربی خمش چهار نقطه‌ای، به روش متالورژی پودر تهیه گردید. تحلیل‌های اجزای محدود برای بررسی رشد ترک در اینگونه مواد، در حالتی که گرادیان تغییر خواص مکانیکی عمود بر جهت ترک اولیه باشند، بررسی شده و برای این منظور از معیارهای مختلفی نظیر معیار تنش مماسی بیشینه، معیار $(K_{II})_{min}$ و معیار گرادیان تنش معادل برای تخمین مسیر رشد ترک استفاده گردید. در نهایت نتایج حاصل از تحلیل‌های عددی با نتایج بدست آمده از آزمایش‌های تجربی مقایسه شد و این نتیجه حاصل گردید که از میان سه معیار بررسی شده، نتیجه حاصل از معیارهای $(K_{II})_{min}$ و تنش مماسی بیشینه تطابق خوبی با نتایج تست تجربی داشته‌اند. ولی معیار گرادیان تنش معادل با اینکه روند درستی را در مورد کاهش زاویه انحراف در تست‌های ۱ و ۲ پیش‌بینی کرده است، ولی مقدار عددی پیش‌بینی شده برای زوایای رشد ترک توسط این معیار تفاوت زیادی با نتایج حاصل از دو معیار قبلی و نتایج تجربی دارد. لذا می‌توان گفت که استفاده از معیار گرادیان تنش معادل در مقایسه با دو معیار $(K_{II})_{min}$ و تنش مماسی بیشینه برای تخمین مسیر ترک در موادی نظیر ماده تابعی مدرج فلز-سرامیک مخصوصاً در نواحی نزدیک به ماده سرامیکی که خواص ماده ترد را دارا می‌باشند، زیاد مناسب نبوده ولی معیارهای $(K_{II})_{min}$ و ماکزیمم تنش مماسی را می‌توان با اطمینان و در هر ناحیه‌ای از ماده تابعی مدرج بکار گرفت.

۶- سپاسگزاری

این مقاله از گزارش نهایی طرح پژوهشی با عنوان "بررسی پدیده شکست در مواد تابعی مدرج از جنس آلومینیم-آلومینا" از محل اعتبارات پژوهشی دانشگاه تبریز استخراج شده است.

[19] J. R. Rice, A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks, J. Appl. Mech. ASME., Vol. 35, pp. 379-386, 1968.

[20] R. Simpson and J. Trevelyan, Evaluation of J1 and J2 integrals for curved cracks using an enriched boundary element method, Eng. Fract. Mech., Vol. 78, No. 4, pp. 623-637, 2011.

[21] N. Arbabi, A. Miri Anbardan, S. Hassanifard, Finite element analysis of failure mechanisms in HDPE/CaCo3 particulate composite, Plastics, Rubber and Composites, Vol. 43, No. 8, pp. 271-277, 2014.

[22] J.H. Kim, G.H. Paulino, On fracture criteria for mixed-mode crack propagation in functionally graded materials, Mechanics of Advanced Materials & Structures, Vol. 14, No. 1, pp. 227-244, 2007.