

ارائه دو فیلتر کالمن مرتبه کسری جدید برای سیستم‌های مرتبه کسری خطی در حضور نویز اندازه‌گیری رنگی

بهروز صفری‌نژادیان^۱، دانشیار؛ مجتبی اسد^۲، دانشجوی کارشناسی ارشد

۱- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - safarinejad@sutech.ac.ir

۲- دانشکده مهندسی برق و الکترونیک - دانشگاه صنعتی شیراز - شیراز - ایران - m.asad@sutech.ac.ir

چکیده: در این مقاله دو فیلتر کالمن جدید برای تخمین حالت در سیستم‌های مرتبه کسری خطی با حضور نویز اندازه‌گیری رنگی، با توجه به اهمیت تخمین حالت به‌ویژه در سیستم‌های مرتبه کسری، ارائه خواهد شد. در این دو فیلتر، با بسط روش تفاضل‌گیری از اندازه‌گیری‌ها، خروجی‌های کمکی جدیدی تعریف می‌گردد. با تعریف این خروجی‌های جدید، سیستم مرتبه کسری با نویز اندازه‌گیری رنگی به یک سیستم با نویز فرآیند و اندازه‌گیری همبسته تبدیل می‌گردد. سپس بر اساس این خروجی‌های جدید، الگوریتم‌های تخمین جدیدی ارائه خواهد شد. درستی روابط مورد استفاده در این الگوریتم‌ها نیز در چند قضیه اثبات شده است. این دو روش به‌آسانی قابل پیاده‌سازی بوده و به‌راحتی قابل تعمیم به سیستم‌های غیرخطی می‌باشند. در انتها با استفاده از یک مدل مناسب و کاربردی، کارایی الگوریتم‌های ارائه‌شده بررسی می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: سیستم فضای حالت مرتبه کسری خطی، نویز اندازه‌گیری رنگی، فیلتر کالمن مرتبه کسری، روش اختلاف اندازه‌گیری‌ها.

Two New Fractional Order Kalman Filters for Linear Fractional Order Systems with Colored Measurement Noise

B. Safarinejadian¹, Associate Professor; M. Asad², MSc Student

1- Faculty of Electrical and Electronics Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran, Email: safarinejad@sutech.ac.ir

2- Faculty of Electrical and Electronics Engineering, Shiraz University of Technology, Shiraz, Iran, Email: m.asad@sutech.ac.ir

Abstract: This paper presents two new Kalman filter for state estimation in fractional order systems using colored measurement noise, according to the importance of the state estimation especially in fractional order systems (FOSs). In these two novel filters, by expanding measurement differencing method, new auxiliary outputs will be defined. By defining these new auxiliary outputs, the fractional order system with colored measurement noise will be changed to a system with correlated process and measurement noises. Therefore, according to these new outputs, new state estimation algorithms will be proposed. The accuracy of these algorithms will be proved by some theorems. These two methods are easy to implement and can be easily extended to nonlinear systems. Finally, the precision of the proposed algorithms will be examined by using an appropriate and applicable example.

Keywords: Linear fractional order systems, colored measurement noise, fractional order Kalman filter, measurement differencing.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۴/۰۹/۰۸

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۴/۱۲/۲۵ و ۱۳۹۵/۰۳/۰۳

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۵/۰۴/۲۷

نام نویسنده مسئول: بهروز صفری‌نژادیان

نشانی نویسنده مسئول: ایران - شیراز - بلوار مدرس - دانشگاه صنعتی شیراز - دانشکده مهندسی برق و الکترونیک.

۱- مقدمه

موضوع حساب کسری دارای تاریخچه ۳۰۰ ساله می‌باشد. حساب کسری تعمیم‌یافته مشتقات و دیفرانسیل مرتبه صحیح به مرتبه کسری می‌باشد. این موضوع با موضوع حساب و دیفرانسیل، دارای قدمت یکسانی بوده و به زمانی بازمی‌گردد که لایب‌نیتز، گاوس و نیوتن این نوع محاسبات را ابداع کردند. در طول سال‌های گذشته تعداد زیادی ریاضی‌دان در مورد این موضوع تحقیق و پژوهش انجام داده‌اند [۱، ۲]. افرادی مثل لیوویل، ریمان و ویل سهم عمده‌ای در پیشرفت تئوری حساب کسری داشته‌اند. در ادامه افرادی مثل فوریر، ابل، گرانوالد و لتنیخوف کارهای زیادی در این زمینه انجام داده‌اند [۱، ۲]. در حال حاضر تعداد کاربردهای حساب کسری به سرعت در حال رشد است. این پدیده ریاضی به ما این اجازه را می‌دهد تا در توصیف و مدل کردن سیستم‌های حقیقی (سیستم‌های که در ذات خود خاصیت کسری دارند) دقت بیشتری نسبت به روش‌های صحیح کلاسیک داشته باشیم [۳، ۴].

دلیل اصلی استفاده از مدل‌های مرتبه صحیح در گذشته این بوده است که تقریبی برای معادلات دیفرانسیل کسری وجود نداشته است. در حال حاضر روش‌های متعددی برای تقریب انتگرال و مشتق کسری بیان شده است. حساب کسری را می‌توان برای بیان یا مدل کردن حوزه وسیعی از کاربردها که خاصیت کسری دارند استفاده کرد.

حساب‌های مرتبه کسری نقش مهم و وسیعی را در شاخه‌های مختلف علم بازی می‌کنند. برای مثال در فیزیک [۵، ۶]، سیستم‌های کنترل [۷-۱۱]، پردازش سیگنال [۱۲، ۱۳] و بسیاری از حوزه‌های دیگر مثل رباتیک، شیمی، مکانیک و ... نقش مهمی را ایفا می‌کند.

با توجه به این‌که سیستم‌های مرتبه کسری کاربردهای فراوانی دارند تخمین حالت در سیستم‌های مرتبه کسری نیز اهمیت بسیاری دارد. روش‌های مختلفی برای تخمین حالت ارائه شده است از قبیل روش‌های احتمال حداکثر [۱۴، ۱۵] و روش‌های فیلتر کالمن [۱۶، ۱۷]. در [۱۸] با ارائه فیلتر کالمن مرتبه کسری به مسئله تخمین در زمینه سیستم‌های مرتبه کسری پرداخته شده است.

در کنار موضوع تخمین حالت بعضی مواقع رنگی بودن نوبز مسئله تخمین حالت را دچار مشکل می‌کند. در بسیاری از مواقع خروجی سیستم دارای نوبز رنگی است. روش‌های ارائه شده برای حل مشکل رنگی بودن نوبز اندازه‌گیری در سیستم‌های مرتبه صحیح به دو دسته قابل تقسیم‌بندی می‌باشد. اول روش الحاق حالت‌ها و دوم روش اختلاف اندازه‌گیری‌ها که در سال ۱۹۶۸ توسط آقای برایسون و هنریکسون [۱۹] ارائه گردید.

از جمله کارهایی که می‌توان در حوزه تخمین حالت در سیستم‌های مرتبه کسری با نوبز رنگی اشاره نمود، [۲۰] می‌باشد. فیلتر ارائه شده در [۲۰] حجم محاسباتی زیادی داشته و به راحتی قابل پیاده‌سازی نمی‌باشد. همچنین در مقالات [۱۸، ۲۱] که در حوزه تخمین حالت در سیستم‌های مرتبه کسری ارائه گردیده است، زمانی

که نوبز رنگی باشد خطای تخمین حالت‌ها به میزان قابل توجهی افزایش پیدا می‌کند که باعث بی‌اعتبار شدن این روش‌ها برای تخمین حالت با وجود نوبز رنگی می‌گردد.

بنابراین کارهایی که تاکنون در حوزه تخمین در سیستم‌های مرتبه کسری خطی انجام گرفته است بر بررسی و بهبود عملکرد فیلترهای ارائه شده برای تخمین حالت تمرکز داشته است. همچنین سیستم‌های مورد بررسی در این مقالات دارای نوبز اندازه‌گیری سفید می‌باشند. اما در این مقاله علاوه بر در نظر گرفتن نوبز اندازه‌گیری رنگی، دو فیلتر جدید ارائه گردیده است که حجم محاسبات و همچنین خطای تخمین را در مقایسه با کارهای گذشته کاهش قابل توجهی می‌دهد. در این مقاله از روش تفاضل‌گیری از اندازه‌گیری‌ها برای حل مشکل رنگی بودن استفاده شده که به دلیل سادگی در پیاده‌سازی مورد توجه می‌باشد. تاکنون از روش تفاضل‌گیری از اندازه‌گیری‌ها برای حل مشکل رنگی بودن نوبز در سیستم‌های مرتبه کسری استفاده نشده است.

با این وجود، تاکنون کاری در زمینه تخمین حالت در سیستم‌های مرتبه کسری خطی با وجود نوبز اندازه‌گیری رنگی و همچنین زمانی که بین نوبز فرآیند و اندازه‌گیری همبستگی وجود داشته باشد، انجام نشده است.

در این مقاله با ارائه دو فیلتر جدید سعی بر حل مشکل رنگی بودن نوبز اندازه‌گیری در یک سیستم فضای حالت مرتبه کسری خطی شده است.

در واقع در روش اول با به دست آوردن خروجی جدید، سیستم با نوبز اندازه‌گیری رنگی را به یک سیستم با نوبز فرآیند و اندازه‌گیری همبسته تبدیل می‌کنیم. برای ارائه فیلتری که در روش اول بیان می‌گردد از بسط روش تفاضل‌گیری از اندازه‌ها که در [۱۹] ارائه گردیده است استفاده می‌شود. روش تفاضل‌گیری اندازه‌گیری‌ها یک راه حل برای حل کردن مشکل رنگی بودن نوبز اندازه‌گیری می‌باشد اما روش تفاضل‌گیری از اندازه‌گیری‌ها که در [۱۹] بیان شده، برای سیستم‌های مرتبه صحیح مناسب بوده و قابل استفاده برای سیستم‌های مرتبه کسری نمی‌باشد. بنابراین با بسط روش تفاضل‌گیری از اندازه‌گیری‌ها می‌توان آن را به شکلی درآورد که مناسب برای سیستم‌های مرتبه کسری باشد.

در روش دوم نیز از روش تفاضل‌گیری از اندازه‌گیری‌ها استفاده شده است اما با فرمول‌بندی متفاوت که باعث ایجاد خروجی متفاوتی نسبت به روش اول می‌گردد. این فرمول‌بندی بر مبنای سیستم‌های مرتبه کسری است.

ادامه مقاله به صورت زیر تنظیم شده است. در بخش ۲ به بیان مسئله و معرفی یک سیستم فضای حالت مرتبه کسری خطی با نوبز اندازه‌گیری رنگی پرداخته شده است. در بخش ۳ دو روش جدید به منظور حل مشکل رنگی بودن نوبز به صورت چند قضیه بیان شده است. در بخش ۴ یک مثال کاربردی برای بررسی صحت دو روش بیان شده در مقاله و در بخش ۵ نتیجه‌گیری آورده شده است.

۲- سیستم‌های مرتبه کسری

در این بخش دو تعریف از سیستم‌های مرتبه کسری ارائه می‌گردد. از این دو تعریف در ادامه به منظور به دست آوردن دو فیلتر مرتبه کسری در بخش (۳) استفاده می‌شود.

تعریف ۱: اختلاف مرتبه کسری گرانوالد-لتنیخوف گسسته زمان

به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۲]:

$$\Delta^n X(k) = \frac{1}{h^n} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{n}{j} X(k-j) \quad (1)$$

که در اینجا $n \in \mathbb{R}$ مرتبه کسری سیستم و \mathbb{R} مجموعه‌ای از اعداد حقیقی می‌باشد. h زمان نمونه‌برداری بوده که در ادامه ۱ فرض می‌شود و k نیز نشان‌دهنده زمان می‌باشد. دوجمله‌ای نیوتون $\binom{n}{j}$ برای مرتبه‌های غیر صحیح، توسعه یافته بوده که با استفاده از تابع اولر به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$\binom{n}{j} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)} \quad (2)$$

در اینجا تابع اولر $\Gamma(\cdot)$ به ازای $v > 0$ به صورت زیر تعریف

می‌شود:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-v} v^{x-1} dv \quad (3)$$

در [۱۸] با تعمیم مدل فضای حالت گسسته زمان تصادفی سنتی

(مرتبه صحیح) یک مدل فضای حالت گسسته زمان تصادفی برای سیستم‌های مرتبه کسری با نویز اندازه‌گیری و فرآیند سفید و ناهمبسته به دست آورده شده است. بنابراین می‌توان سیستم فضای حالت بیان شده در [۱۸] را، در حالتی که نویز اندازه‌گیری رنگی باشد به صورت زیر بازنویسی کرد:

تعریف ۲: سیستم تصادفی مرتبه کسری گسسته زمان در فرم

فضای حالت با نویز اندازه‌گیری رنگی به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

$$\Delta^r X(k+1) = AX(k) + Bu(k) + W(k) \quad (4)$$

$$X(k+1) = \Delta^r X(k+1) + \sum_{j=1}^{k+1} C_j X(k+1-j) \quad (5)$$

$$y(k) = HX(k) + v(k) \quad (6)$$

$$v(k) = \psi v(k-1) + e(k-1) \quad (7)$$

در اینجا e یک نویز سفید گوسی با میانگین صفر بوده و همچنین $v(k)$ نویز اندازه‌گیری رنگی می‌باشد. همچنین C_j به صورت زیر قابل تعریف می‌باشد:

$$C_j = (-1)^{j+1} \text{diag} \left[\binom{\gamma_1}{j} \quad \dots \quad \binom{\gamma_n}{j} \right] \quad (8)$$

در صورتی که مرتبه‌های کسری یکسان نباشند معادلات (۴) و (۵)

به صورت زیر تعمیم داده می‌شوند:

$$\Delta^r X(k+1) = AX(k) + Bu(k) + W(k) \quad (9)$$

$$X(k+1) = \Delta^r X(k+1) + \sum_{j=1}^{k+1} C_j X(k+1-j) \quad (10)$$

در اینجا Y مرتبه اختلاف کسری نامیده می‌شود $(Y = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\} \in \mathbb{R}^n)$ و بردار حالت می‌باشد $(X(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \dots \ x_n(k)]^T \in \mathbb{R}^n)$.

به ترتیب $W(k) = [w_1(k) \ w_2(k) \ \dots \ w_n(k)]$ و $v(k)$ به ترتیب نویزهای فرآیند و اندازه‌گیری می‌باشند. $W(k)$ یک نویز سفید گوسی با میانگین صفر و $v(k)$ نویز اندازه‌گیری رنگی است. $u(k)$ و $y(k)$ ورودی و خروجی سیستم هستند. به علاوه، T بیانگر ترانهاده بردار یا ماتریس مورد نظر است. ماتریس‌های سیستم A, B معلوم می‌باشند.

بردار فضای حالت $\Delta^r X(k+1)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\Delta^r X(k+1) = \begin{bmatrix} \Delta^{\gamma_1} x_1(k+1) \\ \vdots \\ \Delta^{\gamma_n} x_n(k+1) \end{bmatrix} \quad (11)$$

کوواریانس نویز سفید e و نویز فرآیند W و همچنین کراس کوواریانس بین نویز فرآیند W و نویز e به صورت زیر قابل محاسبه است:

$$W(k) \sim N(0, Q(k))$$

$$e(k) \sim N(0, Q_e(k))$$

$$E[W(k)W^T(j)] = Q(k)\delta(k-j)$$

$$E[e(k)e^T(j)] = Q_e(k)\delta(k-j)$$

$$E[W(k)e^T(j)] = 0, \forall k, j$$

دو عامل اصلی را می‌توان در مورد پایداری بیان کرد. اول موقعیت مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشد. هر چقدر این مقادیر از مرز ناپایداری دورتر باشند میزان پایداری سیستم بیش‌تر می‌باشد. مقاله [۲۰] به طور کامل مسئله پایداری و همچنین تعیین مقادیر ویژه برای سیستم‌های مرتبه کسری را مورد بررسی قرار داده است.

مسئله پایداری در سیستم‌های مرتبه کسری در مقایسه با سیستم‌های مرتبه صحیح متفاوت است. به این صورت که حتی ممکن است یک سیستم پایدار مرتبه کسری ریشه‌هایی در سمت راست محور موهومی داشته باشد. بنابراین موضوع پایداری سیستم بیان شده در معادلات (۹) و (۱۰) طی یک نکته به صورت زیر قابل بیان می‌باشد:

نکته: سیستم بیان شده در معادلات (۹) و (۱۰) پایدار است اگر شرط زیر برآورده شود [۲۳]:

$$\left| \arg(\text{eig}(A)) \right| > \frac{\pi}{2}$$

که در اینجا، Y نشان‌دهنده مرتبه کسری سیستم بوده و همچنین $\text{eig}(A)$ نشان‌دهنده مقادیر ویژه ماتریس A می‌باشد.

بنابراین از نکته بالا این نتیجه گرفته می‌شود که انتخاب مرتبه کسری (Y) در تعیین مرز پایداری تأثیرگذار است.

همچنین مقدار L که در شبیه‌سازی ثابت و برابر ۵۰ در نظر گرفته شده را می‌توان به عنوان دومین عامل تأثیرگذار در پایداری دانست. به عبارت دیگر هر چه L بزرگ‌تر باشد خطا کم‌تر شده و

بنابراین خروجی جدید را می‌توان به صورت زیر تشکیل داد:

$$\begin{aligned} z(k-1) &= (HX(k) + v(k)) - \psi(HX(k-1) + v(k-1)) \\ &= H \left(AX(k-1) + Bu(k) + W(k-1) + \sum_{j=1}^k C_j X(k-j) \right) \\ &\quad + v(k) - \psi(HX(k-1) + v(k-1)) \\ &= (HA - \psi H) X(k-1) + HBu(k-1) \\ &\quad + H \left(\sum_{j=1}^k C_j X(k-j) \right) + (HW(k-1) + v(k) - \psi v(k-1)) \\ &= (HA - \psi H) X(k-1) + HBu(k-1) \\ &\quad + H \left(\sum_{j=1}^k C_j X(k-j) \right) + (HW(k-1) + e(k-1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z(k-1) &= H'X(k-1) + HBu(k-1) \\ &\quad + H \left(\sum_{j=1}^k C_j X(k-j) \right) + v'(k-1) \end{aligned} \quad (14)$$

که H' و $v'(k-1)$ به وسیله معادلات زیر تعریف می‌شوند:

$$H' = HA - \psi H \quad (15)$$

$$v'(k-1) = HW(k-1) + e(k-1) \quad (16)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود یک معادله اندازه‌گیری جدید برای اندازه‌گیری $z(k)$ به دست آمده است. بنابراین سیستم معادل جدید را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} z(k) &= H'X(k) + HBu(k) \\ &\quad + H \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j X(k+1-j) \right) + v'(k) \end{aligned} \quad (17)$$

کوواریانس نویز اندازه‌گیری جدید v' و همچنین کراس کوواریانس بین نویز فرآیند W و نویز اندازه‌گیری جدید v' به صورت زیر به دست آورده می‌شود:

$$E[W(k)W^T(j)] = Q(k)\delta(k-j) \quad (18)$$

$$E[e(k)e^T(k)] = Q_e(k)\delta(k-j) \quad (19)$$

$$\begin{aligned} E[v'(k)v'^T(k)] \\ &= E[(HW(k) + e(k))(HW(k) + e(k))^T] \\ &= HQ(k)H^T + Q_e(k) = R'(k) \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} E[W(k)v'^T(k)] &= E[W(k)(HW(k) + e(k))^T] \\ &= E[W(k)(W^T(k)H^T + e^T(k))] \\ &= Q(k)H^T = M(k) \end{aligned} \quad (21)$$

همان‌طور که در معادله (۲۱) مشاهده می‌شود بین نویز فرآیند و نویز اندازه‌گیری سیستم معادل جدید همبستگی وجود دارد. بنابراین برای تخمین سیستم معادل جدید نیاز به ارائه یک فیلتر کالمن کسری مناسب می‌باشد.

در اینجا، $n_{(1)}$ باقی‌مانده اندازه‌گیری نامیده می‌شود که با توجه به خروجی کمکی به دست آمده در معادله (۱۴) به صورت زیر تعریف می‌شود:

در نتیجه احتمال ناپایدار شدن سیستم در اثر این خطا کاهش می‌یابد. طبق مقاله [۲۳] و نتایج شبیه‌سازی کوچک در نظر گرفتن مقدار L خطا را افزایش داده و باعث خراب شدن پاسخ‌ها می‌گردد.

نویز اندازه‌گیری بیان شده در معادله (۶)، خروجی یک سیستم خطی می‌باشد که این سیستم خطی در معادله (۷) بیان شده است. کوواریانس نویز اندازه‌گیری به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\begin{aligned} E[v(k)v^T(k-1)] \\ &= E[(\psi v(k-1) + e(k-1))v^T(k-1)] \\ &= \psi E[v(k-1)v^T(k-1)] \end{aligned} \quad (12)$$

سیستم فضای حالت مرتبه کسری بیان شده در تعریف ۲ که دارای نویز اندازه‌گیری رنگی می‌باشد با استفاده از فیلتر کالمن ارائه شده در [۱۸] قابل پیاده‌سازی نیست به این خاطر که نویز اندازه‌گیری همان‌طور که در معادله (۱۲) بیان شده است از نظر زمانی همبسته می‌باشد. یکی از راه‌های حل مشکل رنگی بودن نویز اندازه‌گیری استفاده از روش تفاضل‌گیری از اندازه‌ها است اما این روش مناسب برای سیستم‌های مرتبه صحیح می‌باشد [۱۹]. بنابراین با بسط این روش می‌توان آن را به شکلی در آورد تا قابل استفاده برای سیستم‌های مرتبه کسری باشد. برای این منظور از یک سیگنال کمکی مانند $z(k)$ استفاده می‌شود. نحوه به دست آوردن این سیگنال در ادامه توضیح داده خواهد شد.

در این مقاله دو روش جدید برای حل این مشکل در سیستم‌های مرتبه کسری ارائه خواهد شد. هر دو روش بر مبنای روش تفاضل‌گیری از اندازه‌گیری‌ها می‌باشند.

۳- توسعه‌های فیلتر کالمن مرتبه کسری

تخمین حالت در سیستم‌های با نویز رنگی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌باشد. در این بخش سعی شده است تا دو فیلتر کالمن مرتبه کسری جدید برای تخمین حالت در سیستم‌های مرتبه کسری با نویز اندازه‌گیری رنگی ارائه گردد. این دو فیلتر در غالب چند قضیه در ادامه بیان گردیده است.

۳-۱- روش اول

در این روش با بهره‌گیری از روش تفاضل‌گیری از اندازه‌گیری‌ها که مناسب برای سیستم‌های مرتبه کسری می‌باشد سیستم معادل جدیدی برای خروجی به صورت زیر به دست آورده می‌شود. نخستین بار در [۱۹] روش تفاضل‌گیری از اندازه‌گیری‌ها برای سیستم‌های مرتبه صحیح ارائه شد. بنابراین با بسط این روش می‌توان آن را به شکلی در آورد تا قابل استفاده برای سیستم‌های مرتبه کسری باشد. برای این منظور سیگنال کمکی $z(k)$ به صورت زیر تعریف می‌شود. با استفاده از این معادله کمکی، سیستم معادل جدید در ادامه به دست آورده می‌شود.

$$z(k-1) = y(k) - \psi y(k-1) \quad (13)$$

$$E\left[\left(X(k) - \hat{X}^-(k)\right)\left(v'(k)\right)^T\right] = 0$$

بنابراین می‌توان بهره کالمن $K_{(1)}$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$K_{(1)} = P_{\hat{X}^-(k), n_{(1)}} \sum_{(1)}^{-1} \quad (27)$$

با توجه به معادلات (۲۲) و (۲۷)، بردار حالت $\hat{X}^+(k)$ به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\hat{X}^+(k) = \hat{X}^-(k) + K_{(1)} n_{(1)} \quad (28)$$

قضیه ۲: ماتریس کوواریانس خطای تخمین P_k^+ به صورت زیر می‌باشد:

$$P_k^+ = P_k^- + K_{(1)} \sum_{(1)}^T K_{(1)}^T - P_k^- \left(H'^T + C_1^T H^T \right) - \left(H' + HC_1 \right) P_k^- \quad (29)$$

اثبات: برای دست آوردن ماتریس کوواریانس خطای تخمین از معادلات (۲۲) و (۲۸) و همچنین تعریف ۲ به صورت زیر استفاده می‌شود:

$$\begin{aligned} P_k^+ &= E\left[\left(X(k) - \hat{X}^+(k)\right)\left(X(k) - \hat{X}^+(k)\right)^T\right] \\ &= E\left[\left(X(k) - \hat{X}^-(k) - K_{(1)} n_{(1)}\right)\left(X(k) - \hat{X}^-(k) - K_{(1)} n_{(1)}\right)^T\right] \\ &= E\left[\left(X(k) - \hat{X}^-(k)\right)\left(X(k) - \hat{X}^-(k)\right)^T\right] \\ &\quad + E\left[\left(K_{(1)} n_{(1)}\right)\left(K_{(1)} n_{(1)}\right)^T\right] \\ &\quad - E\left[\left(X(k) - \hat{X}^-(k)\right)\left(K_{(1)} n_{(1)}\right)^T\right] \\ &\quad - E\left[\left(K_{(1)} n_{(1)}\right)\left(X(k) - \hat{X}^-(k)\right)^T\right] \end{aligned} \quad (30)$$

در این قسمت با جایگزین کردن مقدار $n_{(1)}$ در معادله (۳۰) و توجه به اینکه $n_{(1)}$ متشکل از حالت‌های $X(k)$ و $\hat{X}^-(k)$ می‌باشد، مقدار نهایی برای P_k^+ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P_k^+ &= P_k^- + K_{(1)} \sum_{(1)}^T K_{(1)}^T - E\left[\left(X(k) - \hat{X}^-(k)\right)\left(\left(H' + HC_1\right)\left(X(k) - \hat{X}^-(k)\right)\right)^T\right] \\ &\quad - E\left[\left(\left(H' + HC_1\right)\left(X(k) - \hat{X}^-(k)\right)\right)\left(X(k) - \hat{X}^-(k)\right)^T\right] \\ &= P_k^- + K_{(1)} \sum_{(1)}^T K_{(1)}^T - P_k^- \left(H'^T + C_1^T H^T \right) - \left(H' + HC_1 \right) P_k^- \end{aligned} \quad (31)$$

معادلات (۹) و (۱۰) به طور مستقیم قابل استفاده نمی‌باشند به این دلیل که $W(k)$ در معادله (۹) و $v'(k)$ در معادله (۱۷) وابسته می‌باشند بنابراین می‌توان $X(k)$ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} n_{(1)} &= z(k) - \hat{z}(k | k-1) = z(k) - H' \hat{X}^-(k) \\ &\quad - HBu(k) - H \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j \hat{X}^-(k+1-j) \right) \end{aligned} \quad (22)$$

قضیه ۱: کوواریانس باقی‌مانده اندازه‌گیری $n_{(1)}$ و همچنین کراس کوواریانس بین $n_{(1)}$ و $X(k)$ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sum_{(1)} &= H' P_k^- H'^T + H' P_k^- C_1^T H^T + HC_1 P_k^- H'^T \\ &\quad + H \left(\sum_{j=2}^{k+1} C_j P_{k+1-j}^- C_j^T \right) H^T + R'(k) \end{aligned} \quad (23)$$

$$P_{\hat{X}^-(k), n_{(1)}} = P_k^- H'^T + P_k^- C_1^T H^T \quad (24)$$

اثبات: برای به دست آوردن کوواریانس باقی‌مانده اندازه‌گیری $n_{(1)}$ و همچنین کراس کوواریانس بین $n_{(1)}$ و $X(k)$ که به ترتیب با $\sum_{(1)}$ و $P_{\hat{X}^-(k), n_{(1)}}$ نشان داده می‌شوند، می‌توان به کمک تعریف ۲ و معادله (۲۲) به صورت زیر عمل کرد:

$$\begin{aligned} \sum_{(1)} &= \text{cov}\left[n_{(1)}\right] = E\left[\left\{H' \left(X(k) - \hat{X}^-(k)\right) + H \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j \left(X(k+1-j) - \hat{X}^-(k+1-j)\right) + v'(k) \right) \right\} \left\{H' \left(X(k) - \hat{X}^-(k)\right) + H \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j \left(X(k+1-j) - \hat{X}^-(k+1-j)\right) + v'(k) \right) \right\}^T\right] \\ &= H' P_k^- H'^T + H' P_k^- C_1^T H^T + HC_1 P_k^- H'^T + H \left(\sum_{j=2}^{k+1} C_j P_{k+1-j}^- C_j^T \right) H^T + R'(k) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} P_{\hat{X}^-(k), n_{(1)}} &= \text{cov}\left[X(k), n_{(1)}\right] \\ &= E\left[\left\{X(k) - \hat{X}^-(k)\right\} \left\{H' \left(X(k) - \hat{X}^-(k)\right) + H \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j \left(X(k+1-j) - \hat{X}^-(k+1-j)\right) + v'(k) \right) \right\}^T\right] \\ &= P_k^- H'^T + P_k^- C_1^T H^T \end{aligned} \quad (26)$$

چون محاسبه همبستگی بین عبارت‌های $E[X(k)X(j)]$ برای $k \neq j$ سخت بوده و همچنین تأثیر چندانی در نتیجه نهایی ندارند، در محاسبات در نظر گرفته نمی‌شوند.

در معادلات (۲۵) و (۲۶)، $\hat{X}^-(k)$ و $X(k)$ مستقل از $v'(k)$ هستند چون که از نظر زمانی باهم مطابقت ندارند و همچنین $v'(k)$ دارای میانگین صفر می‌باشد. بنابراین داریم:

اثبات: با بهره‌گیری از معادله (۳۵)، ماتریس کوواریانس خطای

P_{k+1}^- به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P_{k+1}^- &= E\left[\left(X(k+1) - \hat{X}^-(k+1)\right)\left(X(k+1) - \hat{X}^-(k+1)\right)^T\right] \\ &= E\left\{F\left(X(k) - \hat{X}^+(k)\right) + (1 - JH)\right. \\ &\quad \left.\left\{\sum_{j=1}^{k+1} C_j \left(X(k+1-j) - \hat{X}^+(k+1-j)\right)\right\} + \varepsilon(k)\right\} \\ &\quad \left\{F\left(X(k) - \hat{X}^+(k)\right) + (1 - JH)\right. \\ &\quad \left.\left\{\sum_{j=1}^{k+1} C_j \left(X(k+1-j) - \hat{X}^+(k+1-j)\right)\right\} + \varepsilon(k)\right\}^T \\ &= FP_k^+ F^T + FP_k^+ C_1^T (1 - JH)^T + (1 - JH) C_1 P_k^+ F^T \\ &\quad + (1 - JH) \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j P_{k+1-j}^+ C_j^T\right) (1 - JH)^T + Q'(k) \end{aligned} \quad (37)$$

بنابراین برای سیستم تصادفی مرتبه کسری گسسته زمان در شکل فضای حالت با نویز اندازه‌گیری رنگی که در غالب تعریف ۲ بیان گردید، فیلتر کالمن مرتبه کسری به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \sum_{(1)} &= H^T P_k^- H^{TT} + H^T P_k^- C_1^T H^T + H C_1 P_k^- H^{TT} \\ &\quad + H \left(\sum_{j=2}^{k+1} C_j P_{k+1-j}^- C_j^T\right) H^T + R'(k) \end{aligned} \quad (38)$$

$$P_{\hat{X}^-(k), n_{(1)}}^- = P_k^- H^{TT} + P_k^- C_1^T H^T \quad (39)$$

$$K_{(1)} = P_{\hat{X}^-(k), n_{(1)}}^- \sum_{(1)}^{-1} \quad (40)$$

$$\hat{X}^+(k) = \hat{X}^-(k) + K_{(1)} n_{(1)} \quad (41)$$

$$P_k^+ = P_k^- + K_{(1)} \sum_{(1)}^T K_{(1)}^T - P_k^- \left(H^{TT} + C_1^T H^T\right) \quad (42)$$

$$\begin{aligned} &- (H' + H C_1) P_k^- \\ z(k) &= H' X(k) + H B u(k) \\ &\quad + H \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j X(k+1-j)\right) + v'(k) \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \hat{X}^-(k+1) &= F \hat{X}^+(k) + B' u(k) \\ &\quad + (1 - JH) \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j \hat{X}^+(k+1-j)\right) + J z(k) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} P_{k+1}^- &= FP_k^+ F^T + FP_k^+ C_1^T (1 - JH)^T \\ &\quad + (1 - JH) C_1 P_k^+ F^T \\ &\quad + (1 - JH) \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j P_{k+1-j}^+ C_j^T\right) (1 - JH)^T + Q'(k) \end{aligned} \quad (45)$$

$$H' = HA - \psi H$$

$$v'(k) = HW(k) + e(k)$$

$$R'(k) = HQ(k)H^T + Q_e(k)$$

$$M(k) = Q(k)H^T$$

که در اینجا

$$\begin{aligned} X(k+1) &= AX(k) + Bu(k) + W(k) \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k+1} C_j X(k+1-j) \\ &\quad + J\{z(k) - H'X(k) - HBu(k) \\ &\quad - H\left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j X(k+1-j)\right) - v'(k)\} \\ &= (A - JH')X(k) + (B - JHB)u(k) \\ &\quad + (1 - JH) \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j X(k+1-j)\right) + W(k) \\ &\quad - Jv'(k) + Jz(k) \\ &= FX(k) + B'u(k) \\ &\quad + (1 - JH) \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j X(k+1-j)\right) + \varepsilon(k) + Jz(k) \end{aligned} \quad (32)$$

همچنین داریم:

$$F = A - JH'$$

$$\varepsilon(k) = W(k) - Jv'(k)$$

با توجه به اینکه

$$z(k) - H'X(k) - HBu(k) - H\left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j X(k+1-j)\right) - v'(k) \equiv 0$$

می‌باشد معادله به دست آمده در (۳۲) معادل با معادلات بیان شده در (۹) و (۱۰) است. بنابراین مهم نیست مقدار J (با ابعاد مشخص) چقدر باشد. با این حال اگر مقدار J به صورت زیر انتخاب شود مقدار $\text{cov}(\varepsilon(k), v'(k)) = 0$ خواهد شد.

$$J = M(k)R'^{-1}(k) \quad (33)$$

سپس

$$\begin{aligned} Q'(k) &= \text{cov}[\varepsilon(k)] \\ &= E\left[(W(k) - Jv'(k))(W(k) - Jv'(k))^T\right] \\ &= Q(k) + JR'(k)J^T - M(k)J^T - JM^T(k) \end{aligned} \quad (34)$$

با توجه به معادله (۳۲) که یک شکل جدید برای سیستم فضای حالت مرتبه کسری به دست آورده شده است، می‌توان $\hat{X}^-(k+1)$ را به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{aligned} \hat{X}^-(k+1) &= F \hat{X}^+(k) + B' u(k) \\ &\quad + (1 - JH) \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j \hat{X}^+(k+1-j)\right) + J z(k) \end{aligned} \quad (35)$$

قضیه ۳: ماتریس کوواریانس خطای تخمین P_{k+1}^- به صورت زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} P_{k+1}^- &= FP_k^+ F^T + FP_k^+ C_1^T (1 - JH)^T + (1 - JH) C_1 P_k^+ F^T \\ &\quad + (1 - JH) \left(\sum_{j=1}^{k+1} C_j P_{k+1-j}^+ C_j^T\right) (1 - JH)^T + Q'(k) \end{aligned} \quad (36)$$

معادله حالت $X(k)$ بیان شده در معادلات (۹) و (۱۰) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند:

$$X(k-1) = A^{-1} \{ X(k) - Bu(k-1) - W(k-1) - \sum_{j=1}^k C_j X(k-j) \} \quad (48)$$

با جایگزین کردن معادله (۴۸) در معادله (۴۷) می‌توان $z(k-1)$ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} z(k-1) &= HX(k) - \psi HX(k-1) + e(k-1) \\ &= HX(k) - \psi HA^{-1} \{ X(k) - Bu(k-1) - W(k-1) - \sum_{j=1}^k C_j X(k-j) \} + e(k-1) \\ &= (H - \psi HA^{-1}) X(k) + \psi HA^{-1} Bu(k-1) + \psi HA^{-1} \left(\sum_{j=1}^k C_j X(k-j) \right) \\ &\quad + (\psi HA^{-1} W(k-1) + e(k-1)) \\ z(k-1) &= LX(k) + \Gamma Bu(k-1) + \Gamma \left(\sum_{j=1}^k C_j X(k-j) \right) + \xi(k-1) \end{aligned} \quad (49)$$

مقادیر L, Γ و ξ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} L &= H - \psi HA^{-1} \\ \Gamma &= \psi HA^{-1} \\ \xi(k-1) &= \Gamma W(k-1) + e(k-1) \end{aligned}$$

بنابراین، کوواریانس نویز اندازه‌گیری جدید ξ و همچنین کوواریانس بین نویز فرآیند و نویز خروجی که با $M(k)$ نشان داده شده است؛ به صورت زیر می‌باشند:

$$R'(k) = \text{cov}[\xi(k)] = \Gamma Q(k) \Gamma^T + R(k) \quad (50)$$

$$\begin{aligned} M(k) &= \text{cov}[W(k), \xi(k)] \\ &= \text{cov}[W(k), \Gamma W(k) + e(k)] = Q(k) \Gamma^T \end{aligned} \quad (51)$$

توجه شود که $\xi(k)$ نویز اندازه‌گیری جدید در سیستم معادل بیان شده در زمان k می‌باشد درحالی‌که تشکیل شده از ترکیب دو نویز در زمان k می‌باشد. بنابراین کراس-کوریلیشن بین $W(k)$ و $\xi(k)$ برابر است با $Q(k) \Gamma^T$ که نشان‌دهنده یک سیستم با نویز فرآیند و اندازه‌گیری همبسته می‌باشد. با در نظر گرفتن این همبستگی می‌توان فیلتر کالمن کسری مناسب برای تخمین حالت‌ها را در ادامه بیان کرد. با توجه به تعریف ۲ معادله حالت $\hat{X}^-(k+1)$ به صورت زیر است:

$$\hat{X}^-(k+1) = A \hat{X}^+(k) + Bu(k) + \sum_{j=1}^{k+1} C_j \hat{X}^+(k+1-j) \quad (52)$$

$$J = M(k) R'^{-1}(k)$$

$$B' = B - JHB$$

$$F = A - JH'$$

$$\varepsilon(k-1) = W(k-1) - Jv'(k)$$

توجه شود که اندیس (۱) در معادلات بالا نشان‌دهنده اولین روش و همچنین اندیس (۲) در ادامه بیان‌گر روش دوم می‌باشند. الگوریتم طی مراحل زیر قابل پیاده‌سازی می‌باشد:

- ۱- مقاردهی اولیه در لحظه $k=1$ و جمع‌آوری ورودی‌ها و خروجی‌ها $(u(k), z(k))$
- ۲- محاسبه $R'(k)$ ، $M(k)$ و J
- ۳- محاسبه ماتریس کوواریانس $P_{\hat{X}^-(k), n_{(1)}}(n_{(1)})$ باقی‌مانده اندازه‌گیری می‌باشد
- ۴- محاسبه ماتریس کوواریانس $\sum_{(1)}$
- ۵- به دست آوردن بردار بهره $K_{(1)}$
- ۶- محاسبه کوواریانس خطای تخمین پسین P_k^+
- ۷- تخمین بردار حالت پسین $\hat{X}^+(k)$
- ۸- تخمین بردار حالت پیشین $\hat{X}^-(k+1)$
- ۹- محاسبه کوواریانس خطای تخمین پیشین P_{k+1}^-
- ۱۰- افزایش مقدار k و بازگشت به مرحله ۳

الگوریتمی که در بالا ذکر و اثبات گردید یک روش جدید برای تخمین حالت‌های یک سیستم مرتبه کسری با نویز اندازه‌گیری خروجی می‌باشد.

۳-۲- روش دوم

در این روش نیز سعی به ارائه یک فیلتر کالمن مرتبه کسری جدید بر مبنای سیستم‌های مرتبه کسری با نویز اندازه‌گیری رنگی می‌باشد. در قضایایی که در ادامه بیان خواهد شد با استفاده از معادلات سیستم که در تعریف ۲ بیان شده است و همچنین روش اختلاف اندازه‌ها (البته با راهکاری متفاوت)، فیلتر کالمن مرتبه کسری جدید به دست می‌آید. در این روش با استفاده از معادله کمکی زیر می‌توان خروجی جدید $z(k)$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$z(k-1) = y(k) - \psi y(k-1) \quad (46)$$

بنابراین خروجی جدید سیستم به صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$\begin{aligned} z(k-1) &= y(k) - \psi y(k-1) = (HX(k) + v(k)) \\ &\quad - \psi (HX(k-1) + v(k-1)) \\ &= HX(k) + \psi v(k-1) + e(k-1) \\ &\quad - \psi HX(k-1) - \psi v(k-1) \\ &= HX(k) - \psi HX(k-1) + e(k-1) \end{aligned} \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_{(2)} &= \text{cov}[n_{(2)}] = E\{L(X(k) - \hat{X}^-(k)) \\ &+ \Gamma \left(\sum_{j=1}^k C_j (X(k-j) - \hat{X}^-(k-j)) \right) + \xi(k-1)\} \\ &\quad \{L(X(k) - \hat{X}^-(k)) \\ &+ \Gamma \left(\sum_{j=1}^k C_j (X(k-j) - \hat{X}^-(k-j)) \right) + \xi(k-1)\}^T \\ &= LP_k^- L^T + \Gamma \left(\sum_{j=1}^k C_j P_{k-j}^- C_j^T \right) \Gamma^T + R'(k-1) \\ &\quad - LP_{\hat{X}^-(k), \xi(k-1)}^- - \left(P_{\hat{X}^-(k), \xi(k-1)}^- \right)^T L^T \end{aligned} \quad (58)$$

در ادامه کوواریانس بین $X(k)$ و $\xi(k-1)$ محاسبه کرده و آن را $P_{\hat{X}^-(k), \xi(k-1)}^-$ می‌نامیم:

$$\begin{aligned} P_{\hat{X}^-(k), \xi(k-1)}^- &= \text{cov}[X(k), \xi(k-1)] \\ &= \text{cov}[W(k-1), \xi(k-1)] = M(k-1) \end{aligned} \quad (59)$$

همان‌طور که از معادله (۵۹) مشاهده می‌شود مقدار $P_{\hat{X}^-(k), \xi(k-1)}^-$ و $M(k-1)$ با یکدیگر برابر هستند. بنابراین در معادله (۵۸) به جای $P_{\hat{X}^-(k), \xi(k-1)}^-$ معادله $M(k-1)$ را جایگزین می‌کنیم. پس می‌توان $\Sigma_{(2)}$ را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} \Sigma_{(2)} &= LP_k^- L^T + \Gamma \left(\sum_{j=1}^k C_j P_{k-j}^- C_j^T \right) \Gamma^T \\ &+ R'(k-1) - LM(k-1) - M^T(k-1)L^T \end{aligned} \quad (60)$$

همچنین $P_{\hat{X}^-(k), n_{(2)}}^-$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} P_{\hat{X}^-(k), n_{(2)}}^- &= \text{cov}[X(k), n_{(2)}] \\ &= P_k^- L^T + \left(\sum_{j=1}^k P_{k-j}^- C_j^T \right) \Gamma^T + P_{\hat{X}^-(k), \xi(k-1)}^- \\ &= P_k^- L^T + \left(\sum_{j=1}^k P_{k-j}^- C_j^T \right) \Gamma^T + M(k-1) \end{aligned} \quad (61)$$

بهره کالمن $K_{(2)}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K_{(2)} = P_{\hat{X}^-(k), n_{(2)}}^- \Sigma_{(2)}^{-1} \quad (62)$$

با توجه به معادلات (۵۵) و (۶۲)، بردار حالت $\hat{X}^+(k)$ به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\hat{X}^+(k) = \hat{X}^-(k) + K_{(2)} n_{(2)} \quad (63)$$

قضیه ۶: ماتریس کوواریانس خطای تخمین P_k^+ به صورت زیر می‌باشد:

$$P_k^+ = P_k^- + K_{(2)} \Sigma_{(2)}^T K_{(2)}^T - P_k^- L^T - LP_k^- \quad (64)$$

قضیه ۴: ماتریس کوواریانس خطای تخمین P_{k+1}^- به صورت زیر می‌باشد:

$$P_{k+1}^- = AP_k^+ A^T + \sum_{j=1}^{k+1} C_j P_{k+1-j}^+ C_j^T + Q(k) \quad (53)$$

اثبات: با توجه به معادله (۵۲) و همچنین تعریف ۲، می‌توان ماتریس کوواریانس P_{k+1}^- را به صورت زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned} P_{k+1}^- &= E\{[X(k+1) - \hat{X}^-(k+1)] \\ &\quad [X(k+1) - \hat{X}^-(k+1)]^T\} \\ &= E\{[A(X(k) - \hat{X}^+(k)) \\ &+ \sum_{j=1}^{k+1} C_j (X(k+1-j) - \hat{X}^+(k+1-j)) + W(k)] \\ &\quad \{A(X(k) - \hat{X}^+(k)) \\ &+ \sum_{j=1}^{k+1} C_j (X(k+1-j) - \hat{X}^+(k+1-j)) + W(k)\}^T\} \\ &= AP_k^+ A^T + \sum_{j=1}^{k+1} C_j P_{k+1-j}^+ C_j^T + Q(k) \end{aligned} \quad (54)$$

همان‌طور که در روش اول نیز بیان شد از همبستگی جملات $E[X(k)X(j)]$ به ازای $k \neq j$ صرف‌نظر شده است با این فرض که این عبارات تأثیر چندانی در نتیجه نهایی ندارند. در اینجا، $n_{(2)}$ باقی‌مانده اندازه‌گیری نامیده می‌شود که با توجه به خروجی کمکی به دست آمده در معادله (۱۷) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} n_{(2)} &= z(k-1) - L\hat{X}^-(k) \\ &\quad - \Gamma Bu(k-1) - \Gamma \left(\sum_{j=1}^k C_j \hat{X}^-(k-j) \right) \end{aligned} \quad (55)$$

قضیه ۵: کوواریانس باقی‌مانده اندازه‌گیری $n_{(2)}$ و همچنین کراس کوواریانس بین $n_{(2)}$ و $X(k)$ به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned} \Sigma_{(2)} &= LP_k^- L^T + \Gamma \left(\sum_{j=1}^k C_j P_{k-j}^- C_j^T \right) \Gamma^T + R'(k-1) \\ &\quad - LM(k-1) - M^T(k-1)L^T \end{aligned} \quad (56)$$

$$P_{\hat{X}^-(k), n_{(2)}}^- = P_k^- L^T + \left(\sum_{j=1}^k P_{k-j}^- C_j^T \right) \Gamma^T + M(k-1) \quad (57)$$

اثبات: برای به دست آوردن کوواریانس باقی‌مانده اندازه‌گیری $n_{(2)}$ و همچنین کراس کوواریانس بین $n_{(2)}$ و $X(k)$ که به ترتیب با $\Sigma_{(2)}$ و $P_{\hat{X}^-(k), n_{(2)}}^-$ نشان داده می‌شوند، می‌توان به کمک تعریف ۲ و معادله (۵۵) به صورت زیر عمل کرد:

$$K_{(2)} = P_{\hat{X}^-(k), n_{(2)}}^{-1} \sum_{(2)}^{-1} \quad (72)$$

$$\hat{X}^+(k) = \hat{X}^-(k) + K_{(2)} n_{(2)} \quad (73)$$

$$P_k^+ = P_k^- - K_{(2)} \sum_{(2)} K_{(2)}^T \quad (74)$$

که در اینجا

$$L = H - \psi HA^{-1}$$

$$\Gamma = \psi HA^{-1}$$

$$M(k) = Q(k)\Gamma^T$$

$$R'(k) = \Gamma Q(k)\Gamma^T + R(k)$$

الگوریتم طی مراحل زیر قابل پیاده‌سازی می‌باشد:

- ۱- مقادری اولیه در لحظه $k=1$ و جمع‌آوری ورودی‌ها و خروجی‌ها $(u(k), z(k))$ همچنین محاسبه L و Γ .
- ۲- محاسبه $M(k)$ ، $R'(k)$.
- ۳- محاسبه ماتریس کوواریانس $P_{\hat{X}^-(k), n_{(2)}}^-$ باقی‌مانده اندازه‌گیری می‌باشد
- ۴- محاسبه ماتریس کوواریانس $\sum_{(2)}$
- ۵- به دست آوردن بردار بهره $K_{(2)}$
- ۶- محاسبه کوواریانس خطای تخمین پسین P_k^+
- ۷- تخمین بردار حالت پسین $\hat{X}^+(k)$
- ۸- تخمین بردار حالت پیشین $\hat{X}^-(k+1)$
- ۹- محاسبه کوواریانس خطای تخمین پیشین P_{k+1}^-
- ۱۰- افزایش مقدار k و بازگشت به مرحله ۳

۴- شبیه‌سازی

موضوع بهره‌وری از انرژی و ذخیره انرژی یکی از موضوعات مهم در صنعت می‌باشد. یکی از دستگاه‌های ذخیره‌سازی انرژی فوق خازن می‌باشد. همچنین فوق خازن‌ها وسایل الکتریکی هستند که قابلیت ذخیره انرژی قابل توجهی دارند در صورتی که خازن‌های سنتی این قابلیت را ندارند [۲۴]. موارد کاربرد این نوع خازن‌ها در شبکه هوشمند، وسایل نقلیه الکتریکی و هیبریدی و ... می‌باشد. این نوع خازن‌ها کاربردهای زیادی در صنعت دارند. به‌عنوان مثال با توجه به ساختار داخلی این نوع خازن‌ها، این قابلیت را دارند که مقدار زیادی انرژی را در زمان کوتاهی ذخیره نمایند.

با توجه به توان ویژه و طول عمر طولانی‌شان عناصر جالبی برای ذخیره انرژی الکتریکی در کاربردهایی مانند سیستم‌های ذخیره انرژی هیبریدی می‌باشند که به‌طور مشخص در وسایل الکتریکی هیبریدی استفاده می‌شوند [۲۵]. فوق خازن به‌عنوان یک سیستم انرژی کمکی در وسایل الکتریکی هیبریدی استفاده می‌شود.

اثبات: برای به دست آوردن ماتریس کوواریانس خطای تخمین از معادلات (۵۵) و (۶۳) و همچنین تعریف ۲ به‌صورت زیر استفاده می‌شود:

$$P_k^+ = E \left[\left(X(k) - \hat{X}^+(k) \right) \left(X(k) - \hat{X}^+(k) \right)^T \right] \\ = E \left[\left(X(k) - \hat{X}^-(k) - K_{(2)} n_{(2)} \right) \left(X(k) - \hat{X}^-(k) - K_{(2)} n_{(2)} \right)^T \right] \\ = E \left[\left(X(k) - \hat{X}^-(k) \right) \left(X(k) - \hat{X}^-(k) \right)^T \right] \\ + E \left[\left(K_{(2)} n_{(2)} \right) \left(K_{(2)} n_{(2)} \right)^T \right] \\ - E \left[\left(X(k) - \hat{X}^-(k) \right) \left(K_{(2)} n_{(2)} \right)^T \right] \\ - E \left[\left(K_{(2)} n_{(2)} \right) \left(X(k) - \hat{X}^-(k) \right)^T \right] \quad (65)$$

در این قسمت با جایگزین کردن مقدار $n_{(2)}$ در معادله (۶۵) و توجه به اینکه $n_{(2)}$ متشکل از حالت‌های $X(k)$ و $\hat{X}^-(k)$ می‌باشد مقدار نهایی برای P_k^+ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$P_k^+ = P_k^- + K_{(2)} \sum_{(2)}^T K_{(2)}^T \\ - E \left[\left(X(k) - \hat{X}^-(k) \right) \left(L \left(X(k) - \hat{X}^-(k) \right) \right)^T \right] \\ - E \left[\left(L \left(X(k) - \hat{X}^-(k) \right) \right) \left(X(k) - \hat{X}^-(k) \right)^T \right] \\ = P_k^- + K_{(2)} \sum_{(2)}^T K_{(2)}^T - P_k^- L^T - L P_k^- \quad (66)$$

بنابراین برای سیستم تصادفی مرتبه کسری گسسته زمان در شکل فضای حالت با نویز اندازه‌گیری رنگی که در تعریف ۲ بیان گردید فیلتر کالمن مرتبه کسری با استفاده از روش دوم به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\hat{X}^-(k) = A \hat{X}^+(k-1) + B u(k-1) + \sum_{j=1}^k C_j \hat{X}^+(k-j) \quad (67)$$

$$P_k^- = A P_{k-1}^+ A^T + \sum_{j=1}^k C_j P_{k-j}^+ C_j^T + Q(k-1) \quad (68)$$

$$n_{(2)} = z(k) - L \hat{X}^-(k) - \Gamma B u(k-1) \\ - \Gamma \left(\sum_{j=1}^k C_j \hat{X}^-(k-j) \right) \quad (69)$$

$$\sum_{(2)} = L P_k^- L^T + \Gamma \left(\sum_{j=1}^k C_j P_{k-j}^- C_j^T \right) \Gamma^T \\ + R'(k) - L M(k) - M^T(k) L^T \quad (70)$$

$$P_{\hat{X}^-(k), n_{(2)}}^- = P_k^- L^T + \left(\sum_{j=1}^k P_{k-j}^- C_j^T \right) \Gamma^T + M(k) \quad (71)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.035311 & 0.001815 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H = [-0.018624 \quad 0.188432], \quad Y = \{0.2, 0.2\}$$

تعداد عناصر در معادله (۱۰) باید محدود باشد که در اینجا مقدار برابر L گرفته شده است که باعث ساده‌سازی و کاهش محاسبات می‌گردد، هرچند باعث ایجاد مقداری خطا می‌شود که با در نظر گرفتن مقدار معقول برای L این مقدار خطا ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن می‌باشد. پس معادله (۱۰) به‌صورت زیر در می‌آید:

$$X(k+1) = \Delta^Y X(k+1) - \sum_{j=1}^L (-1)^j \binom{Y}{j} X(k+1-j)$$

در اینجا نیز یک حد مناسب برای L در نظر گرفته می‌شود. این مقدار برابر ۵۰ می‌باشد. معادلات حالت به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\Delta^Y X(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0.035311 & 0.001815 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k) + W(k)$$

$$X(k+1) = \Delta^Y X(k+1) - \sum_{j=1}^L (-1)^j \begin{pmatrix} 0.2 \\ j \\ 0 \\ 0.2 \\ j \end{pmatrix} X(k-1+j)$$

$$y(k) = [-0.018624 \quad 0.188432] X(k) + v(k)$$

$$v(k) = \psi v(k-1) + e(k-1), \quad \psi = 0.2$$

در اینجا e یک نویز سفید با میانگین صفر می‌باشد. همان‌طور که بیان شد، ψ نشان‌دهنده دینامیک نویز رنگی می‌باشد. بنابراین اگر $\psi = 0$ شود نویز اندازه‌گیری سفید خواهد شد. و همچنین با افزایش مقدار ψ میزان رنگی بودن نویز افزایش می‌یابد. در این مثال، از سه روش مختلف برای تخمین سیستم بیان شده که دارای نویز اندازه‌گیری رنگی با دینامیک ψ می‌باشند استفاده شده است. در روش اول، با استفاده از فیلتر کالمن معرفی شده در بخش ۳-۱ که مناسب برای سیستم‌هایی است که دارای نویز اندازه‌گیری رنگی می‌باشند برای تخمین استفاده می‌شود.

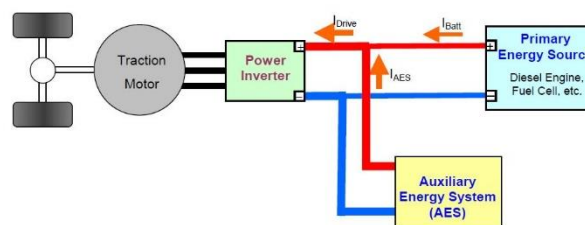
در روش دوم از فیلتر کالمن ارائه شده در بخش ۳-۲ برای تخمین حالت استفاده می‌شود. در روش سوم و آخر از فیلتر کالمن استاندارد مرتبه کسری بیان شده در [۱۸]، برای تخمین سیستم معرفی شده استفاده می‌شود. این سه روش در جدول ۱ به ازای مقادیر مختلف ψ و بر اساس میزان کوواریانس خطا با یکدیگر مقایسه شده‌اند. همان‌طور که از جدول قابل مشاهده است با افزایش مقدار ψ میزان خطا در

شکل ۱ نشان‌دهنده توپولوژی توان نوعی در وسایل الکتریکی هیبریدی می‌باشد. این مدل به‌وسیله یک سیستم انرژی الکتریکی در کنار باتری‌ها تغذیه می‌شود. یک مثال از سیستم انرژی کمکی که در وسایل الکتریکی هیبریدی استفاده می‌شود را می‌توان در شکل ۲ مشاهده کرد.

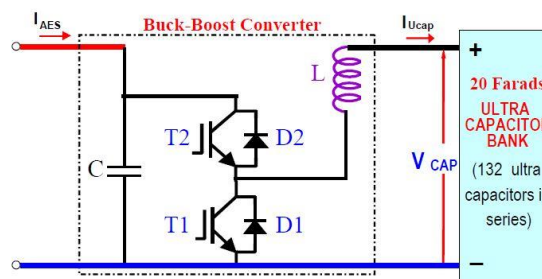
در یک سیستم انرژی کمکی مجموعه‌ای از فوق‌خازن‌ها استفاده شده است. در [۲۶] با استفاده از یک راه‌اندازی آزمایشی که به‌صورت یک مدار الکترونیکی در شکل ۳ به نمایش در آمده است یک فوق‌خازن مدل شده است. سیستم فضای حالت مرتبه کسری پیوسته زمان برای این مدل به‌صورت زیر قابل بیان است:

$$\frac{d^Y X(t)}{dt} = [a_0] X(t) + [b_0] u(t) \quad (75)$$

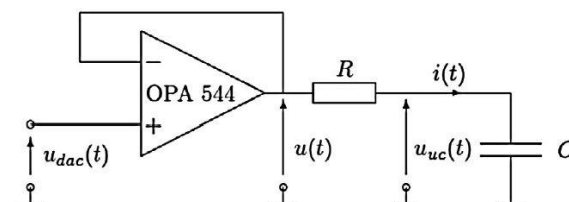
$$y(t) = [c_0] X(t) + [d_0] u(t) \quad (76)$$



شکل ۱: توپولوژی توان نوعی در وسایل الکتریکی هیبریدی [۲۷].



شکل ۲: یک مثال از سیستم انرژی کمکی که در وسایل الکتریکی هیبریدی [۲۷].

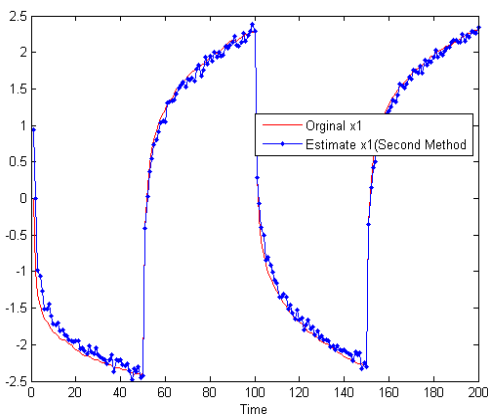


شکل ۳: شمای الکتریکی از سیستم یک فوق‌خازن [۲۶].

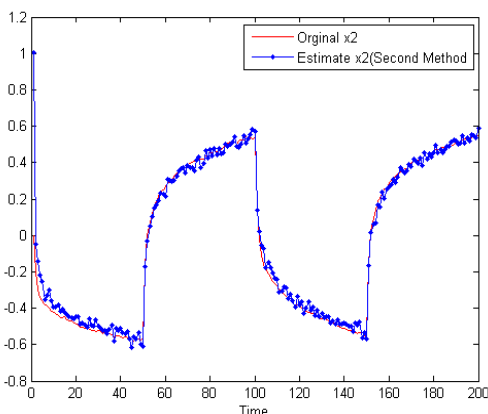
بنابراین سیستم فضای حالت مرتبه کسری گسسته زمان با نویز اندازه‌گیری رنگی جمع‌شونده به‌صورت زیر به دست می‌آید [۲۸]:

میزان خطای تخمین حالت‌ها با استفاده از روش اول در شکل ۸ و با استفاده از روش دوم در شکل ۹ نشان داده شده‌اند.

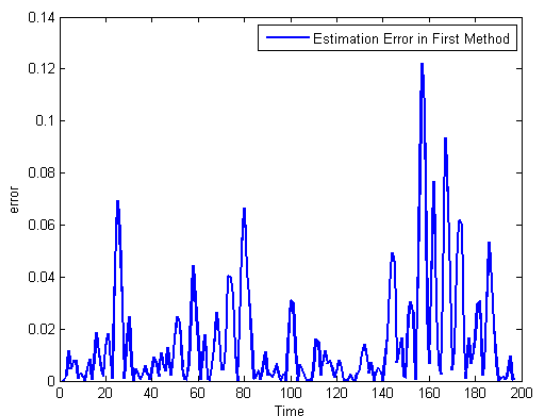
در جدول ۱ میزان ماتریس کوواریانس خطا با استفاده از سه روش مختلف نشان داده شده است و همان‌طور که توضیح داده شد و نیز در جدول ۱ قابل مشاهده است میزان کوواریانس خطای تخمین در دو روش جدیدی که در اینجا ارائه گردیده است مقدار کمتری نسبت به فیلتر کالمن استاندارد مرتبه کسری دارد.



شکل ۶: مقدار واقعی و تخمین زده شده x_1 برای $L=50$ با استفاده از روش دوم.



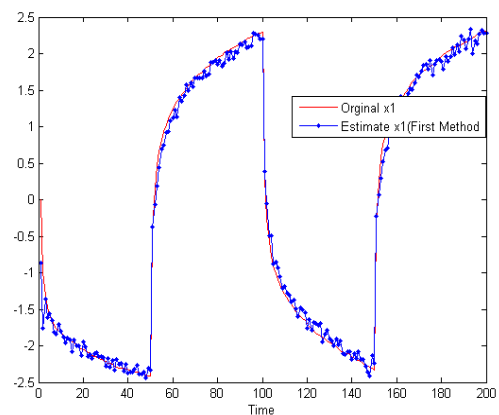
شکل ۷: مقدار واقعی و تخمین زده شده x_2 برای $L=50$ با استفاده از روش دوم.



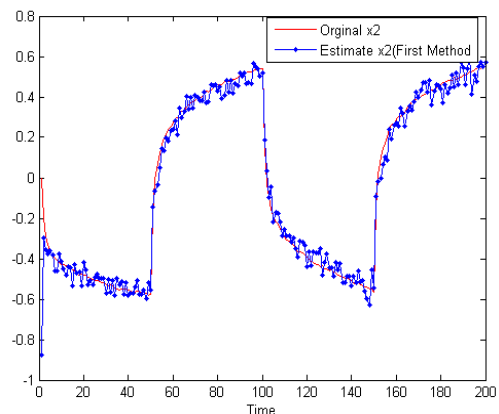
شکل ۸: مجموع مربعات خطای تخمین در روش اول

روش سوم در مقایسه با دو روش جدیدی که در این مقاله ارائه شده است بیش تر می‌باشد.

شکل‌های ۴ و ۵ و همچنین شکل‌های ۶ و ۷ نشان‌دهنده حالت‌های واقعی و تخمین زده شده x_1 و x_2 به ترتیب در روش‌های اول و دوم می‌باشند. همان‌طور که در این شکل‌ها قابل مشاهده است با وجود رنگی بودن نویز اندازه‌گیری، تخمین حالت‌های x_1 و x_2 به خوبی مقدار واقعی خود را دنبال می‌کنند. در صورتی که اگر از فیلتر کالمن مرتبه کسری استاندارد استفاده می‌کردیم، حالت‌ها با خطای بالایی تخمین زده می‌شدند. پس می‌توان این نتیجه را با توجه به جدول ۱ و شکل‌های ۴-۷ گرفت که دو فیلتر جدیدی که برای تخمین سیستم‌های مرتبه کسری در حضور نویز رنگی ارائه شده است عملکرد خوب و قابل قبولی دارند.



شکل ۴: مقدار واقعی و تخمین زده شده x_1 برای $L=50$ با استفاده از روش اول.



شکل ۵: مقدار واقعی و تخمین زده شده x_2 برای $L=50$ با استفاده از روش اول.

همچنین میزان خطای تخمین حالت‌ها در هر روش طبق فرمول زیر قابل محاسبه می‌باشد:

$$E = \sum_{i=1}^N (x_1 - \hat{x}_1)^2 + (x_2 - \hat{x}_2)^2 \quad (77)$$

که در اینجا N نشان‌دهنده تعداد تکرارهای الگوریتم‌ها است.

الگوریتم تخمین می‌باشد. به عبارت دیگر، هرچه شرایط اولیه بهتر انتخاب شده و به مقدار واقعی متغیرهای حالت نزدیک‌تر باشند؛ همگرایی سریع‌تر خواهد بود.

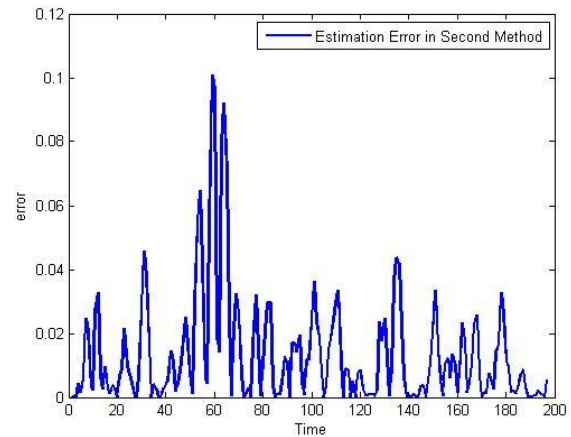
۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله دو فیلتر کالمن مرتبه کسری جدید ارائه شده است. هدف از ارائه این دو فیلتر حل کردن مشکل رنگی بودن نویز در سیستم‌های مرتبه کسری که دارای نویز اندازه‌گیری رنگی هستند می‌باشد. این دو فیلتر بر مبنای روش تفاضل‌گیری از اندازه‌گیری‌ها می‌باشند. با توجه به نتایج به دست آمده این دو روش در مقایسه با فیلتر کالمن مرتبه کسری استاندارد، در سیستم‌های دارای نویز رنگی از عملکرد بسیار مطلوب‌تری برخوردار می‌باشند.

در شبیه‌سازی با استفاده از روش مونت‌کارلو مشاهده گردید که روش‌های پیشنهادی در این مقاله در مقایسه با روش‌های ارائه شده قبلی از دقت تخمین بالاتری برخوردار بوده و میزان خطا نیز کاهش پیدا کرده است. همچنین از این دو فیلتر می‌توان برای تخمین حالت در سیستم‌های مرتبه کسری خطی با نویز سفید استفاده کرد زیرا نویز سفید حالت خاصی از نویز رنگی می‌باشد. با توجه به جدول ۱، این دو فیلتر حتی زمانی که نویز سفید باشد نیز عملکرد بهتری در مقایسه با روش‌های موجود دارند. همچنین با پیاده‌سازی دو فیلتر ارائه شده در این مقاله به جای روش‌هایی که تاکنون ارائه شده‌اند، حجم محاسبات به دلیل استفاده از روش تفاضل‌گیری از اندازه‌گیری‌ها به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد.

مراجع

- [1] I. Petras, *Fractional-order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation*, Springer Science & Business Media, 2011.
- [2] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*, vol. 198, Academic Press, 1998.
- [3] R. L. Bagley and R. Calico, "Fractional order state equations for the control of viscoelastically damped structures," *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 14, pp. 304-311, 1991.
- [4] J. Battaglia, J. C. Batsale, L. Le Lay, A. Oustaloup and O. Cois, "Heat flux estimation through inverted non-integer identification models; Utilisation de modeles d'identification non entiers pour la resolution de problemes inverses en conduction," *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 39, pp. 374-389, 2000.
- [5] P. J. Torvik and R. L. Bagley, "On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials," *Journal of Applied Mechanics*, vol. 51, pp. 294-298, 1984.
- [6] F. J. Valdes-Parada, J. Alberto Ochoa-Tapia and J. Alvarez-Ramirez, "Effective medium equations for fractional Fick's law in porous media," *Physica A*:



شکل ۹: مجموع مربعات خطای تخمین در روش دوم

از جدول ۱ این نتیجه گرفته می‌شود که دو فیلتر ارائه شده در این مقاله با افزایش میزان ψ (افزایش میزان رنگی بودن نویز) در مقایسه با روش‌های ارائه شده در [۲۹، ۱۸] عملکرد مطلوب‌تری داشته و میزان کوواریانس خطای تخمین به صفر نزدیک‌تر می‌باشد.

جدول ۱: مقادیر به دست آمده از کوواریانس خطای تخمین با استفاده از سه روش به ازای مقادیر مختلف ψ برای مرحله زمانی

روش دوم	روش اول	روش بیان شده در [۲۹]	فیلتر کالمن استاندارد [۱۸] (فرض $\psi = 0$)	میزان ψ
۰/۱۳۳	۰/۱۳۲	۰/۱۳۳	۰/۱۳۲	$\psi = 0$
۰/۱۴۶	۰/۱۴۴	۰/۱۵۰	۰/۱۵۲	$\psi = 0/۲$
۰/۱۶۸	۰/۱۶۷	۰/۱۷۹	۰/۱۸۶	$\psi = 0/۵$
۰/۲۹۹	۰/۲۹۶	۰/۳۴۳	۰/۴۲۳	$\psi = 0/۹$

با توجه به جدول ۱ اختلاف عملکرد روش اول و دوم چندان زیاد نیست اما همین تفاوت اندک را می‌توان به دلیل متفاوت بودن نحوه محاسبه خروجی کمکی $z(k)$ دانست. در روش اول خروجی کمکی ساده‌تر از روش دوم به دست می‌آید زیرا در روش دوم برای محاسبه خروجی کمکی نیاز به معکوس‌گیری است. به همین دلیل روش اول پاسخ نسبتاً بهتری دارد.

دو عامل مهم را می‌توان در سرعت همگرایی تخمین تأثیرگذار دانست. اول اینکه هر چقدر مقادیر ویژه ماتریس A از مرز ناپایداری دورتر باشند سرعت همگرایی تخمین بیش‌تر است. با توجه به اینکه در سیستم‌های مرتبه کسری مرز ناپایداری وابسته به مرتبه کسری سیستم (γ) می‌باشد انتخاب میزان γ در سرعت همگرایی تأثیرگذار است. مقاله [۲۳] به‌طور کامل مسئله پایداری و همچنین تعیین مقادیر ویژه برای سیستم‌های مرتبه کسری را مورد بررسی قرار داده است. عامل دومی که مؤثر در سرعت همگرایی بوده انتخاب شرایط اولیه در

- [18] D. Sierociuk and A. Dzieliniski, "Fractional Kalman filter algorithm for the states, parameters and order of fractional system estimation," *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, vol. 16, p. 129-140, 2006.
- [19] J. BRYSON and L. Henrikson, "Estimation using sampled data containing sequentially correlated noise," *Journal of Spacecraft and Rockets*, vol. 5, pp. 662-665, 1968.
- [20] D. Sierociuk and P. Ziubinski, "Fractional order estimation schemes for fractional and integer order systems with constant and variable fractional order colored noise," *Circuits, Systems, and Signal Processing*, vol. 33, pp. 3861-3882, 2014.
- [21] H. Sadeghian, H. Salarieh, A. Alasty and A. Meghdari, "On the general Kalman filter for discrete time stochastic fractional systems," *Mechatronics*, vol. 23, pp. 764-771, 2013.
- [22] K. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Press, New York, 1974.
- [23] I. Petras, "Stability of fractional-order systems with rational orders," *arXiv preprint arXiv:0811.4102*, 2008.
- [24] J. Quintana, A. Ramos and I. Nuez, "Identification of the fractional impedance of ultracapacitors," *In Fractional Differentiation and its Applications*, pp. 432-436, 2006.
- [25] N. Bertrand, J. Sabatier, O. Briat and J. M. Vinassa, "Fractional non-linear modelling of ultracapacitors," *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, vol. 15, pp. 1327-1337, 2010.
- [26] A. Dzieliniski and D. Sierociuk, "Ultracapacitor modelling and control using discrete fractional order state-space model," *Acta Montanistica Slovaca*, vol. 13, pp. 136-145, 2008.
- [27] J. W. Dixon, M. Ortúzar, and J. Moreno, "DSP based ultracapacitor system for hybrid electric vehicles," *Proceedings of 20th Electric Vehicle*, 2003.
- [28] A. Dzieliniski and D. Sierociuk, "Simulation and experimental tools for fractional order control education," *In Proc. IFAC*, 2008.
- [29] D. Sierociuk, "Fractional Kalman filter algorithms for correlated system and measurement noises," *Control and Cybernetics*, vol. 42, 2013.
- [7] M. Axtell and M. E. Bise, "Fractional calculus application in control systems," *In Aerospace and Electronics Conference, 1990. NAECON 1990, Proceedings of the IEEE 1990 National*, pp. 563-566, 1990.
- [8] L. Dorcak, "Numerical models for the simulation of the fractional-order control systems," *arXiv preprint math/0204108*, 2002.
- [9] A. Oustaloup, "La dérivation non entiere: théorie, synthese, applications, série Automatique," *Éditions Hermes*, 1995.
- [10] I. Podlubny, "Fractional-order systems and PI/sup/spl lambda/D/sup/spl mu/-controllers," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, pp. 208-214, 1999.
- [11] B. Safarinejadian and M. Asad, "Fractional order state space canonical model identification using fractional order information filter," *In 2015 International Symposium on Artificial Intelligence and Signal Processing (AISP)*, pp. 65-70, 2015.
- [12] C. C. Tseng, "Design of FIR and IIR fractional order Simpson digital integrators," *Signal Processing*, vol. 87, pp. 1045-1057, 2007.
- [13] B. M. Vinagre, Y. Q. Chen and I. Petráš, "Two direct Tustin discretization methods for fractional-order differentiator/integrator," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 340, pp. 349-362, 2003.
- [14] W. Wang, F. Ding and J. Dai, "Maximum likelihood least squares identification for systems with autoregressive moving average noise," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, pp. 1842-1853, 2012.
- [15] J. Li, F. Ding and G. Yang, "Maximum likelihood least squares identification method for input nonlinear finite impulse response moving average systems," *Mathematical and Computer Modelling*, vol. 55, pp. 442-450, 2012.
- [16] Y. Shi and H. Fang, "Kalman filter-based identification for systems with randomly missing measurements in a network environment," *International Journal of Control*, vol. 83, pp. 538-551, 2010.
- [17] Y. Gu and F. Ding, "Auxiliary model based least squares identification method for a state space model with a unit time-delay," *Applied Mathematical Modelling*, vol. 36, pp. 5773-5779, 2012.