

توسعه و اعتبارسنجی کد حل کننده معادلات MHD برای مطالعه مشخصه‌های جریان پلاسمای گاز آرگون رانشگر PFSB

مه‌دی آهانگر*

استادیار، گروه مهندسی هوافضا، دانشکده مهندسی و فناوری‌های نوین، دانشگاه شهید بهشتی، تهران، ایران

رضا ابراهیمی

دانشیار، دانشکده مهندسی هوافضا، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

مه‌رزاد شمس

دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران

چکیده

به کارگیری روش رُ در حل معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی اگرچه باعث کاهش لزجت حل عددی و افزایش دقت آن می‌شود، اما با افزایش نسبت مجذور جریان تخلیه الکتریکی به دبی جرمی ورودی (I_{dis}^2/m) در رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی که با وقوع انبساط‌های قوی در نوک الکترودها همراه است، به حل غیرفیزیکی منجر می‌گردد. برای رفع این مشکل، استفاده از یک الگوریتم ریمانی ترکیبی مدنظر قرار گرفته است. در این الگوریتم با جایگزینی روش HLLC به جای روش رُ، تنها در نواحی که مستلزم وجود لزجت عددی بیشتری است، این امکان فراهم می‌شود تا علاوه بر دستیابی به حل پایدار، لزجت عددی در سایر نقاط محدود باقی بماند. افزایش مرتبه دقت حل عددی مذکور با برون‌یابی مقدار متغیرها در مرز سلول محاسباتی صورت گرفته است. برای این منظور روند OMUSCL2 به کار گرفته شده که در مقایسه با روش MUSCL خطای پراکندگی و اتلاف عددی کمتری دارد. به منظور اعتبارسنجی الگوریتم عددی، رانشگر آزمایشگاهی PFSB با طول الکتروود کاتد ۷.۶۲ cm، دبی جرمی ورودی ۶ gr/s و جریان تخلیه الکتریکی ۱۵.۳ kA شبیه‌سازی شده است. مقایسه نتایج عددی و تجربی مربوط به توزیع میدان مغناطیسی و جریان الکتریکی محصور حاکی از تطابق خوب آن‌هاست. مقدار نیروی پیشران ۵۲.۶۷ نیوتن به دست آمده که در مقایسه با مقدار اندازگیری شده حدود ۶٪ خطا دارد. همچنین این شبیه‌سازی توانسته به خوبی ساختار داخلی-خارجی جریان گاز خروجی رانشگر را پیش‌بینی نماید.

کلمات کلیدی: جریان پلاسمای، معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی، حل کننده ریمانی، نیروی پیشران، مدل‌سازی عددی.

Development and Validation of an MHD Code for Study of Argon plasma Flow Characteristics in the PFSB Thruster

M. Ahangar

Department of Aerospace Engineering, Faculty of New Technologies and Engineering, Shahid Beheshti University, Tehran, Iran

R. Ebrahimi

Faculty of Aerospace Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

M. Shams

Faculty of Aerospace Engineering, K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

Applying Roe's scheme to solve the MHD equations leads to reduction of the numerical viscosity and growth of the accuracy. By increasing I_{dis}^2/m in MPD thruster that accompanies strong expansion near the electrodes tips, Roe's scheme has failed. In the zones where need more numerical viscosity, hybridizing Roe's scheme with HLLC method provides a stable solution and limits the numerical viscosity in the other zones. To achieve a high-resolution method, new modification of MUSCL technique has been employed. This method is called OMUSCL2 technique which has lower dispersion and dissipation errors. For validation of developed algorithm, the Princeton full-scale benchmark thruster, with cathode length of 7.62 cm, mass flow rate of 6 gr/s and total discharge current of 15.3 kA, has been simulated. The comparison of the predicted results of magnetic field and enclosed current with the measured data shows good qualitative and quantitative agreement. The calculated thrust is 52.67 N which shows about 6% difference compared with measured value. Furthermore, this simulation properly predicts the experimentally exhaust plume structure.

Keywords: Plasma flow, Magnetohydro dynamic (MHD) equations, Riemann solver, Thrust, Numerical Modeling.

۱- مقدمه

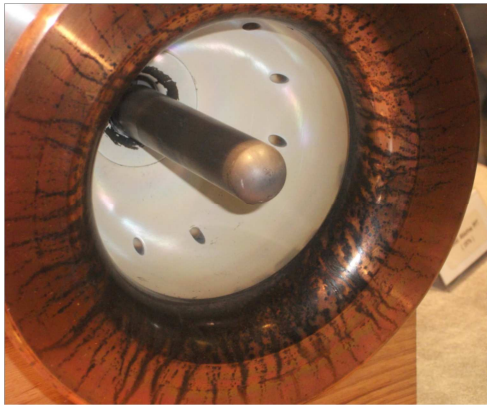
از دو دهه مورد مطالعه تجربی قرار گرفته است [۱-۲] (شکل ۱). کالدو [۳] در سال ۱۹۹۳ برای اولین بار این رانشگر را شبیه‌سازی کرد. برای این منظور او یک مدل دوبعدی را با در نظر گرفتن اثر ریزناپایداری‌ها^۲ توسعه داد. در پژوهش مذکور، معادلات سیال به صورت گذرا و معادله میدان مغناطیسی به صورت پایا در نظر گرفته شده و معادلات در قالب

رانشگر موجود در آزمایشگاه پلاسمای و پیشران الکتریکی دانشگاه پرینستون موسوم به PFSB^۱ یکی از معروفترین انواع رانشگرهای پلاسمایی مغناطیسی (MPD) آزمایشگاهی در سطح دنیاست که بیش

^۱ Princeton Full-Scale Benchmark (PFSB) Thruster

^۲ Magneto-Plasma-Dynamic

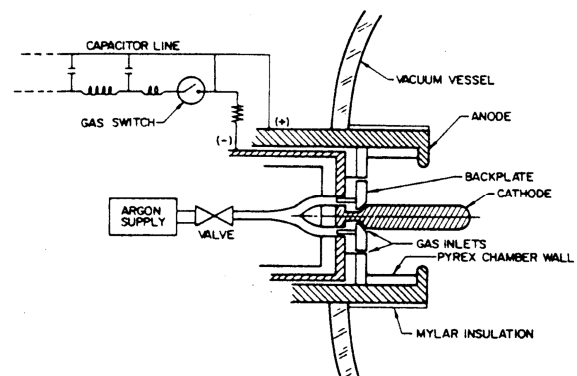
^۳ Micro-instabilities



شکل ۱- رانشگر PFSB (ب) نمایی از رانشگر [۲]

هدف پژوهش حاضر حل معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی^۶ (MHD) به منظور شبیه‌سازی جریان پلازما در رانشگر PFSB با فرض یونش غیرتعادلی و استفاده از یک حل‌کننده ریمانی با لزجت عددی محدود می‌باشد. برای این منظور در ابتدا یک کد محاسباتی دو بعدی با استفاده از روش ریمانی تفکیکی رؤ به همراه رابطه تصحیح انتروپی مدران-تادمور^۷ و با فرض یونش تعادلی توسعه داده شد [۷] و به کمک آن رانشگر استوانه‌ای ویلانی^۸ [۸] شبیه‌سازی گردید. در گام بعد یک مدل یونش غیرتعادلی^۹ جزئی به این کد اضافه شد [۹]. همانطور که در مرجع [۹] بیان شده، رابطه مدران-تادمور در شبیه‌سازی جریان پلاسمای غیرتعادلی به ازای مقادیر جریان تخلیه الکتریکی بیشتر از ۸ kA منجر به افزایش خطای پراکندگی روش عددی می‌شود. برای رفع این مشکل، در پژوهش بعدی [۱۰] روش ریمانی غیرتفکیکی HLL^{۱۱} جایگزین روش رؤ شد و با آن رانشگر استوانه‌ای ویلانی تحت جریان تخلیه الکتریکی ۱۵ kA و با فرض یونش تعادلی شبیه‌سازی شد. در گام بعد، روش HLL^{۱۱} به همراه مدل یونش غیرتعادلی مورد استفاده قرار گرفت [۱۱]. روش HLL^{۱۱} دارای لزجت عددی بیشتری نسبت به روش رؤ و لزجت عددی کمتری نسبت به روش لاکس-فردریش است. به منظور دستیابی به یک حل‌کننده ریمانی با لزجت عددی محدود جهت میرایی ناپایداری‌های عددی، مرجع [۱۲] روشی مرکب از روش رؤ و روش HLL^{۱۱} را ارائه کرده است. در این روش ترکیبی، حل بر مبنای روش رؤ که دارای لزجت عددی کمی است صورت می‌گیرد و تنها در نواحی که ناپایداری‌های عددی منجر به منفی شدن مقادیر کمیت‌های فشار و چگالی می‌شوند، روش HLL^{۱۱} جایگزین روش رؤ می‌گردد. در پژوهش حاضر روش ترکیبی ذکر شده به همراه مدل یونش غیرتعادلی به کار گرفته شده در مرجع [۱۱]، استفاده می‌شود. روند تکامل کد محاسباتی در جدول ۱ نشان داده شده است.

اختلاف محدود و با روش چند شبکه‌ای حل شدند. قابل ذکر است که کد توسعه داده شده توسط کالدو برای مقادیر جریان تخلیه الکتریکی بیش از ۱۳.۵ kA واگرا می‌گردد. در تلاشی دیگر سنکاران و همکارانش [۴] در سال ۲۰۰۵ توانستند این رانشگر را به ازای مقادیر مختلف جریان تخلیه الکتریکی تا ۲۰ kA شبیه‌سازی کنند. در این پژوهش معادلات پایستاری و معادله میدان مغناطیسی به صورت خودسازگار^۱ و در قالب حجم محدود در نظر گرفته شده و برای حل معادلات از روش تفکیک مشخصه‌ها استفاده شده است. همچنین، یکنوایی حل با به کارگیری روش شار محدود جیمسون تضمین شده و مدل یونش تعادلی ساها^۲ برای شبیه‌سازی فرآیند یونش گاز آرگون به کار گرفته شده است. بعلاوه، اثر ریزناپایداری‌ها در معادلات لحاظ شده و دمای الکترون و یون به صورت غیرتعادلی در نظر گرفته شده است. در سال ۲۰۱۱، پارما [۵] توانست با استفاده از کد MACH^۳ رانشگر مذکور را برای اولین بار به صورت سه بعدی شبیه‌سازی کند. با این وجود در این پژوهش اثرات عدم تعادل حرارتی و ریزناپایداری‌ها در نظر گرفته نشده است. آهنگر و همکارانش [۶] در سال ۲۰۱۴ این رانشگر را به کمک روش لاکس-فردریش^۴ و با فرض یونش تعادلی شبیه‌سازی کردند. اگرچه روش لاکس-فردریش به دلیل عدم نیاز به محاسبه بردارهای ویژه دارای سرعت همگرایی بیشتری نسبت به روش‌های مبتنی بر تفکیک مشخصه‌هاست، اما این امر باعث می‌شود تا مقدار لزجت عددی این روش نیز در مقایسه با روش‌هایی نظیر روش رؤ^۵ بیشتر باشد. به طور کلی پژوهش‌های نامبرده، با فرآیند یونش را در نظر نگرفته‌اند و یا از مدل یونش تعادلی بهره جسته‌اند.



شکل ۱ (الف) طرحواره سیستمی رانشگر [۱]

⁶ Magnetohydrodynamic (MHD) Equations
⁷ Madrane-Tadmor
⁸ Villani
⁹ Harten, Lax, van Leer and Einfeldt

¹ Self-Consistence
² Saha's Equilibrium Ionization Model
³ Multi-block Arbitrary Coordinate Hydro-magnetic (MACH) Simulation Tool
⁴ Lax-Friedrichs Method
⁵ Roe's Scheme

$$q_s = \frac{3}{2} n_h k_B T_h v_{AN,i} - \sum_{i=0}^N \omega_{i+1} \chi_{i \rightarrow i+1} \quad (9)$$

عبارات اول در سمت راست معادلات (۷) و (۸) ناشی از بردار پوینتینگ می‌باشند که در آن‌ها مقادیر میدان الکتریکی (E') از قانون عمومی اهم قابل محاسبه می‌باشد. عبارات دوم و سوم نیز نشان‌دهنده سهم رسانایی گرمایی الکترون‌ها و یون‌ها هستند. عبارات سمت راست معادله (۹) نیز به ترتیب بیانگر سهم تبادل انرژی بین یون‌ها و ریزناپایداری‌ها، و سهم انرژی حاصل از فرآیند یونش گاز خنثی می‌باشند که نحوه محاسبه آنها در مرجع [۹] بیان شده است. تعیین دمای الکترون مستلزم حل معادله انرژی الکترون می‌باشد [۹].

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varepsilon_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} [(\varepsilon_e + p_e)u] + \frac{\partial}{\partial z} [(\varepsilon_e + p_e)w] \\ & + \frac{1}{r} (\varepsilon_e + p_e)u = u \frac{\partial p_e}{\partial r} + w \frac{\partial p_e}{\partial z} + \eta (j_r^2 + j_z^2) \\ & - \sum_{i=0}^N \omega_{i+1} \chi_{i \rightarrow i+1} + \frac{5}{2} \frac{k_B}{q} \left(j_r \frac{\partial T_e}{\partial r} + j_z \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) \\ & - \frac{1}{q n_e} \left(j_r \frac{\partial p_e}{\partial r} + j_z \frac{\partial p_e}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(k_e \frac{\partial T_e}{\partial r} \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_e \frac{\partial T_e}{\partial z} \right) - \frac{3 \rho_e \sum_i v_{ei}}{M_h} k_B (T_e - T_h) \end{aligned} \quad (10)$$

در معادله (۱۰)، چگالی جریان الکتریکی (j) با استفاده از قانون آمپر محاسبه می‌شود.

چگالی یون‌ها در پلاسما به کمک معادله انتقال اجزاء شیمیایی تعیین می‌شود،

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial (n_i u)}{\partial r} + \frac{(n_i u)}{r} + \frac{\partial (n_i w)}{\partial z} = \dot{\omega}_i ; i = 0, \dots, 6 \quad (11)$$

نحوه محاسبه عبارت نرخ تولید و مصرف اجزاء شیمیایی ($\dot{\omega}_i$) در مرجع [۱۱] آمده است.

روابط لازم برای محاسبه ضرایب پدیده‌های انتقالی همچون ضریب مقاومت الکتریکی پلاسما، رسانایی گرمایی الکترون‌ها و یون‌ها و همچنین رابطه نسبت گرمایی ویژه و معادله حالت پلاسمای گاز آرگون در مرجع [۹] ارائه شده‌اند.

۳- روند حل عددی

بررسی پژوهش‌های اخیر در حوزه شبیه‌سازی عددی رانشگر PFSB نشان می‌دهد که،

۱- هیچکدام از این پژوهش‌ها به غیر از مرجع [۴] از روش‌های مبتنی بر تفکیک مشخصه‌ها استفاده نکرده‌اند. یکی از ویژگی‌های معادلات MHD وجود امواج مشخصه با سرعت‌های متفاوت است. حل سازگار معادلات ماکسول با معادلات دینامیک گاز بر مبنای مشخصه‌ها (مقادیر ویژه)، مانع از نقض قوانین فیزیکی در فضای محاسباتی می‌شود.

۲- با افزایش مقدار پارامتر عملکرد (I_{dis}^2/\dot{m}) در رانشگرهای MPD، برخی از کدهای محاسباتی موجود، ناپایداری‌هایی را در حل عددی نشان می‌دهند [۳]. این مشکل در طول انجام این پژوهش نیز رخ داد [۷]. با افزایش پارامتر I_{dis}^2/\dot{m} ملاحظه می‌شود که سهم انرژی

جدول ۱- روند تکامل کد محاسباتی

مرجع	مدل یونش	روش عددی	I_{dis} (kA)	رانشگر
[۷]	تعادلی	رؤ	۸	ویلانی
[۹]	غیرتعادلی	رؤ	۸	ویلانی
[۱۰]	تعادلی	HLLE	۱۵	ویلانی
[۱۱]	غیرتعادلی	HLLE	۸	ویلانی
[۶]	تعادلی	لاکس-فردریش	۲۰ و ۱۶	PFSBT
پژوهش حاضر	غیرتعادلی	رؤ-HLLE	۱۵٫۳	PFSBT

۲- مدل فیزیکی

معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی که توصیف کننده رفتار سیال پلاسما در یک رانشگر MPD هستند، در مختصات تقارن محوری دوبعدی، شامل معادلات اصلی پیوستگی، مومنتوم در جهت‌های شعاعی و طولی، میدان مغناطیسی در جهت محیطی، انرژی کل و معادلات کمکی انرژی الکترون و پیوستگی یون‌ها می‌شوند. معادلات اصلی در شکل برداری زیر قابل نمایش هستند [۹].

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = S_r + D + S \quad (1)$$

در معادله (۱)، $U = [\rho, \rho u, \rho w, B_\theta, \varepsilon]^T$ بردار متغیرهای بقای است. F_r و F_z بردارهای جابه‌جایی در جهت شعاعی و طولی هستند که به صورت زیر نشان داده می‌شوند.

$$\begin{aligned} F_r &= \left[\rho u, \rho u^2 + p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0}, \rho u w, u B_\theta, u \left(\varepsilon + p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) \right]^T \\ F_z &= \left[\rho w, \rho w u, \rho w^2 + p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0}, w B_\theta, w \left(\varepsilon + p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) \right]^T \end{aligned} \quad (2)$$

در رابطه (۲)، چگالی انرژی کل از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\varepsilon = \frac{p}{\gamma - 1} + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2) + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \quad (3)$$

بردار S_r عبارت مولد شعاعی معادلات است که در مختصات تقارن محوری ظاهر می‌گردد.

$$S_r = -\frac{1}{r} \left[\rho u, \rho u^2 + \frac{B_\theta^2}{\mu_0}, \rho w u, 0, u \left(\varepsilon + p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) \right]^T \quad (4)$$

بردارهای شار نفوذی و مولد نیز به ترتیب در قالب معادلات (۵) و (۶) نوشته می‌شوند،

$$D = \left[0, 0, 0, \left(\frac{\partial E'_z}{\partial r} - \frac{\partial E'_r}{\partial z} \right), \left(\frac{\partial q_r}{\partial r} + \frac{\partial q_z}{\partial z} + \frac{q_r}{r} \right) \right]^T \quad (5)$$

$$S = [0, 0, 0, 0, q_s]^T \quad (6)$$

که در آن‌ها

$$q_r = \frac{E'_z B_\theta}{\mu_0} + k_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + k_h \frac{\partial T_h}{\partial r} \quad (7)$$

$$q_z = \frac{-E'_r B_\theta}{\mu_0} + k_e \frac{\partial T_e}{\partial z} + k_h \frac{\partial T_h}{\partial z} \quad (8)$$

$$b^+ = \max \left[\max(\lambda^{\max}, V^R + C^R), 0 \right]$$

$$b^- = \min \left[\min(\lambda^{\min}, V^L - C^L), 0 \right] \quad (15)$$

λ^{\max} و λ^{\min} بیشترین و کمترین مقادیر ویژه‌ای هستند که از روش رؤ به دست می‌آیند. V^R ، V^L ، C^R ، C^L به ترتیب مولفه‌های سرعت جریان و مولفه‌های سرعت سریعترین موج در سمت راست و چپ مرز سلول محاسباتی می‌باشند. با توجه به آن که روش HLLC نیازی به تفکیک مشخصه‌ها ندارد و تنها بر اساس بیشترین و کمترین مقادیر ویژه عمل می‌نماید، بنابراین نسبت به روش رؤ دارای لزجت عددی بیشتری می‌باشد.

بر اساس مرجع [12] در صورتی که مقدار متغیرهای مجازی زیر، منفی گردد

$$U_{virt}^L = U^L + \frac{F^{Roe} - F(U^L)}{b^-} + \Delta t(S_r + D + S)$$

$$U_{virt}^R = U^R + \frac{F^{Roe} - F(U^R)}{b^+} + \Delta t(S_r + D + S) \quad (16)$$

در الگوریتم حل عددی، بردار F^{HLLC} جایگزین بردار F^{Roe} می‌گردد. در روش‌های با دقت مرتبه اول مقادیر متغیرهای اولیه $W = [\rho, u, w, B_\theta, p, p_e, n_i]^T$ در مرکز سلول برابر با مقدار آن‌ها در مرکز سلول در نظر گرفته می‌شود. یکی از روش‌های افزایش دقت حل عددی، استفاده از روش MUSCL [15] به منظور برون‌یابی مقادیر متغیرهای مرزی بر حسب مقدار متغیرها در سلول‌های مجاور می‌باشد. به کارگیری این روش توأم با ایجاد مقداری خطای پراکندگی و اتلاف عددی است. برای محدود کردن خطاهای مذکور و رفع مشکلات بیان شده در بند (3)، در پژوهش حاضر از روش MUSCL بهینه شده موسوم به OMUSCL2 که توسط یان [16] ارائه گردید، استفاده شده است. بر این اساس، مقدار متغیرهای اولیه در سمت راست و چپ مرز سلول محاسباتی به صورت زیر محاسبه می‌گردند،

$$q_{j+1/2}^L = q_j + \frac{1}{2} \tilde{\phi}_{j+1/2}^L \cdot (q_{j+1} - q_j)$$

$$q_{j+1/2}^R = q_{j+1} - \frac{1}{2} \tilde{\phi}_{j+1/2}^R \cdot (q_{j+1} - q_j) \quad (17)$$

که در آن‌ها

$$\tilde{\phi}_{j+1/2}^L = \max \left(0, \min \left(2, \phi_{j+1/2}^L, 2r_{j+1/2}^L \right) \right)$$

$$\phi_{j+1/2}^L = 0.8 - 0.175 \frac{1}{r_{j+3/2}^L} + 0.375 r_{j+1/2}^L$$

$$\tilde{\phi}_{j+1/2}^R = \max \left(0, \min \left(2, \phi_{j+1/2}^R, 2r_{j+1/2}^R \right) \right)$$

$$\phi_{j+1/2}^R = 0.8 - 0.175 \frac{1}{r_{j-1/2}^R} + 0.375 r_{j+1/2}^R \quad (18)$$

$$r_{j+1/2}^L = \frac{q_j - q_{j-1} + \ell}{q_{j+1} - q_j + \ell}$$

$$r_{j+1/2}^R = \frac{q_{j+2} - q_{j+1} + \ell}{q_{j+1} - q_j + \ell}$$

می‌باشند و در روابط فوق، q مقدار هر یک از مولفه‌های بردار W و ℓ یک عدد مثبت کوچک می‌باشد.

مغناطیسی در رابطه (3) افزایش می‌یابد. از سوی دیگر، جریان گاز رقیق طی یک انبساط قوی در ناحیه مجاور نوک الکترودها به محیط خلأ تخلیه می‌گردد، لذا مقدار انرژی جنبشی در این نواحی افزایش می‌یابد. تحت این شرایط مقدار فشار استاتیکی که با کسر سهم انرژی مغناطیسی و جنبشی از انرژی کل به دست می‌آید، منفی می‌گردد. این در حالی است که روندهای مبتنی بر تفکیک مشخصه نظیر روش رؤ جزء روش‌های دارای لزجت عددی کم هستند و عموماً در جریان‌های انبساطی منجر به حل غیرفیزیکی (شوک انبساطی) می‌گردند که در نتیجه آن شرط انتروپی نقض می‌شود. بنابراین، در شرایطی که مقدار پارامتر I_{dis}^2/\dot{m} افزایش می‌یابد برای برابری ناپایداری‌ها، بایستی در سلول‌های محاسباتی درگیر انبساط، مقدار محدودی لزجت عددی به کار گرفته شود.

3- روش‌های عددی به کار گرفته شده در پژوهش‌های گذشته دارای لزجت عددی بیشتری در مقایسه با روش‌های ریمانی تفکیکی می‌باشند. به طور مثال مراجع [6 و 10] که به ترتیب از روش‌های لاکس-فردریش و HLLC استفاده می‌کنند، به استناد مراجع [12 و 13] دارای لزجت عددی بیشتری در مقایسه با روش‌های مبتنی بر تفکیک مشخصه‌ها نظیر روش رؤ هستند. به علاوه پژوهش‌های صورت گرفته در مراجع [3 و 5]، برای مستهلک نمودن ناپایداری‌های عددی، از لزجت مصنوعی استفاده می‌کنند.

جهت برطرف ساختن کاستی مربوط به بند (1)، در پژوهش حاضر بردار شار جابه‌جایی با به کارگیری روش رؤ محاسبه شده است. روش حل تقریبی ریمان که توسط رؤ توسعه داده شده، روشی مبتنی بر تفکیک مشخصه‌های اختلاف شار و متضمن حفظ خواص بقایی معادلات می‌باشد. رؤ، محاسبه بردار شار جابه‌جایی را به صورت زیر ارائه کرد [13]،

$$F_{j+1/2}^{Roe} = \frac{1}{2} \left[F(U_{j+1/2}^L) + F(U_{j+1/2}^R) \right]$$

$$- \frac{1}{2} |A|_{j+1/2} (U_{j+1/2}^R - U_{j+1/2}^L)$$

که در آن است.

$$|A| = MR_n (\Lambda_n^+ - \Lambda_n^-) R_n^{-1} M^{-1} \quad (13)$$

روابط مربوط به ماتریس‌های M ، R_n و Λ_n در مرجع [7] ارائه شده است.

روش رؤ در جریان‌های انبساطی به ازای مقادیر زیاد I_{dis}^2/\dot{m} منجر به حل غیرفیزیکی می‌شود. یکی از روش‌های رفع این مشکل استفاده از ایده ترکیب روش رؤ با روشی است که دارای لزجت عددی بیشتری می‌باشد. این ایده اولین بار توسط جانیهون [12] برای معادلات MHD ارائه شد. بر این اساس، در پژوهش حاضر روش HLLC در نواحی که لزجت عددی بیشتری مورد نیاز است، جایگزین روش رؤ می‌گردد. در این روش بردار شار به صورت زیر محاسبه می‌شود، [14]،

$$F_{j+1/2}^{HLLC} = \frac{b^+ F(U_{j+1/2}^L) + b^- F(U_{j+1/2}^R)}{b^+ - b^-}$$

$$+ \frac{b^+ b^-}{b^+ - b^-} (U_{j+1/2}^R - U_{j+1/2}^L)$$

که در آن

در صورتی که مقدار جریان تخلیه الکتریکی کل به یکباره در این رابطه اعمال گردد، حل مسأله در ورودی با مشکل روبه‌رو می‌شود. این امر به این دلیل است که در سلول‌های مجاور مرز ورودی، چگالی جریان الکتریکی که از مشتقات میدان مغناطیسی محاسبه می‌گردد، گرادین‌های بسیار شدیدی را وارد حل عددی می‌کند و در نتیجه کد محاسباتی واگرا می‌شود. علاوه بر این، با رشد آبی سهم انرژی مغناطیسی در رابطه (۳)، در تکرارهای زمانی اولیه مقدار فشار در سلول‌های محاسباتی مجاور مرز ورودی منفی می‌گردد. برای رفع این مشکل مقدار جریان تخلیه الکتریکی در هر تکرار زمانی به میزان 20 mA افزایش داده شده تا به طور تدریجی به مقدار نهایی I_{dis} برسد.

با توجه به این که مقدار مولفه عمود بر سطح سرعت روی دیواره الکترودها برابر صفر می‌باشد، بنابراین به غیر از عبارت فشار مگنتواستاتیکی ($p_m = p + B_\theta^2 / 2\mu_0$) مقدار سایر عبارات در بردار شار جابه‌جایی صفر می‌شود. فشار مگنتواستاتیکی بر روی مرز، از دامنه حل برون‌یابی می‌شود [۹]. در این پژوهش، فرض می‌شود الکترودهای کاتد و آند همانند رسانای ایده‌آل عمل می‌کنند، لذا میدان الکتریکی مماسی بر روی مرز برابر صفر در نظر گرفته می‌شود [۵]. تعیین دمای سطح الکترودها، مستلزم حل معادله انتقال گرما در دیواره الکترودها می‌باشد. این موضوع باعث افزایش پیچیدگی و زمان حل مساله خواهد شد. جهت اجتناب از این امر، در پژوهش حاضر همانند اغلب پژوهش‌های ذکر شده در بخش مقدمه، مقدار دما روی سطح الکترودها اندکی کمتر از دمای ذوب آن‌ها در نظر گرفته شده است.

از آنجا که در پیشروی الکتروود کاتد و بر روی محور تقارن مقدار سرعت شعاعی صفر می‌باشد، به غیر از عبارت فشار استاتیکی (p) مقدار سایر عبارات در بردار شار جابه‌جایی شعاعی نیز برابر صفر است. فشار استاتیکی بر روی خط مرکزی، از دامنه حل برون‌یابی می‌شود. از سوی دیگر به دلیل عدم وجود گرادین شعاعی، انتقال گرما در عرض این مرز صورت نمی‌گیرد. خط تقارن همانند یک سیم مستقیم طویل می‌ماند که میدان مغناطیسی در مرکز آن برابر صفر است. با این فرض و با استفاده از ترکیب قانون بیو-ساوار و آمپر، رابطه زیر برای محاسبه جریان الکتریکی محوری به دست می‌آید [۴].

$$j_z|_{r=0} = \frac{4B_\theta|_{r/2}}{\mu_0 \Delta r} \quad (23)$$

در مرزهای خروجی، گرادین عمودی کمیات جریان سیال به همراه میدان مغناطیسی برابر صفر در نظر گرفته شده است.

بر روی مرز دیواره عایق، برای متغیر سرعت از شرط عدم لغزش استفاده می‌شود. همچنین، مقدار رسانش گرمای عبوری از این مرز برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که بر روی این مرز، تابع جریان ($\psi = rB_\theta$) ثابت می‌باشد [۴].

توالی و ترتیب محاسبات مربوط به الگوریتم عددی توسعه داده شده، در نمودار شکل ۲ نمایش داده شده است.

برای گسسته‌سازی بردار شار نفوذی، روش اختلاف مرکزی مرتبه دوم لحاظ شده است. همچنین جهت پیشروی زمانی، روش صریح اویلر با گام زمانی متغیر استفاده شده است. برای تعیین گام زمانی بایستی در نظر داشت که برای معادلات MHD غیرایده‌آل، مقیاس‌های زمانی متفاوتی وجود دارد. بنابراین برای دستیابی به یک حل پایدار، باید کوچکترین مقیاس زمانی در هر تکرار را برابر با گام زمانی در نظر گرفت. مقیاس‌های زمانی مورد نظر عبارتند از [۷].

- مقیاس زمانی سریعترین موج: $\tau_{FW} = \hbar \cdot \vartheta / \lambda_{\max}$
- مقیاس زمانی نفوذ مغناطیسی: $\tau_{MD} = \mu_0 \cdot \hbar^2 / \eta$
- مقیاس زمانی نفوذ حرارتی: $\tau_{HC} = n_e \cdot k_B \cdot \hbar^2 / k_e$

در این روابط $\hbar = \min\{\Delta r, \Delta z\}$ و ϑ عدد کورانته می‌باشد. بر این اساس، گام زمانی به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\Delta t = \min\{\tau_{FW}, \tau_{MD}, \tau_{HC}\} \quad (19)$$

برای معادلات MHD غیرایده‌آل، مقیاس زمانی نفوذ مغناطیسی و حرارتی از مرتبه 10^{-11} تا 10^{-9} ثانیه تغییر می‌کند. مقدار مقیاس زمانی سریعترین موج معمولاً بزرگتر از دو مقیاس زمانی دیگر است و در بازه 10^{-10} تا 10^{-8} ثانیه قرار می‌گیرد. در این شبیه‌سازی ϑ برابر با ۰٫۵ در نظر گرفته شده است.

به طور کلی در رانشگرهای MPD، جریان پیشراشه با دبی ثابت و تحت شرایط صوتی از طریق چند سوراخ به فضای میان الکترودها تزریق می‌گردد. تنها در فاصله چند میلی‌متری از مرز ورودی، پیشراشه به طور کامل یونیزه شده و جریان پلاسما تولید می‌شود. از آنجا که در این ناحیه نازک، جریان پلاسما از نوع رژیم شبه‌خنثی نمی‌باشد، لذا فرضیات مربوط به معادلات MHD اعتبار خود را از دست می‌دهند. بنابراین، جریان سیال در ناحیه مذکور براساس معادلات MHD قابل شبیه‌سازی نیست [۴]. با صرفنظر کردن از این لایه نازک فرض می‌شود که جریان پلاسمای شبه‌خنثی وارد ناحیه حل شده است. از اینرو لازم است تا دمای ورودی به حد کافی زیاد در نظر گرفته شود (در حدود ۱ الکترون‌ولت)، تا فرآیند یونش فعال گردد. با توجه به مشخص بودن دما، تحت شرایط صوتی ($Ma_{in} = w_{in}/a_{in} = 1$)، سرعت در ورودی به صورت زیر محاسبه می‌شود [۹].

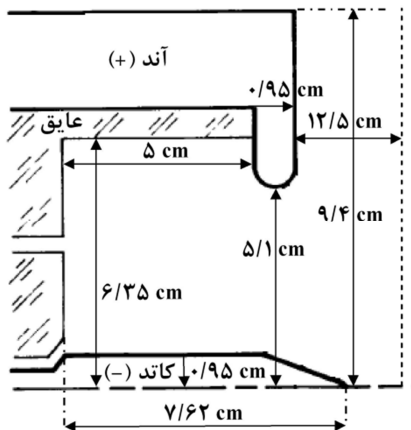
$$w_{in} = \sqrt{\frac{\gamma_{in} k_B}{m_h (1 + Z_{eff, in})} (Z_{eff, in} T_{e, in} + T_{h, in})} \quad (20)$$

که در آن Z_{eff} سطح یونش مؤثر می‌باشد. همچنین، با مشخص بودن مقدار دبی جرمی ورودی، چگالی جریان ورودی با استفاده از معادله پیوستگی تعیین می‌شود.

$$\rho_{in} = \frac{\dot{m}}{w_{in} \pi (r_a^2 - r_c^2)} \quad (21)$$

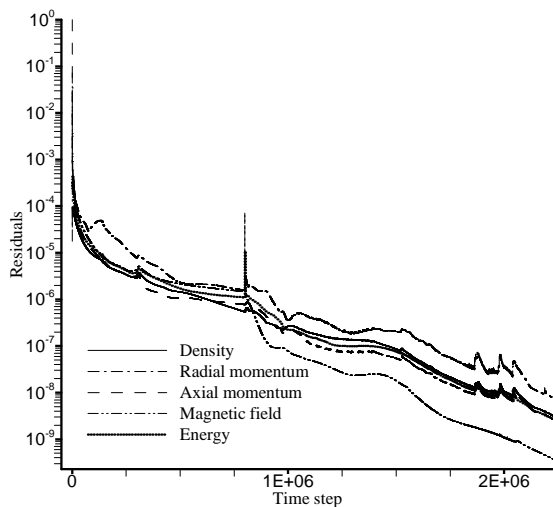
که در آن r_c و r_a به ترتیب شعاع آند و کاتد می‌باشند. با مشخص شدن چگالی اجزاء پلاسما به کمک معادله سه‌ا، فشار جزئی اجزاء محاسبه شده و از حاصل جمع آن‌ها فشار کل در ورودی به دست می‌آید [۴]. با به کارگیری قانون آمپر، میدان مغناطیسی در ورودی از رابطه زیر قابل حصول است.

$$B_{\theta, in} = -\frac{\mu_0 I_{dis}}{2\pi r} \quad (22)$$



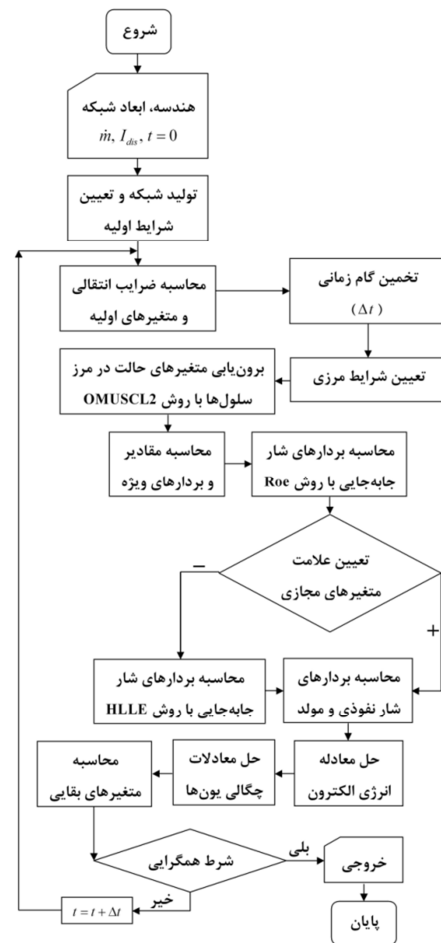
شکل ۳- هندسه رانشگر مورد مطالعه (باز تولید شده از مرجع [۱۷])

در شکل ۴ تغییرات زمانی باقیمانده‌های معادلات پیوستگی، مومنتوم شعاعی و محوری، میدان مغناطیسی و انرژی کل نشان داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود، فرآیند حل تا همگرا شدن باقیمانده‌ها به مرتبه‌ای از 10^{-9} ادامه یافته است. پرش منحنی‌ها در تکرار 7.62×10^5 به این دلیل است که در این لحظه، جریان تخلیه الکتریکی به مقدار ۱۵.۳ kA رسیده و سپس ثابت باقی می‌ماند.



شکل ۴- روند همگرایی حل عددی

توزیع خطوط میدان مغناطیسی ثابت در شکل ۵ نشان داده شده است. نتایج به دست آمده تطابق خوبی را در مقایسه با خطوط اندازه‌گیری شده در شکل ۶ نشان می‌دهند. همانطور که ملاحظه می‌شود با افزایش طول و شعاع، مقدار شدت میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد. به دلیل محدود بودن مرزهای خروجی دامنه محاسباتی، خط میدان به ازای مقدار ۰.۱ تسلا با الصاق به نوک الکترود آند بسته می‌شود. این در حالی است که در شرایط آزمایشگاهی خطوط میدان می‌توانند به سطوح خارجی الکترود آند متصل گردند.

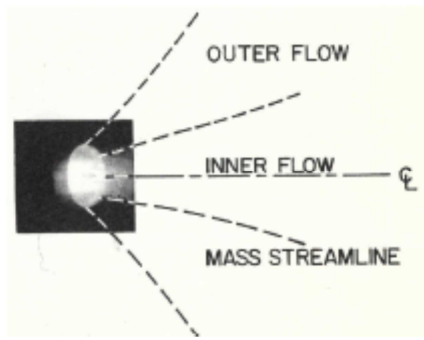


شکل ۲- نمودار توالی و ترتیب محاسبات در فرآیند شبیه‌سازی

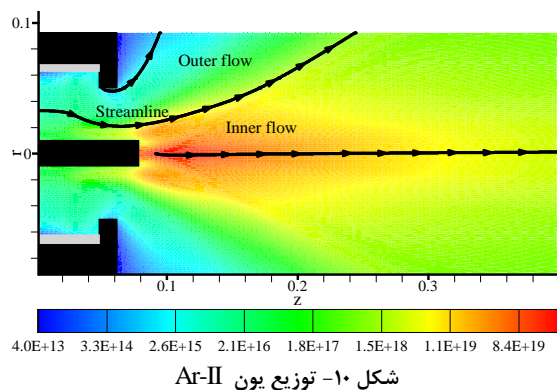
۴- شبیه‌سازی عددی و اعتبارسنجی

به منظور اعتبارسنجی کد محاسباتی توسعه یافته، رانشگر آزمایش شده توسط بویل [۱۷] شبیه‌سازی شده است. اندازه ابعاد محفظه رانشگر به همراه اندازه طول و شعاع الکترودها در شکل ۳ نشان داده شده است. در این پژوهش از یک شبکه یکنواخت متعام استفاده شده است. با توجه به محدودیت‌های این نوع از شبکه‌های محاسباتی، بخش مدور الکترود آند همانند پژوهش‌های قبلی [۴-۶ و ۹] به صورت مسطح تقریب زده شده است. همچنین، از قسمت مخروطی نوک الکترود کاتد صرف‌نظر شده و این الکترود به صورت استوانه یکپارچه با طول ۷.۶۲ سانتی‌متر در نظر گرفته شده است. در این رانشگر جریان تخلیه الکتریکی ورودی ۱۵.۳ kA و دبی جرمی ورودی پیش‌رانه گاز آرگون ۶ gr/s می‌باشد.

مطالعات طیف‌سنجی یون Ar-II که با استفاده از یک فیلتر با طول موج ۴۸۸۰ آنگستروم صورت گرفته [۱۷]، بیانگر آن است که جریان خروجی رانشگر به دو بخش داخلی و خارجی قابل تقسیم می‌باشد (شکل ۹). در بخش داخلی به دلیل غالب بودن مقادیر چگالی یون Ar-II میزان درخشندگی بیشتر بوده و رفته رفته با افزایش شعاع میزان درخشندگی در ناحیه خارجی کاهش می‌یابد. مرزی که ناحیه داخلی و خارجی را از هم تفکیک می‌نماید بر خط جریان مماس است. این مشاهدات کیفی تجربی، در شبیه‌سازی عددی نیز قابل رویت می‌باشد. توزیع چگالی یون Ar-II محاسباتی در شکل ۱۰ نشان داده شده است. رفتار نتایج به دست آمده به خوبی منطبق بر مشاهدات تجربی است. چگالی یون Ar-II در ناحیه داخلی جریان و در مجاورت نوک الکتروود کاتد جایی که دمای الکترون بیشینه است، حداکثر مقدار خود را اختیار می‌کند و با افزایش شعاع مقدار آن کاهش می‌یابد. در شکل ۱۰ نواحی داخلی و خارجی با استفاده از سه خط جریان از یکدیگر مجزا شده‌اند.

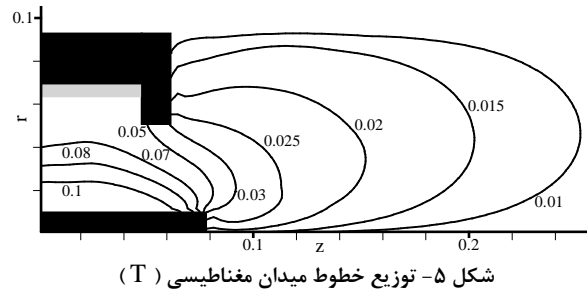


شکل ۹- نتایج طیف‌سنجی یون Ar-II به همراه توصیف نواحی داخلی و خارجی جریان خروجی رانشگر [۱۷]

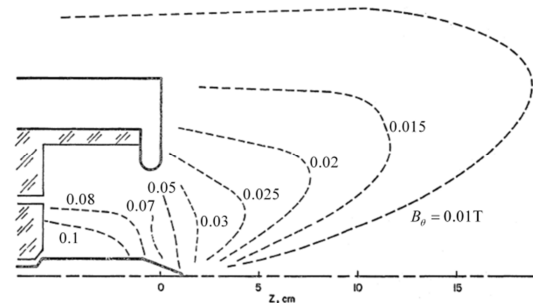


شکل ۱۰- توزیع یون Ar-II

در شکل ۱۱ تغییرات مولفه محوری سرعت در پایین دست نوک کاتد و در امتداد محور تقارن نشان داده شده است. پروفیل سرعت در فاصله ۸ تا ۳۰ سانتی متری از نوک کاتد از حدود ۹.۵ تا ۱۳.۵ کیلومتر بر ثانیه تغییر می‌کند. در فاصله ۱۵ سانتی متری از نوک کاتد، اختلاف مقدار عددی و تجربی کمینه می‌باشد. بعد از این مکان نتایج عددی اندکی بیشتر از مقادیر اندازه‌گیری شده پیش‌بینی شده‌اند. بیشترین اختلاف در فاصله حدوداً ۱۰ سانتی متری از نوک کاتد می‌باشد. علت این موضوع این است که در شبیه‌سازی حاضر نوک مخروطی شکل



شکل ۵- توزیع خطوط میدان مغناطیسی (T)

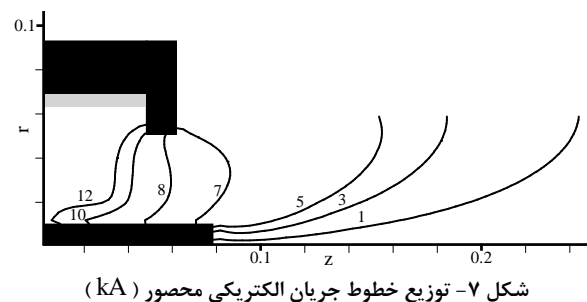


شکل ۶- توزیع خطوط میدان اندازه‌گیری شده [۱۷]

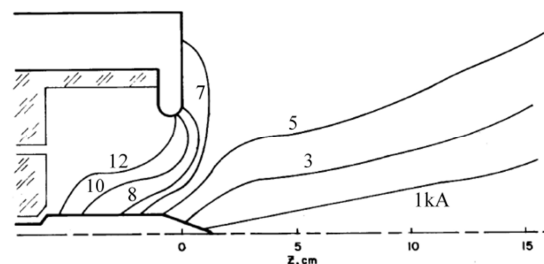
توزیع خطوط جریان الکتریکی محصور که با استفاده از رابطه (۲۴) به دست آمده، در شکل ۷ نشان داده شده است.

$$I_{enclosed} = \frac{2\pi r B_{\theta}}{\mu_0} \quad (24)$$

رفتار خطوط جریان حاکی از همخوانی نزدیک آن با نتایج تجربی ارائه شده در شکل ۸ می‌باشد. اندک تفاوت موجود در نوک الکتروودها می‌تواند ناشی از دو مورد باشد. نخست آن که همانطور که قبلاً توضیح داده شد نوک الکتروودها با سطوح مسطح تقریب زده شد. دوم این که در پژوهش حاضر از افت ولتاژ الکتروودها صرف‌نظر شده است. همانطور که در مرجع [۹] توضیح داده شده است اثر افت ولتاژ در مجاورت الکتروودهایی که نوک آنها تغییرات هندسی شدیدی دارند، مهم می‌باشد.

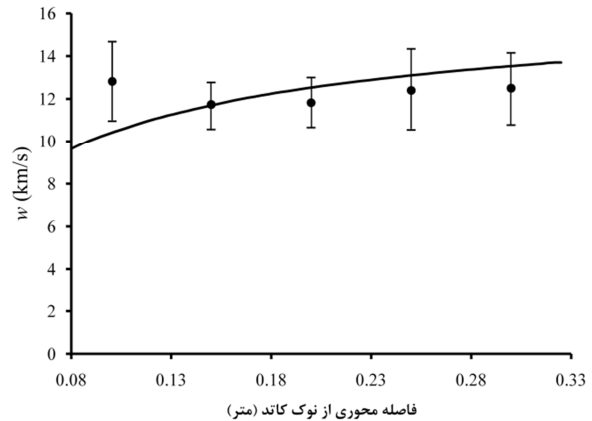


شکل ۷- توزیع خطوط جریان الکتریکی محصور (kA)



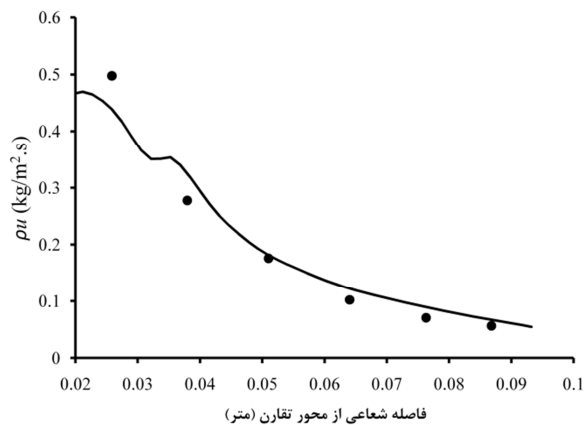
شکل ۸- توزیع خطوط جریان اندازه‌گیری شده [۱۷]

کاتد به صورت سطح صاف در نظر گرفته شده که این موضوع باعث بروز خطا در تعیین دقیق مقدار سرعت در این مکان می‌شود.



شکل ۱۱- پروفیل سرعت محوری در امتداد محور تقارن (خط پیوسته) و نتایج تجربی مرجع [۱۷] (نقاط دایروی)

در شکل ۱۲ تغییرات شعاعی شار جرمی در فاصله ۱۲٫۵ سانتی‌متری از لبه بیرونی آند (شکل ۳) نمایش داده شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود با افزایش شعاع از ۰٫۰۲ تا ۰٫۰۳ متر، شار جرمی از حدود ۰٫۴۷ تا ۰٫۵۵ (kg/m²·s) کاهش می‌یابد. وقوع این روند به این دلیل است که با افزایش شعاع و حرکت به سمت ناحیه خارجی، جریان خروجی دستخوش انبساط آزاد شده و مقدار چگالی به شدت کاهش می‌یابد به طوری که میزان کاهش چگالی از میزان افزایش سرعت به واسطه انبساط، بیشتر بوده و نهایتاً این رفتار منجر به کاهش شار جرمی می‌شود.



شکل ۱۲- تغییرات شعاعی شار جرمی (خط پیوسته) و نتایج تجربی مرجع [۱۸] (نقاط دایروی) در فاصله ۱۲٫۵ سانتی متری از سطح بیرونی آند

با محاسبه انتگرال (۲۵) بر روی مرز خروجی، نیروی پیشران کل قابل محاسبه است [۹].

$$F_T = \int v(\rho v \cdot dA) + \int \left(p + \frac{B_\theta^2}{2\mu_0} \right) dA \quad (25)$$

مقدار نیروی پیشران محاسبه شده برابر ۵۲٫۶۷ نیوتن می‌باشد که با مقدار تجربی، ۵۶٫۲ نیوتن [۱۷]، ۶٫۲۸٪ اختلاف دارد. همچنین مقدار ضربه ویژه که از رابطه زیر به دست آمده،

$$I_{sp} = \frac{F_T}{mg} \quad (26)$$

برابر ۸۹۵ ثانیه می‌باشد که در مقایسه با مقدار اندازه‌گیری شده، ۹۶۰ ثانیه [۱۷]، بیانگر ۶٫۷٪ خطا می‌باشد.

۵- جمع بندی

در این پژوهش برای اولین بار یک روش ریسمانی ترکیبی (تفکیکی- غیرتفکیکی) جهت مدلسازی عددی جریان پلاسمای غیرتعادلی در رانشگر MPD به کار گرفته شد. بر این اساس، برای محاسبه بردار شار جابه‌جایی معادلات MHD روش‌های رُو و HLLC مورد استفاده قرار گرفتند. به منظور ارزیابی الگوریتم توسعه داده شده رانشگر PFSB شبیه‌سازی شد. مقایسه توزیع خطوط میدان مغناطیسی و جریان الکتریکی محصور به دست آمده با نتایج تجربی، حاکی از تطابق خوب و رفتار مشابه آن‌هاست. شبیه‌سازی عددی توانسته مشاهدات کیفی حاصل از مطالعات طیف‌سنجی یون Ar-II، که منجر به تقسیم‌بندی جریان گاز خروجی به نواحی داخلی و خارجی شده بود، را به خوبی پیش‌بینی نماید. پروفیل سرعت محوری در امتداد محور تقارن در فاصله ۱۵ تا ۳۰ سانتی‌متری از نوک کاتد از حدود ۱۱٫۵ تا ۱۳٫۵ کیلومتر بر ثانیه تغییر می‌کند که همخوانی بسیار خوبی با نتایج تجربی دارد. علاوه بر این، مقایسه تغییرات شعاعی شار جرمی به دست آمده با مقادیر اندازه‌گیری شده حاکی از سازگاری کمی و کیفی آن‌هاست. این متغیر با افزایش شعاع و در پی آن انبساط در ناحیه خارجی کاهش می‌یابد. علاوه بر این، نیروی پیشران و ضربه ویژه به ترتیب برابر با ۵۲٫۶۷ نیوتن و ۸۹۵ ثانیه به دست آمده‌اند که در مقایسه با مقادیر اندازه‌گیری شده کمتر از ۷٪ اختلاف دارند.

۶- نمادها

ماتریس جاکوبی	A
شدت میدان مغناطیسی (T)	B
بردار شار نفوذی	D
بردار میدان الکتریکی در دستگاه مرجع پلاسما (Vm^{-1})	E'
بردار شار جابه‌جایی	F
نیروی پیشران (N)	F_T
شتاب جاذبه (m/s^2)	g
جریان تخلیه الکتریکی کل (kA)	I_{dis}
ضربه ویژه (s)	I_{sp}
چگالی جریان الکتریکی (Am^{-2})	j
ثابت بولتزمن (JK^{-1})	k_B
جاکوبی ماتریس انتقال متغیرهای اولیه و بقایی	M
چگالی تعداد ذرات یک جزء شیمیایی (m^{-3})	n
فشار (Pa)	p
واحد بار الکترون (C)	\bar{q}
ماتریس بردارهای ویژه	R

[7] آهنگر مهدی، ابراهیمی رضا، شمس مهرداد، "حل معادلات MHD با استفاده از یک روش مرتبه بالای مبتنی بر تفکیک مشخصه‌ها به منظور شبیه‌سازی رانشگر پلاسمایی مغناطیسی"، مجله علمی پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۳، شماره ۱۴، صفحه ۲۸-۴۲، اسفند ۱۳۹۲.

[8] Villani D. D., Energy Loss Mechanisms in a Magneto plasma dynamic Arcjet, Ph.D. Thesis, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1982.

[9] Ahangar M., Ebrahimi R., Shams M., Numerical simulation of non-equilibrium plasma flow in a cylindrical MPD thruster using a high-order flux-difference splitting method, Acta Astronautica, Vol. 103, No. 1, pp. 129-141, 2014.

[۱۰] آهنگر مهدی، ابراهیمی رضا، شمس مهرداد، حل معادلات هیدرودینامیک مغناطیسی با استفاده از روش HLLC جهت شبیه‌سازی یک رانشگر پلاسمایی مغناطیسی، پذیرفته شده در نشریه پیشران‌ها هوافضایی، مرداد ۱۳۹۳.

[۱۱] آهنگر مهدی، ابراهیمی رضا، شمس مهرداد، شبیه‌سازی عددی جریان پلاسمای غیرتعادلی در یک رانشگر پلاسمایی مغناطیسی، مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، دوره ۴، شماره ۲، صفحه ۸۹-۱۰۱، خرداد ۱۳۹۳.

[12] Janhunen P., A positive conservative method for magnetohydrodynamics based on HLL and Roe methods, Journal of Computational Physics, Vol. 160, pp. 649-661, 2000.

[13] Laney C. B., Computational gasdynamics, Cambridge University Press, New York, 1998.

[14] Einfeldt, et al., On godunov-type methods near low densities, Journal of Computational Physics, Vol. 92, pp. 273-295, 1991.

[15] Van Leer B., Towards the ultimate conservative difference scheme. II. monotonicity and conservation combined in a second-order scheme, Journal of Computational Physics, Vol. 14, pp. 361-370, 1974.

[16] Yan L. et al, Optimization of the MUSCL scheme by dispersion and dissipation, Science China Physics, Mechanics and Astronomy, Vol. 55, Iss. 5, pp. 844-853, 2012.

[17] Boyle M. J., Acceleration processes in the quasi-steady magneto plasma dynamic discharge, Ph.D. Thesis, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1974.

[18] Cory J. S., Mass, Momentum and Energy Flow from an MPD Accelerator, PhD Thesis, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1971.

S	عبارت مولد
T	دما (K)
u	مولفه شعاعی سرعت (m/s)
U	بردار متغیرهای بقایی
v	بردار سرعت (m/s)
w	مولفه محوری سرعت (m/s)
W	بردار متغیرهای اولیه
ϵ	چگالی انرژی (Jm^{-3})
η	مقاومت الکتریکی موثر پلازما ($Ohm \cdot m$)
λ	مقادیر ویژه (m/s)
Λ^+, Λ^-	ماتریس قطری مقادیر ویژه مثبت و منفی
γ	نسبت گرمایی ویژه
μ_0	نفوذپذیری مغناطیسی (N/A^2) $4\pi \times 10^{-7}$
$V_{AN,i}$	فرکانس گرمایش ریزناپایداری‌ها (s^{-1})
ρ	چگالی (kg/m^3)
χ	انرژی یونیزاسیون (J)
$\dot{\omega}$	عبارت مولد واکنش شیمیایی ($m^{-3}s^{-1}$)

۷- زیر نویس

e	الکترون
h	ذرات سنگین (یون‌ها + اتم‌ها)
i	یون‌ها
in	مرز ورودی
j	اندیس سلول محاسباتی
n	شکل غیربقایی
r	جهت شعاعی
z	جهت محوری
θ	جهت محیطی

۸- بالانویس

L	سمت چپ مرز سلول محاسباتی
R	سمت راست مرز سلول محاسباتی

۹- مراجع

[1] Rowe R., Jaskowsky W. F., Clark K., and Jahn Erosion measurements on quasi-steady magneto plasma dynamic thrusters, J. Spacecraft, Vol. 19, No. 4, pp. 349-353, 1982.

[2] Uribarri L., Onset voltage hash and anode spots in quasi-steady magneto plasma dynamic thrusters, Ph.D. Thesis, Princeton University, 2008.

[3] Caldo G., and Choueiri E. Y., Numerical fluid simulation of an MPD thruster with real geometry. In 23rd International Electric Propulsion Conference, Seattle, WA, USA, 1993.

[4] Sankaran K., Choueiri E. Y., and Jardin S. C., Comparison of simulated magneto plasma dynamic thruster flow fields to experimental measurements, Journal of Propulsion and Power, Vol. 21, No. 1, pp. 129-138, 2005.

[5] Parma B. J., Three-dimensional modeling and analysis of magneto plasma dynamic acceleration, M.Sc. Thesis, Arizona State University, 2011.

[۶] آهنگر مهدی، ابراهیمی رضا، شمس مهرداد، شبیه‌سازی عددی جریان سیال پلازما تحت میدان مغناطیسی در یک رانشگر فضایی، دومین کنفرانس الکترومغناطیس مهندسی ایران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران، ۱۸-۱۹ دی ماه، ۱۳۹۲.