فصلنامه نظریه‌های کاربردی اقتصاد/ سال سوم/ شماره ۱/ بهار ۱۳۹۵/ صفحات ۱۳۸-۱۱۵

تحلیل آکسیوماتیک اثر نرخ بهره بر تورم و سرعت همگرایی در رسیدن به تعادل در فضای باناخ[1]

سید احسان عسکری*

دانشجوی دکتری اقتصاد دانشگاه پیام نور تهران، *sehsan.askari@gmail.com*

محمدحسین پورکاظمی

دانشیار دانشگاه شهید بهشتی، *H_ pourkazemi@yahoo.com.au*

جهانگیر بیابانی

استادیار دانشگاه پیام نور تهران، *jbiabani2000@yahoo.com*

رحیم دلالی اصفهانی

استاد دانشگاه اصفهان، *rateofinterest@yahoo.com*

تاریخ دریافت: ۹۴/۱۲/۷ تاریخ پذیرش: ۹۵/۲/۲۶

چکیده

هدف پژوهش حاضر تحلیل آکسیوماتیک شکل‌گیری تعادل در یک ساختار اقتصاد کلان و همچنین تحلیل برخی اختلالات ممکنه در حصول به این تعادل می‌باشد. به این منظور ابتدا با احصاء ویژگی‌های فضای قیمت‌ها، نشان داده می‌شود که این فضا یک «فضای برداری نرم‌دار کامل» یا اصطلاحاً «فضای باناخ» است. سپس با تبیین ویژگی انقباضی تابع رایج تولید اقتصاد کلان، وجود نقطه ثابت برای مدل نئوکلاسیک پایه اقتصاد کلان در فضای باناخ اثبات می‌گردد. در ادامه، در چارچوب معادله مقداری پول و اعمال نرخ بهره پولی، چگونگی شکل‌گیری تورم در فضای اقتصادکلان نشان داده می‌شود. در گام بعد با استفاده از تکنیک‌های آنالیز حقیقی وآنالیز عددی، سرعت همگرایی تابع تولید اقتصاد کلان در سه وضعیت اقتصاد تهاتری، اقتصاد پولی بدون وجود بهره پولی و اقتصاد پولی با وجود بهره پولی تبیین می‌شود. در این فضا اثبات می‌شود که وجود نرخ بهره منجر به تورم شده و تورم نیز موجب کاهش سرعت همگرایی اقتصاد در رسیدن به تعادل می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: نرخ بهره، تورم، فضای باناخ، وجود تعادل، سرعت همگرایی.

طبقه‌بندی JEL: E31، E43، E51.

---

[1] مستخرج از رساله دکتری سید احسان عسکری به راهنمایی دکتر محمدحسین پورکاظمی و دکتر جهانگیر بیابانی و مشاوره دکتر رحیم دلالی اصفهانی.

* نویسنده مسئول مکاتبات

۱- مقدمه

طی چند دهه اخیر، اقتصاد بسیاری ازکشورهای جهان نرخ‌های تورم مزمن و غالباً بالایی را تجربه نموده و تورم در این کشـورها همواره به عنوان یک معضـل اسـاسی مطرح بوده است. از این رو یافتن ریشه‌های علّی تورم، حیاتی و حائز اهمیت است. یکی از متغیرهایی که در ادبیات اقتصـاد پولی مکرراً به عنوان عامل ایجاد تورم مورد توجه قرار گرفته است نرخ بهره پولی است. نرخ بهره پولی به عنوان یکی از متغیرهای تعیین‌کننده و مبنایی در اقتصـاد متعارف آثار و پیامدهای متفاوتی را به جا می‌گذارد. مطالعات بسـیاری در مورد جهت علیّت و ارتباط علّی میان این دو متغیر انجام پذیرفته اسـت. این مطالعات اغلب به بررسـی اثرات قیمت‌ها بر نرخ بهره پرداخته و توجه نسبتاً کمتری به اثرات تغییرات نرخ بهره بر قیمت‌ها داشته‌اند. نتایج این مطالعات نیز در برخی موارد متناقض و ابهام‌آور بوده اسـت. این تناقضـات تا اندازه‌ای مربوط به ماهیت روش‌های مورد استفاده این مطالعات، یعنی روش‌های اقتصادسنجی بوده و تا حدی نیز به دلیل پیچیدگی مباحث نظری اثرات نرخ بهره بر قیمت است.

این پژوهش با تبیین چگونگی شـکل‌گیری تعادل در اقتصاد کلان، به دنبال تبیین اثرات نرخ بهره پولی بر تورم و سرعت همگرایی به نقطه تعادل اقتصاد کلان می‌باشد. رویکردی که در این پژوهش برای پاسـخ به این مسـئله اتخاذ شـده اسـت مشـابه کتاب «نظریه ارزش» دبرو[۱] (۱۹۵۹) اسـت. دبرو با اسـتفاده از روش آکسـیوماتیک[۲] (که توضیح آن در قسـمت روش‌شـناسـی خواهد آمد) وجود تعادل در یک اقتصاد تهاتری والراسی را نشان داد. در این پژوهش نیز همانند دبرو تحلیل تعادل، مبتنی بر روش آکسـیوماتیک صورت می‌پذیرد، اما نوآوری این پژوهش این اسـت که در این اقتصـاد، «پول» نیز وجود دارد و علاوه بر وجود تعادل، سـرعت همگرایی به تعادل در شرایط وجود نرخ بهره روی پول در این اقتصـاد پولی مورد تحلیل قرار می‌گیرد. از سـوی دیگر دبرو با اسـتفاده از قضـایای «نقطه ثابت برائر و کاکوتانی[۳]» به اثبات وجود تعادل پرداخته است، اما در این پژوهش با اسـتفاده از قضـایای «نقطه ثابت باناخ[۴]» مبتنی بر نگاشت‌های انقباضی (شرط لیپشیتز[۵])

---

[۱] Debreu

[۲] Axiomatic

[۳] Brouwer and Kakutani fixed point

[۴] Banach fixed point

[۵] Lipschits condition

وجود تعادل اثبات می‌شـود. مزیت استفاده از شرط لیپشیتز که وجود نقطه ثابت را برای نگاشـتهای انقباضـی و دنباله‌های کوشـی[۱] به روش ریاضـی نشـان می‌دهد، انطباق آن با ویژگی طبیعی بسـیاری از پدیده‌ها نظیر رشد جسمی موجودات زنده، تابع تولید و برخی ویژگی‌های رفتاری بشر نظیر تابع مطلوبیت می‌باشد.

در بخش دوم به ارائه مبانی نظری، پیشینه پژوهش و نقد روشهای اقتصاد سنجی که غالباً در ایران برای تحلیل چنین موضوعاتی به کار گرفته می‌شود، پرداخته خواهد شد. بخش سوم این پژوهش به روش‌شناسی تحقیق با رویکرد آکسیوماتیک خواهد پرداخت و در بخش چهارم پژوهش به نتیجه‌گیری و پیشنهادها پرداخته شده است. ضمیمه‌های مقاله در بخش ششم ارائه شده است.

۲- مبانی نظری و پیشینه پژوهش

گروهی از اقتصاددانان از قبیل هایک[۲]، میشکین[۳]، مک‌کینون و شاو[۴] (۱۹۷۳)، معتقدند نرخ بهره مثبت منجر به افزایش نرخ پس‌انداز شده و افزایش سرمایه‌گذاری و تولید را بدنبال دارد. از دیدگاه این دسته از حامیان نرخ بهره، بایستی با آزادسازی بازارهای مالی زمینه را برای شفاف‌سازی نرخ‌های بهره فراهم نمود. در تقابل با نظریات مدافعان وجود بهره، نظریه‌پردازانی از قبیل فرانک رمزی[۵] (۱۹۲۸) با اذعان به «غیراخلاقی بودن رجحان زمانی» به عنوان یکی از ریشه‌های اصلی بهره، با آن مخالفت کرده‌اند. گروهی دیگر از قبیل پیگو[۶] و هارود[۷] نیز به نقد رجحان زمانی به عنوان اصلی‌ترین ریشه بهره پرداخته‌اند. برخی از اقتصاددانان بهره را اساساً فاقد ریشه‌های واقعی دانسته و معتقدند که وجود بهره به دلیل ریشه‌های غیر واقعی از قبیل ایجاد کمیابی روی پول است (بخشی دستجردی، ۱۳۹۰). بسیاری از اقتصاددانان صاحب‌نام معاصر از قبیل کینز[۸]، موریس اله[۹]، آبا لرنر[۱۰]،

---

۱ Cauchy
۲ Hayek
۳ Mishkin
۴ Mckinnon and Shaw
۵ Frank Ramsey
۶ Pigou
۷ Harrod
۸ keynes
۹ Maurice Allais
۱۰ Abba Lerner

جیمز توبین[۱]، میلتون فریدمن[۲] و ... در فضاهای متفاوتی نشان داده‌اند که استمرار وجود نرخ بهره پولی دارای تبعات منفی گسترده‌ای بر سیستم اقتصادی است. نرخ بهره تخصیص بهینه منابع را به هم می‌زند، منجر به بیکاری و تورم می‌شود، باعث تخریب سریع‌تر محیط زیست می‌شود، و عدالت بین‌نسلی را مخدوش می‌سازد. نرخ بهره مرتبط با هر یک از اثرات فوق منجر به عواقبی در اقتصاد می‌گردد که به صورت گسترده در ادبیات اقتصادی مورد نقد و بررسی قرار گرفته‌اند (حسینی، ۱۳۹۲).

کانال‌های نظری متعددی وجود دارند که به واسطه آن می‌توان انتظار داشت افزایش نرخ بهره به افزایش سطح قیمت‌ها منجر شود. افزایش نرخ بهره باعث کاهش تمایل عمومی به نگهداری پولِ بدون عایدی بهره‌ای می‌شود. کاهش در تقاضای پول همانند افزایش عرضه پول سطح بالاتری از قیمت‌ها را به دنبال دارد. به علاوه نرخ بهره پولی بالاتر منجر به افزایش هزینه‌ها و بر آن اساس افزایش قیمت‌ها در سمت عرضه خواهد شد. از طرف دیگر این افزایش نرخ به معنای افزایش در درآمد قرض‌دهندگان، صاحبان سپرده‌های پس‌انداز و نگهدارندگان اوراق قرضه بوده که آنها را برای افزایش مخارج خود توانمند می‌سازد و لذا این امر به منزله افزایش قیمت‌ها از طرف تقاضا می‌باشد. در جمله معروف فریدمن هم ذکر شده که «تورم همیشه و همه‌جا یک پدیده پولی است» (کندیل[۳]، ۲۰۰۵، ۱۳۰). در تبیین تورم پولی تأکید مکتب پولی بر پول به عنوان یگانه عامل تورم بیش از سایر مکاتب فکری اقتصاد کلان می‌باشد. پول منحصر به فرد است به این معنا که برای حفظ و ثبات تورم قیمت، رشد پولی لازم است. این منحصر به فرد بودن عامل تورم به وضوح توسط پول‌گرایان در دهه ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ تبیین شده است (برونر و ملتزر[۴]، ۱۹۶۴؛ فریدمن[۵]، ۱۹۶۸؛ کالومیریس و ویلاک[۶]، ۱۹۹۸). این منحصر به فرد بودن پول، توجه پژوهشگرانی نظیر اُرفانیدس[۷]، رومر[۸]، اسمیت[۹] را معطوف به قواعد

---

۱ James Tobin
۲ Milton Friedman
۳ Kandil
۴ Brunner& Meltzer
۵ friedman
۶ Calomiris & Wheelock
۷ Orphanides
۸ Romer
۹ Smith

سیاست پولی در دوران تورم شدید نموده است (کندیل، ۲۰۰۵، ۱۳۰).

فریدمن (۱۹۶۹)، معتقد است که تورم به عنوان یک پدیده پولی زمانی به وجود می‌آید که رشد پول از رشد اقتصادی بیشتر باشد. وی در بحث تعیین قاعده مقدار بهینه پولی به استخراج نرخ بهینه تورم پرداخته است و به این نتیجه رسیده است که زمانی که نرخ بهره اسمی صفر باشد، نرخ بهینه تورم حاصل می‌شود.

در اقتصاد متعارف، یکی از مشهورترین صورت‌بندی‌های نظری انجام شده درباره رابطه میان تورم و نرخ بهره، رابطه فیشر است. این نظریه مشهور توسط ایرونیگ فیشر[۱] در سال ۱۹۳۰ بیان گردیده است. وی در این نظریه بیان می‌دارد که نرخ بهره اسمی (i_t) از جمع نرخ بهره واقعی(r_t) و تورم انتظاری ($E\pi_t$) حاصل می‌شود ($i_t = r_t + E\pi_t$). این نظریه در دهه‌های اخیر توسط اندیشمندانی نظیر میشکین[۲] (۱۹۹۲) و اِوانس و لوئیس[۳] (۱۹۹۵) بسط و گسترش یافته است. در طول دهه‌های گذشته مطالعات تجربی بسیاری در خصوص معادله فیشر انجام پذیرفته است. این فرضیه به ظاهر ساده و شهودی، در عمل از شواهد و مصادیق کاربردی نسبتاً کمی برخوردار بوده است (کرودر و هوفمن[۴] ۱۹۹۶).

رز[۵] (۱۹۸۸)، ویژگی سری‌های زمانی متغیرهایی را که پارادایم فیشر بر آن بنیاد نهاده شده است تحلیل و نتیجه‌گیری نموده است که نرخ بهره دارای ریشه واحد است در صورتی که تورم این‌گونه نیست. اگر داده‌ها دارای چنین ویژگی‌هایی باشند رگرسیون نرخ بهره بر نرخ تورم، جعلی و نادرست است، زیرا مرتبط کردن متغیرهایی که از درجات متفاوت جمعی برخوردارند در تکنیک‌های اقتصاد سنجی فاقد اعتبار است. در این حالت نرخ بهره واقعی یک سری نامانا است و بیان متداول رابطه فیشر ممکن است که رد شود (کرودر و هوفمن، ۱۹۹۶).

بوت و سینر[۶] (۲۰۰۱) در مقاله‌ای با عنوان «ارتباط بین نرخ بهره اسمی و نرخ تورم؛ شواهد بین‌المللی» با استفاده از تکنیک هم‌جمعی رابطه بین نرخ بهره بانکی و نرخ تورم

---

[۱] Irving Fisher

[۲] Mishkin

[۳] Evans and levis

[۴] Crowder, J.W., Hoffman, D, L.

[۵] Rose

[۶] Bootha and Ciner

را در امریکا و ۹ کشـور اروپایی بررسـی نمودند. نتایج تحقیق مؤید رابطه علّی بلند مدت از نرخ بهره پولی به نرخ تورم در این کشـورها می‌باشد. به نحوی که روند متغیر تصادفی تورم منبعث از نرخ بهره پولی می‌باشد.

کـارنیرو و همکـاران[۱] (۲۰۰۲) در مقاله‌ای تحت عنوان «بازنگری اثر فیشـــر: تحلیل هم‌انباشـتگی بین نرخ بهره و تورم» به بررسـی صحت رابطه فیشر برای تطبیق تغییرات نرخ تورم می‌پردازند. این تحلیل مربوط به اقتصـاد سـه کشور آرژانتین، برزیل و مکزیک در فاصـله زمانی ۱۹۹۷-۱۹۸۰ بوده که در این دوره دارای تورم مزمن بوده‌اند. نتایج این تحقیق نشـان می‌دهد یک رابطه پایدار و بلند مدت بین نرخ‌های بهره اسمی و نرخ تورم در کشـــورهای آرژانتین و برزیل وجود دارد. نتایج آزمون، این رابطه را برای داده‌های کشور مکزیک تأیید نمی‌نماید.

هاکان[۲] و همکاران (۲۰۰۷) در مقاله‌ای با عنوان «عدم اطمینان، تورم و نرخ بهره: آیا رابطه فیشـر یک اصـل جهان‌شمول است» به منظور آزمون رابطه فیشر، اطلاعات مربوط به هفت کشـور توسـعه‌یافته عضـو گروه G7 و همچنین ۴۵ کشـور در حال توسـعه را با اسـتفاده از تکنیک گارچ[۳] بررسـی نمودند. نتایج حاصـله نشـان می‌دهد رابطه فیشـر در تمامی کشـورهای توسـعه‌یافته گروه G7 هم در شـکل ساده و هم در شکل تعمیم یافته صـدق می‌نماید، اما این رابطه در بیش از نیمی از کشـورهای در حال توسـعه صـادق نمی‌باشد.

کوکران[۴] (۲۰۱۶) در مطالعه بسیار گسترده‌ای که راجع به رابطه فیشر انجام داده است با عنوان «آیا نرخهای بهره بالاتر منجر به تورم بالاتر می‌شـوند؟» نتیجه گرفته اسـت که افزایش دائمی نرخهای بهره اسمی منجر به افزایش سریع نرخ تورم می‌شود.

مهرگان و اصـغرپور (۱۳۸۵) در مقاله‌ای با عنوان «بررسـی رابطه علّی میان نرخ بهره و تورم» با اسـتفاده از داده‌های تابلویی اطلاعات مربوط به ۲۴ کشور در حال توسعه را طی دوره سـه سـاله (۲۰۰۳-۲۰۰۱) با روش آزمون علیتی هیسـائو مورد آزمون قرار دادند. نتایج تحقیق در این کشـورها نشـان دهنده وجود رابطه علّی از طرف نرخ بهره به تورم می‌باشد.

---

[۱] Carneiro
[۲] Hakan
[۳] Garch
[۴] Cochrane, J. H.

احمدی شـادمهری و همکاران (۱۳۹۰) در مقاله‌ای با عنوان «آزمون علیت هیشـائو بین نرخ بهره و تورم برای کشـورهای منا» با استفاده از داده‌های فصلی مربوط به نرخ بهره و تورم در ۱۶ کشـور عضـو گروه MENA[۱] و با اسـتفاده از روش آزمون علیت گرنجری و هیســائو، رابطه بین نرخ بهره بانکی و نرخ تورم را طی دوره زمانی (۲۰۰۸- ۱۹۹۷) بررسـی نمودند. نتایج تحقیق نشـان دهنده وجود رابطه علیت از نرخ بهره به تورم در دو کشـور جیبوتی و قطر می‌باشـد و در سـایر کشـورهای موردآزمون چنین رابطه‌ای اثبات نگردید.

سعیدی و همکاران (۱۳۹۱) در مقاله «بررسی ارتباط بین نرخ تورم با نرخ بهره بر اساس تئوری اثر فیشـر در اقتصـاد ایران» به ارتباط نرخ تورم با نرخ بهره کوتاه مدت یکسـاله، نرخ بهره میان مدت سـه ساله و نرخ بهره بلند مدت پنج ساله با استفاده از روش تخمین کمترین مجذورات و مدل‌های اقتصـادسـنجی پرداخته‌اند. نتایج حاکی از معنی‌دار بودن ارتباط بین نرخ تورم با نرخ بهره یکساله می‌باشد. و بین نرخ تورم با نرخ بهره سه ساله و پنج ساله ارتباط معناداری یافت نشده است.

چنانکه گفته شـد، در ادبیات اقتصـادی برای بررسـی اثرات نرخ بهره بر سـایر متغیرهای اقتصـادی عمدتاً با اسـتفاده از روش‌های آزمون فرضیه آماری، از مدل‌های اقتصادسنجی برای آزمون فرضـیات بهره گرفته شـده است. اما نقدهای اساسی و مبنایی وارده به روش شـناسـی اقتصـادسـنجی و به طور خاص تحقیقات مبتنی بر داده‌های تابلویی و حتی داده‌های سـری زمانی مربوط به کشـورها، نویسندگان این پژوهش را بر آن داشت که از روش‌شناسی ریاضی به منظور تقرّب به حقیقت مسئله استفاده کنند. برخی از نکات مهم روش‌شناختی که در تحلیل اثرات نرخ بهره بایستی به آن توجه داشت به قرار زیر است:

۱. نتایج بدست آمده از برآورد مدل‌های اقتصادسنجی نه تنها در کشورهای مختلف نتایج متفاوت و غالباً متضادی را نشان می‌دهند بلکه در یک کشور خاص نیز تغییر روش یا مدل تخمین اقتصادسنجی و یا تغییر طول دوره آزمون، نتایج متفاوتی را به دنبال داشته است و در نتیجه در کشف روابط علّی واقعی ما را دچار ابهام می‌کند.
۲. بر اساس تحلیل‌های نظری و ریاضی، بخش عمده‌ای از اثرات نرخ بهره بر اقتصاد به صورت تورم ظاهر می‌شود اما نتایج حاصل از مطالعات تجربی صورت پذیرفته در بسیاری از کشورهای در حال توسعه و یا کمترتوسعه‌یافته با این

[۱] Middle East and North Africa

نتایج سازگاری ندارد. این امر به دلیل مشکلات ناشی از محدودیت اطلاعات و صحت داده‌های آماری مربوط به این کشورهاست و در نقطه مقابل انطباق میان نتایج مطالعات و مبانی تئوریک نظریه‌های اقتصادی درکشورهای توسعه یافته که دارای آمارهای دقیق‌تری می‌باشند، بسیار بیشتر است (هاکان و همکاران ، ۲۰۰۷).

۳. یکی دیگر از دلایل ناسازگاری میان نتایج تئوریک با مطالعات سنجی و تجربی، خطاهای داده‌ای و وجود عوامل اختلال می‌باشد. به عنوان مثال اجرای کسر بودجه در کشورهای مختلف یکی از عوامل مهم افزایش سطح قیمت‌ها می‌باشد و از این رو لازم است به منظور امکان علمی کشف دقیق روابط علّی، سایر پارامترهای تورم‌ساز و یا افزایش‌دهنده سطح قیمت دراقتصاد کلان کشورها، شناسایی، تفکیک، و پس از آن به بررسی روابط علّی نرخ بهره و تورم پرداخته شود.

بر این اساس در این پژوهش از روش ریاضی آکسیوماتیک استفاده شده است. این روش مبتنی بر استدلال استنتاجی بوده و نتایج آن یقینی‌تر و دقیق‌تر است و ما را به درک عمیق‌تری در تحلیل مسئله می‌رساند. روش آکسیوماتیک[۱] به کار رفته در این پژوهش روشی است که در آن، اصول موضوعه‌ایی به عنوان اصولی بدیهی اتخاذ شده و قضایای آن به روش قیاسی و استنتاجی از این اصول موضوعه اولیه استخراج می‌شود (معرفی محمدی، ۱۳۹۳، ۳۲).

۳- روش‌شناسی تحقیق

۳- ۱- ساختار جبری مدل

در این قسمت ابتدا فضاهای برداری و ساختار جبری حاکم بر آنها در آنالیز ریاضی معرفی می‌شود.

۳- ۱-۱- فضای برداری

فضای برداری مجموعه‌ای است مانند S، از عناصری که آن‌را بردار می‌نامند. مجموعه S نسبت به دو عمل جمع و ضرب بسته است. اگر u و v و w عناصری از مجموعه مذکور باشند نسبت به جمع دارای خاصیت شرکت‌پذیری $u + (v + w) = (u + v) + w$ و جابجائی $u + v = v + u$ است. همچنین دارای عنصر یکه نسبت به جمع، یعنی عنصر صفر است $o \in S \Rightarrow u + o = o + u = u$. در این مجموعه برای هر عنصر u، یک

[۱] Axiomatic Method

عنصر معکوس نسبت به جمع یعنی قرینه $u + v = 0 \Rightarrow v = -u$ وجود دارد. اگر a و b اسکالر باشد، خاصیت توزیعی ضرب اسکالر نسبت به جمع بردارها= $a(u+v)$ $av + au$، خاصیت توزیعی ضرب بردار نسبت به جمع اسکالرها= $(a+b)u$ $au + bu$؛ خاصیت شرکت‌پذیری اسکالرها $a(bv) = (ab)v$ در ضرب و وجود عنصر واحد در اسکالرها برای ضرب $1v = v$ برقرار است. تعریف فوق یک فضای برداری را معرفی می‌کند. (پورکاظمی، ۱۳۹۳).

۳-۱-۲- نُرم

می‌توان به هر بردار عددی حقیقی اختصاص داد که «نُرم» آن نام دارد. تابع حقیقی $\|.\|$ تعریف شده بر فضای برداری X یک «نرم» نامیده می‌شود اگر در سه خاصیت زیر صدق نماید:

الف) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0, \forall x \in X \Rightarrow \|x\| \geq 0$

ب) $\forall x \in \mathrm{X}, \forall \alpha \in R \Rightarrow \|\alpha x\| = |\alpha|.\|x\|$

ج) $\forall x, y \in X \Rightarrow \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

نرم را می‌توان تعمیمی از مفهوم «طول» در نظر گرفت. فضای برداری X مجهز به نرم $\|.\|$ را یک «فضای برداری نرمدار» یا اصطلاحاً «فضای نرمدار[1]» می‌نامند.

۳-۱-۳- فضای متریک

زوج (X, d) مرکب از مجموعه نا تهی X و تابع $d: X \times X \rightarrow R^{+}$ که به هر دو نقطه $x , y \in X$ عددحقیقی $d(x , y)$ به نام فاصله x از y را نسبت می‌دهد و از ویژگیهای زیر بر خوردار است یک فضای متریک نامیده می‌شود.

الف) $d(\mathrm{x},\mathrm{y}) \geq 0 \, ; d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = 0 \Leftrightarrow x = y$

ب) $d(\mathrm{x},\mathrm{y}) = d(\mathrm{y},\mathrm{x})$

ج) $d(\mathrm{x},\mathrm{y}) + d(\mathrm{y},\mathrm{z}) \geq d(\mathrm{x},\mathrm{z})$

(گارلینگ[2]، ۲۰۱۳، ۳۰۳).

۳-۱-۴- همگرایی یک دنباله

فضای متریک (X, d) و یک نقطه $x_o \in X$ و یک زیر مجموعه مانند S، از X و یک دنباله $\{x_n\}$ در S مفروض است. این دنباله همگرا به نقطه x_o است و به صورت $\lim_{n\to\infty} x_n = x_o$

[1] Normed Space

[2] Garling

نشان داده می‌شود. به عبارت دیگر دنباله $\{x_n\}$ در X را «همگرا» می‌نامند هرگاه:

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$$

یعنی $\{x_n\}$ نسبت به متریک القاءشده به وسیله نرم همگرا به x_o باشد. اگر هر دنباله کوشی[1] در X همگرا باشد، فضای برداری حاصل از این نرم، «کامل» نامیده می‌شود.

۳-۱-۵- فضای باناخ

نظریه فضاهای باناخ یکی از حوزه‌های پیشگام در تحقیقات ریاضی می‌باشد، زیرا مسائل مختلف از شاخه‌های متفاوت علوم و ریاضی را می‌توان در چارچوب نظریه فضاهای باناخ ترجمه و با روش‌های توانمند آن حل کرد (آلیپرانتز و بورکین‌شاو[2]، ۱۳۸۹، ۲۱۷).

اگر متریک تعریف شده توسط یک نرم در یک فضای برداری در نظر گرفته شود، آنگاه اگر فضای برداری حاصل از این نرم، «کامل» باشد یعنی هر دنباله کوشی در آن همگرا باشد، این فضا را «فضای باناخ» می‌نامند. به عبارت دیگر فضاهای باناخ به «فضاهای برداری نُرم‌دار کامل» اطلاق می‌شود (راناموهانا،۱۳۸۳، ۹).

۳-۲- نگاشت‌های انقباضی

یکی از ویژگی‌های بسیار مفید فضاهای باناخ، وجود نقطه ثابت روی آن، در صورت برقراری شرط لیپشیتز[3] است. فرض کنید (X, d) یک فضای متریک باشد. نگاشت $T: X \to X$ را «لیپشیتز» می‌نامند، اگر ثابت $\alpha \geq 0$ وجود داشته باشد، به نحوی که به ازای هر $x, y \in R$ شرط $d\big(T(x), T(y)\big) < \alpha . d(x, y)$ برقرار باشد. کوچکترین مقدار α که در نابرابری فوق صدق می‌کند، ثابت نگاشت T نامیده می‌شود.

نگاشت $T: X \to X$ با ثابت لیپشیتز $\alpha < 1$ را یک «نگاشت انقباضی» می‌نامند.

۳-۲-۱- اصل نگاشت انقباضی باناخ

فرض کنید (X, d) یک فضای متریک کامل باشد و نگاشت $T: X \to X$ از ویژگی انقباضی برخوردار باشد. در این صورت نگاشت T دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد x^* است، بعلاوه برای هر $x \in X$ خواهیم داشت $\lim_{m\to\infty} T^m x = x^*$. در واقع برای هر $x \in X$

---

[1] در آنالیز ریاضی، دنباله کوشی دنباله‌ای است که جملات آن با جلو رفتن دنباله به هم نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند. بر روی یک فضای متریک داده شده (X, d)، دنباله $x_1, x_2, x_3, ..$ یک دنباله کوشی است اگر برای هر عدد مثبت دلخواه ε یک N صحیح وجود داشته باشد که به ازای هر $m, n > N$ داشته باشیم: $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

[2] Aliprantis and Burkinshaw.

[3] Lipschits condition

رابطه زیر برقرار خواهد بود (کرک[۱]، ۲۰۰۱، ۳):

$$d(T^m(x), x^*) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d\big(x, T(x)\big) \quad m = 1,2,\ldots \qquad (۱)$$

۳-۳- فضای قیمت‌ها

فضـای قیمت‌ها دارای خصـوصـیات اعدادحقیقی است (دبرو، ۱۳۸۹، ۴۵). از سوی دیگر اثبات می‌شـود که فضـای اعداد حقیقی کامل اسـت (رویدن[۲]، ۲۰۱۰، ۱۳۴). از این رو فضـــای قیمت‌ها به همراه متریک متعارف $d(x,y) = |x-y|$ که $d: R \times R \to R^+$ یک «فضای باناخ» است.

۳-۴- تابع تولید

اکنون تابعی در فضـای اعداد حقیقی تعریف و وجود جواب (تعادل) برای این تابع تحلیل می‌شـــود. فرض می‌شـــود که تابع تولید در این مدل یک تابع تولید نئوکلاســـیک $Y_t = F(K_{\mathrm{t}}, L_{\mathrm{t}})$ باشد. با تعریف متغیر $k_t = \frac{K_t}{L_t}$ بازنویسی تابع تولید، تابع تولید سرانه را به صــورت $y_t = f(k_t)$ خواهیم داشــت. این تغیر متغیر به لحاظ ریاضــی تأمین‌کننده اهداف توپولوژیکی نقطه ثابت بوده و به لحاظ اقتصادی ویژگی‌های تابع تولید سرانه را به همراه دارد. شرایط اینادا که به صورت:

$$\lim_{k\to 0} f'(k) = \infty \qquad (۲)$$

$$\lim_{k\to \infty} f'(k) = 0 \qquad (۳)$$

بیان می‌شـود نشـان‌دهنده عمودی بودن تابع تولید سـرانه در مبدأ و افقی شـدن آن در ذخیره سرمایه بی‌نهایت است (بارو و سالای‌مارتین[۳]، ۲۰۰۴، ۲۹).

از دیگر ویژگی‌هایی که این تابع از خود نشـان می‌دهد، مثبت و نزولی بودن تولید نهایی نسبت به k می‌باشد یعنی:

$$f'(k_t) > 0 \ , \ f''(k_t) < 0$$

دراین تابع تولید ذخیره تعادلی سرمایه در وضعیت پایا با $k^{\cdot} = 0$ تعیین می‌شود. مبتنی بر شرایط اینادا[۴] و ویژگی‌های مشتق اول و دوم این تابع تولید، چنین نتیجه می‌شود که شیب این تابع تولید نهایتاً به صفر همگرا خواهد شد. این مسئله به معنای انقباضی بودن

---

[۱] kirk

[۲] Royden, H. L.

[۳] Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin

[۴] Inada Condition

نگاشت تابع تولید است:

$$\frac{|f(k_2)-f(k_1)|}{|k_2-k_1|} \leq \alpha\ ,\ \alpha < 1 \qquad (۴)$$

طبق نظریه نگاشت‌های انقباضی اگر f به عنوان یک نگاشت انقباضی بر یک فضای متریک ناتهی (X, d) تعریف شود آنگاه نگاشت f دارای یک نقطه ثابت منحصر به فرد خواهد بود و بنابراین هر نقطه انتخابی از دنباله $\{f^{\eta}(k)\}$ نهایتاً به k^* همگرا خواهد شد.[۱] تفسیر اقتصادی این نظریه آن است که تابع تولید اقتصاد کلان به نقطه خاصی همگرا بوده و دارای نقطه ثابت و تعادل منحصر به فردی می‌باشد.

۳-۵- ساختار اقتصاد کلان

در این مرحله ویژگی‌های ساختار اقتصاد کلان به طور خلاصه بیان می‌شود:

۱. فرض می‌شود که تابع تولید از ویژگی‌های تابع تولید نئوکلاسیک برخوردار است.

۲. فرض می‌شود که رشداقتصادی، رشد جمعیت و تحولات تکنولوژیکی در این ساختار وجود ندارد.

۳. تابع تولید و ساختار اقتصاد کلان به دلیل ویژگی انقباضی، دارای همگرایی به سمت نقطه ثابت است و این همگرایی منجر به وجود تعادل در اقتصاد کلان می‌شود.

۳-۵-۱- ورود پول به اقتصاد

در این مرحله از ساخت مدل، پول در محیط اقتصادی وارد می‌شود. تصور کنید که در یک زمان معین، یک کالای مشخص و به عنوان پول در اقتصاد در حال گردش است. فرض نمایید کالایی که این‌گونه تعریف می‌شود با u نشان داده شود. برای دسترسی به یک واحد از کالای h ام در زمان t که دارای قیمت P_h می‌باشد، تعداد واحدهایی از پول که باید در زمان t پرداخت شود با تقسیم P_h بر P_u بدست می‌آید. به عبارت دیگر $n_h = \frac{P_h}{P_u}$. با تعمیم این رابطه به یک بیان عمومی‌تر برای هر کالای i در زمان t خواهیم داشت:

$$P_i|_t = P_u.n_i|_t \qquad (۵)$$

به عبارت دیگر قیمت هرکالا در هر مقطع از زمان برابر قیمت پول در تعداد واحدهای پول در زمان اولیه می‌باشد (دبرو، ۱۳۸۹، ۵۱).

۳-۵-۲- ورود نرخ بهره روی پول

اکنون با استفاده از چارچوب معادله مقداری پول و اعمال نرخ بهره روی پول، چگونگی

---

[۱] جهت اثبات رجوع شود به: .Garling, 2013,Theorem 14.6.1, p.412

شکل‌گیری تورم در محیط اقتصاد کلان نشان داده می‌شود:

$$M_t.V = P_t.Q_t \qquad (۶)$$

در معادله مقداری پول، به جای سطح قیمت‌ها از معادل عملیاتی شاخص لاسپیرز استفاده می‌شود و از طرف دیگر به جای تولید کل نیز از مقادیر عملیاتی جمع تولید کالاهای مختلف یک اقتصاد به شرح زیر استفاده می‌شود. اهمیت این جایگذاری، برقراری ارتباط عینی میان اقتصاد کلان واقتصاد خرد بوده و در واقع فراهم نمودن مبانی خرد برای تحلیل اقتصاد کلان می‌باشد:

$$M.V|_t = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_{it}q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}q_{i0}}\sum_{i=1}^{n} q_{it} \qquad (۷)$$

در این معادله p_{it} قیمت کالای i-ام در زمان t می‌باشد. با تعریف متغیر γ به عنوان میانگین وزنی i-امین کالا در شکل‌گیری سطح قیمت‌ها خواهیم داشت:

$$\gamma_i = \frac{q_{i0}}{\sum_{i=1}^{n} p_{i0}q_{i0}} \qquad (۸)$$

بر این اساس رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$M.V|_t = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i0}p_{it}\sum_{i=1}^{n} q_{it} \qquad (۹)$$

فرض کنید در آغاز دوره قیمت پول واحد باشدیعنی $P_u|_{t=0} = 1$ اکنون در این مدل نرخ بهره پولی وارد می‌شود. در این وضعیت قیمت پول در طول زمان متناظر نرخ بهره افزایش می‌یابد یعنی: $P_u|_t = 1.(1+r)^t$ با جایگذاری رابطه قیمت کالا برحسب قیمت پول یعنی $P_i = P_u.n_i$ خواهیم داشت:

$$P_i|_t = (1+r)^t.n_i \qquad (۱۰)$$

با اعمال این رابطه در سمت راست معادله مقداری، سطح قیمت‌ها مبتنی بر قیمت کالاها و قیمت کالاها نیز به نوبه خود بر اساس قیمت پول تعیین می‌شود. یعنی با اعمال رابطه فوق خواهیم داشت:

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_{i0}p_{it}\sum_{j=1}^{n} q_{jt} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{i0}p_{it}q_{jt}\,(i \neq j \;\Rightarrow\; p_{it}q_{jt} = 0) \qquad (۱۱)$$

$$M.V|_t = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i.p_i.q_i|_t = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i.[(1+r)^t.n_i].q_i|_t \qquad (۱۲)$$

این معادله بیان می‌دارد که در شرایط فقدان رشد اقتصادی، اعمال نرخ بهره در مدل، مستلزم مقدار بزرگتری از حجم پول برای گردش مقدار معین و ثابتی از کالاها می‌باشد. در این وضعیت اگر سرعت گردش پول ثابت باشد و مقدار پول افزایش نیابد، بازار در زمان مشخص تسویه نخواهد شد، اگر مقدار پول افزایش یابد تحت این شرایط سطح بالاتری از قیمت‌ها را خواهیم داشت واگر در حجم ثابتی از پول، سرعت گردش پول

افزایش یابد این امر نیز به معنای سطح بالاتری از قیمت‌ها است که به تدریج و در طول زمان شکل می‌گیرد. تحت فروض فوق‌الذکر نسبت تقاضا برای پول در دو دوره پیاپی برابر خواهد بود با:

$$\frac{M_d|_{t+1}}{M_d|_t} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i.1(1+r)^{t+1}.n_i.q_i|_{t+1}}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_i.1(1+r)^{t}.n_i.q_i|_{t}} = (1+r)$$

$$\Rightarrow M_d|_{t+1} = (1+r)M_d|_t \qquad (۱۳)$$

شکل‌گیری شرایط تسویه بازار کالا در یک سرعت ثابت گردش پول و در یک دوره زمانی معین مستلزم افزایش حجم پول متناسب نرخ بهره پولی می‌باشد. از این رو معادله مقداری پول و وجود نرخ بهره پولی مبین شکل‌گیری افزایش‌سطح قیمت‌ها در طول زمان می‌باشد. به عبارت دیگر در چهارچوب معادله مقداری، وجود نرخ بهره پولی، اقتصاد کلان را به سمت شکل‌گیری تورم رهنمون می‌سازد:

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{P}_t(1+r) \qquad (۱۴)$$

از طرف دیگر وقتی نرخ بهره در یک بستر پیوسته زمانی عمل می‌نماید تغییرات نرخ بهره در طول زمان به صورت زیر اثر خواهد گذاشت:

$$\mathbf{P}_{t+1} = \mathbf{P}_t . e^{r.t} \qquad (۱۵)$$

۳-۶- تحلیل همگرایی

۳-۶-۱- تحلیل همگرایی در فضای متریک

بر اساس ویژگیهای اقتصاد کلان، شرط لیپشیتز به صورت $0 < f'(k) < 1$ برقرار است. همچنین با استفاده از نظریه نقطه ثابت باناخ نشان داده شد که اقتصاد کلان به سمت وضعیت پایا همگرا شده و به تعادل می‌رسد. به عبارت دیگر دنباله تابع تولید سرانه اقتصاد کلان به سمت (k^*) همگرا می‌شود.

اکنون در این فضا دو متریک اقلیدسی d_1 و d_2 تعریف می‌شود. d_1 متریک مربوط به اقتصاد پولی بدون نرخ بهره و d_2 متریک مربوط به اقتصادپولی با نرخ بهره می‌باشد. مطابق با تعریف شرط همگرایی و فضاهای متریک، شرط همگرایی برای (X, d_1) به صورت زیر می‌باشد:

$$(\mathrm{X}, \mathrm{d}_1) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N: t > N$$

$$\mathrm{d}_1((\mathrm{p}.\mathrm{f}(k_t), \mathrm{p}'.k^*) = |[\textstyle\sum_{i=1}^{n} \gamma_i(1).n_i.q_i|_t] - (\mathrm{p}'.k^*)| < \varepsilon \qquad (۱۶)$$

به همین ترتیب بیان رابطه همگرایی برای (X, d_2) به عنوان یک اقتصاد با وجود نرخ بهره پولی به شکل زیر خواهد بود.

$$(\mathrm{X}, \mathrm{d}_2) \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: t > N$$
$$\mathrm{d}_2((\mathrm{p}.\mathrm{f}(\mathrm{k}_t), \mathrm{p}'.k^*) = |[\textstyle\sum_{i=1}^{n} \gamma_i (1. e^{r.t}). n_i. q_i] - (e^{r.t}\mathrm{p}'.k^*)| < \varepsilon|_t \quad (۱۷)$$

با توجه به آنکه هریک از کالاها نسبتی از تابع تولید سرانه می‌باشند یعنی $\theta_i. f(k_t)$ $= q_i$. بنابراین در بیان مقایسه‌ای روابط ۱۶و۱۷ خواهیم داشت:

$$(e^{r.t})|[\textstyle\sum_{i=1}^{n} \gamma_i. n_i. \theta_i. f(k_t)] - (\mathrm{p}'.k^*)| > |[\textstyle\sum_{i=1}^{n} \gamma_i. n_i. \theta_i. f(k_t)] - (\mathrm{p}'.k^*)| \quad (۱۸)$$

در این فضا عبارت $e^{r.t}$ در هر واحد از زمان به عنوان ضریب مثبت و بزرگتر از واحد متریک اول عمل کرده و رابطه زیر شکل خواهدگرفت.

$$\mathrm{d}_2 = \beta. d_1, \beta > 1 \quad (۱۹)$$

$$\mathrm{d}_2 > d_1 \quad (۲۰)$$

بنابراین نشان داده شد متریک دوم که مربوط به اقتصاد پولی با نرخ بهره است، بزگتر از متریک اول که مربوط به یک اقتصاد بدون نرخ بهره است، می‌باشد.

اکنون در این قسمت به منظور ساده‌سازی مدل، متغیرهایی به نحو زیر ساخته می‌شود: $\sum \varphi_i = \varphi$ و $\varphi_i = \gamma_i. n_i. \theta_i$. بنابراین خواهیم داشت:

$$(e^{r.t})|[\textstyle\sum_{i=1}^{n} \varphi_i. f(k_t)] - (p'.k^*)| = (e^{r.t})|\varphi. f(k_t) - (p'.k^*)| > |\varphi. f(k_t) - (p'.k^*)| \quad (۲۱)$$

در این مرحلـه نیز بـا تعریف متغیر $\lambda = \frac{\varphi}{p'}$ و دو دنباله متفاوت $\{g(n)\}$ و $\{h(n)\}$ خواهیم داشت:

$$h(k_t) = (p')|[\lambda. f(k_t)] - (k^*)| < \varepsilon \quad (۲۲)$$

$$g(k_t) = (\mathrm{e}^{r.t}p')|[\lambda. f(k_t)] - (k^*)| < \varepsilon \quad (۲۳)$$

اثبات می‌شود که اگر ثابت C و n_0 وجود داشته باشد و اگر به ازای تمامی nها $g(n) \neq 0$ این امر بدان معنی است که وقتی $n \to \infty$ آنگاه نسبت $\left|\frac{h(n)}{g(n)}\right|$ توسط C محدود باقی می‌ماند. معادله $h(n) = o(g(n))$ به معنای $\lim_{n\to\infty} \frac{h(n)}{g(n)} = 0$ است[۱].

تفسیر اقتصادی این که $h(n) \equiv h(k_t)$ سریع‌تر از $g(n) \equiv g(k_t)$ به صفر همگرا می‌شود این است که یک اقتصاد کلان با نرخ بهره پولی دیرتر از یک اقتصاد کلان بدون نرخ بهره پولی به نقطه ثابت همگرا می‌شود. توضیح آن‌که، یک اقتصاد همزاد با تورم در رسیدن به نقطه ثابت، دنباله‌هایی ایجاد می‌کند که نسبت به اقتصاد غیرتورمی طولانی‌تر است. در

---

[۱] برای اثبات ن. ک. به: Kincaid and Cheney, 1991, 10.

مدلی که هر یک از جملات دنباله اقتصاد کلان در یک دوره زمانی ایجاد می‌شود، زمان همگرا شدن به نقطه ثابت که در آن تغییرات جملات دنباله‌ها صفر شود، برای یک اقتصاد مبتنی بر بهره، طولانی‌تر خواهد بود، زیرا چنین اقتصادی طبق معادله مقداری و اعمال قیمت‌ها برحسب قیمت پول، همزاد با تورم است.

۳-۶-۲- تحلیل همگرایی در فضای آنالیز عددی: سرعت همگریی

اکنون با توجه به ماهیت وجودی زمان در این متریک اقتصادی، فرایند حرکت اقتصاد از هرنقطه شروع به سمت نقطه ثابت خود را می‌توان فرایند ایجاد دنباله‌ای کاهنده‌ای دانست که به همراه کاهش فاصله خود از نقطه تعادلی اقتصاد، شرط کوشی[۱] بودن دنباله‌ی تولیدی را نیز تأمین می‌نماید. سرعت همگرایی مورد نظر، سرعت همگرایی دنباله‌ی تولید شده توسط تابعی است که مطابق الگوی $k_{t+1} \equiv h(k_t)$ به سمت نقطه ثابت در حرکت است. تابع تولید سرانه اقتصاد کلان در فرایند همگرایی به نقطه ثابت تحت شرایط وجود و عدم وجود ساختار نرخ بهره در نظام پولی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ابزاری که برای بررسی سرعت همگرایی مورد استفاده قرار می‌گیرد مفهوم «*ثابت خطای مجانبی*»[۲] (AEC) در روش‌های تکراری می‌باشد. تعریف این مفهوم چنین است:

$$\mathrm{AEC} = \frac{|\alpha - x_{n+1}|}{|\alpha - x_n|^{\Delta}} = -\frac{h''(\alpha)}{2h'(\alpha)} \qquad (۲۴)$$

مطابق این روش «هر دنباله‌ای که ثابت خطای مجانبی کوچک‌تری داشــته باشد، سرعت همگرایی بیشتری دارد» (اسمعیلی، ۱۳۸۹، ۲؛ کرایه‌چیان، ۱۳۸۷، ۱۲۹). در این مرحله به منظور بارز شدن نقش برخی پارامترها ساده سازی‌هایی انجام می‌شود.

تحلیل اقتصادی روش تکرار نقطه ثابت آن است که خروجی مدل (تولید اقتصاد کلان) در دوره بعد به عنوان ورودی سیستم اقتصاد کلان عمل می‌کند. این فرایند تا مرحله‌ای که مقدار ورودی و خروجی سیستم یکسان گردد ادامه می‌یابد و اصطلاحاً اقتصاد کلان در وضعیت پایدار[۳] درآمد سرانه استقرار می‌یابد.

در ادامه، برآورد سرعت همگرایی به نقطه ثابت در تابع تولید سرانه اقتصاد کلان تحت فروض وجود و عدم وجود پول و بهره پولی، انجام می‌پذیرد.

---

[۱] Cauchy

[۲] Asymptotic Error Constant (AEC)

[۳] Steady State

۳-۶-۳- سرعت همگرایی در اقتصاد تهاتری

در این اقتصـاد تهاتری به دلیل عدم وجود نظام پولی، سـطح قیمت‌ها شکل نگرفته و در یک نظام تهاتری مبادله می‌شوند (اثبات در پیوست (۱)):

$$z(k_t) = |[f(k_t)] - (k^*)| < \varepsilon \quad (۲۵)$$

$$\mathrm{AEC}_1 = \frac{|z''(k_t)|}{2|z'(k_t)|} = -\left(\frac{f''.\dot{k}}{2f'} + \frac{\ddot{k}}{2\dot{k}}\right)\Bigg|_{k_t=k^*} \quad (۲۶)$$

۳-۶-۴- سرعت همگرایی در اقتصاد پولی بدون وجود نرخ بهره

اکنون در این نظام اقتصادی به دلیل شکل‌گیری نظام پولی، کالاها با پول به صورتی کارا مبادله می‌شوند. در این فضا سطح قیمت‌ها شکل می‌گیرد:

$$h(k_t) = p'|[\lambda.f(k_t)] - (k^*)| < \varepsilon \quad (۲۷)$$

با اعمال مقدار نقطه ثابت در مشـتق‌های زمانی اول و دوم و همچنین جایگذاری آنها در رابطه ثابت خطای مجانبی روش‌های تکراری ساده خواهیم داشت (اثبات در پیوست(۲)):

$$\mathrm{AEC}_2 = \frac{|h''(k_t)|}{2|h'(k_t)|} = -\left(\frac{f''.\dot{k}}{2f'} + \frac{\ddot{k}}{2\dot{k}}\right)\Bigg|_{k_t=k^*} \quad (۲۸)$$

۳-۶-۵- سرعت همگرایی در اقتصاد پولی با وجود بهره پولی

اکنون به تحلیل سـرعت همگرایی به نقطه ثابت در تابع تولید سـرانه اقتصاد کلان تحت فرض وجود بهره پولی پرداخته می‌شود:

$$\mathrm{g}(k_t) = (p'.e^{r.t})|[\lambda.f(k_t)] - (k^*)| < \varepsilon \quad (۲۹)$$

در این مرحله نیز با جایگذاری‌های مربوطه در رابطه ثابت خطای مجانبی روش‌های تکراری خواهیم داشت:

$$\mathrm{AEC}_3 = \frac{|g''(k_t)|}{2|g'(k_t)|} = -\left(r + \frac{f''.\dot{k}}{2f'} + \frac{\ddot{k}}{2\dot{k}}\right)\Bigg|_{k_t=k^*} \quad (۳۰)$$

آن‌گونه که از رابطه فوق مشـخص اسـت ثابت خطای مجانبی افزایش و در نتیجه سرعت همگرایی کاهش یافته است.

۳-۶-۶- مقایسه سرعت همگرایی در شرایط وجود و عدم وجود بهره پولی

مقایسه قدر مطلق ثابت خطای مجانبی با توجه به شرط اینادا و در سه حالت فوق الذکر به صورت زیر می‌باشد:

$$\left(r + \frac{f''.k^{\bullet}}{2f'} + \frac{k^{\bullet\bullet}}{2k^{\bullet}}\right) > \left(\frac{f''.k^{\bullet}}{2f'} + \frac{k^{\bullet\bullet}}{2k^{\bullet}}\right), r > 0 \quad (۳۱)$$

تحلیل رابطه بالا بیان‌گر آن است که پولی شدن اقتصاد اثری بر سرعت همگرایی اقتصاد ندارد و ثابت خطای مجانبی در حالت اقتصاد پولی و اقتصاد تهاتری یکسان بوده و صرفاً به ساختار تابع تولید و سرمایه‌گذاری بستگی دارد. نتیجه مهم‌تر این است که ثابت خطای مجانبی در اقتصاد با شرایط وجود بهره پولی افزایش یافته و همگرایی به نقطه ثابت را با تأخیر و کندی همراه می‌سازد. لازم به ذکر است که در این جا کاهش سرعت همگرایی در شرایط وجود بهره پولی از جنس افزایش طول مسیر بوده و در واقع طولانی‌تر شدن دنباله، زمان رسیدن به نقطه همگرایی را افزایش می‌دهد.

۴- نتیجه‌گیری و پیشنهادها

با توجه به استنتاجات ریاضی صورت پذیرفته، نتایج زیر قابل استنتاج است:

۱. با عنایت به باناخ بودن فضای قیمت‌ها، توابعی نظیر تابع تولید اقتصادکلان که از ویژگی لیپشیتز برخوردار است الزاماً به نقطه تعادل همگرا خواهد شد.
۲. اعمال نرخ بهره پولی به عنوان ابزار ذخیره ارزش، وظیفه واحد شمارش بودن پول را تحت الشعاع قرارداده و الزاماً منجر به تورم می‌گردد.
۳. وجود نرخ بهره پولی در فضای اقتصاد کلان (با فرض وجود نقطه ثابت) سرعت همگرایی را تغییر و کاهش می‌دهد.
۴. تعریف توابعی انبساطی نظیر قراردادهای ثابت بهره‌ای و مرابحه در فضای پولی اقتصاد کلان، موجب اختلال در حصول به نقطه ثابت می‌گردد (با فرض اینکه اساساً نقطه ثابت در شرایط وجود بهره پولی بتواند شکل بگیرد).
۵. تعریف توابعی انقباضی نظیر تنزیل در حصول به نقطه ثابت اقتصاد کلان اختلالی ایجاد نمی‌نماید.
۶. تابع تولید نئوکلاسیکی دارای نقطه تعادل پایداری است که هم به ازای مقادیر بیشتر و هم به ازای مقادیرکمتر از نقطه ثابت به این سمت حرکت کرده و در آن استقرار می‌یابد.

با امعان نظر به نتایج اشاره شده، پیشنهاداتی به شرح ذیل ارائه می‌گردد:

۱. با توجه به نقش تورم‌زای نرخ بهره در اقتصادد کلان، جهت جلوگیری از شکل‌گیری تورم لازم است نهادهای تأمین مالی غیر مبتنی بر نرخ بهره طراحی و شکل گیرند.
۲. با عنایت به آنکه کاهش و تغییر سرعت همگرایی ناشی از تورمی شدن اقتصاد

از جنس افزایش طول مسـیر می‌باشـد، پیشنهاد می‌شود بی‌انضباطی‌های مالی (اجرای کسـر بودجه) دولت‌ها که به افزایش سـطح قیمت‌ها منجر می‌شـود و آثاری شبیه به تورم بر جای می‌گذارد مهار و کنترل گردند.

۳. با توجه به رفتار طبیعی اقتصاد کلان در رسیدن به نقطه ثابت پیشنهاد می‌شود که مداخلات در اقتصاد کلان در حداقل ممکنه قرار گیرد.

۴. با عنایت به آنکه اعمال نرخ بهره پولی به عنوان ابزار ذخیره ارزش، وظیفه واحد شـمارش بودن پول را تحت الشـعاع قرارداده و الزاماً منجر به تورم می‌گردد، پیشنهاد می‌شود هر کالایی که در نقش واسطه مبادله انتخاب و ظاهر می‌شود، فاقد نقش ذخیره ارزش صریح تلقی گردد.

۵. با توجه به وابسـتگی نهادهای پولی موجود به نرخ بهره، پیشـنهاد می‌شـود مطالعات علمی به دنبال طراحی نهادهای پولی غیرمبتنی بر وابسـتگی به نرخ بهره باشند.

فهرست منابع

۱. احمدی شـادمهری، محمدطاهر، فلاحی، محمدعلی، و خسـروی، سـمیه (۱۳۹۰). آزمون علیت هیشائو بین نرخ بهره و تورم برای کشورهای منا. *فصلنامه پژوهش‌های رشد و توسعه اقتصادی*، ۱(۳): ۲۳۴-۲۰۴.

۲. اسمعیلی، حمید (۱۳۸۹). *آنالیز عددی*. انتشارات دانشگاه بوعلی سینای همدان.

۳. آلیپرانتز، سـی. دی.، و بورکین شـاو، او. (۱۳۸۹). *اصول آنالیز حقیقی*. ترجمه: علی اکبر عالم‌زاده. انتشارات پارتیان.

۴. بخشـی دسـتجردی، رسـول (۱۳۸۳). *بررسی آثار و ریشه‌های نرخ بهره با تأکید بر نظریه بهره حیاتی سـاموئلسـن در چارچوب الگوی نسـل‌های تداخلی*. پایان‌نامه دکتری رشته علوم اقتصادی به راهنمایی رحیم دلالی اصفهانی، دانشگاه اصفهان.

۵. پورکاظمی، محمد حسین (۱۳۹۳). *بهینه سازی پویا،کنترل بهینه و کاربردهای آن*. تهران: انتشارات دانشگاه شهید بهشتی.

۶. حسـینی، سـیدعقیل (۱۳۹۲). *تحلیل اثرات نرخ بهره پولی مثبت بر بهینگی و پایـداری(بـا تـأکید بر مدلهای پس‌انداز احتیاطی)*. پایان‌نامه دکتری رشـته علوم اقتصادی به راهنمایی رحیم دلالی اصفهانی، دانشگاه اصفهان.

۷. دبرو، جرارد (۱۳۸۹). *نظریـه ارزش: تحلیـل ریـاضـی تعادل اقتصـادی*. ترجمه: مهدی‌رضا درویش‌زاده. تهران: سروش.

۸. سعیدی، پرویز، مظهری، رضا، و ولیان، حسن (۱۳۹۱). بررسی ارتباط بین نرخ تورم با نرخ بهره بر اسـاس تئوری اثر فیشـر در اقتصـاد ایران. *دانش مالی تحلیل اوراق بهادار (مطالعات مالی)*، بهار، دوره پنجم - شماره ۱۳: ۹۸-۸۳.

۹. کرایه‌چیان، اصغر. (۱۳۸۷). *آنالیز عددی (۱)*. انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد.

۱۰. *کینز، جـان مینـارد. (۱۳۸۵). نظریه عمومی اشـتغال، بهره، پول. ترجمه منوچهر فرهنگ. تهران: نشر نی.*

۱۱. معرفی محمـدی، عبدالحمید (۱۳۹۳). *علم اقتصـاد و مسـئله شـناخت: نقدی معرفت‌شناختی بر روش‌شناسی اقتصاد نئوکلاسیک*، قم: پژوهشگاه حوزه و دانشگاه.

۱۲. رائو، رامـاموهـانا (۱۳۷۵). *معادلات دیفرانسـیل معمولی*. ترجمه: محمد جلوداری ممقانی. انتشارات دانشگاه پیام نور.

۱۳. مهرگان ن. ، عزتی م.، و اصـغرپور ح. (۱۳۸۵). بررسـی رابطه بین نرخ بهره و تورم. *فصلنامه پژوهشهای اقتصادی*، ۶ (۳) : ۱۰۵-۹۰.

1. Awomuse, B. O., & Alimi, S. R. (2012). The relationship between nominal interest rates and inflation: New evidence and implications for Nigeria. *Journal of Economics and Sustainable development*, 3(9): 158-

165.
2. Barro, R. J. and X. Sala-i-Martin, (2004). *Economic Growth*. MIT Press, Cambridge MA
3. Booth, G. G., & Ciner, C. (2001). The relationship between nominal interest rates and inflation: international evidence. *Journal of Multinational Financial Management*, 11(3), 269-280.
4. Bose, N. (2002). Inflation, the credit market, and economic growth. *Oxford Economic Papers*, 54 (3), 412 – 434.
5. Brunner, K., & Meltzer, A. H. (1964). The Federal Reserve's attachment to the free reserve concept. *House Committee Office on Banking and Currency*, 88th Congress, 2nd session (pp. 1 – 64). Washington, DC: U.S. Government Printing.
6. Calomiris, C., & Wheelock, D. (1998). Was the Great Depression a watershed for American monetary policy? In *The defining moment: The great depression and the American economy in the twentieth century* (pp. 23-66). University of Chicago Press.
7. Carneiro, F.G., Divino, J.A.C.A. and Rocha, C.H., (2002). Revisiting the Fisher hypothesis for the cases Argentina, Brazil and Mexico. *Applied Economics Letters*. 9,95-98.
8. Cochrane, J. H. (2016). Do Higher Interest Rates Raise or Lower Inflation? (http://faculty.chicagobooth.edu/john.cochrane/research/papers/fisher.pdf).
9. Crowder, J.W., Hoffman, D, L. (1996). The Long-Run Relationship between Nominal Interest Rates and Inflation: The Fisher Equation Revisited. *Journal of Money, Credit and Banking*, Vol. 28, No. 1. (Feb.,), pp. 102-118.
10. Evans, m., Levis, K. (1995). Do expected shifts in inflation affects estimates of the long ran fisher relation? *Journal of finance* 50(march), 251-276.
11. Fama, E, E. (1975). Short Term Interest Rates As Predictors of Inflation" *American Economic Review*, Vol. 65 (June), Pp.269-282.
12. Fisher, Irving (1930). *The Theory of Interest*. MacMillan , New York
13. Friedman, M. (1968). *Inflation: Causes and consequences*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall (Council for Economic Education (Bombay: Asia Publishing House).
14. Friedman, M., (1969). *The Optimum Quantity of Money and Other Essays*. Chicago: Aldine Publishing Company, Hawthorne. New York.
15. Garling, D. J. H. (2013). *A course in mathematical analysis; volume 2: Metric and topological spaces, functions of a vector variable*, New York: Cambridge University Press.
16. Hakan, B., Nildag, B. C., & Olgun, H. (2007). Inflation Uncertainty and Interest Rates: Is the Fisher Relation Universal? *Applied Economics*. Vol. 38.
17. Kandil, M (2005). Money, interest, and prices: Some international evidence. *International Review of Economics and Finance*. 14 ،129–147.
18. Khamsi M, A. Kirk, W (2001). A*n Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory*. A Wiley-interscience Publication.

19. Kirk, William, Sims, Brailey *(Eds.)* (2001). *Handbook of metric fixed point theory*, Springer.
20. Kincaid, David R., E. Ward Cheney (1991). *Numerical analysis: mathematics of scientific computing*, Brooks/Cole Publishing Company.
21. Kirk, William, Sims, Brailey (Eds) (2001).*Handbook of metric fixed point theory*, Springer.
22. McKinnon, RI (1973). *Money and capital in economic development*. Washington: Brookings Institution.
23. Milbourne, Ross. (1986). Re- examining the Buffer- stock Model of Money. *The Economic Journal*. V.97. PP. 130- 42.
24. Mishkin, F, S. (1992). Is the Fisher Effect For Real? A Reexamination of the Relationship between Inflation and Intrest Rate. *Journal of Monetary Economics,* 30 (November) ,195-215).
25. Orphanides, A. (2001). Monetary policy rules based on real-time data. *American Economic Review*, 964-985.
26. Ramsey, F. P. (1928). A Mathematical Theory of Saving. *The Economic Journal*, Vol. 38, No. 152. (Dec.), pp. 543-559
27. Rose, Andrew. (1988). Is the Real Interest Rate Stable?" *Journal of Finance*, 43 (December) ,(95-112).
28. Royden, H. L., & Fitzpatrick, P. (2010). *Real analysis*.4th Ed. New York: Macmillan.
29. Shaw, E.S. (1973). *Financial deepening in economic development*. New York: Oxford University Press.

ضمایم

۶- ۱- ضمیمه (۱): ثابت خطای مجانبی در اقتصاد تهاتری

$$z(k_t) = |[f(k_t)] - (k^*)|$$
$$z'(k_t) = f'(k_t).\dot{k} \qquad (۳۲)$$
$$z''(k_t) = f''(k_t).\dot{k}^2 + \ddot{k}.f'(k_t)$$

$$\frac{z''(k_t)}{2z'(k_t)} = -\frac{\left|f''(k_t).\dot{k}^2 + \ddot{k}.f'(k_t)\right|}{2\left|f'(k_t).\dot{k}\right|}\Bigg|_{k_t=k^*} \qquad (۳۳)$$

$$\mathrm{AEC}_1 = -\left(\frac{f''.\dot{k}}{2f'} + \frac{\ddot{k}}{2\dot{k}}\right)\Bigg|_{k_t=k^*}$$

۶- ۲- ضمیمه (۲): ثابت خطای مجانبی در اقتصاد پولی

$$h(k_t) = |[\varphi.f(k_t)] - (p'.k^*)| < \varepsilon$$
$$= p'|[\lambda.f(k_t)] - (k^*)| < \varepsilon \qquad (۳۴)$$

$$\mathrm{h}'(k_t) = \lambda.p'.f'(k_t).\dot{k}$$
$$h''(k_t) = \lambda.p'.f''(k_t).\dot{k}^2 + \lambda.p'.\ddot{k}.f'(k_t) \qquad (۳۵)$$
$$h''(k_t) = \lambda p'\left[f''(k_t).\dot{k}^2 + \ddot{k}.f'(k_t)\right]$$

$$\mathrm{AEC}_2 = \frac{h''(k_t)}{2h'(k_t)} = -\frac{f''(k_t).\dot{k}^2 + \ddot{k}.f'(k_t)}{2f'(k_t).\dot{k}}\Bigg|_{k_t=k^*} \qquad (۳۶)$$
$$\mathrm{AEC}_2 = -\left(\frac{f''.\dot{k}}{2f'} + \frac{\ddot{k}}{2\dot{k}}\right)\Bigg|_{k_t=k^*}$$

۶- ۳- ضمیمه (۳): ثابت خطای مجانبی در اقتصاد پولی با وجود نرخ بهره پولی

$$\mathrm{g}(k_t) = (p'.e^{r.t})|[\lambda.f(k_t)] - (k^*)| < \varepsilon$$
$$\mathrm{g}'(k_t) = p'.r.e^{r.t}(\lambda.f(k_t) - (k^*)) + \lambda f'(k_t).\dot{k}.p'.e^{r.t} \qquad (۳۷)$$
$$\mathrm{g}'(k_t) = p'\left[r.e^{r.t}(\lambda.f(k_t) - (k^*)) + \lambda.e^{r.t}.f'(k_t).\dot{k}\right]$$

$$\mathrm{g}''(k_t) = p'\Big|r^2.e^{r.t}(\lambda.f(k_t) - k^*) + \lambda f'(k_t).\dot{k}.r.e^{r.t} +$$
$$+\lambda f''(k_t).\dot{k}^2.e^{r.t} + r.e^{r.t}.\lambda.f'(k_t).\dot{k} + \ddot{k}.\lambda.f'(k_t).e^{r.t} \qquad (۳۸)$$

با توجه به آنکه در تعادل، تفاضل مقدار تابع از نقطه ثابت صفر است خواهیم داشت:

$$g''(k_t) = [\lambda p' e^{r.t}]\left[2r.f'(k_t)\dot{k} + f''(k_t).\dot{k}^2 + \ddot{k}.f'(k_t)\right] \qquad (۳۹)$$

$$AEC_3 = -\frac{\left[2r.f\prime(k_t)\dot{k}+f\prime\prime(k_t).\dot{k}^2+\ddot{k}.f\prime(k_t)\right]}{\left[2f\prime(k_t).\dot{k}\right]}\Bigg|_{k_t=k^*}$$

$$AEC_3 = -\left(r + \frac{f\prime\prime.\dot{k}}{2f\prime} + \frac{\ddot{k}}{2\dot{k}}\right)\Bigg|_{k_t=k^*} \qquad (۴۰)$$