

تحلیل پاسخ الاستو دینامیکی تیر خمیده ساندویچی مرکب تحت بارگذاری جرم متحرک

مهدی حسینی

استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

میثم فریدانی*

کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

چکیده

در این مقاله پاسخ دینامیکی تیر خمیده ساندویچی مرکب نسبتاً ضخیم با شرایط تکیه‌گاهی ساده، تحت بارگذاری جرم متحرک، با در نظر گرفتن اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی جانبی بررسی می‌گردد. معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از اصل هامیلتون استخراج می‌شود. سپس معادلات دیفرانسیل جزئی حاصل، با استفاده از روش آنالیز مودال به معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر با زمان تبدیل می‌شوند. حل معادله دیفرانسیل معمولی به صورت تحلیلی- عددی با استفاده از روش رانگ- کوتای مرتبه چهارم صورت می‌گیرد. نتایج حاصل با نتایج موجود در ادبیات موضوع صحت گذاری می‌گردد. در پژوهش حاضر پاسخ دینامیکی تیر خمیده ساندویچی مرکب تعیین و همچنین تاثیر پارامترهای مختلفی همچون مقدار جرم، سرعت حرکت جرم متحرک و شعاع انحنا تیر روی پاسخ دینامیکی بررسی می‌گردد. مشاهده می‌شود که با افزایش جرم، سرعت بار متحرک و شعاع انحنا تیر، خیز دینامیکی تیر خمیده به ترتیب افزایش، کاهش و افزایش پیدا می‌کند.

واژه‌های کلیدی: پاسخ دینامیکی، تیر ساندویچی خمیده، جرم متحرک.

On the Elasto-dynamic Response of Curved Composite Sandwich Beam under Moving Mass

M. Hosseini
M. Freidani

Department of Mechanical Engineering, University of Malayer, Malayer, Iran
Department of Mechanical Engineering, University of Malayer, Malayer, Iran

Abstract

In this paper the dynamic response of a simply- supported relatively thick composite sandwich curved beam under a moving mass with considering the rotary inertia and the transverse shear deformation is investigated. The governing equations of the problem are derived using Hamilton's principle. Then, the obtained partial differential equations are transformed in to ordinary differential equations with time varying coefficients, using the modal analysis method. Fourth order Runge-Kutta method is applied to solve the ordinary differential equations in an analytical – numerical form. The results are validated by the results existed in the literature. In the present paper, the dynamic response of a composite sandwich curved beam is determined and also, the effects of different parameters such as the mass and the velocity of the moving mass and the radius of the curvature of the beam on the dynamic response is investigated. It is observed that increasing the mass and the velocity of the moving mass and the radius of the curvature of the beam, result in increase, decrease and increase of the dynamic deflection of the curved beam, respectively.

Keywords: Dynamic response, Curved sandwich beam, Moving mass

۱- مقدمه

افزایش یافت. نیاز به سازه‌های با وزن کم و عملکرد بالا باعث شد که مطالعه در مورد ساختارهای ساندویچی ادامه یابد. پانل ساندویچی متشکل از یک هسته مرکزی ضعیف و لایه‌های خارجی قوی می‌باشد، معمولاً در ساخت پانل‌های ساندویچی از کامپوزیت‌های الیاف شیشه (فایبرگلاس) و اخیراً از کامپوزیت‌های الیاف طبیعی کمک گرفته می‌شود. در سازه‌های تحت بارگذاری دینامیکی تنش‌ها و خیزها نسبت به حالت استاتیکی بزرگ ترند. از این رو نیاز به تحلیل دینامیکی سازه‌ها اهمیت می‌یابد. اثرات دینامیکی موجود در مسائل دارای بار متحرک تا اواسط قرن نوزدهم میلادی شناخته نشده بود. استوک اولین محقق است که در مورد بار متحرک به مطالعه و بررسی پرداخته است [۱]. در این زمینه کتاب جامعی توسط فریبا نوشته شده که تمامی کارهای موجود در زمینه بار متحرک را تا زمان خودش پوشش می‌دهد [۲]. در مسائل جرم متحرک با احتساب اینرسی بار، معادلات حاکم بر تیر بسیار پیچیده می‌باشد.

جرم متحرک با توجه به اینرسی مربوط به جرم آن اثرات قابل توجهی بر پاسخ دینامیکی سازه‌ها دارد و نظر به پیشرفت در استفاده از مواد سازه‌ای جدید و تکنولوژی ساخت، سازه‌ها بیش از پیش در معرض تغییرات ناگهانی بار و اجزای سازه‌ای قرار دارند که در آن اثرات مربوط به اینرسی جرم متحرک قابل اغماض نیست. اثر اینرسی جرم متحرک یکی از مهمترین زمینه‌های تحقیق در زمینه دینامیک پل‌ها، طراحی خطوط راه آهن و دیگر کاربردهای مهندسی نظیر ماشین آلات سریع السیر می‌باشد.

اولین بار در اوایل قرن ۱۹ ایده استفاده از دو رویه که با فاصله‌ای جدا شده اند بوجود آمد، این روش ابتدا در جنگ جهانی دوم به صورت تجاری در هواپیماها به کار برده شد. تعدادی از اولین کارهای آزمایشگاهی و تئوری روی سازه‌های ساندویچی در دهه ۱۹۴۰ چاپ شدند. پس از آن کاربرد و استفاده از سازه‌های ساندویچی به سرعت

۲- فرمول بندی تحلیلی

مطابق شکل ۱، تیری خمیده به همراه جرمی متمرکز که روی سطح تیر با سرعت ثابت حرکت می‌کند، در نظر گرفته می‌شود. از استهلاک تیر صرف‌نظر می‌شود.



شکل ۱- تیر خمیده ساندویچی با تکیه گاه‌های ساده تحت جرم متحرک

میدان جابجایی مطابق تئوری تیموشنکو در مختصات قطبی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} u(\theta, z, t) &= u_0(\theta, t) + z\phi(\theta, t) \\ \omega(\theta, z, t) &= w_0(\theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

در معادلات بالا، u و w ، به ترتیب جابجایی در راستای محورهای مختصات x و z و همچنین ϕ چرخش حول محور y می‌باشد. برای بدست آوردن معادله حاکم بر مسئله، از اصل هامیلتون استفاده می‌شود، یعنی می‌توان نوشت:

$$\delta \int_0^t (T - U - V) dt = 0 \quad (2)$$

که در آن T انرژی جنبشی، U انرژی کرنشی و V انرژی پتانسیل هستند. هر یک از بخشهای معادله (۲) به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\begin{aligned} \int_0^t \delta T &= - \int_0^t \int_0^{\frac{h}{2}} \int_0^{\frac{h}{2}} \rho (\ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w) R dy dz d\theta dt + \\ &\int_0^t \int_0^{\theta_0} [MV^2 W'' + 2VMW' + MW^2] \times \delta(R\theta - Vt) \delta w_0 R d\theta dt \\ \int_0^t \delta U &= \int_0^t \int_0^{\theta_0} \int_0^{\frac{h}{2}} [\sigma_\theta \delta \epsilon_\theta + \tau_{\theta z} \delta \gamma_{\theta z}] R dy dz d\theta dt \\ \int_0^t \delta V &= - \int_0^t \int_0^{\theta_0} Mg \delta(R\theta - Vt) \delta w_0 R d\theta dt \end{aligned} \quad (3)$$

در رابطه بالا، ρ چگالی، R شعاع انحناء، $W' = d/dx$ ، M و V به ترتیب جرم و سرعت جرم متحرک می‌باشند، همچنین در معادله بالا عبارت $2VMW'$ نیروی کریولیس است که نقش مستهلک کننده را برای سیستم ایفا می‌کند. $MV^2 W''$ نیروی گریز از مرکز است که تا حدودی سفتی خمشی تیر را کاهش می‌دهد و نهایتاً MW^2 حاصل از نیروی اینرسی جرم متحرک در راستای عمودی است. b پهنای تیر، t زمان متحرک، θ_0 مختصه محیطی تیر خمیده می‌باشد.

با جایگذاری میدان جابجایی (۱) و استفاده از روابط کرنش-جابجایی و روابط ساختاری تنش-کرنش در روابط (۳) و پس از انتگرال گیری جزء به جزء و انجام یک سری عملیات جبری، معادلات حاکم بر

در سال ۱۹۸۳ راسکی [۳]، پاسخ صفحه یک جرم در حال چرخش را مورد بررسی قرار داد اما با این وجود، بیشتر این روش‌ها محدودیت‌هایی داشتند که عبارتند از:

- ۱- سرعت بار متحرک ثابت بود.
- ۲- جرم در نظر گرفته نمی‌شد با این وجود مسئله به تیر تحت بار متحرک تبدیل شد.
- ۳- اثر شتاب کریولیس و گریز از مرکز بین جرم و تیر صرف‌نظر شد.

در سال ۲۰۰۶ لو و همکاران [۴]، تحلیل المان محدود برای یک تیر تیموشنکو تحت بارگذاری جرم متحرک را مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۰۷ نیک خوو همکاران [۵]، رفتار دینامیکی و کنترل مودهای تیر تحت جرم متحرک را مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۱۱ کاهیا و مسلم [۶]، مسائل جرم متحرک از تیرهای ساندویچی را با استفاده از روش آنالیز مودال بررسی کردند. با استفاده از این روش معادله حرکت تیر به فرم ماتریسی تبدیل شده و ضرایب معادلات ماتریس حرکت وابسته به زمان بوده و از روش نیومارک برای حل عددی استفاده کردند.

در سال ۲۰۱۱ محب پور و همکاران [۷]، به بررسی پاسخ دینامیکی تیرهای کامپوزیتی تحت بارگذاری متحرک نوسانی با استفاده از روش المان محدود پرداختند. در سال ۲۰۱۲ کاهیا [۸]، به بررسی تحلیل دینامیکی تیرهای کامپوزیتی چند لایه تحت بارگذاری متحرک با استفاده از روش المان محدود پرداخت و شکل تابع طوری انتخاب شد که به پیوستگی و انطباق بین لایه‌ها مطمئن باشد و لغزش سطحی و ورقه ورقه شدن امکان پذیر نباشد. در سال ۲۰۱۲ افتخار اعظم و همکاران [۹]، پاسخ دینامیکی تیرهای تیموشنکو با تکیه گاه‌های ساده تحت بارگذاری جرم متحرک و جرم معلق را مطالعه کردند.

در سال ۱۳۹۳ داریوشی و صدیقی [۱۰] تحلیل تیر ساندویچی با استفاده از تئوری مرتبه بالای غیر خطی ارتقا یافته را بررسی کردند و معادلات با استفاده از اصل مینیمم انرژی پتانسیل استخراج و با بکارگیری روش نیوتن-رافسون حل گردید.

در سال ۲۰۱۴ نیک خو و کنعانی پور [۱۱]، به بررسی روش عددی تحلیل دینامیکی تیر خمیده نیم دایره تحت بارگذاری متحرک پرداختند و برای حل مساله از تئوری اوپلر - برنولی در مختصات قطبی استفاده کردند.

در مقاله حاضر، تاثیر پارامترهای مختلف از جمله تاثیر جرم متحرک، سرعت بارگذاری و شعاع انحنای تیر بر روی پاسخ دینامیکی تیر خمیده ساندویچی مرکب تیموشنکو تحت جرم متحرک بررسی می‌شود. برای این بررسی از تئوری تیموشنکو در مختصات قطبی استفاده می‌شود، و با بکارگیری اصل هامیلتون، معادلات حاکم بر مسئله به صورت معادلات دیفرانسیل جزئی به دست می‌آیند. سپس توسط روش آنالیز مودال، معادلات دیفرانسیل معمولی حاکم بر مسئله به صورت ماتریسی استخراج می‌شود. به منظور حل معادلات دیفرانسیل، از روش عددی رانگ - کوتای مرتبه چهار استفاده می‌شود. نتایج حاصل از پژوهش حاضر با نتایج موجود در ادبیات موضوع صحت گذاری می‌گردد.

استفاده شده است. شرایط اولیه برای حل معادله دیفرانسیل بالا به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\ddot{\phi}(0) = \dot{\phi}(0) = \phi(0) = 0 \quad (9)$$

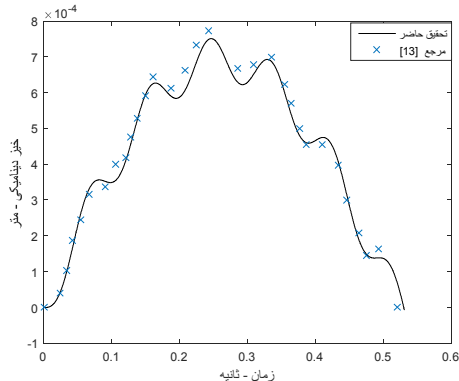
۳- نتایج

۳-۱- صحت سنجی تحلیل

در این بخش با مقایسه نتایج حاصل از کار حاضر و نتایج بدست آمده از مرجع [۱۳] به اعتبار سنجی مدل ارائه شده پرداخته می‌شود. در جدول ۱ مشخصات مادی تیر مورد بررسی در مرجع [۱۳] و قسمت‌های مختلف پژوهش حاضر ارائه می‌شود.

جدول ۱- مشخصات مادی تیر مورد بررسی	
b=0.2 (m)	پهنا
H=0.4 (m)	ضخامت کل
R=3.5 (m)	شعاع انحناء تیر
$E_{11}^f = 39$ (GPa)	خواص رویه
$E_{22}^f = 8.66$ (GPa)	
$G_{12}^f = 3.8$ (GPa)	
$\nu_{12}^f = 0.28$	
$\rho^f = 2100$ ($\frac{Kg}{m^3}$)	
$E_{11}^c = 3.74$ (GPa)	خواص هسته
$E_{22}^c = 0.172$ (GPa)	
$G_{12}^c = 0.202$ (GPa)	
$\nu_{12}^c = 0.229$	
$\rho^c = 160$ ($\frac{Kg}{m^3}$)	

در جدول بالا b، عرض تیر، H، ضخامت کل تیر، E، مدول الاستیسیته، G، مدول یانگ، ν ضریب پواسون، ρ چگالی و f و c به ترتیب مربوط به رویه و هسته می‌باشد. در شکل ۲ نتایج پاسخ دینامیکی حاصل از پژوهش حاضر، برای تیر خمیده کامپوزیتی با تکیه گاه ساده تحت جرم متحرک $M=1$ kg که با سرعت $V=7.59$ m/s در حال حرکت می‌باشد، با نتایج حاصل از مرجع [۱۳] مقایسه می‌شود. در شکل ۲ نمودار پاسخ دینامیکی بر حسب زمان در نقطه $x=7L/16$ از ابتدای تیر ترسیم شده است و همانطور که ملاحظه می‌شود، تطابق خیلی خوبی بین نتایج وجود دارد بطوری که حداکثر اختلاف میان دو دسته نتایج 5.83% می‌باشد.



شکل ۲- پاسخ دینامیکی تیر خمیده ساندویچی مرکب در نقطه

$$x=7L/16$$

خمش دینامیکی تیر خمیده و شرایط مرزی آن به صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$RI_3 \ddot{\phi} - \frac{1}{R} \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) \frac{\partial W_0}{\partial \theta} + E_{11} \left(\frac{B_{11}}{A_{11}} + R \right) \phi = 0RI_1 \ddot{w}_0 + R[MV^2 W'' + 2VM\dot{W}' + M\ddot{W}] \delta(R\theta - Vt) + \frac{1}{R} A_{11} W_0 - \frac{1}{R} E_{11} \frac{\partial^2 W_0}{\partial \theta^2} + \left(\frac{B_{11}}{R} - E_{11} \right) \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = RMg \delta(R\theta - Vt)$$

$$W(0, t) = W''(0, t) = 0 \quad (4)$$

$$W(L, t) = W''(L, t) = 0$$

در روش آنالیز مودال جابجایی عمودی تیر را می‌توان به صورت زیر فرض کرد [۱۲]:

$$\phi(\theta, t) = \sum_{n=1}^N \phi_n(t) \cos\left(\frac{n\pi R\theta}{L}\right) \quad (5)$$

$$w(\theta, t) = \sum_{n=1}^N W_n(t) \sin\left(\frac{n\pi R\theta}{L}\right)$$

که در آن N تعداد مودهای در نظر گرفته شده، L طول تیر و n شماره مود مورد نظر است. همچنین $\phi_n(t)$ و $W_n(t)$ مختصات تعمیم یافته و $\sin\left(\frac{n\pi R\theta}{L}\right)$ و $\cos\left(\frac{n\pi R\theta}{L}\right)$ مودهای نرمال مربوط به تکیه گاه ساده می‌باشند.

جایگزینی روابط (5) در معادلات (4) و ضرب کردن طرفین رابطه دوم در $\sin\left(\frac{i\pi R\theta}{L}\right)$ ($i \neq n$) و انتگرال گیری روی طول تیر و استفاده از خاصیت متعامد بودن مودهای نرمال، منجر به یک معادله دیفرانسیل معمولی در حوزه زمان می‌شود:

$$\sum_{n=1}^N \left(I_3 \ddot{\phi}_n + \left(E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right) \phi_n + E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) \frac{n\pi}{L} W_n \right) = 0 \quad (6)$$

$$\sum_{n=1}^N (I_1 \ddot{W}_n + E_{11} (n\pi/L)^2 W_n - (B_{11}/R - E_{11}) (n\pi/L) \phi_n + 1/R^2 A_{11} W_n) \delta_{ni} + \sum_{n=1}^N M [(W_n - V^2 (Rn\pi/L)^2 W_n) \sin(n\pi Vt/L) + 1/R^2 A_{11} W_n] \delta_{ni} + \sum_{n=1}^N M [(W_n - V^2 (Rn\pi/L)^2 W_n) \sin(n\pi Vt/L) + 1/R^2 A_{11} W_n] \delta_{ni} = 0 \quad (7)$$

$$(n\pi Vt/L) \sin(i\pi Vt/L) M \sum_{n=1}^N 2V \dot{W}_n (Rn\pi/L) \cos(n\pi Vt/L) \sin(i\pi Vt/L) = M g \sin(i\pi Vt/L)$$

با استفاده از روش اوبراتور، می‌توان دو معادله کوپل بالا را به دو معادله دیفرانسیل مجزا بر حسب W و ϕ تبدیل نمود:

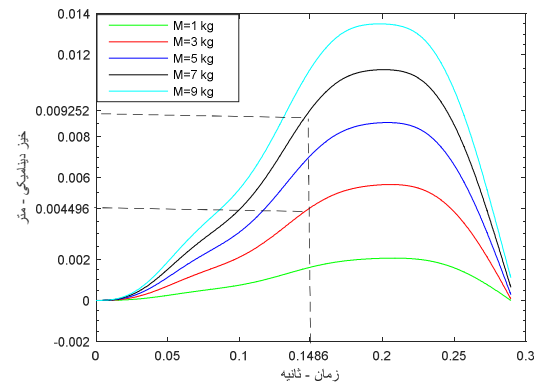
$$A_4(t) \frac{d^4 \phi_n}{dt^4} + A_3(t) \frac{d^3 \phi_n}{dt^3} + A_2(t) \frac{d^2 \phi_n}{dt^2} + A_1(t) \frac{d \phi_n}{dt} + A_0(t) \phi_n = A_5(t) \quad (8)$$

ضرایب معادله فوق در پیوست ضمیمه شده اند. حل معادله (8) با ضرایب متغیر با زمان به صورت تحلیلی امکان پذیر نبوده و باید از روش عددی استفاده شود. بدین منظور از روش رانگ-کوتای مرتبه چهار

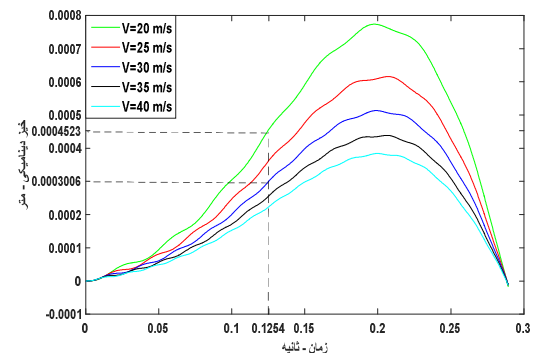
۲-۳- بررسی اثر مقدار جرم، سرعت جرم متحرک و شعاع انحنای تیر روی پاسخ دینامیکی تیر خمیده

در این قسمت تاثیر مقدار جرم و سرعت جرم متحرک و شعاع انحنای تیر بر روی پاسخ دینامیکی تیر خمیده ساندویچی مرکب بررسی می‌گردد.

در شکل ۳ منحنی خیز دینامیکی - زمان برای مکان $x=7L/16$ و مقادیر مختلف M نمایش داده می‌شود. مشاهده می‌شود که با زیاد شدن جرم، به دلیل افزایش نیروی وزن جرم متحرک، مقدار خیز دینامیکی افزایش می‌یابد. برای مثال به ازای زمان ثابت 0.1486 s، وقتی M از 3 kg به 7 kg افزایش پیدا کند، مقدار خیز دینامیکی 105.8% بیشتر می‌شود.

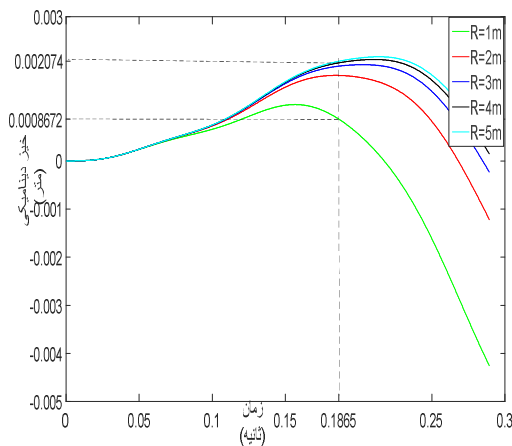
شکل ۳- منحنی خیز دینامیکی - زمان برای مکان $x=7L/16$ و مقادیر مختلف M

در شکل ۴ منحنی خیز دینامیکی - زمان برای مکان $x=7L/16$ و مقادیر مختلف V نشان داده می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود، با افزایش سرعت جرم متحرک، مقدار خیز دینامیکی کاهش می‌یابد. علت این امر می‌تواند این باشد که با زیادتر شدن سرعت جرم متحرک، تیر فرصت کافی برای تغییر شکل پیدا نمی‌کند. به عنوان مثال، به ازای زمان ثابت 0.1254 s، وقتی V از 20 m/s به 30 m/s افزایش می‌یابد، مقدار خیز دینامیکی 33.5% کاهش پیدا می‌کند.

شکل ۴- منحنی خیز دینامیکی - زمان برای مکان $x=7L/16$ و مقادیر مختلف V

در شکل ۵ منحنی خیز دینامیکی - زمان برای مکان $x=7L/16$ و مقادیر مختلف R (شعاع انحنای تیر) نمایش داده می‌شود. مشاهده می‌شود که با زیاد شدن شعاع انحنای تیر، مقدار خیز دینامیکی افزایش می‌یابد. دلیل این امر می‌تواند این باشد که با افزایش شعاع انحنای تیر

خمیده، مقدار سفتی خمشی تیر کاهش می‌یابد. برای مثال به ازای زمان ثابت 0.1865 s، وقتی R از 1 m به 4 m افزایش پیدا کند، مقدار خیز دینامیکی 139.16% بیشتر می‌شود.

شکل ۵- منحنی خیز دینامیکی - زمان برای مکان $x=7L/16$ و مقادیر مختلف R

۴- نتیجه گیری

در این مقاله پاسخ دینامیکی تیر خمیده ساندویچی مرکب نسبتاً ضخیم تحت بارگذاری جرم متحرک با در نظر گرفتن اثرات اینرسی دورانی و تغییر شکل برشی جانبی با شرایط تکیه گاهی ساده تحلیل گردید. معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شدند. سپس معادلات دیفرانسیل جزئی حاصل، با استفاده از روش آنالیز مودال به معادله دیفرانسیل معمولی با ضرایب متغیر با زمان تبدیل گردیدند. حل معادله دیفرانسیل معمولی به صورت تحلیلی - عددی با استفاده از روش رانگ-کوتای مرتبه چهارم صورت پذیرفت. نتایج پاسخ دینامیکی بدست آمده از پژوهش حاضر به خوبی با نتایج موجود در ادبیات موضوع صحت سنجی گردید. نتایج نشان داد که افزایش جرم و سرعت جرم متحرک و شعاع انحنای تیر، به ترتیب منجر به افزایش، کاهش و افزایش خیز دینامیکی می‌شوند.

۵- پیوست

ضرایب موجود در معادله (۸) به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$A_5(t) = -Mg \sin\left(\frac{j\pi Vt}{L}\right)$$

$$A_4(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{I_1 I_3}{E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) \frac{i\pi}{L}} \delta_{ij} + \frac{MI_3}{E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) \frac{i\pi}{L}} \sin\left(\frac{i\pi Vt}{L}\right) \sin\left(\frac{j\pi Vt}{L}\right) \right)$$

$$A_3(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{2MVR I_3}{E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right)} \cos\left(\frac{i\pi Vt}{L}\right) \sin\left(\frac{j\pi Vt}{L}\right) \right)$$

- [6] Kahya V. and Mosallam A.S., Dynamic analysis of composite sandwich beams under moving mass. *Engineering sciences*, pp. 18-25, 2011.
- [7] Mohebpour S.R., Fiouz A.R. and Ahmadzadeh A.A., Dynamic investigation of laminated composite beams with shear and rotary inertia effect subjected to a moving oscillators using FEM. *Elsevier-Composite Structures*, pp. 1118-1126, 2011.
- [8] Kahya V., Dynamic analysis of laminated composite beams under moving loads using finite element method. *Elsevier-Nuclear Engineering and Design*, pp. 41-48, 2012.
- [9] Eftekharzham S., Mofid M. and Afghanikhoraskani R., Dynamic response of timoshenko beam under moving mass. *Elsevier-Scientica Iranica*, pp. 50-56, 2013.

[۱۰] داریوشی س. و صدیقی م.، تحلیل رفتار خمشی تیر ساندویچی با رویه‌های کامپوزیتی با استفاده از تئوری مرتبه بالای غیرخطی ارتقاء یافته. *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، د. ۱۴، ش. ۱۶، ص. ۸-۱، ۱۳۹۳.

[11] Nikkhoo A. and Kananipour H., Numerical solution for dynamic analysis of semicircular curved beams acted upon by moving loads. *SAGE-Mechanical Engineering Science*, pp. 2314-2322, 2014.

[12] Meirovitch L., *Analytical Methods in vibration*. Macmilan, London, 1967.

[۱۳] بیگلری ح. و آزور م.، بررسی تاثیر پارامترهای هسته در پاسخ الاستو - دینامیکی تیر ساندویچی مرکب تیموشنکو تحت بارگذاری جرم متحرک. *مجله مهندسی مکانیک مدرس*، د. ۱۴، ش. ۲، ص. ۶۳-۶۹، ۱۳۹۳.

$$A_2(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{I_1 \left(E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right)}{E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) \frac{i\pi}{L}} \right. \\ \left. + \frac{I_3 \frac{i\pi}{L}}{\left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right)} \right. \\ \left. + \frac{A_{11} I_3}{R^2 E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) \frac{i\pi}{L}} \right) \delta_{ij} + \\ \frac{M \left(E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right)}{\left(E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) \frac{i\pi}{L} \right)} \\ - MV^2 \left(\frac{Ri\pi}{L} \right)^2 \frac{I_3}{E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) \frac{i\pi}{L}} \sin \left(\frac{i\pi Vt}{L} \right) \sin \left(\frac{j\pi Vt}{L} \right)$$

$$A_1(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{2MVR \left(E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right)}{E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right)} \right) \\ \cos \left(\frac{i\pi Vt}{L} \right) \sin \left(\frac{j\pi Vt}{L} \right)$$

$$A_0(t) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{i\pi}{L} \frac{\left(E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right)}{\left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right)} \right. \\ \left. + \left(\frac{B_{11}}{R} - E_{11} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right) + \frac{1}{R^2} A_{11} \left(E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right) \right) \delta_{ij} \\ - MV^2 R^2 \frac{\left(E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right) + \left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}} \right) \left(\frac{i\pi}{L} \right)^2 \right)}{E_{11} \left(\frac{B_{11}}{RA_{11}} + 1 \right)} \sin \left(\frac{i\pi Vt}{L} \right) \sin \left(\frac{j\pi Vt}{L} \right)$$

۶- مراجع

- [1] Timoshenko S., History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures. McGraw-Hill, NewYork, 1953.
- [2] Fryba L., Vibration of Solids and Structures under Moving Loads. Thomas Telford House Ltd, London, 1999.
- [3] Raske T.F., Plate response to a circularly orbiting mass. the Journal of the Acoustical Society of America, pp. 688-691, 1983.
- [4] Lou P., Dai G.L. and Zeng Q.Y., finite element analysis for a timoshenko beam subjected to a moving mass. Mechanical Engineering Science, pp. 669-678, 2006.
- [5] Nikkhoo A., Rofoei F.R. and Shadnam M.R., Dynamic behavior and modal control of beams under moving mass. *Sound and Vibration*, pp. 712-724, 2007.