مجله مهندسی مکانیک، شماره پیاپی ۷۵، جلد ۴۶، شماره ۲، تابستان ۱۳۹۵، صفحه ۱۴۱-۱۴۹

ارائه یک روش جدید هم‌چرخشی برای تحلیل غیرخطی هندسی سازه‌های خرپایی دوبعدی بر مبنای کرنش‌های کوچک

عباس معلمی اوره استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد شهرضا، دانشگاه آزاد اسلامی، شهرضا، ایران

محمد کارکن* استادیار، گروه مهندسی عمران، واحد لارستان، دانشگاه آزاد اسلامی، لارستان، ایران

چکیده

بسیاری از سازه‌ها زیر اثر بار وارد بر آنها، دچار تغییر شکل‌های بزرگ می‌شوند. با توجه به تغییر هندسه سازه زیر اثر بار، برای تحلیل این گونه سازه‌ها نیاز به تحلیل غیر خطی هندسی می‌باشد. راهکار هم‌چرخشی، یکی از روش های کاربردی و عملی تحلیل غیر خطی هندسی است. هدف از این پژوهش، ارائه یک روش جدید هم‌چرخشی برای تحلیل غیرخطی هندسی سازه‌های خرپایی دوبعدی بر مبنای کرنش‌های کوچک می‌باشد. شیوه‌ی هم‌چرخشی، امکان جداسازی حرکت جسم صلب و کرنش‌های کوچک را برای جزء میله‌ای فراهم می‌آورد. بنابراین به دو دستگاه مختصات کلی و محلی نیاز است. برای کرنش‌های کوچک در دستگاه مختصات محلی، ماتریس سختی خطی جزء دو گرهی بکار گرفته شد. در ادامه، با نوشتن رابطه‌های هم‌چرخشی ماتریس انتقال برای این جزء استخراج می‌گردد. با بهره‌جویی از این ماتریس انتقال، ماتریس سختی مماسی و بردار نیروهای گرهی جزء در دستگاه مختصات کلی بدست می‌آید. در پایان با آزمون‌های عددی دقت شیوه‌ی پیشنهادی در تحلیل غیرخطی هندسی سازه‌های خرپایی دو بعدی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. این آزمون‌ها، تأیید کننده دقت بسیار بالای شیوه‌ی پیشنهادی در تحلیل غیرخطی هندسی سازه‌های خرپایی دو بعدی، می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: اجزای محدود، خرپای دو بعدی، روش هم‌چرخشی، تحلیل غیرخطی هندسی.

Developing a New Co-rotational Method for Nonlinear Geometrical Analysis of Two-dimensional Truss Structures Based on Small Strains

A. Moallemi-Oreh Assistant Professor, Department of Mechanical Engineering, Shahreza Branch, Islamic Azad University, Shahreza, Iran

M. Karkon Assistant Professor, Department of Civil Engineering, Larestan Branch, Islamic Azad University, Larestan, Iran

Abstract

Most structures experience large deformations under applied loads. Due to the deforming of geometry of structures, geometrical nonlinear analysis is needed. The co-rotational method is a simple and practical technique for nonlinear geometrical analysis. In this technique, unlike other nonlinear methods, is supposed the strain of the element to be small. The aim of this research is to develop a new co-rotational method for geometrical nonlinear analysis of two-dimensional truss structures based on small strains. A co-rotational method makes the separation of rigid body motion and small strains possible for a truss element. Therefore, global and local coordinate systems are utilized. Linear stiffness matrix of two-node element is used for small strains in local coordinate systems. Then, by writing co-rotational equations, transformation matrix is introduced for this element. The transformation matrix is used to calculate tangential stiffness matrix and element node force vector in global coordinate systems. At the end, the accuracy of the proposed method is evaluated by numerical tests. These tests confirm high accuracy of the proposed element for geometrical nonlinear analysis of two-dimensional truss structures.

Keywords: Finite Element, Two-Dimensional Truss, Co-rotational Method, Geometrical Nonlinear Analysis.

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: Karkon443@gmail.com

۱- مقدمه

بسیاری از سازه‌ها زیر اثر بار وارد بر آنها، دچار تغییر شکل‌های بزرگ می‌شوند. با توجه به تغییر هندسه سازه زیر اثر بار، برای تحلیل این گونه سازه‌ها نیاز به تحلیل غیر خطی هندسی می‌باشد. شیوه‌های گوناگونی برای تحلیل غیرخطی سازه‌ها ارائه شده است. در روش لاگرانژ کامل، معادلات غیر خطی بر اساس یک مرجع ثابت بنا می‌گردند. در این شیوه به طور معمول شکل نخستین سازه به عنوان مرجع به کار می‌رود. در روش لاگرانژ بهنگام، شکل نهایی سازه در گام قبلی، مبنای تحلیل در گام بعدی قرار می‌گیرد. راهکار هم‌چرخشی، نیز یکی دیگر از روش های تحلیل غیر خطی می‌باشد[۱].

ایده اصلی شیوه هم‌چرخشی، بر پایه‌ی جداسازی تغییر شکل‌های جزء به دو بخش حرکت جسم صلب و تغییر شکل خالص جزء بنا شده است. برای این منظور، دو دستگاه محور مختصات کلی و محلی برای جزء تعریف می‌گردد. تغییر شکل‌های جزء در دستگاه مختصات محلی می‌باشد. چنان‌چه، کرنش جزء در دستگاه مختصات محلی کوچک باشد، می‌توان از روابط اجزای محدود خطی برای جزء در دستگاه مختصات محلی بهره جست. سپس، به کمک ماتریس انتقال، بردار نیروهای گرهی و ماتریس سختی جزء در دستگاه مختصات محلی، به نیروهای گرهی و ماتریس سختی مماسی جزء در دستگاه مختصات کلی تبدیل می‌گردد.

تاکنون پژوهش‌های فراوانی در رابطه با تحلیل غیر خطی هندسی سازه‌های خرپایی انجام شده که بخش اعظم آن با روش لاگرانژی انجام شده است. ساکا[۲]، صفاری و همکاران[۳]، لیمکاتانیو و همکاران[۴] و همچنین هریندا[۵] رفتار غیر خطی هندسی سازه‌های خرپایی را مورد مطالعه قرار دادند. ژوو و همکاران[۶]، روشی را برای تحلیل خرپای فضایی پیش تنیده با در نظر گرفتن نقص اولیه و همچنین ناپایداری سازه، پیشنهاد کردند. تاهای و کیم[۷] با در نظر گرفتن رفتار غیر خطی هندسی و مواد، تحلیل غیر خطی سازه‌های خرپایی فضایی را انجام دادند. آنان در پژوهشی دیگر، رفتار غیرخطی سازه‌های خرپایی در حالت بارگذاری دینامیکی را مورد بررسی قرار دادند[۸]. همچنین، ژو و همکاران[۹] ارتعاش غیرخطی سازه‌های خرپایی مستوی تحت تحریک هارمونیک را مورد مطالعه قرار دادند. جریکو و همکاران[۱۰]، تحلیل سازه‌های خرپایی را با فرض کرنش لگاریتمی برای اعضا انجام دادند. آنها همچنین یک روش تحلیل غیر خطی بر مبنای راه کار هم‌چرخشی پیشنهاد کردند. ترکمانی و شای، یک ماتریس سختی سکانتی مرتبه‌ی بالا را برای تحلیل غیرخطی هندسی سازه‌های خرپایی دو بعدی استخراج کردند[۱۱]. جایاچاندران و همکاران[۱۲]، با شیوه‌ی هم‌چرخشی، ماتریس سختی سکانتی را برای تحلیل سازه‌های خرپایی با در نظر گرفتن امکان کمانش عضوهای آن، استخراج کردند.

در این پژوهش یک رابطه‌سازی جدید هم‌چرخشی برپایه‌ی روش پیشنهاد شده توسط باتینی[۱۳]، برای تحلیل غیرخطی هندسی سازه‌های خرپایی دو بعدی پیشنهاد می‌گردد. برای این کار، ابتدا دو دستگاه مختصات محلی و کلی برای جزء تعریف می‌گردد. در دستگاه محلی، جزء به صورت خطی رابطه‌سازی می‌گردد. سپس، با نوشتن رابطه‌های هم‌چرخشی، ماتریس انتقال بین دستگاه مختصات کلی و محلی، استخراج می‌گردد. در ادامه به کمک این ماتریس انتقال، ماتریس سختی خطی در دستگاه مختصات محلی به ماتریس سختی مماسی در دستگاه مختصات کلی تبدیل خواهد شد. در پایان، با آزمون‌های عددی گوناگون و مشکل، دقت روش پیشنهادی مورد ارزیابی قرار گرفت. نتایج این آزمون‌ها، نشان دهنده دقت بسیار بالای شیوه‌ی پیشنهادی در تحلیل غیرخطی هندسی سازه‌های خرپایی دو بعدی می‌باشد.

۲- رابطه‌سازی هم‌چرخشی

۲-۱- روش هم‌چرخشی

در روش هم‌چرخشی، حرکت جزء به دو بخش حرکت جسم صلب و تغییر شکل کوچک تقسیم می‌شود. بنابراین دو دستگاه مختصات محلی و کلی نیاز است. دستگاه مختصات محلی همراه جزء، دوران می‌کند و تغییر شکل‌های کوچک جزء نسبت به این دستگاه مختصات سنجیده می‌شود. شکل ۱ یک جزء خرپایی دو بعدی به همراه دستگاه مختصات محلی (oxy) و دستگاه مختصات کلی (OXY) را نشان می‌دهد. در این شکل، بردارهای $r_i = (X_i . Y_i)$ و $u_i = (U_i . V_i)$ به ترتیب مختصات و جابه‌جایی‌های گره i خرپا را در محور مختصات کلی نشان می‌دهند. برای سادگی دستگاه مختصات محلی در مرکز جزء فرض می‌گردد. بنابراین مختصات مرکز جزء به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$r_c=(X_c,Y_c),\ X_c=\frac{1}{2}(X_1+X_2),Y_c=\frac{1}{2}(Y_1+Y_2) \qquad (۱)$$

در شیوه‌ی هم‌گرد(هم‌چرخشی)، حرکت جسم از حالت نخستین خود به شکل نهایی، در دو گام انجام می‌شود. در گام نخست، به جزء یک حرکت جسم صلب وارد می‌گردد. این حرکت شامل دو بخش جابجایی و دوران جسم صلب می‌باشد. حرکت انتقالی جسم صلب مرکز جزء (u_c) را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$u_c=(U_c,V_c),\ \ U_c=\frac{1}{2}(U_1+U_2),\ \ V_c=\frac{1}{2}(V_1+V_2) \qquad (۲)$$

همچنین، دوران جسم صلب نیز با زاویه (θ) نشان داده می‌شود. این زاویه موقعیت محور مختصات محلی را نسبت به محور مختصات کلی مشخص می‌کند. در گام دوم، جزء در محور

مختصات محلی دچار تغییر شکل می‌گردد و حالت نهایی خود را می‌یابد. جابجایی‌های انتقالی جزء در محور مختصه‌های محلی $\bar{u}_i = (\bar{u}_i, \bar{v}_i)_{i=1,2,3,4}$ را با توجه به شکل ۱، می‌توان به صورت رابطه زیر تعیین کرد:

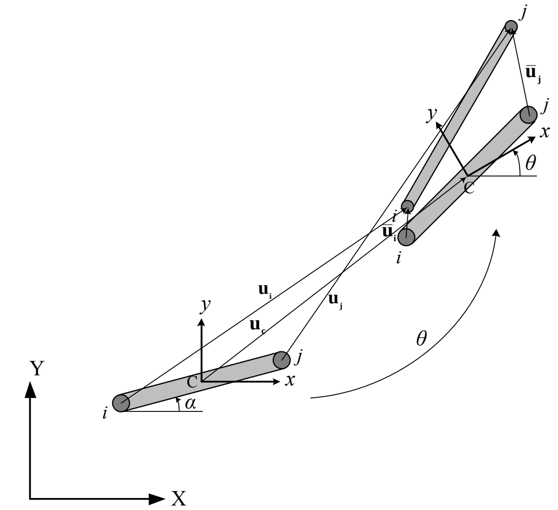
$$\begin{bmatrix}\bar{u}_i\\ \bar{v}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_i+U_i-X_c-U_c\\ Y_i+V_i-Y_c-V_c\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_i\\ y_i\end{bmatrix} \qquad (۳)$$

هم‌چنین، زاویه دوران جسم صلب (θ) نیز، می‌توان با کمینه کردن نرم اقلیدسی تغییرمکانهای انتقالی در محور مختصات محلی به دست آورد[۱۳]:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{2}\left(\bar{u}_i+\bar{v}_i\right)\right)\Rightarrow\theta \qquad (۴)$$

چنانچه، مشتق مجموع جابه‌جایی‌های انتقالی در محور مختصه‌های محلی (رابطه ۴) نسبت به زاویه دوران (θ) صفر گردد، این زاویه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\tan\theta=\frac{\sum_{i=1}^{2}\left[x_i\left(Y_i+V_i-Y_c-V_c\right)-y_i\left(X_i+U_i-X_c-U_c\right)\right]}{\sum_{i=1}^{2}\left[x_i\left(X_i+U_i-X_c-U_c\right)+y_i\left(Y_i+V_i-Y_c-V_c\right)\right]} \qquad (۵)$$



شکل ۱- توصیف حرکت جزء در روش هم‌چرخشی

رابطه‌ی (۵) دو مقدار را برای دوران به دست می‌دهد $(\theta\,,\theta+\pi)$، که یکی متناظر با مقدار کمینه و دیگری متناظر با مقدار بیشینه‌ی رابطه‌ی (۴) می‌باشد. ساده ترین راه برای انتخاب مقدار درست (θ)، قرار دادن هر دو مقدار در رابطه (۴) می‌باشد، به گونه‌ای که هر مقداری که رابطه (۴) را کمینه کرد، مقدار درست زاویه دوران (θ) می‌باشد .در نهایت، بردار تغییر مکان‌های گرهی در دستگاه مختصات کلی (P_g) و محلی (P_l) را می‌توان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$p_l=\begin{bmatrix}\bar{u}_1 & \bar{v}_1 & \bar{u}_2 & \bar{v}_2\end{bmatrix} \qquad (۶)$$

$$p_g=\begin{bmatrix}U_1 & V_1 & U_2 & V_2\end{bmatrix} \qquad (۷)$$

۲-۲- ماتریس انتقال

به کمک ماتریس انتقال، می‌توان ماتریس سختی خطی (K_l) و بردار نیروهای داخلی گرهی (f_l) در دستگاه مختصات محلی را به ماتریس سختی مماسی (K_g) و بردار نیروهای داخلی گرهی (f_g) در دستگاه مختصات کلی تبدیل کرد. با توجه به اینکه حرکت جسم صلب هیچ‌گونه کارمایه‌ای را در جزء به وجود نمی‌آورد و تمام کارمایه‌ی داخلی جزء ناشی از تغییر شکل در مختصات محلی می‌باشد، بنابراین کارمایه‌ی داخلی جزء در دستگاه مختصات محلی و کلی برابر می‌باشد. پس می‌توان نوشت:

$$\delta\Pi_{\,g}\;=\;\delta\Pi_{\,l} \qquad (۸)$$

$$f_g=\left(\frac{\partial\Pi}{\partial p_g}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\frac{\partial\Pi}{\partial p_l}\frac{\partial p_l}{\partial p_g}\right)^{\mathrm{T}}=\mathrm{B}^{\mathrm{T}}f_l \qquad (۹)$$

$$B=\frac{\partial p_l}{\partial p_g}\;\Rightarrow\;\partial p_g=B^T\partial p_l \qquad (۱۰)$$

از طرفی در دستگاه مختصات محلی و کلی رابطه‌های زیر برقرار می‌باشد:

$$f_l=K_lp_l \qquad (۱۱)$$

$$f_g=K_gp_g \qquad (۱۲)$$

یادآوری می‌گردد که ماتریس سختی خطی و بردار نیروهای داخلی گرهی در دستگاه مختصات محلی به صورت رابطه‌های زیر محاسبه می‌شوند:

$$k_0=\frac{EA_0}{l}\begin{bmatrix}\cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha\\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha\end{bmatrix} \qquad (۱۳)$$

$$K_l=\begin{bmatrix}k_0 & -k_0\\ -k_0 & k_0\end{bmatrix} \qquad (۱۴)$$

$$f_l=K_lp_l \qquad (۱۵)$$

با دیفرانسیل‌گیری از رابطه‌ی (۳)، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{bmatrix}\delta\bar{u}_i\\ \delta\bar{v}_i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta U_i-\delta U_c\\ \delta V_i-\delta V_c\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}y_{di}\\ x_{di}\end{bmatrix}\delta\theta \qquad (۱۶)$$

$$\begin{aligned}y_{di}&=\bar{u}_i+x_i\\ x_{di}&=\bar{v}_i+y_i\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

هم‌چنین، عامل $\delta\theta$ را می‌توان با دیفرانسیل‌گیری از رابطه‌ی (۵)، به صورت زیر به دست آورد:

$$\delta\theta=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{\sum_{i=1}^{2}\left(x_ix_{di}+y_iy_{di}\right)}\begin{bmatrix}-y_i & x_i\end{bmatrix}\times \qquad (۱۸)$$
$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta U_i-\delta U_c\\ \delta V_i-\delta V_c\end{bmatrix}$$

با توجه به رابطه‌های (۱۶) و (۱۸) و حذف عامل‌های δU_c و δV_c، ماتریس انتقال B را می‌توان به صورت رابطه‌ی زیر یافت:

$$B = PE^T \quad , \quad P = I - AG \tag{۱۹}$$

ماتریس P در رابطه‌ی (۱۹)، یک ماتریس تصویرگر می‌باشد($P=P^2$). ماتریس I نیز، همان ماتریس واحد است. هم‌چنین، دیگر عامل‌های رابطه‌ی (۱۹)، به صورت رابطه‌های زیر تعیین می‌گردند:

$$A = \begin{bmatrix} -y_{d1} & x_{d1} & -y_{d2} & x_{d2} \end{bmatrix} \tag{۲۰}$$

$$G = \frac{1}{\sum_{i=1}^{2} \left(x_i x_{di} + y_i y_{di} \right)} \begin{bmatrix} -y_1 & x_1 & -y_2 & x_2 \end{bmatrix} \tag{۲۱}$$

$$E = \mathrm{diag}\begin{bmatrix} R, R, R, R \end{bmatrix}$$
$$R = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \tag{۲۲}$$

برای به دست آوردن ماتریس سختی مماسی جزء، مشتق نیروهای گرهی داخلی (f_g) نسبت به جابه‌جایی‌های گرهی کلی (P_g) حساب می‌گردد:

$$K_g = \frac{\partial f_g}{\partial p_g} = \frac{\partial}{\partial p_g}\left(B^T f_l\right) = B^T \frac{\partial f_l}{\partial p_g} + \frac{\partial B^T}{\partial p_g} f_l \tag{۲۳}$$

$$B^T \frac{\partial f_l}{\partial p_g} = B^T \frac{\partial f_l}{\partial p_l} \frac{\partial p_l}{\partial p_g} = B^T K_l B \tag{۲۴}$$

$$K_g = B^T K_l B + \frac{\partial B^T}{\partial p_g} f_l = B^T K_l B + K_h \tag{۲۵}$$

با بهره‌گیری از رابطه‌ی (۱۹)، ماتریس (K_h) به صورت زیر در دسترس قرار می‌گیرد:

$$K_h = \delta E P^T f_l + E \delta P^T f_l \tag{۲۶}$$

سر انجام، پس انجام پاره‌ای از محاسبات و با توجه به اینکه $A^T G^T = I$ [۱۳]، ماتریس (K_h) به صورت رابطه‌ی زیر به دست می‌آید[۱۳]:

$$K_h = E\left[-F^T G - G^T F P \right] E^T \tag{۲۷}$$

عامل F، در رابطه‌ی کنونی، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$P^T f_l = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 & n_4 \end{bmatrix}^T \tag{۲۸}$$

$$F = \begin{bmatrix} n_2 & -n_1 & n_4 & -n_3 \end{bmatrix} \tag{۲۹}$$

همچنین، عامل‌های n_1 تا n_4 از رابطه ۲۸ به دست می‌آید. بدین صورت که با ضرب بردار نیروهای داخلی گرهی در مختصات محلی (f_l) در ترانهاده ماتریس تصویرگر (P^T) که هر دو مشخص هستند، این عاملها در دسترس قرار می گیرند.

رابطه (۲۷) پس از انجام محاسبات پیچیده ریاضی استخراج می‌گردد. جزئیات اثبات را می توان در مرجع [۱۴] یافت. این رابطه برای تحلیل تمامی مسائل ساختاری یکسان دارند. نویسندگان، این رابطه را از مرجع [۱۳] اخذ نموده‌اند و برای جزء خرپایی ساده نموده‌اند. یادآوری می گردد که مرجع [۱۳] روش هم چرخشی را برای تحلیل مسائل مستوی به کار برده است.

گام‌های تحلیل ناخطی با روش هم‌چرخشی به قرار زیر می‌باشد:

۱. اعمال بار بر سازه
۲. محاسبه ماتریس دوران R با بهره جستن از مختصات گرهی و جابجایی‌های جزء (توجه: در گام نخست بارگذاری جابجایی صفر می‌باشد)
۳. محاسبه ماتریس انتقال B و محاسبه ماتریس سختی مماسی جزء در رابطه (۲۵)
۴. محاسبه نمو جابه‌جایی و بهنگام سازی بردار جابه‌جایی گرهی و محاسبه میزان خطا
۵. تکرار مراحل ۲ تا ۴، تا زمانی که میزان خطا به میزان مشخص شده کاهش یابد.
۶.

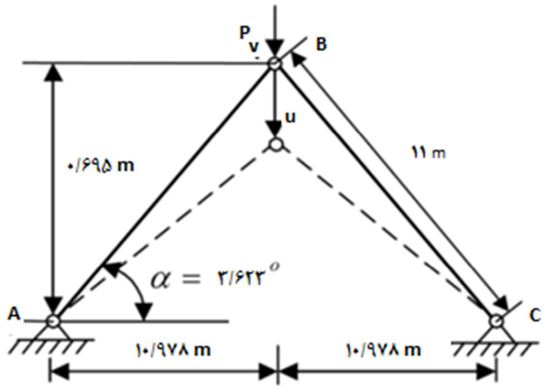
۲- آزمون‌های عددی

در این بخش کارآیی جزء پیشنهادی در تحلیل ناخطی هندسی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. برای این منظور با بکار بردن جزء پیشنهادی شش سازه‌ی خرپایی دو بعدی، تحلیل غیرخطی هندسی می‌گردد و با نتایج جزءهای سایر پژوهشگران مقایسه می‌شود.

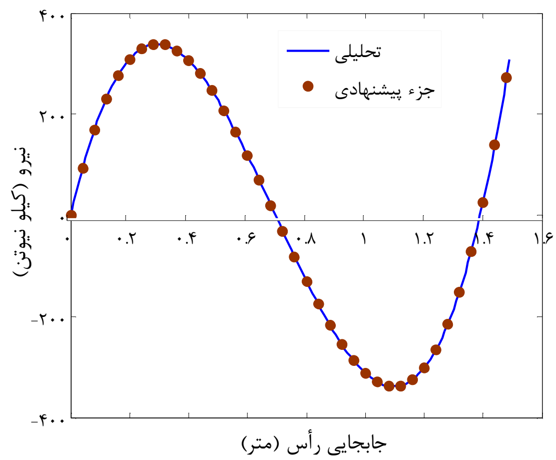
۳-۱-آزمون یکم: خرپای دو عضوی

در این آزمون یک خرپای دو عضوی زیر اثر بار عمودی رو به پایین در رأس آن (نقطه B) تحلیل می‌گردد و جابه‌جایی عمودی آن حساب می‌شود. شکل ۲ این سازه‌ی خرپایی به همراه مشخصه‌های هندسی و بار وارد برآن را نشان می‌دهد. ضریب کشسانی و سطح مقطع هر دو عضو خرپا به ترتیب $E = 206\,GPa$ و $A = 0.0169 m^2$ می‌باشند. این سازه به دلیل هندسه خاص آن، دارای رفتاری به شدت ناپایدار است و در آن پدیده جهش ناگهانی[۱] رخ می‌دهد. بنابراین، برای تحلیل غیرخطی این سازه، روش طول قوس به کار می‌رود. با تحلیل این سازه، نمودار بارجابه‌جایی عمودی نقطه B در شکل ۳ برای جزء پیشنهادی رسم شده است. هم‌چنین، پاسخ تحلیلی آن نیز در شکل ۳ نشان داده شده است. پاسخ تحلیلی این سازه به صورت رابطه‌ی ۳۰ ارائه شده است[۱۱]:

---
[۱] Snap-through



شکل ۲– خرپای دو عضوی



شکل ۳– نمودار بار–جابه‌جایی عمودی نقطه B (آزمون یکم)

$$P=\frac{2EA}{L}(h-u)\left[\left(1+\left(\frac{u}{L}\right)^2-\frac{2uh}{L^2}\right)^{-\frac{1}{2}}-1\right] \qquad (۳۰)$$

در این رابطه، u جابه‌جایی عمودی رأس سازه (نقطه B)، h ارتفاع رأس سازه و L طول یک از عضو خرپا می‌باشد. با بررسی شکل ۳ مشاهده می‌شود که دقت روش پیشنهادی بسیار بالا است و بر پاسخ تحلیلی منطبق می‌باشد.

۳-۲-آزمون دوم: خرپای چهار عضوی

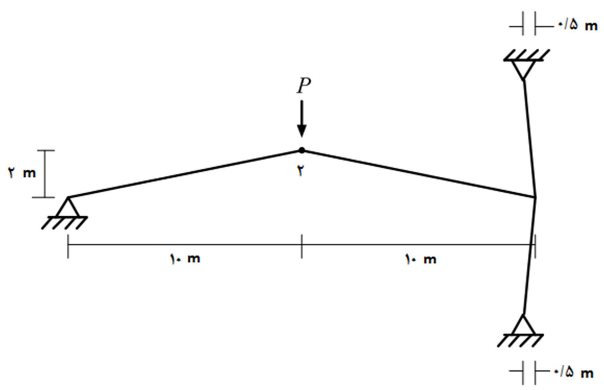
در این آزمون یک خرپای چهار عضوی زیر اثر یک بار قائم تحلیل می‌گردد. این خرپا دارای یک تکیه گاه صلب و یک تکیه گاه نرم می‌باشد. به دلیل نوع تکیه‌گاه‌های آن، این سازه دارای رفتار غیرخطی هندسی پیچیده‌ای می‌باشد. شکل ۴ این سازه‌ی خرپایی را به همراه بار وارد بر آن نشان می‌دهد. سفتی اعضای این سازه‌ی خرپایی $EA=9\times10^4\ N$ می‌باشد. با تحلیل سازه، جابه‌جایی قائم گره ۲ حساب می‌گردد. در شکل ۵ نمودار بار–جابه‌جایی قائم گره ۲ برای جزء پیشنهادی و همچنین رابطه‌سازی لاگرانژ کامل رسم شده است. با بررسی این نمودار مشاهده می شود، نتایج تحلیل روش پیشنهادی با روش لاگرانژ کامل که بر پایه‌ی کرنش‌های مرتبه بالای گرین استوار است، یکسان می‌باشد.

۳-۳- آزمون سوم: خرپای هشت عضوی

در آزمون دوم، یک خرپای ۸ عضوی تحلیل می‌گردد. شکل ۶ این خرپا را به همراه مشخصات هندسی آن نشان می‌دهد. سفتی عضوهای خرپا $EA=3\times10^5\ N$ می‌باشد. به دلیل رفتار غیرخطی شدید این خرپا، بسیاری از پژوهشگران برای سنجش دقت شیوه‌ی پیشنهادی خود، به تحلیل این سازه پرداخته‌اند. هم‌چنین، برخی نیز گونه‌های دیگری از این سازه را مورد بررسی قرار داده‌اند[۱۵, ۱۶]. در ادامه با بکار بردن روش پیشنهادی، این خرپا تحلیل و با نتایج مرجع [۱۲] مقایسه می‌گردد. برای این منظور نمودار بارجابه‌جایی افقی برای دو گره ۱ و ۷ (که در سازه مشخص شده است) رسم می‌گردد. شکل ۷، نمودار بار–جابه‌جایی افقی، برای گره ۱ و شکل ۸، برای گره ۷ را نشان می‌دهد. با بررسی این نمودارها، مشاهده می‌شود که دقت روش پیشنهادی در تحلیل غیرخطی هندسی بسیار بالا می‌باشد و نتایج آن با یافته‌های مرجع[۱۲]، یکسان است.

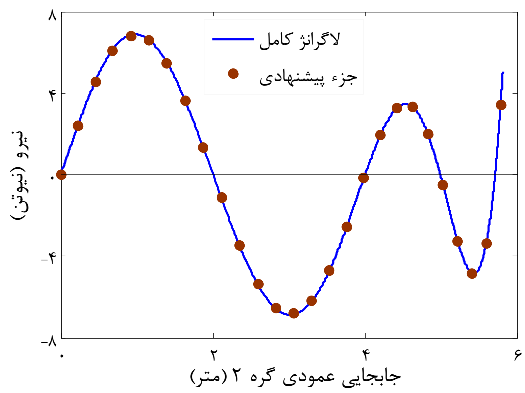
۳-۴- آزمون چهارم: برج طره پاول[1]

در این آزمون برج طره پیشنهاد شده توسط پاول و همکاران تحلیل می‌گردد[۱۷]. این سازه زیر اثر ترکیبی از بارهای افقی و قائم قرار دارد و دارای حالتی ناپایدار است. شکل ۹ مشخصات هندسی این برج را به همراه بارهای وارد به آن، نشان می‌دهد. سفتی اعضای این سازه‌ی خرپایی $EA=3\times10^5\ N$ می‌باشد. با تحلیل این برج، نمودار بار–جابه‌جایی افقی گره یک در شکل ۱۰ رسم شده است. بررسی این نمودار نشان می‌دهد که دقت روش پیشنهادی بسیار بالا است. به گونه‌ای که نتایج جزء پیشنهادی با یافته‌های مرجع [۱۷] که بر مبنای کرنش‌های مرتبه‌ی بالا به دست آمده، یکسان می‌باشد.

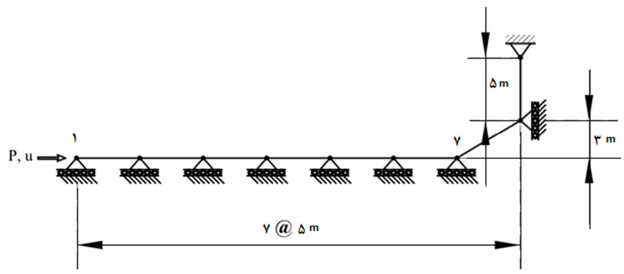


شکل ۴–خرپای ۴ عضوی

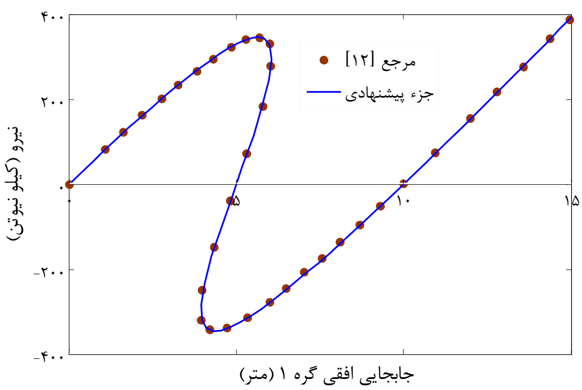
[1] Powell



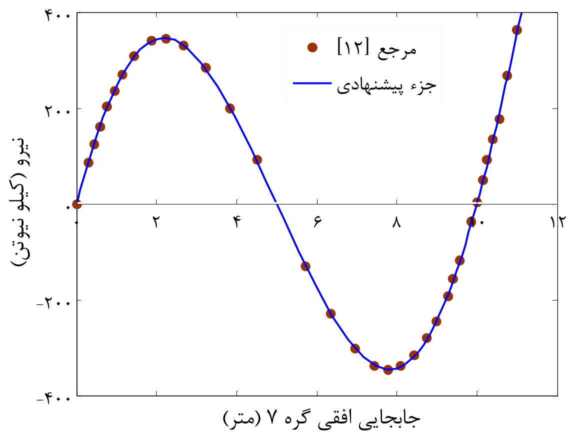
شکل۵–نمودار بار–جابه‌جایی قائم گره ۲ (آزمون دوم)



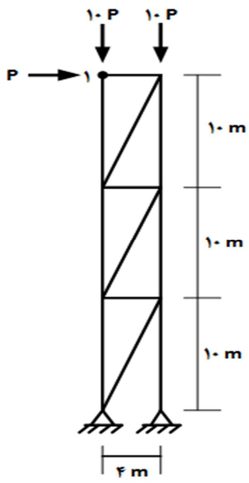
شکل۶–خرپای ۸ عضوی



شکل ۷– نمودار بار–جابه‌جایی افقی گره ۱ (آزمون سوم)



شکل۸–نمودار بار–جابه‌جایی افقی گره ۷ (آزمون سوم)



شکل ۹– برج پاول

۳-۵- آزمون پنجم: خرپای تامپسون–هانت[1]

این سازه، نخستین بار توسط تامپسون و هانت برای بررسی اثر نقص بر روی کمانش خرپاهای شبکه‌ای سه بعدی و ستون‌های خرپایی، مورد تحلیل قرار گرفت[۱۸]. بعدها روزن و اسمیت اثر نقص موضعی را بر روی رفتار کلی این سازه، مورد بررسی قرار دادند[۱۹]. هم‌چنین، کوندو و آتلاری رابطه‌ی بین کمانش موضعی و پایداری کلی این سازه را مورد مطالعه قرار دادند[۲۰].

در شکل ۱۱ خرپای تامپسون–هانت به همراه مشخصات هندسی آن نشان داده شده است. این سازه دارای ۳۵ عضو و ۱۹ گره می‌باشد. هم‌چنین تمامی عضوها دارای سطح مقطعی دایره‌ای هستند و ضریب کشسانی آنها نیز برابر $E = 68.964 GPa$ می‌باشد. سطح مقطع عضوهای ۱ تا ۲۱ برابر $A_{1-21} = 54.84\ cm^2$ و سطح مقطع عضوهای ۲۲ تا ۳۵ نیز برابر $A_{22-35} = 51.61\ cm^2$ است.

در این آزمون، پایداری کلی سازه زیر اثر یک بار افقی فشاری در گره ۱۹ مورد بررسی قرار می‌گیرد. یادآوری می‌گردد که این سازه در راستای محور افقی متقارن نیست و محور خنثی، اندکی بالاتر از محور افقی مرکز سازه قرار دارد. با تحلیل سازه، جابجایی قائم گره ۱۰ و تغییر مکان افقی گره ۱۹ حساب می‌گردد. در شکل ۱۲ نمودار بار–جابه‌جایی قائم برای گره ۱۰ رسم شده است. همچنین، در شکل ۱۳ نیز نمودار بار–جابه‌جایی افقی گره ۱۹ نشان داده شده است. در این نمودارها، علاوه بر نتایج جزء پیشنهادی، نتایج پژوهشگران دیگر نیز آورده شده است.

بررسی این نمودارها نشان می‌دهد شیوه‌ی پیشنهادی در تحلیل غیرخطی هندسی دارای دقت بسیار بالایی می‌باشد. همچنین، مشاهده می‌شود که نتایج جزء پیشنهادی به نتایج مرجع [۱۱] بسیار نزدیک است.

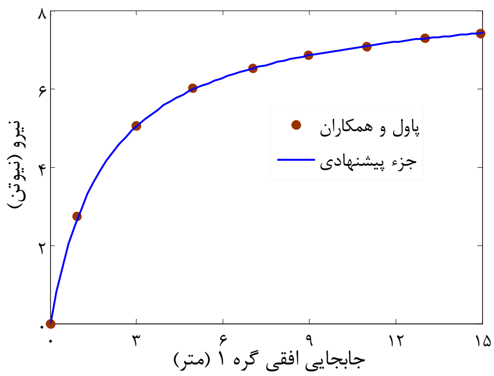
[1] Thompson-Hunt

۳-۶- آزمون ششم: خرپای قوسی

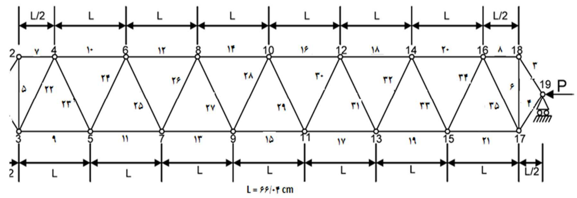
شکل ۱۴ خرپای کوتاه قوسی با ۳۵ عضو را نشان می‌دهد. این سازه، نخستین بار توسط روزن و اسمیت بـه منظـور بررسـی اثـر نقـص‌هـای هندسـی بـر روی رفتـار سـازه، مـورد بررسـی قـرار گرفت[۱۹-۲۱]. همچنین، کوندو و آتـلاری اثـر نقـص موضعـی و کلی را بر روی رفتار این سـازه، مـورد بررسـی قـرار دادنـد[۲۰]. تمامی عضوهای خرپا با سطح مقطع دایـره‌ای و ضـریب کشسـانی $E = 68.964 GPa$ هستند. مختصه‌های هر ۱۹ گره خرپـا و سـطح مقطع عضو ها در جدول‌های ۱ و ۲ درج شده است.

در این آزمون، رفتار کلی سازه صرف نظر از نقص‌های موضعی و کلی، زیر اثر یک بار عمودی فشـاری در گـره ۱۰ مـورد بررسـی قرار می‌گیرد. با تحلیـل سـازه، جابجـایی قـائم گـره ۱۰ محاسـبه می‌گردد. در شکل ۱۵ نمودار بار-جابه‌جـایی قـائم بـرای گـره ۱۰ رسم شده است. در این نمودار، علاوه بـر نتـایج جـزء پیشـنهادی، نتایج پژوهشگران دیگر نیز آورده شده است.

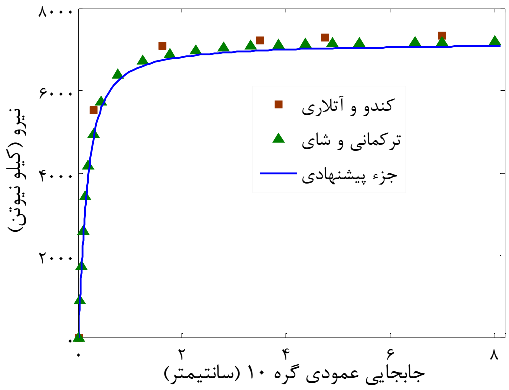
بررسی این نمـودار نشـان مـی‌دهـد شـیوه‌ی پیشـنهادی در تحلیل غیرخطـی هندسـی دارای دقـت بسـیار بـالایی مـی‌باشـد. همچنین، مشاهده می‌شود که نتـایج جـزء پیشـنهادی بـه نتـایج مرجع [۲۰] بسیار نزدیک می‌باشد.



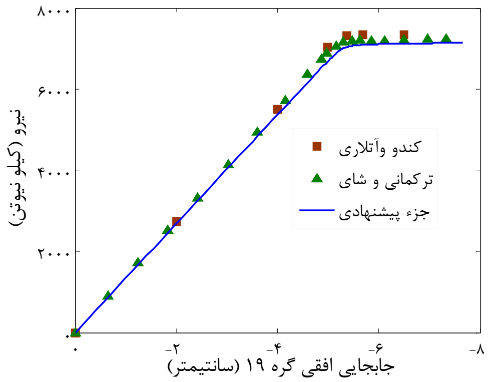
شکل ۱۰- نمودار بار-جابه‌جایی افقی گره ۱ (آزمون چهارم)



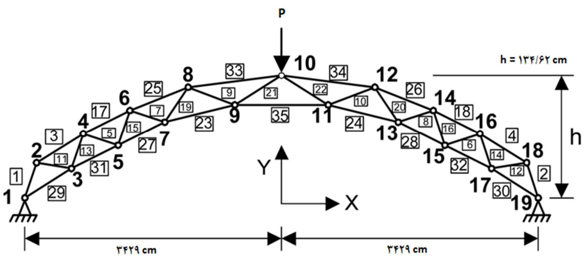
شکل ۱۱- خرپای تامپسون- هانت



شکل ۱۲-نمودار بار-جابه‌جایی قائم گره ۱۰ (آزمون پنجم)



شکل ۱۳- نمودار بار-جابه‌جایی افقی گره ۱۹ (آزمون پنجم)



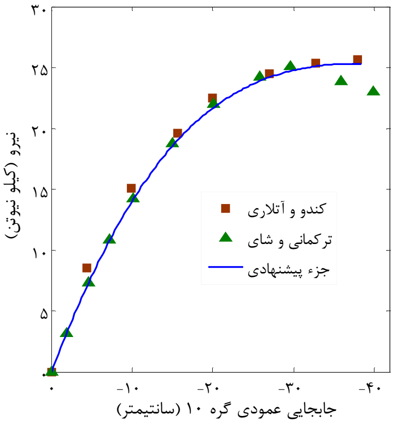
شکل ۱۴- خرپای قوسی

جدول ۱- مختصه های نقطه های گرهی خرپای قوسی

شماره گره	مختصات X	مختصات y
۱،۱۹	±۳۴۲۹٫۰	۰٫۰۰
۲،۱۸	±۳۰۴۸٫۰	۵۰٫۶۵
۳،۱۷	±۲۶۶۷٫۰	۳۴٫۷۵
۴،۱۶	±۲۲۸۶٫۰	۸۳٫۸۲
۵،۱۵	±۱۹۰۵٫۰	۶۵٫۳۰
۶،۱۴	±۱۵۲۴٫۰	۱۱۰٫۸۵
۷،۱۳	±۱۱۴۳٫۰	۸۷٫۹۹
۸،۱۲	±۷۶۲/۰	۱۲۸٫۵۰
۹،۱۱	±۳۸۱٫۰	۱۰۰٫۶۵
۱۰	۰٫۰	۱۳۴٫۶۰

جدول۲– سطح مقطع عضوهای خرپای قوسی

مساحت سطح مقطع (cm^2)	شماره عضو
۵۱/۶۱	۱ ،۱۰،۳۵
۶۴/۵۲	۱۱،۱۲
۸۳/۸۷	۱۳ ،۱۶
۹۶/۷۷	۱۷،۱۸
۱۰۳/۲۳	۱۹ ،۲۲
۱۶۱/۲۹	۲۳،۲۴
۱۹۳/۵۵	۲۵،۲۶
۲۵۸/۰۶	۲۷،۲۸
۲۹۰/۳۲	۲۹ ،۳۲
۳۰۹/۶۸	۳۳،۳۴



شکل ۱۵– نمودار بار–جابه‌جایی قائم گره ۱۰ (آزمون ششم)

۳- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک شیوه‌ی جدید هم‌چرخشی برای تحلیل غیرخطی هندسی سازه‌های خرپایی دو بعدی پیشنهاد شد. برای این منظور، دو دستگاه مختصات محلی و کلی برای جزء تعریف گردید. رابطه سازی جزء در دستگاه مختصات محلی، بر مبنای رابطه‌های اجزای محدود خطی می‌باشد. سپس، با نوشتن رابطه‌های هم‌چرخشی، ماتریس انتقال برای تحلیل غیرخطی هندسی جزء پیشنهادی استخراج شد. با بکار بردن این ماتریس انتقال، ماتریس سختی خطی و بردار نیروهای گرهی در دستگاه مختصات محلی، به ترتیب، به ماتریس سختی مماسی و بردار نیروهای گرهی در دستگاه مختصات کلی تبدیل می‌گردد. سرانجام، با آزمون‌های عددی مشکل و گسترده، کارآیی جزء پیشنهادی در تحلیل غیرخطی هندسی مورد ارزیابی قرار گرفت. این آزمون‌ها، نشان دهنده دقت بسیار بالای جزء در تحلیل غیرخطی هندسی می‌باشند.

۱- فهرست علائم

A_0 سطح مقطع (m^2)

E ضریب الاستیسیته (Nm^{-2})

p_g بردار تغییر مکان‌های گرهی در دستگاه مختصات کلی

p_l بردار تغییر مکان‌های گرهی در دستگاه مختصات محلی

K_g ماتریس سختی مماسی در دستگاه مختصات کلی

K_l ماتریس سختی در دستگاه مختصات محلی

f_g بردار نیروهای داخلی گرهی در دستگاه مختصات کلی

f_l بردار نیروهای داخلی گرهی در دستگاه مختصات محلی

B ماتریس انتقال

A بردار مکان جدید گره‌ها در محور محلی نسبت به مرکز جزء

G بردار مختصات گره‌های جزء در محور محلی

I ماتریس واحد

θ زاویه دوران جسم صلب (رادیان)

مراجع

[1] Kuo-Mo H., Horng-Jann H., Yeh-Ren C., "A corotational procedure that handles large rotations of spatial beam structures", *Computers & Structures*, vol. 27, no. 6, pp. 769-781, 1987.

[2] Saka M. P., Optimum topological design of geometrically nonlinear single layer latticed domes using coupled genetic algorithm, *Computers & Structures*, vol. 85, no. 21–22, pp. 1635-1646, 11, 2007.

[3] Saffari H., Fadaee M., Tabatabaei R., "Nonlinear analysis of space trusses using modified normal flow algorithm", *Journal of structural engineering*, vol. 134, no. 6, pp. 998-1005, 2008.

[4] Limkatanyu S., Prachasaree W., Kaewkulchai G., Kwon M., "Total Lagrangian formulation of 2D bar element using vectorial kinematical description", *KSCE Journal of Civil Engineering*, vol. 17, no. 6, pp. 1348-1358, 2013.

[5] Hrinda G. A., "Snap-through instability patterns in truss structures, *Nasa Langley Research Center"*, *Hampton, Virginia*, vol. 23831, 2010.

[6] Zhou Z., Meng S.-p., Wu J., "Stability analysis of prestressed space truss structures based on the imperfect truss element", *International Journal of Steel Structures*, vol. 9, no. 3, pp. 253-260, 2009.

[7] Thai H.-T., Kim S.-E., "Large deflection inelastic analysis of space trusses using generalized displacement control method, *Journal of Constructional Steel Research"*, vol. 65, no. 10, pp. 1987-1994, 2009.

[8] Thai H.-T., Kim S.-E., "Nonlinear inelastic time-history analysis of truss structures", *Journal of Constructional Steel Research*, vol. 67, no. 12, pp. 1966-1972, 2011.

[9] Zhu P., Leung A. Y. T., Yang H. X., "Nonlinear vibrations of viscoelastic plane truss under harmonic excitation", *International Journal of Structural*

Stability and Dynamics, vol. 14, no. 4, pp. 1450009, 2014.

[10] Greco M., Menin R., Ferreira I., Barros F., "Comparison between two geometrical nonlinear methods for truss analyses", *Structural Engineering and Mechanics*, vol. 41, no. 6, pp. 735-750, 2012.

[11] Torkamani M. A., Shieh J.-H., "Higher-order stiffness matrices in nonlinear finite element analysis of plane truss structures, *Engineering Structures"*, vol. 33, no. 12, pp. 3516-3526, 2011.

[12] Jayachandran S. A., Kalyanaraman V., Narayanan R., "A co-rotation based secant matrix procedure for elastic postbuckling analysis of truss structures", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, vol. 4, no. 01, pp. 1-19, 2004.

[13] J.-M. Battini, A non-linear corotational 4-node plane element, *Mechanics research communications*, vol. 35, no. 6, pp. 408-413, 2008.

[14] B. Nour-Omid, C. Rankin, Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 93, No. 3, pp. 353-384, 1991.

[15] M. G. D. Geers, Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. Part II—comparative performance analysis, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 46, No. 2, pp. 205-230, 1999.

[16] K.-J. Bathe, E. N. Dvorkin, On the automatic solution of nonlinear finite element equations, *Computers & Structures*, Vol. 17, No. 5–6, pp. 871-879, //, 1983.

[17] G. Powell, J. Simons, Improved iteration strategy for nonlinear structures, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 17, No. 10, pp. 1455-1467, 1981.

[18] J. M. T. Thompson, G. W. Hunt, *A general theory of elastic stability*: J. Wiley London-New York-Sydney-Toronto, 1973.

[19] Rosen A., Schmit L. A., "Design-oriented analysis of imperfect truss structures—part I—accurate analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 14, no. 9, pp. 1309-1321, 1979.

[20] Kondoh K., Atluri S., "Influence of local buckling on global instability: Simplified", large deformation, post-buckling analyses of plane trusses, *Computers & structures*, vol. 21, no. 4, pp. 613-627, 1985.

[21] Rosen A., Schmit L. A., "Design oriented analysis of imperfect truss structures—part II—approximate analysis", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 15, no. 4, pp. 483-494, 1980.