

طراحی مشاهده‌گر مقاوم و کنترل‌گر فیدبک خروجی برای سیستم‌های چندعاملی دارای تأخیر بازه‌ای و متأثر از نامعینی و اغتشاش

بدرالزمان حسینی^۱، کارشناس ارشد؛ مهدی سجودی^۲، استادیار؛ عباس چترایی^۳، استادیار

۱- منطقه دو عملیات انتقال گاز - شرکت انتقال گاز ایران - اصفهان - ایران - badrezia@yahoo.com

۲- دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر - دانشگاه تربیت مدرس - تهران - ایران - sojoodi@modares.ac.ir

۳- دانشکده مهندسی برق - دانشگاه آزاد اسلامی واحد نجف‌آباد - نجف‌آباد - ایران - abbas.chatraei@gmail.com

چکیده: مطالعه حاضر به طراحی مشاهده‌گر برای یک سیستم چندعاملی تحت شبکه و متأثر از تأخیر زمانی متغیر با زمان بازه‌ای و در حضور نامعینی و اغتشاش می‌پردازد. گراف ارتباطی بین عامل‌ها، مستقیم فرض شده است. با استفاده از یک روش تقسیم‌بندی بازه تأخیر و روش‌های بهینه‌سازی محدب شرایط پایداری با کمترین محافظه‌کاری به دست می‌آیند. با وجود اغتشاش و نامعینی در سیستم، استفاده از روش H_∞ در کنار طراحی فیدبک خروجی پویا، مشاهده‌گر مقاوم و روش نابرابری‌های ماتریسی خطی به نتایج بهتر در ردیابی عامل مرجع و پایداری مقاوم سیستم منجر می‌گردد. کارایی روش ارائه‌شده در شبیه‌سازی‌ها و اعمال به ربات روبیت ساخت شرکت فن‌آوری نوین قرن مشهود است.

واژه‌های کلیدی: مشاهده‌گر مقاوم، نابرابری ماتریسی خطی، نامعادله جنسن، فیدبک خروجی پویا، تأخیر متغیر با زمان بازه‌ای.

Observer and Output Feedback Controller Design for Uncertain Multi-agent Systems with Interval Time Delay and Disturbances

Badrozzaman Hosseini, MSc¹; Mehdi Sojoodi, Assistant Professor²; Abbas Chatraei, Assistant Professor³

1- Gas Transmission Operation District 2, Iranian Gas Transmission Company, Isfahan, Iran, Email: badrezia@yahoo.com

2- Faculty of Electrical and Computer Engineering, Tarbiat Modares University, Tehran, Iran, Email: sojoodi@modares.ac.ir

3- College of Electrical Engineering, Islamic Azad University of Najafabad Branch, Najafabad, Iran, Email:

abbas.chatraei@gmail.com

Abstract: This study designs an observer for network-based distributed multi agent systems with interval time varying delays in the presence of uncertainty and disturbances under a directed graph. A delay interval partitioning method along with convex combination led to less conservative stability. In the presence of uncertainty and disturbances, using H_∞ control along with dynamic output feedback controller, robust observer and LMIs (Linear Matrix Inequalities) has led to better results in stability criteria and tracking the reference signal. Numerical examples are given to show the effectiveness of the obtained results.

Keywords: Robust observer, Linear matrix inequality, Jensen's inequality, Dynamic output feedback, Interval time varying delay.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۳/۰۵/۰۲

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۳/۰۷/۰۸، ۱۳۹۳/۰۸/۱۰، ۱۳۹۳/۱۰/۳۰، ۱۳۹۴/۰۲/۲۹، ۱۳۹۴/۰۳/۲۸ و ۱۳۹۴/۰۶/۲۲

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۴/۰۷/۲۶

نام نویسنده مسئول: مهدی سجودی

نشانی نویسنده مسئول: ایران - تهران - بزرگراه جلال آل احمد - جنب پل نصر - دانشگاه تربیت مدرس - دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر.

۱- مقدمه

در این تحقیق هدف طراحی کنترل‌گر و مشاهده‌گر است به‌گونه‌ای که ردیابی و اجماع سیستم‌های چندعاملی ناهماهنگ تحت شبکه در حضور نامعینی و اغتشاش را تضمین نمایند. مهم‌ترین نکته استفاده از روشی است که بتواند با استفاده از پارامترهای طراحی کمتر و روش‌های اضافه در کنار روابط لیاپانوف-کراسوفسکی پایداری را تضمین کند. اجماع مهم‌ترین موضوع در کنترل رفتار جمعی سیستم‌های چندعاملی است. استفاده از عامل مرجع باعث می‌گردد که کنترل‌گر با صرف انرژی کمتر باعث اجماع عامل‌ها گردد [۱]. در اغلب تحقیقات صورت گرفته مسئله اجماع به پایداری تبدیل می‌گردد. به‌همین منظور با معرفی سیگنال خطا و استفاده از آن در طراحی کنترل‌گر و مشاهده‌گر، مسئله پایداری مورد بررسی قرار می‌گیرد. سیگنال خطا، با توجه به نوع کنترل‌گر (حالت و یا خروجی) می‌تواند از اختلاف حالات عامل‌ها با حالت مرجع و یا خروجی عامل‌ها با عامل مرجع باشد. در تحقیق [۱] روش‌های انتگرالی لیاپانوف-کراسوفسکی جدید مورد استفاده قرار گرفته است. این روش باعث می‌گردد بین عامل‌های مستقل از یکدیگر وابستگی ایجاد شود.

برای رفع مشکل فوق از کرونگر ارتباط ماتریس‌های لیاپانوف و گراف غیر مستقیم عامل‌ها در روابط لیاپانوف-کراسوفسکی استفاده شده است [۱]. این روش در مواردی که تعداد ماتریس‌های وزنی زیاد باشد پاسخ مناسبی را در تضمین پایداری ایجاد نمی‌کند و یا پاسخ با بیشترین محافظه‌کاری همراه خواهد بود. در برخی از مراجع اثر ماتریس‌های لیاپانوف روی بهره‌های کنترل‌گر حذف گردیده است. به‌عنوان مثال در تحقیق [۲] با کمک الگوریتم سلسله مراتبی و بهبود مقادیر اولیه تحلیل، بهره‌های کنترل‌گر به‌طور مستقل از ماتریس‌های لیاپانوف-کراسوفسکی به‌دست می‌آیند. از جمله معایب این روش را می‌توان در طراحی کنترل‌گر دانست که در برخی شرایط با وجود بهینه‌سازی مقادیر اولیه به کمک الگوریتم ترتیبی، پاسخی برای بهره‌های کنترل‌گر به‌دست نمی‌آید [۲]. تأخیر زمانی در بسیاری از سیستم‌های کنترل تحت شبکه ایجاد می‌گردد [۳]. ماهیت شبکه باعث می‌گردد که القای تأخیر در انتقال اطلاعات اجتناب‌ناپذیر باشد [۳]. روش‌های مختلفی برای تحلیل پایداری در حضور تأخیر صورت گرفته است، به‌گونه‌ای که کمترین محافظه‌کاری به‌دست آید [۴، ۵].

در صورتی که در تحلیل پایداری مسئله تأخیر در ارتباط عامل‌ها با حساسیت بیشتری (تأخیر با تقریب کمتر) مدنظر قرار گرفته شود، سیستم بیشینه تأخیر بالاتری (محافظه‌کاری کمتر) را تحمل می‌کند [۴]. در روش [۴] به‌منظور تخمین ضرایب غیر خطی از روش محدب و تقسیم‌بندی بازه تأخیر استفاده شده است. با استفاده از روابط لیاپانوف-کراسوفسکی، ماتریس‌های وزنی آزاد [۶] و استفاده از روش‌های محدب [۳] به تحقیق در مورد تأخیر بازه‌ای پرداخته می‌شود. در تحلیل روابط لیاپانوف-کراسوفسکی از ماتریس‌های وزنی آزاد کمک گرفته می‌شود. با انتخاب تعداد ماتریس‌های وزنی آزاد کمتر [۷] و روش‌های لیاپانوف ساده‌تر از پیچیدگی محاسبات کاسته می‌شود.

در [۷] محدوده بازه تأخیر به دو قسمت تقسیم‌بندی شده است و تحلیل برای هر ناحیه به‌صورت جداگانه انجام گرفته است. در تحقیق حاضر با تقسیم‌بندی بازه تأخیر به n قسمت و استفاده از روابط حاکم بر مجموعه‌های محدب، محافظه‌کاری کمتر و سرعت اجماع بیشتر شده است. هرچقدر بازه تأخیر به فواصل کوچک‌تر تقسیم‌بندی گردد، بیشینه تأخیر بالاتری قابل تحمل است.

در تحقیق‌های [۹] و [۱۰] بحث طراحی کنترل‌گر مقاوم برای سیستم‌های هماهنگ و ناهماهنگ غیر خطی و متغیر با زمان مطرح شده است. روابط لیاپانوف-کراسوفسکی با به‌کارگیری بهره نامایی و تکنیک‌های تعیین کران تعریف می‌گردند. در بسیاری از روش‌های اجماع فرض بر آن است که اطلاعات حالات عامل‌ها و یا خروجی همگی وجود دارند و قابل انتقال به سایر عامل‌ها هستند. اگرچه این فرضیه امکان‌پذیر است ولی به‌دلیل ویژگی‌های سنسورها و یا نویزهای محیطی غیر عملی به‌نظر می‌رسد. بنابراین لزوم طراحی مشاهده‌گر با فرض در اختیار نداشتن کلیه اطلاعات سیستم، به‌گونه‌ای که اهداف مسئله را تضمین کند لازم و ضروری است [۱۱]. به‌همین منظور، مراجعی که بحث طراحی مشاهده‌گر در اجماع عامل‌ها را مطرح کرده‌اند؛ بررسی شده‌اند. در [۱۱] مشاهده‌گر غیر متمرکز بر مبنای پروتکل اجماع و خروجی‌های اندازه‌گیری‌شده در شبکه‌های دارای پیچیدگی ارائه شده است.

در [۱۲] مشاهده‌گر حالت غیر متمرکز در سیستم‌های به‌هم‌پیوسته و ردیابی عامل مرجع طراحی گردیده است. بنابراین بایستی طراحی مشاهده‌گر و کنترل‌گر به‌گونه‌ای باشد که بتواند بیشینه تأخیر مجاز را تحمل نماید و از طرفی اجماع عامل‌ها را با هدف ردیابی عامل مرجع در حضور نامعینی و اغتشاش تضمین نماید. از جمله نوآوری‌های این تحقیق بررسی دینامیک عامل‌های تحت شبکه به‌صورت ناهماهنگ و در حضور نامعینی و اغتشاش است که در کارهای قبلی به آن‌ها اشاره نشده است. استفاده از مشاهده‌گر خروجی با فرض در اختیار نداشتن تمامی اطلاعات سنسورها از دیگر مزایای این تحقیق است.

مقاوم‌سازی سیستم در حضور نامعینی و اغتشاش از مسائل مهم و دارای اهمیت است. این مسئله در این تحقیق مورد توجه قرار گرفته است. پارامترهای طراحی نظیر ضرایب ماتریس وزنی و مشتق تأخیر در تعیین سرعت اجماع و کم کردن میزان بالازدگی و پایین‌آمدگی نقش دارند. برای کاهش محافظه‌کاری و افزایش سرعت اجماع از روش تقسیم‌بندی بازه تأخیر و بهره‌گیری از انتگرال جنسن استفاده شده است [۴]. هر چقدر که بازه تأخیر به فواصل کوچک‌تر تقسیم‌بندی شوند، مقدار تحمل بیشینه تأخیر افزایش می‌یابد [۴]. نکته دیگر در نظر گرفتن اثر عامل مرجع در القای اغتشاش به سیستم است. در تحقیق [۱۳] با روش نمونه‌برداری از مدل داخلی سیستم، القای اغتشاش توسط مرجع را بی‌اثر فرض کرده است. تفاوت این دو روش هنگامی که در ردیابی، مراجع بی‌کران مدنظر باشد کاملاً مشهود است. استفاده از مشاهده‌گر و کنترل‌گر به‌کار برده‌شده می‌تواند سرعت اجماع را در شرایط القای تأخیر در سیستم، به سرعت اجماع در شرایط بدون تأخیر نزدیک نماید.

عامل با هر لبه را مشخص می‌کند. سطرها بیانگر عامل‌ها و ستون‌ها مشخص‌کننده لبه‌ها هستند [۱۵]. در گراف ارتباطی میان عامل‌ها می‌توان ارتباط مستقیم و غیر مستقیم را تعریف نمود. در گراف ارتباطی مستقیم در صورتی که عامل V_i از عامل V_j اطلاعات دریافت کند، به معنی آن نیست که ارتباط بالعکس وجود داشته باشد. ولی در گراف غیر مستقیم ارتباط بالعکس وجود دارد [۱۵].

در صورت وجود عامل مرجع "o" در شبکه ماتریس قطری $M = \text{diag}\{m_1, m_2, \dots, m_n\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ برای ارتباط هر کدام از عامل‌ها با عامل مرجع در نظر گرفته می‌شود. نماد $m_i, i = 1, \dots, n$ بیان‌کننده لبه ارتباطی عامل‌ها با مرجع است. در صورتی که بین هر عامل و عامل مرجع ارتباط برقرار باشد، $m_i > 0$ خواهد بود و در غیر این صورت $m_i = 0$ می‌باشد. برقرار بودن تنها یک ارتباط از گراف "G" با عامل مرجع باعث می‌گردد برای سایر عامل‌های شبکه نیز به صورت سراسری در دسترس باشد [۱].

سیستم چندعاملی با n عامل و یک عامل مرجع در نظر گرفته می‌شود به گونه‌ای که هر عامل متأثر از نامعینی و اغتشاش باشد. دینامیک هر عامل به صورت زیر نمایش داده می‌شود. $\mathbb{R}^{n \times r}$ نمادی برای تمامی ماتریس‌های $(n \times r)$ بعدی است.

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \theta_1 x_i(t) + \theta_2 u_i(t) + \theta_3 d_i(t) \\ x_i(t_0) = x_i^0 \quad i = 1, 2, \dots, N \\ y_i(t) = C_i x_i(t) + D_{di} d_{oi}(t) \\ \theta_1 = A_i + \Delta A_i, \theta_2 = B_i + \Delta B_i, \theta_3 = B_{di} \end{cases} \quad (1)$$

ماتریس‌های $D_{di} \in \mathbb{R}^{q \times r}, A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}, B_i \in \mathbb{R}^{n \times p}, C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}, B_{di} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ برای $i = 1, 2, \dots, N$ ثابت در نظر گرفته شده‌اند. نماد Δ بیانگر وجود نامعینی در دینامیک سیستم است. $x_i(t)$ سیگنال حالت، $u_i(t)$ سیگنال کنترل، $d_i(t)$ سیگنال اغتشاش وارد شده به دینامیک سیستم، $d_{oi}(t)$ سیگنال اغتشاش در خروجی و $y_i(t)$ خروجی سیستم است. در سیستم فرض بر آن است که اغتشاش علاوه بر دینامیک سیستم در خروجی نیز وجود داشته باشد. دینامیک عامل مرجع به صورت زیر توصیف می‌گردد.

$$\begin{cases} \dot{x}_o(t) = A_o x_o(t) \\ x_o(t_0) = x_o^0 \\ y_o(t) = C_o x_o(t) \end{cases} \quad (2)$$

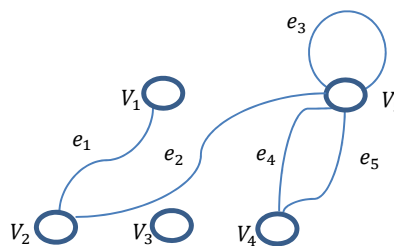
در معادله فوق $x_o \in \mathbb{R}^n$ حالت عامل مرجع و A_o, C_o ماتریس‌های ثابت و x_o^0 شرایط اولیه سیستم را بیان می‌کنند. $x_o(t)$ سیگنال حالت و $y_o(t)$ خروجی عامل مرجع است.

هدف طراحی کنترل گر و مشاهده گر مقاوم در بستر شبکه است به گونه‌ای که تمامی عامل‌ها بتوانند با تمام محدودیت‌هایی که شبکه از نظر تأخیر و اغتشاش بر روی سیستم اعمال می‌کند، عامل مرجع را ردیابی کنند. شکل ۲ به تأخیر القاشده توسط شبکه در انتقال اطلاعات

با توجه به انتقال اطلاعات در بستر شبکه، از اطلاعات سنسورها نمونه‌برداری صورت می‌گیرد. این عمل در مقایسه با حالتی که اطلاعات سنسورها بدون نمونه‌برداری انتقال یابند، از سرعت پایین‌تر برخوردار است. ولی به دلیل ماهیت شبکه، نمونه‌برداری از سنسورهای خروجی لازم است. در این حالت به منظور افزایش سرعت اجماع، روش‌های مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد. از جمله آن‌ها می‌توان به استفاده از وزن‌های ارتباطی در مشاهده گر به صورت متفاوت از وزن‌های ارتباطی میان عامل‌ها در کنترل گر اشاره کرد. در این صورت انعطاف‌پذیری سیستم در تضمین اجماع و ردیابی عامل‌ها افزایش می‌یابد. در روش دیگر با استفاده از روابط لیاپانوف نمایی، در سرعت اجماع تغییرات اعمال می‌گردد. با استفاده از روابط لیاپانوف-کراسوفسکی برای تأخیرهای بازه‌ای متغیر با زمان و به کارگیری نابرابری‌های ماتریسی خطی شرایط برای کنترل مقاوم سیستم به دست می‌آید. نتایج با استفاده از الگوریتم‌های محاسباتی استاندارد نظیر افزونه Yalmip قابل حل می‌باشند. در ادامه به بیان مسئله و طراحی کنترل گر و مشاهده گر پرداخته می‌شود. جهت اثبات صحت روش ارائه شده از یک مثال و مقایسه روش‌های موجود استفاده شده است.

۲- مقدمات ریاضی و بیان مسئله

گراف ارتباطی از n عامل و مجموعه‌ای از لبه‌های ارتباطی آن‌ها تشکیل یافته است. در صورتی که عامل‌ها با نماد V_i مشخص شوند، مجموعه عامل‌ها را می‌توان به صورت $V = \{V_1, V_2, \dots, V_n\}$ نمایش داد. در لبه ارتباطی عامل‌های i, j نماد V_{ij} بیانگر کمان ارتباطی از عامل V_i به عامل V_j و V_{ji} بیانگر کمان ارتباطی از عامل V_j به عامل V_i است. در شکل زیر مفاهیم مجموعه عامل‌ها و لبه‌های ارتباطی میان آن‌ها نمایش داده شده است.



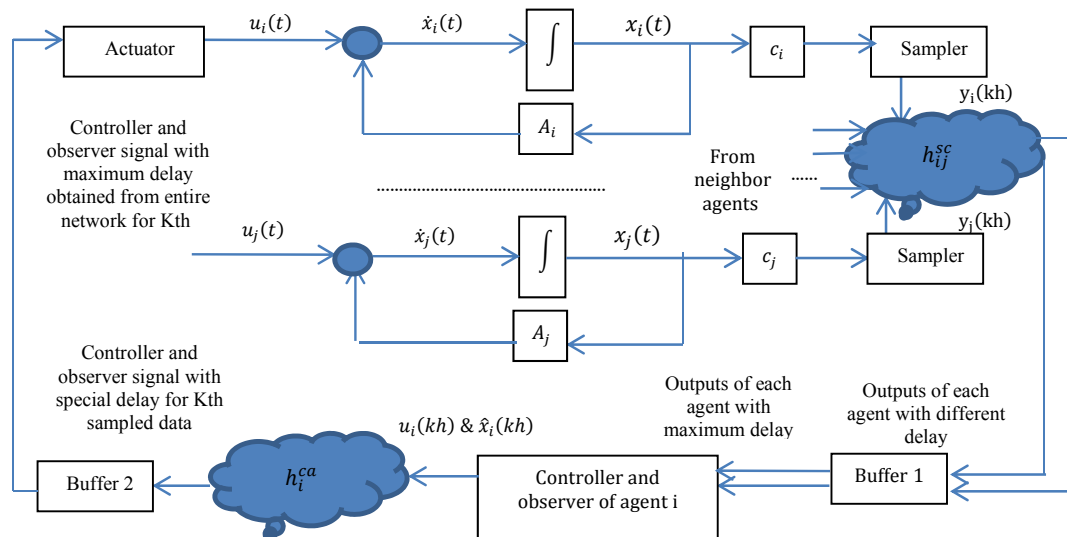
شکل ۱: نمایش مفاهیم پایه‌ای گراف "G" [۱۷]

در شکل فوق $V_i, i = 1, \dots, 5$ عامل‌های گراف "G" و $e_i, i = 1, \dots, 5$ لبه‌های ارتباطی بین عامل‌ها هستند. نماد " e_i " بیانگر V_{ij} یا V_{ji} است که در پارگراف اول به آن اشاره شده است. از ارتباط عامل‌ها و لبه‌ها می‌توان ماتریس مجاورتی " A_d " را به دست آورد. با تعیین ماتریس‌های مجاورتی و رابطه $L = (I_N - A_d) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ماتریس لاپلاس "L" تعیین می‌گردد. نماد I_N بیانگر ماتریس همانی است و ابعاد آن با ماتریس مجاورتی " A_d " یکسان می‌باشد. مقادیر ویژه این ماتریس در تعیین اجماع عامل‌ها نقش دارند. ماتریس مجاورتی در واقع تلاقی هر

خروجی کنترل گر تمامی عامل‌ها در یک مقیاس زمان به محرکه هر کدام از عامل‌ها برسد. به همین منظور بین کنترل گر و مشاهده گر هر عامل و محرکه از بافر ۲ استفاده می‌شود. لحظه‌ای که اطلاعات از بافر ۲ خارج می‌گردد برابر بیشینه زمانی است که نمونه K ام از هر کدام از کنترل گر‌ها انتقال می‌یابد. برای $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, N$ در صورتی که h_{ij}^{sc} تأخیر در انتقال اطلاعات نمونه بردارهای عامل i و عامل‌های مجاور j با بافر ۱ و h_{ik}^{ca} تأخیر در اطلاعات عامل i بین کنترل گر و بافر ۲ باشد، میان نمونه بردار عامل i و عامل j با موفقیت به بافر ۲ می‌رسد. در نتیجه زمان کلی که اطلاعات نمونه برداری در یک سیستم غیر متمرکز در لحظه K از تمامی نمونه بردارها به محرکه‌های مربوط به هر عامل می‌رسند را به صورت $h_k = \max\{h_{ik} | i = 1, \dots, N\}$ تعریف می‌گردد. در زمان نمونه برداری K ام " kh " می‌توان از تأخیر مصنوعی $h(t) = t - kh$ ، $h(t) = t - kh$ استفاده کرده و آن را به معادله کنترل گر و مشاهده گر اعمال کرد [۱].

میان عامل‌ها اشاره دارد. در این شکل عامل‌ها و مرجع به صورت غیر متمرکز در سرتاسر شبکه پراکنده‌اند. این پراکندگی و ماهیت شبکه باعث القای تأخیر در انتقال اطلاعات می‌گردد. به همین منظور از اطلاعات مشاهده گر هر عامل در دوره $h > 0, h \in \mathbb{R}$ نمونه برداری می‌شود. اطلاعات نمونه برداری شده هر عامل با عامل‌های مجاور، به کنترل گر آن عامل منتقل می‌شوند. از آنجا که همگی اطلاعات در یک زمان به کنترل گر نمی‌رسند، لزوم استفاده از بافر ۱ قبل از کنترل گر الزامی است. سیگنال‌های وارد شده به بافر هر کدام دارای یک میزان تأخیر هستند. وظیفه خروجی بافر تعیین یک اندازه تأخیر ثابت (انتخاب مقدار بیشینه) برای خروجی هر عامل و ارسال اطلاعات به کنترل گر و مشاهده گر است. اطلاعات خروجی کنترل گر و مشاهده گر نیز از طریق شبکه به ورودی عامل‌ها منتقل می‌شود.

نکته‌ای که باید مورد توجه قرار گیرد این است که اطلاعات نمونه K ام، $K \in \mathbb{R}$ به دست آمده از هر کنترل گر جهت انتقال به عامل مربوطه بایستی با سایر کنترل گر‌ها در یک مقیاس زمانی باشد یا به عبارتی نتایج



شکل ۲: شماتیک تأخیر القاشده در بستر شبکه برای عامل i [۱]

در مشتق روابط لیاپانوف از h_{12} برای رابطه $h_2 - h_1$ استفاده می‌شود. نمادهای h_1 کمینه و h_2 بیشینه تأخیر را بیان می‌کنند. نماد μ مشتق تأخیر را نشان می‌دهد. در ادامه کنترل گر و مشاهده گر به منظور ردیابی عامل مرجع به سیستم دینامیک ۱ و ۲ معرفی می‌گردد [۱، ۱۶، ۱۸].
با توجه به تعریف اجماع، $\alpha_{ij}, i, j = 1, \dots, N$ وزن ارتباطی عامل‌ها و m_i وزن ارتباطی با عامل مرجع است و در روابط کنترل گر و مشاهده گر به کار برده می‌شوند. ماتریس‌های $K_{Ai}, K_{Bi}, K_{Ci}, K_{Di}$ بهره‌های کنترل گر و L_i بهره مشاهده گر هستند و با تحلیل نابرابری‌های ماتریسی خطی مقادیر آن‌ها معلوم می‌گردند. ماتریس‌های A_i, B_i, C_i که در رابطه مشاهده گر به کار برده شده‌اند مربوط به دینامیک سیستم می‌باشند. نمادهای

۳- طراحی مشاهده گر و فیدبک خروجی

در این قسمت با کمک توابع لیاپانوف- کراسوفسکی، روش تقسیم‌بندی بازه تأخیر و تعیین نابرابری‌های ماتریسی خطی (LMI) پایداری سیستم حلقه بسته با تأخیرهای متغیر با زمان بازه‌ای تضمین می‌گردد. همان‌گونه که اشاره گردید، شبکه ارتباطی باعث القای تأخیر در انتقال اطلاعات می‌شود. این میزان تأخیر دارای یک مقدار کمینه و بیشینه قابل قبول است به گونه‌ای که به‌ازای آن‌ها سیستم پایدار بماند. تأخیر $h(t)$ یک تابع متغیر با زمان است و رابطه زیر در مورد آن برقرار می‌باشد.

$$0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2, \quad \dot{h}(t) \leq \mu \quad (3)$$

قضیه ۱ (ماتریس کرونگر [۱۱]) با در اختیار داشتن دو ماتریس $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ نتیجه کرونگر دو ماتریس به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \dots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq} \quad (۸)$$

$$czy1 = [H \otimes C_Z \quad -H \otimes C_Z \quad 0], \quad (۹)$$

$$czy2 = (I_N \otimes C_Z) * \begin{bmatrix} H_1 * \text{diag}\{D_{d1}, \dots, D_{di}\} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ H_i * \text{diag}\{D_{d1}, \dots, D_{di}\} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

نماد $H = L + M$ به عنوان ماتریس لاپلاس گراف "G" تعریف می‌گردد که در آن، L به عنوان ماتریس لاپلاس عامل‌ها و M ماتریس ارتباطی عامل‌ها با عامل مرجع است. ماتریس H_i به عنوان سطر i از ماتریس H در نظر گرفته شده است. ماتریس C_Z به عنوان ماتریس کمکی در تضمین ردیابی استفاده می‌شود و توسط طراح مشخص می‌گردد. در رابطه $\xi(t)$ تأخیر مصنوعی $h(t) = t - kh$ ، $h(t) = t - kh$ اعمال شده که در قسمت بیان مسئله به آن اشاره گردیده است. با تعیین بردارهای $\xi^T(t)$ و $\theta^T(t)$ در دینامیک سیستم، ماتریس‌های معادلات ۶ و ۷ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\mathcal{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & 0 & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & 0 & \mathcal{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad (۱۰)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{11} &= \text{diag}\{C_1 A_1 C_1^{-1}, \dots, C_i A_i C_i^{-1}\}, \mathcal{A}_{13} \\ &= \text{diag}\{C_1 B_1 K_{C1}, \dots, C_i B_i K_{Ci}\}, \\ \mathcal{A}_{21} &= \text{diag}\{C_1 A_1 C_1^{-1}, \dots, C_i A_i C_i^{-1}\}, \\ \mathcal{A}_{23} &= \text{diag}\{C_1 B_1 K_{C1}, \dots, C_i B_i K_{Ci}\}, \\ \mathcal{A}_{33} &= \text{diag}\{K_{A1}, \dots, K_{Ai}\}, \\ \Delta \mathcal{A}_1 &= \begin{bmatrix} \Delta \mathcal{A}_{11} & 0 & \Delta \mathcal{A}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (۱۱) \end{aligned}$$

$$\Delta \mathcal{A}_{11} = \text{diag}\{C_1 (\Delta A_1) C_1^{-1}, \dots, C_i (\Delta A_i) C_i^{-1}\}, \Delta \mathcal{A}_{13} = \text{diag}\{C_1 (\Delta B_1) K_{C1}, \dots, C_i (\Delta B_i) K_{Ci}\},$$

$$\mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & 0 \\ B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & B_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (۱۲)$$

$$\begin{aligned} B_{21} &= \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 L_1 & \dots \\ \dots & \dots \\ H_i \otimes C_i L_i & \dots \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 B_1 K_{D1} \\ \dots \\ H_i \otimes C_i B_i K_{Di} \end{bmatrix}, \\ B_{22} &= \begin{bmatrix} H_1 \otimes (C_1 B_1 K_{D1} - C_1 L_1) \\ \dots \\ H_i \otimes (C_i B_i K_{Di} - C_i L_i) \end{bmatrix}, B_{32} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes K_{B1} \\ \dots \\ H_i \otimes K_{Bi} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\Delta \mathcal{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \Delta B_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (۱۳)$$

$$\begin{aligned} \Delta B_{12} &= \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 (\Delta B_1) K_{D1} \\ \dots \\ H_i \otimes C_i (\Delta B_i) K_{Di} \end{bmatrix}, \\ \mathcal{A}_3 &= \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & C_{13} \\ 0 & C_{22} & C_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (۱۴) \end{aligned}$$

$\hat{y}_i(t)$ و $\hat{x}_i(t)$ تخمین سیگنال‌های $y_i(t)$ و $x_i(t)$ را نشان می‌دهند. نماد $v_i(t)$ بیانگر دینامیک کنترل گر است. سیگنال‌های $\sigma_i(kh)$ ، $\rho_i(kh)$ با هدف تضمین ردیابی و اجماع طراحی گردیده‌اند [۱]. نماد kh مشخص‌کننده تعداد دفعات نمونه برداری از سیگنال خروجی عامل‌ها است [۱].

$$\begin{cases} \dot{v}_i(t) = K_{Ai} v_i(t) + K_{Bi} \rho_i(kh) \\ \dot{u}_i(t) = K_{Ci} v_i(t) + K_{Di} \rho_i(kh) \end{cases} \quad (۴)$$

$$\begin{aligned} \rho_i(kh) &= \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} (\hat{y}_i(kh) - \hat{y}_j(kh)) \\ &\quad + m_i (\hat{y}_i(kh) - y_o(kh)), \\ \dot{\hat{x}}_i(t) &= A_i \hat{x}_i(t) + B_i u_i(t) + L_i \sigma_i(kh) \end{aligned} \quad (۵)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_i(t) &= C_i \hat{x}_i(t) \\ \sigma_i(kh) &= \sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} (y_i(kh) - y_j(kh)) \\ &\quad + m_i (y_i(kh) - y_o(kh)) \\ &\quad - \left(\sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} (\hat{y}_i(kh) - \hat{y}_j(kh)) \right) \\ &\quad + m_i (\hat{y}_i(kh) - y_o(kh)), \end{aligned}$$

در کنترل گر و مشاهده گر به منظور تضمین ردیابی و اجماع لازم است که اختلاف خروجی عامل‌ها و اختلاف آن‌ها با عامل مرجع مورد بررسی قرار گیرد. در تحلیل پایداری سیگنال " $e_i(t) = x_i(t) - x_0(t)$ " و " $\hat{e}_i(t) = \hat{x}_i(t) - x_0(t)$ " مورد استفاده قرار می‌گیرد و معادله ۱ با اعمال معادلات ۴ و ۵، بر اساس سیگنال‌های خطا و بردار $v^T(t)$ بازنویسی می‌شوند. بردار $\xi^T(t)$ بر اساس سیگنال‌های $e_i^T(t)$ ، $\hat{e}_i^T(t)$ و $v_i^T(t)$ نوشته شده و در تعیین دینامیک کلی سیستم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$\begin{aligned} \xi^T(t) &= [e_1^T(t) \dots e_{N_i}^T(t) \hat{e}_1^T(t) \dots \hat{e}_{N_i}^T(t) \dots v_1^T(t) \\ &\quad \dots v_{N_i}^T(t)], \\ \dot{\xi}(t) &= \mathcal{A}_1 \xi(t) + \mathcal{A}_2 \xi(t - h(t)) + \mathcal{A}_3 \theta(t) + f(\cdot), f(\cdot) \\ &= \Delta \mathcal{A}_1 \xi(t) + \Delta \mathcal{A}_2 \xi(t - h(t)) \\ &\quad + \Delta \mathcal{A}_3 \theta(t), \quad (۶) \end{aligned}$$

$$y(t) = czy_1 \xi(t) + czy_2 \theta(t) \quad (۷)$$

سیگنال $\theta(t)$ بردار اغتشاش کلی است و به صورت زیر توصیف می‌گردد. در ادامه بردار ماتریسی اغتشاش روابط ۶ و ۷ معرفی می‌گردند:

$$\theta^T(t) = [d_1^T(t) \dots d_n^T(t) d_{o1}^T(t - h(t)) \dots d_{on}^T(t - h(t)) x_o^T(t)],$$

با تعیین بردارهای $\xi^T(t)$ و $\theta^T(t)$ و استفاده از آن‌ها در سیگنال خروجی سیستم " $y(t)$ "، ماتریس‌های czy_1, czy_2 به دست می‌آیند. قبل از تعریف ماتریس‌های czy_1, czy_2 لازم است که ماتریس کرونگر بیان شود.

$$E_{A11} = \text{diag}\{C_1 E_{A1}, \dots, C_i E_{Ai}\}, E_{A13} = \text{diag}\{C_1 E_{B1}, \dots, C_i E_{Bi}\}, H_{A11} = \text{diag}\{H_{A1} C_1^{-1}, \dots, H_{Ai} C_i^{-1}\}, H_{A33} = \text{diag}\{H_{B1} K_{C1}, \dots, H_{Bi} K_{Ci}\},$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 0 & E_{B12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{B22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$E_{B12} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 E_{B1} \\ \dots \\ H_i \otimes C_i E_{Bi} \end{bmatrix}, H_{B22} = \begin{bmatrix} H_{B1} K_{D1} \\ \dots \\ H_{Bi} K_{Di} \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & E_{C13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{C22} \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$E_{C13} = \text{diag}\{C_1 E_{A1}, \dots, C_i E_{Ai}\}, H_{C22} = \begin{bmatrix} H_{A1} C_1^{-1} \\ \dots \\ H_{Ai} C_i^{-1} \end{bmatrix},$$

نظریه ۱: با در اختیار داشتن مقادیر اسکلر $0 \leq h_1 < h_2, \mu \geq 0$ و مقدار صحیح $N \geq 1$ ، سیستم (۱) با تأخیر متغیر با زمان به صورت $\hat{P} > 0, \hat{Q}_i > 0$ ، مجانبی پایدار است اگر ماتریس‌های با ابعاد مناسب $0, i = 1, 2, 3, \hat{Z}_j > 0, j = 1, 2, \varepsilon > 0$ که ماتریس‌های نابرابر خطی زیر برآورده گردند. ماتریس‌های با ابعاد مناسب $\hat{A}_1, \hat{A}_2, \hat{H}_1, \hat{H}_2, \hat{CZY}_1$ وجود دارند به گونه‌ای که:

$$\hat{A}_1 = A_1 * (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P})$$

$$\hat{H}_1 = H_1 * (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}), \hat{A}_2 = A_2 * (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P})$$

$$\hat{CZY}_1 = cZY_1 * (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}), \hat{H}_2 = H_2 * (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P})$$

که در آن‌ها، $\hat{K}_{Ci} = \hat{K}_{Bi} = K_{Bi} * \hat{P}$ ، $\hat{K}_{Ai} = K_{Ai} * \hat{P}$ و $\hat{P} = P^{-1}$ ، ماتریس‌های

ماتریس‌های $\hat{K}_{Di} = K_{Di} * \hat{P}$ ، $\hat{L}_i = L_i * \hat{P}$ ، $K_{Ci} * \hat{P}$

Γ_i^1 بهره مشاهده گر هستند. L_i بهره مشاهده گر هستند.

و Γ_i^2 نمادهایی برای تقسیم‌بندی بازه تأخیر می‌باشند. واژه متقارن در

ماتریس‌ها با نماد * بیان می‌گردد. I نمادی از ماتریس همانی است.

ماتریس \hat{A}_i^T برگردان A_i ، H_i^T برگردان H_i ، \hat{CZY}_1^T برگردان \hat{CZY}_1

است. نماد γ_2 سطح پهنه نتایج را مشخص می‌کند و در قسمت اثبات

(قضیه ۸) به آن اشاره می‌گردد.

$$C_{11} = \text{diag}\{C_1 B_{A1}, \dots, C_i B_{Ai}\}, C_{13} = \begin{bmatrix} C_1 A_1 C_1^{-1} - C_0 A_0 \\ \dots \\ C_i A_i C_i^{-1} - C_0 A_0 \end{bmatrix}$$

$$C_{22} = \begin{bmatrix} (H_1 \otimes C_1 L_1) * \text{diag}\{D_{d1}, \dots, D_{di}\} \\ \dots \\ (H_i \otimes C_i L_i) * \text{diag}\{D_{d1}, \dots, D_{di}\} \end{bmatrix}, C_{23}$$

$$= \begin{bmatrix} C_1 A_1 C_1^{-1} C_0 \\ \dots \\ C_i A_i C_i^{-1} C_0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Delta C_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta C_{13} = \begin{bmatrix} C_1 (\Delta A_1) C_1^{-1} \\ \dots \\ C_i (\Delta A_i) C_i^{-1} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

در ماتریس‌های فوق به $\Delta A_i, i = 1, \dots, N$ اشاره شده است که به‌عنوان ماتریس‌های نامعین معرفی می‌گردند. این ماتریس‌ها بر اساس ماتریس‌های نامعین $\Delta A_i, \Delta B_i, \Delta C_i$ به‌دست می‌آیند. به‌گونه‌ای که $\Delta B_i = E_{Bi} F_B(t) H_{Bi}$ ، $\Delta C_i = E_{Ci} F_C(t) H_{Ci}$ ، $\Delta A_i = E_{Ai} F_A(t) H_{Ai}$ تعریف می‌گردند. در این روابط $E_{Ai}, E_{Bi}, E_{Ci}, H_{Ai}, H_{Bi}, H_{Ci}$ ماتریس‌های ثابت و معلوم هستند. ماتریس‌های $F_A(t), F_B(t), F_C(t)$ متغیر با زمان می‌باشند. در نتیجه در روابط $\Delta A_2 = \Delta A_1 = E_1 F(t) H_1$ ، $\Delta A_3 = E_3 F(t) H_3$ و $E_2 F(t) H_2$ ماتریس‌های ثابت بر اساس ماتریس‌های ثابت و معلوم $E_1, E_2, E_3, H_1, H_2, H_3$ تعریف می‌آیند. ماتریس $F(t) = \text{diag}\{F_A(t), F_B(t), F_C(t)\}$ متغیر با زمان است و به‌صورت $F(t) = \text{diag}\{F_A(t), F_B(t), F_C(t)\}$ تعریف می‌شود. در این روابط بهره‌های کنترل گر و مشاهده گر مجهول هستند که با تحلیل نابرابری‌های ماتریسی خطی معلوم می‌گردند. در کلیه روابط ماتریس C_i معکوس‌پذیر است. در صورتی که این ماتریس مربعی نباشد از شبه‌معکوس آن استفاده می‌گردد.

$$E_1 = \begin{bmatrix} E_{A11} & 0 & E_{A13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_1 = \begin{bmatrix} H_{A11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{A33} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$\varphi_{1i}^1 = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \hat{A}_2 & \hat{Z}_1 & 0 & \varepsilon \hat{A}_1 & \mathcal{A}_3 & \hat{CZY}_1^T & \hat{H}_1 & 0 \\ * & \pi_{22} & \Gamma_i^1 \hat{Z}_2 & \Gamma_i^2 \hat{Z}_2 & \varepsilon \hat{A}_2 & 0 & 0 & 0 & \hat{H}_2 \\ * & * & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & \pi_{55} & \varepsilon \mathcal{A}_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * & -\frac{\gamma_2}{2} I & cZY_2^T & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & -I & 0 & 0 \\ \hat{H}_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & \hat{H}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (19)$$

$$\pi_{11} = \hat{A}_1 + \hat{A}_1^T + \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 + \hat{Q}_3 - \hat{Z}_1 + E_1 E_1^T + E_2 E_2^T + \frac{4}{\gamma_2} \lambda_{\max}(H_3 H_3^T) * E_3 E_3^T, \pi_{22} = -(1 - \mu) \hat{Q}_3 - \Gamma_i^1 \hat{Z}_2 - \Gamma_i^2 \hat{Z}_2, \pi_{33} = -\Gamma_i^1 \hat{Z}_2 - \hat{Q}_1 - \hat{Z}_1, \pi_{44} = -\hat{Q}_2 - \Gamma_i^2 \hat{Z}_2, \pi_{55} = \varepsilon E_1 E_1^T \varepsilon + \varepsilon E_2 E_2^T \varepsilon + h_1^2 \hat{Z}_1 + h_{12}^2 \hat{Z}_2 - 2\varepsilon (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) + \varepsilon^2 * \frac{4}{\gamma_2} \lambda_{\max}(H_3 H_3^T) * E_3 E_3^T, i = 0, 1 \dots N - 1, \hat{CZY}_1^T = (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) cZY_1^T$$

$$\varphi_{1i}^2 = \begin{bmatrix} \pi_{11} & \hat{\mathcal{A}}_2 & \hat{\mathcal{Z}}_1 & 0 & \varepsilon \hat{\mathcal{A}}_1 & \mathcal{A}_3 & \widehat{c}z y_1^T & \hat{H}_1 & 0 \\ * & \pi_{22} & \Gamma_i^2 \hat{\mathcal{Z}}_2 & \Gamma_i^1 \hat{\mathcal{Z}}_2 & \varepsilon \hat{\mathcal{A}}_2 & 0 & 0 & 0 & \hat{H}_2 \\ * & * & \pi_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & \pi_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 & \pi_{55} & \varepsilon \mathcal{A}_3 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & * & -\frac{\gamma_2}{2} I & c z y_2^T & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & * & -I & 0 & 0 \\ \hat{H}_1^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I & 0 \\ 0 & \hat{H}_2^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} I \end{bmatrix} < 0 \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \pi_{11} &= \hat{\mathcal{A}}_1 + \hat{\mathcal{A}}_1^T + \hat{Q}_1 + \hat{Q}_2 + \hat{Q}_3 - \hat{\mathcal{Z}}_1 + E_1 E_1^T + E_2 E_2^T + \frac{4}{\gamma_2} \lambda_{\max}(H_3 H_3^T) * E_3 E_3^T, \pi_{22} \\ &= -(1 - \mu) \hat{Q}_3 - \Gamma_i^2 \hat{\mathcal{Z}}_2 - \Gamma_i^1 \hat{\mathcal{Z}}_2, \pi_{33} = -\Gamma_i^2 \hat{\mathcal{Z}}_2 - \hat{Q}_1 - \hat{\mathcal{Z}}_1, \pi_{44} = -\hat{Q}_2 - \Gamma_i^1 \hat{\mathcal{Z}}_2, \pi_{55} \\ &= \varepsilon E_1 E_1^T \varepsilon + \varepsilon E_2 E_2^T \varepsilon + h_1^2 \hat{\mathcal{Z}}_1 + h_{12}^2 \hat{\mathcal{Z}}_2 - 2\varepsilon (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) + \varepsilon^2 * \frac{4}{\gamma_2} \lambda_{\max}(H_3 H_3^T) * E_3 E_3^T, i \\ &= 0, 1 \dots N - 1, \widehat{c}z y_1^T = (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) c z y_1^T, \\ \Gamma_i^1 &= \left(\frac{2N}{i+1}\right)^2 - \frac{2N}{2N-i} \times \left(\frac{2N-i-1}{i+1}\right)^2, \Gamma_i^2 = \frac{2N}{2N-i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= \xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes P) \xi(t) + \xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes P) \dot{\xi}(t) \\ &= (\xi^T(t) \mathcal{A}_1^T + \xi^T(t-h(t)) \mathcal{A}_2^T \\ &+ \theta^T(t) \mathcal{A}_3^T + f^T(\cdot)) (I_{(2N+3)} \otimes P) \xi(t) \\ &+ \xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes P) (\mathcal{A}_1 \xi(t) \\ &+ \mathcal{A}_2 \xi(t-h(t)) + \mathcal{A}_3 \theta(t) + f(\cdot)) \\ &= 2\xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes P) \mathcal{A}_1 \xi(t) \\ &+ 2\xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes P) \mathcal{A}_2 \xi(t-h(t)) \\ &+ 2\xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes P) \mathcal{A}_3 \theta(t) \\ &+ 2\xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes P) f(\cdot), \quad (25) \end{aligned}$$

با توجه به تعریف $f(\cdot)$ در رابطه ۱۳ عبارت $2\xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes P) f(\cdot)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\begin{aligned} 2\xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes P) f(\cdot) \\ = 2\xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes P) (\Delta \mathcal{A}_1 \xi(t) \\ + \Delta \mathcal{A}_2 \xi(t-h(t)) + \Delta \mathcal{A}_3 \theta(t)) \quad (26) \end{aligned}$$

قضیه ۲ [۱]. با در نظر گرفتن ماتریس‌های با ابعاد مناسب P, Q و با توجه به این که ماتریس Q مثبت معین و متقارن است، رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$(2Px, y) - (Qy, y) \leq (PQ^{-1}P^T x, x). \quad (27)$$

نتیجه رابطه فوق از تحلیل تابع مربعی زیر به دست می‌آید.

$$0 \leq (Q(y - Q^{-1}P^T x), y - Q^{-1}P^T x). \quad (28)$$

در روابط بایستی به گونه‌ای عمل کرد که پارامتر $\theta(t)$ به صورت مستقل ظاهر شود. با بهره‌گیری از قضیه فوق رابطه زیر را تعریف می‌گردد:

اثبات: توابع لیاپانوف زیر برای سیستم حلقه بسته ۶ در نظر گرفته می‌شوند. در صورتی که $P > 0, Q_i > 0, i = 1, 2, 3, Z_j > 0, j = 1, 2, \varepsilon > 0$ ماتریس‌های با ابعاد مناسب و بازه تأخیر به صورت $h_1 \leq h_2$ باشند، روابط زیر برقرار خواهند بود:

$$V_1 = \xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes P) \xi(t) \quad (21)$$

$$\begin{aligned} V_2 &= \int_{t-h_1}^t \xi^T(s) Q_1 \xi(s) ds \\ &+ \int_{t-h_2}^t \xi^T(s) Q_2 \xi(s) ds \\ &+ \int_{t-h(t)}^t \xi^T(s) Q_3 \xi(s) ds, \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \xi^T(s) Z_1 \xi(s) ds d\theta \\ &+ h_{12} \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \xi^T(s) Z_2 \xi(s) ds d\theta, \quad (23) \end{aligned}$$

تابع زیر را که حاصل صفر دارد، با نتایج مشتق توابع لیاپانوف جمع می‌گردد تا پایداری مجانبی به دست آید [۹]. ماتریس $S_1 = \varepsilon (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P})$ و $\hat{P} = P^{-1}$ در نظر گرفته شده است.

$$\begin{aligned} -2\xi^T(t) S_1 (\xi(t) - \mathcal{A}_1 \xi(t) - \mathcal{A}_2 \xi(t-h(t)) \\ - \mathcal{A}_3 \theta(t) - f(\cdot)) = 0, f(\cdot) \\ = \Delta \mathcal{A}_1 \xi(t) + \Delta \mathcal{A}_2 \xi(t-h(t)) \\ + \Delta \mathcal{A}_3 \theta(t), \quad (24) \end{aligned}$$

به منظور تعیین نابرابری‌های ماتریسی خطی از توابع لیاپانوف مشتق گرفته می‌شود.

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 = & 2\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)\mathcal{A}_1\xi(t) \\ & + 2\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)\mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) \\ & + 2\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)\mathcal{A}_3\theta(t) \\ & + \xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)E_1E_1^T(I_{(2N+3)} \\ & \otimes P)\xi(t) + \xi^T(t)H_1^T H_1\xi(t) \\ & + \xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)E_2E_2^T(I_{(2N+3)} \\ & \otimes P)\xi(t) \\ & + \xi^T(t-h(t))H_2^T H_2\xi(t-h(t)) \\ & + \frac{4}{\gamma_2}\lambda_{\max}(H_3H_3^T)\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \\ & \otimes P)E_3E_3^T(I_{(2N+3)} \otimes P)\xi(t) + \frac{\gamma_2}{4}\theta^T(t) \\ & * \theta(t), \end{aligned} \quad (34)$$

مشق \dot{V}_2, \dot{V}_3 به صورت زیر خواهند بود:

$$\begin{aligned} \dot{V}_2 = & \xi^T(t)(Q_1 + Q_2 + Q_3)\xi(t) \\ & - \xi^T(t-h_1)Q_1\xi(t-h_1) \\ & - \xi^T(t-h_2)Q_2\xi(t-h_2) \\ & - (1-\mu)\xi^T(t-h(t))Q_3\xi(t-h(t)), \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \dot{V}_3 = & h_1^2 \xi^T(t)Z_1\xi(t) \\ & - h_1 \int_{t-h_1}^t \xi^T(s)Z_1\xi(s)ds \\ & + h_{12}^2 \xi^T(t)Z_2\xi(t) \\ & - h_{12} \int_{t-h_2}^{t-h_1} \xi^T(s)Z_2\xi(s)ds, \end{aligned} \quad (36)$$

در رابطه \dot{V}_3 توابع انتگرالی ظاهر شده اند. در تحلیل آن‌ها از روابط نامعادله جنسن و نیوتن-لایب‌نیتز^۳ استفاده می‌گردد. در قضایای ۵ و ۶ به این روابط اشاره می‌شود.

قضیه ۵ (نامعادله جنسن^۴): با فرض " $0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2$ " و $0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2$ " نامعادله زیر برقرار خواهد بود:

$$\begin{aligned} & -(h_2 - h_1) \int_{t-h_2}^{t-h_1} \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \\ & \leq \begin{bmatrix} x(t-h_1) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -R & R \\ R & -R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t-h_1) \\ x(t-h_2) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (37)$$

قضیه ۶ (فرمول نیوتن-لایب‌نیتز^۳): با فرض " $0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2$ " و $0 \leq h_1 \leq h(t) \leq h_2$ " نامعادله زیر برای کاهش محافظه کاری مورد استفاده قرار می‌گیرد:

$$\begin{aligned} & -h_1 \int_{t-h_1}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds \\ & \leq - \left[\int_{t-h_1}^t \dot{x}(s)ds \right]^T R \left[\int_{t-h_1}^t \dot{x}(s)ds \right] \\ & \leq - [x(t) - x(t-h_1)]^T R [x(t) - x(t-h_1)] \end{aligned} \quad (38)$$

با استفاده از قضایای فوق روابط انتگرالی به صورت زیر تغییر می‌یابند:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{4}{\gamma_2} \xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)\Delta\mathcal{A}_3 - \sqrt{\frac{\gamma_2}{4}}\theta(t) \right)^2 \geq 0, \quad (29) \\ & 2\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)\Delta\mathcal{A}_3\theta(t) \\ & \leq \frac{4}{\gamma_2}\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \\ & \otimes P)\Delta\mathcal{A}_3(\Delta\mathcal{A}_3)^T(I_{(2N+3)} \otimes P)\xi(t) \\ & + \frac{\gamma_2}{4}\theta^2(t) \\ & = \frac{4}{\gamma_2}\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \\ & \otimes P)E_3F(t)H_3H_3^TF^T(t)E_3^T(I_{(2N+3)} \\ & \otimes P)\xi(t) + \frac{\gamma_2}{4}\theta^2(t), \\ & = \frac{4}{\gamma_2}\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \\ & \otimes P)E_3F(t)H_3H_3^TF^T(t)E_3^T(I_{(2N+3)} \\ & \otimes P)\xi(t) + \frac{\gamma_2}{4}\theta^2(t), \end{aligned} \quad (30)$$

در روابط فوق عبارت غیر خطی که از ضرب ماتریس‌های نامعین ایجاد شده‌اند، مشاهده می‌گردد. جهت خطی‌سازی و تحلیل آن‌ها از قضایای زیر استفاده می‌گردد:

قضیه ۳ (نامعادله کاوچی^۵): [۲]. برای هر ماتریس مثبت معین متقارن $a, b \in \mathbb{R}^n$ و $N \in M^{n \times n}$ خواهیم داشت:

$$\underline{a}^T b \leq a^T N a + b^T N^{-1} b. \quad (31)$$

قضیه ۴ [۲]: با فرض این که ماتریس‌های E, H ثابت باشند و برای ماتریس $F(t)$ رابطه $F^T(t)F(t) \leq I$ برقرار باشد، در این صورت برای $\varepsilon > 0$ رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$EFH + H^T F^T E^T \leq \varepsilon EE^T + \varepsilon^{-1} H^T H. \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & 2\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)f(.) \\ & = \xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)E_1E_1^T(I_{(2N+3)} \\ & \otimes P)\xi(t) + \xi^T(t)H_1^T H_1\xi(t) \\ & + \xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)E_2E_2^T(I_{(2N+3)} \\ & \otimes P)\xi(t) \\ & + \xi^T(t-h(t))H_2^T H_2\xi(t-h(t)) \\ & + \frac{4}{\gamma_2}\lambda_{\max}(H_3H_3^T)\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \\ & \otimes P)E_3E_3^T(I_{(2N+3)} \otimes P)\xi(t) + \frac{\gamma_2}{4}\theta^T(t) \\ & * \theta(t), \end{aligned} \quad (33)$$

از روابط فوق مقدار نهایی \dot{V}_1 مشخص می‌گردد.

قضیه ۷ (خطی سازی بازه تأخیر [۳]): با فرض $0 < A < B \leq 1/2$ و $\alpha(t) \in [A, B]$ ، رابطه زیر برقرار خواهد بود:

$$\frac{1}{\alpha(t)} + \frac{1}{1-\alpha(t)} \geq \frac{1}{1-\alpha(t)} \left[1 - \frac{(1-B)^2}{B^2} \right] + \frac{1}{B^2} \quad (۴۱)$$

از قضیه ۷ به منظور خطی سازی این ضرایب استفاده می شود. اثبات این مسئله در تحقیق شماره [۳] آورده شده است و از ارائه آن در این قسمت صرف نظر شده است.

نامعادله زیر با فرض این که $S_1 = \varepsilon(I_{(2N+3)} \otimes P)$ باشد، نوشته شده است. نماد S_1 معرف ماتریس وزنی و ε ضریب ماتریس وزنی است.

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & 2\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)\mathcal{A}_1\xi(t) + 2\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)\mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) + \xi^T(t)(Q_1 + Q_2 + Q_3 - Z_1)\xi(t) \\ & + 2\xi^T(t)Z_1\xi(t-h_1) - \xi^T(t-h(t))((1-\mu)Q_3 + \frac{h(t)-h_1}{h_2-h_1}Z_2 + \frac{h_2-h(t)}{h_2-h_1}Z_2)\xi(t-h(t)) \\ & - \xi^T(t-h_1)(Q_1 + Z_1 + \frac{h(t)-h_1}{h_2-h_1}Z_2)\xi(t-h_1) - \xi^T(t-h_2)(Q_2 + \frac{h_2-h(t)}{h_2-h_1}Z_2)\xi(t-h_2) \\ & + \xi^T(t)(h_1^2Z_1 + h_2^2Z_2)\xi(t) + 2\xi^T(t-h(t))(\frac{h(t)-h_1}{h_2-h_1}Z_2)\xi(t-h_1) \\ & + 2\xi^T(t-h(t))(\frac{h_2-h(t)}{h_2-h_1}Z_2)\xi(t-h_2) + 2\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)\mathcal{A}_3\theta(t) \\ & + \xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)E_1E_1^T(I_{(2N+3)} \otimes P)\xi(t) + \xi^T(t)H_1^TH_1\xi(t) \\ & + \xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)E_2E_2^T(I_{(2N+3)} \otimes P)\xi(t) + \xi^T(t-h(t))H_2^TH_2\xi(t-h(t)) \\ & + \frac{4}{\gamma_2}\lambda_{\max}(H_3H_3^T)\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)E_3E_3^T(I_{(2N+3)} \otimes P)\xi(t) + \frac{\gamma_2}{4}\|\theta(t)\|^2 \quad (۴۲) \\ -2\xi^T(t)S_1(\xi(t) - \mathcal{A}_1\xi(t) - \mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) - \mathcal{A}_3\theta(t) - f(\cdot)) \\ = & -2\xi^T(t)S_1\xi(t) + 2\xi^T(t)S_1\mathcal{A}_1\xi(t) + 2\xi^T(t)S_1\mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) + 2\xi^T(t)S_1\mathcal{A}_3\theta(t) \\ & + 2\xi^T(t)S_1f(\cdot) \\ = & -2\xi^T(t)S_1\xi(t) + 2\xi^T(t)S_1\mathcal{A}_1\xi(t) + 2\xi^T(t)S_1\mathcal{A}_2\xi(t-h(t)) + 2\xi^T(t)S_1\mathcal{A}_3\theta(t) \\ & + \xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)E_1E_1^T(I_{(2N+3)} \otimes P)\xi(t) + \xi^T(t)H_1^TH_1\xi(t) \\ & + \xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)E_2E_2^T(I_{(2N+3)} \otimes P)\xi(t) + \xi^T(t-h(t))H_2^TH_2\xi(t-h(t)) \\ & + \frac{4}{\gamma_2}\lambda_{\max}(H_3H_3^T)\xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes P)E_3E_3^T(I_{(2N+3)} \otimes P)\xi(t) + \frac{\gamma_2}{4}\|\theta(t)\|^2, \quad (۴۳) \end{aligned}$$

پس از اعمال تغییرات در ماتریس های LMI ماتریس های دینامیک سیستم نیز به صورت زیر تنظیم می گردند:

$$\hat{A}_1 = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 & \hat{A}_{13} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad (۴۴)$$

$$\begin{aligned} \hat{A}_{11} &= \text{diag}\{C_1A_1C_1^{-1}\hat{P}, \dots, C_iA_iC_i^{-1}\hat{P}\}, \\ \hat{A}_{13} &= \text{diag}\{C_1B_1\hat{K}_{C1}, \dots, C_iB_i\hat{K}_{Ci}\}, \hat{A}_{21} \\ &= \text{diag}\{C_1A_1C_1^{-1}\hat{P}, \dots, C_iA_iC_i^{-1}\hat{P}\}, \hat{A}_{22} = 0, \\ \hat{A}_{23} &= \text{diag}\{C_1B_1\hat{K}_{C1}, \dots, C_iB_i\hat{K}_{Ci}\}, \hat{A}_{33} \\ &= \text{diag}\{\hat{K}_{A1}, \dots, \hat{K}_{Ai}\}, \hat{K}_{Ai} = K_{Ai} * \hat{P}, \hat{K}_{Ci} \\ &= K_{Ci} * \hat{P}, i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -h_1 \int_{t-h_1}^t \xi^T(s)Z_1\xi(s)ds &\leq -(\xi(t) - \xi(t-h_1))^T Z_1 (\xi(t) - \xi(t-h_1)), \quad (۳۹) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -h_{12} \int_{t-h_2}^{t-h_1} \xi^T(s)Z_2\xi(s)ds &\leq -\frac{h_{12}}{h_2-h(t)}\pi_1 \\ &\quad - \frac{h_{12}}{h(t)-h_1}\pi_2, \quad (۴۰) \end{aligned}$$

$$\pi_1 = (\xi(t-h(t)) - \xi(t-h_2))^T Z_2 (\xi(t-h(t)) - \xi(t-h_2))$$

$$\pi_2 = (\xi(t-h_1) - \xi(t-h(t)))^T Z_2 (\xi(t-h_1) - \xi(t-h(t)))$$

در رابطه فوق ضرایب غیر خطی $\frac{h_{12}}{h(t)-h_1}$ و $\frac{h_{12}}{h_2-h(t)}$ ظاهر شده اند.

رابطه کلی مشتق لیاپانوف از مجموع رابطه ۴۳ و \dot{V} به دست می آید. برای تحلیل بهتر نابرابری های ماتریسی خطی از رابطه $\xi^T(t) = \xi^T(t)(I_{(2N+3)} \otimes \hat{P})$ در مشتق روابط لیاپانوف و رابطه ۲۱ استفاده می گردد. بردار $\xi^T(t)$ از ابعاد یکسان با بردار $\xi^T(t)$ برخوردار است. متغیرهای تعریف شده در نابرابری های ماتریسی خطی ۱۹ و ۲۰ به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \hat{P} &= P^{-1} > 0, \hat{Q}_i = (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P})Q_i(I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) \\ &> 0 \quad (i = 1, 2, 3), \hat{Z}_j \\ &= (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P})Z_j(I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) \\ &> 0 \quad (j = 1, 2), \hat{S}_1 \\ &= \varepsilon(I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}), i = 1, 2, 3 \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

با به کارگیری قضیه ۸ و شرایط مقاوم سازی که در زیر آورده شده اند، نابرابری های ماتریسی خطی ۱۹ و ۲۰ به دست می آیند:

$$\dot{v} \leq \psi^T(t) \phi \psi(t) + \frac{\gamma_2}{2} \|\theta(t)\|^2, \quad \phi(\varphi_i^1 \& \varphi_i^2) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (49)$$

به منظور تکمیل اثبات نظریه ۱، از شرط بهینه سازی در این تحقیق استفاده می شود. با فرض این که سیگنال $Z(t)$ خروجی اندازه گیری شده باشد، روابط زیر برای مقاوم سازی سیستم نسبت به اغتشاشات و نامعینی های وارد شده به سیستم ارائه می گردند:

$$\int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \gamma_2 \|\theta(t)\|^2] dt = \int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \gamma_2 \|\theta(t)\|^2 + \dot{V}(t, x_t)] dt - \int_0^s \dot{V}(t, x_t) dt, \quad \forall s \geq 0, \quad (50)$$

$$- \int_0^s \dot{V}(t, x_t) dt = -V(s, x_s) + V(0, x_0), \quad (51)$$

با توجه به مثبت بودن تابع لیاپانوف رابطه $-V(s, x_s) + V(0, x_0) \leq V(0, x_0)$ نتیجه گیری خواهد شد.

$$\int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \gamma_2 \|\theta(t)\|^2] dt = \int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \gamma_2 \|\theta(t)\|^2 + \dot{V}(t, x_t)] dt + V(0, x_0), \quad (52)$$

$$\int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \gamma_2 \|\theta(t)\|^2] dt \leq V(0, x_0), \quad \dot{V} \leq 0, \quad (53)$$

$$\begin{aligned} & \|Z(t)\|^2 \\ &= \xi^T(t) C_{Zy1}^T C_{Zy1} \xi(t) + 2\xi^T(t) C_{Zy1}^T C_{Zy2} \theta(t) \\ &+ \theta^T(t) C_{Zy2}^T C_{Zy2} \theta(t) \\ &= \xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) C_{Zy1}^T C_{Zy1} (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) \xi(t) \\ &+ 2\xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) C_{Zy1}^T C_{Zy2} \theta(t) \\ &+ \theta^T(t) C_{Zy2}^T C_{Zy2} \theta(t), \end{aligned} \quad (54)$$

به منظور مقاوم سازی سیستم بایستی خروجی مشاهده شده در اختیار داشته باشد. ماتریس ثابت C_z با شرط تضمین اجماع و بهینه سازی پاسخ خروجی انتخاب می گردد.

$$Z_i(t) = C_z \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i(t) - y_j(t)) + m_i (y_i(t) - y_o(t)) - \sum_{j=1}^n w_{ij} (\hat{y}_i(t) - \hat{y}_j(t)) + m_i (\hat{y}_i(t) - y_o(t)) \right), \quad (55)$$

$$\hat{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{B}_{12} & 0 \\ \hat{B}_{21} & \hat{B}_{22} & 0 \\ 0 & \hat{B}_{32} & 0 \end{bmatrix}, \quad (45)$$

$$\hat{B}_{21} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 \hat{L}_1 \\ H_i \otimes C_i \hat{L}_i \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{12} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 B_1 \hat{K}_{D1} \\ \dots \\ H_i \otimes C_i B_i \hat{K}_{Di} \end{bmatrix},$$

$$\hat{B}_{22} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes (C_1 B_1 \hat{K}_{D1} - C_1 \hat{L}_1) \\ \dots \\ H_i \otimes (C_i B_i \hat{K}_{Di} - C_i \hat{L}_i) \end{bmatrix}, \quad \hat{B}_{32} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes \hat{K}_{B1} \\ \dots \\ H_i \otimes \hat{K}_{Bi} \end{bmatrix}, \quad \hat{K}_{Bi}$$

$$= K_{Bi} * \hat{P}, \quad \hat{K}_{Di} = K_{Di} * \hat{P}, \quad \hat{L}_i = L_i * \hat{P}$$

$$\hat{H}_1 = \begin{bmatrix} \hat{H}_{A11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{H}_{A33} \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$\hat{H}_{A11} = \text{diag}\{H_{A1} C_1^{-1} \hat{P}, \dots, H_{Ai} C_i^{-1} \hat{P}\},$$

$$\hat{H}_{A33} = \text{diag}\{H_{B1} \hat{K}_{C1}, \dots, H_{Bi} \hat{K}_{Ci}\}$$

$$\hat{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{H}_{B22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{H}_{B22} = \begin{bmatrix} H_{B1} \hat{K}_{D1} \\ \dots \\ H_{Bi} \hat{K}_{Di} \end{bmatrix},$$

نابرابری های ماتریسی خطی و روابط لیاپانوف بر اساس بردار $\psi^T(t)$ نوشته می شوند.

$$\psi^T(t) = \begin{bmatrix} \xi^T(t) & \xi^T(t-h(t)) & \xi^T(t-h_1) & \xi^T(t-h_2) \\ \xi^T(t) & \xi^T(t) & \theta^T(t) & \theta^T(t) \end{bmatrix} \quad (47)$$

قضیه ۸ [۱]. با فرض این که $\gamma_2 > 0$ و ثابت باشد، کنترل H_∞ سیستم ۱ قابل تحلیل است در صورتی که یک کنترل گر دینامیکی خروجی به سیستم اعمال گردد و بتواند نیازهای زیر را برآورده سازد:

i. پاسخ سیستم حلقه بسته با ابعاد $(A_i + \Delta A_i) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ و $d(t) = (B_i + \Delta B_i) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ باشد؛ پایدار گردد.

ii. به ازای شرایطی که اغتشاش $d(t) \neq 0$ باشد و $d(t) \in L_2([0, \infty], \mathbb{R}^r)$ و اغتشاش به صورت $\theta^T(t) = [x_o^T(t) \quad d^T(t)]$ در نظر گرفته شود، رابطه بهینه مقاوم که در ادامه آورده شده است، برقرار خواهد بود. $C^1([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ نمادی از مجموعه توابع n بعدی است که در محدوده $[-\tau, 0]$ مشتق پذیر هستند. $L_2([0, \infty], \mathbb{R}^n)$ نماد مجموعه ای از توابع r بعدی است که در بازه $[0, \infty]$ مربعی و انتگرال پذیر باشند. نماد \mathbb{R}^n بیانگر فضای n بعدی نتایج اسکالر (،.) و بردار نرم $\|\cdot\|$ است. سیگنال $Z(t)$ خروجی اندازه گیری شده و $v(0, x_0)$ رابطه لیاپانوف در لحظه صفر می باشد.

$$\frac{\int_0^s \|z(t)\|^2 dt}{\int_0^s \|\theta(t)\|^2 dt + \frac{1}{\gamma_2} v(0, x_0)} \leq \gamma_2, \quad (48)$$

$$\int_0^s \|Z(t)\|^2 dt \leq \int_0^s \frac{\gamma_2}{2} \|\theta(t)\|^2 dt + V(0, x_0) \\ = \frac{\gamma_2}{2} \left(\int_0^s \|\theta(t)\|^2 dt + \frac{2}{\gamma_2} V(0, x_0) \right), \\ \frac{\int_0^s \|Z(t)\|^2 dt}{\int_0^s \|\theta(t)\|^2 dt + \frac{2}{\gamma_2} V(0, x_0)} \leq \frac{\gamma_2}{2}, \quad (61)$$

رابطه ۶۱ تضمین شرایط مقاوم سازی سیستم را نشان می دهد. برای به دست آوردن نابرابری های ماتریسی خطی در نظریه ۱ از روش مکمل شور کمک گرفته می شود. روش فوق در قضیه زیر بیان می گردد: قضیه ۹ (روش مکمل شور^(۹)) [۱]. با داشتن ماتریس های ثابت x, y, z و برقراری $y = y^T$ نامعادله زیر برقرار خواهد بود:

$$x + z^T y^{-1} z < 0 \text{ if } \begin{bmatrix} x & z^T \\ z & -y \end{bmatrix} < 0. \quad (62)$$

با استفاده از قضیه فوق و شرایط مقاوم سازی ارائه شده در رابطه ۵۵ نظریه ۱ اثبات می گردد.

توضیحات: از آن جا که اطلاعات عامل های سیستم تحت شبکه انتقال می یابند و دستیابی هم زمان عامل ها به اطلاعات ضروری است نمونه برداری خروجی از اطلاعات کنترل گر و مشاهده گر لازم به نظر می رسد. از آن جا که تأخیر یکی از مسائل انکارناپذیر در انتقال اطلاعات میان عامل ها تحت شبکه است، لزوم نمونه برداری از اطلاعات مشاهده گر مانند طراحی به کار برده شده برای کنترل گر [۱] ضروری است. در صورت نمونه برداری از اطلاعات، تأخیر مصنوعی $h(t) = t - kh$ در روابط کنترل گر و مشاهده گر به کار برده می شود. اگر در مشاهده گر از اطلاعات نمونه برداری شده استفاده نشود، نتایج شبیه سازی از سرعت بالاتر برخوردار خواهند بود و در نتایج ردیابی نوسانات کمتر مشاهده می شود. در این شرایط از رابطه ۴ برای کنترل گر و روابط ۶۳ و ۶۴ برای مشاهده گر استفاده شده و ماتریس های دینامیک سیستم به صورت زیر تغییر خواهند کرد:

$$\hat{x}_i(t) = A_i \hat{x}_i(t) + B_i u_i(t) \\ + L_i \left(\sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} (y_i(t) - y_j(t)) \right) \\ + m_i (y_i(t) - y_0(t)) \\ - \left(\sum_{j \in N_i} \alpha_{ij} (\hat{y}_i(t) - \hat{y}_j(t)) \right) \\ + m_i (\hat{y}_i(t) - y_0(t)) \quad (63)$$

$$\hat{y}_i(t) = C_i \hat{x}_i(t) \quad (64)$$

$$\xi^T(t) = [e_1^T(t) \dots e_{N_i}^T(t) \hat{e}_1^T(t) \dots \hat{e}_{N_i}^T(t) v_1^T(t) \dots v_{N_i}^T(t)], \quad (65)$$

$$\dot{\xi}^T(t) = \mathcal{A} \xi(t) + \mathcal{B} \xi(t - h(t)) + \mathcal{C} \theta(t) + f(\cdot), \quad (66)$$

$$f(t) = \Delta \mathcal{A} \xi(t) + \Delta \mathcal{B} \xi(t - h(t)) + \Delta \mathcal{C} \theta(t),$$

$$\theta^T(t) = [d_1^T(t) \dots d_N^T(t) x_0^T(t)],$$

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_{11} & 0 & \mathcal{A}_{13} \\ \mathcal{A}_{21} & \mathcal{A}_{22} & \mathcal{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathcal{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad (67)$$

سیگنال خطا به صورت زیر در نظر گرفته می شود و در معادله ۲۸ اعمال می گردد:

$$e_i(t) = C_i x_i(t) - C_0 x_0(t), \hat{e}_i(t) = C_i \hat{x}_i(t) - C_0 x_0(t),$$

در نتیجه استفاده از سیگنال خطا، رابطه خروجی به صورت زیر تعریف می گردد:

$$Z_i(t) = C_Z \left(\sum_{j=1}^n w_{ij} (e_i(t) - e_j(t) + D_{di} d_i(t) - D_{dj} d_j(t)) \right) \\ + m_i (e_i(t) + D_{di} d_i(t)) \\ - \sum_{j=1}^n w_{ij} (\hat{e}_i(t) - \hat{e}_j(t)) \\ + m_i \hat{e}_i(t), \quad (56)$$

سیگنال های C_{Zy2} و C_{Zy1} از روی معادله ۵۶ و با توجه به سیگنال $\theta(t)$ تعیین می گردند.

$$czy1 = [H \otimes C_Z \quad -H \otimes C_Z \quad 0], \quad (57)$$

$$czy2 = (I_N \otimes C_Z) * \begin{bmatrix} H_1 * \text{diag}\{D_{d1}, \dots, D_{di}\} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ H_i * \text{diag}\{D_{d1}, \dots, D_{di}\} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

از آن جا که ماتریس $\varphi < 0$ است، رابطه ۵۲ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\dot{V} \leq \frac{\gamma_2}{2} \|\theta(t)\|^2, \varphi(\varphi_i^1 \& \varphi_i^2) < 0, i = 1, 2, \dots, n, \quad (59)$$

با تلفیق روابط ۵۴-۵۸ شرایط مقاوم سازی سیستم به دست می آید.

$$\dot{V} \leq \xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) C_{Zy1}^T C_{Zy1} (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) \xi(t) \\ + 2 \xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) C_{Zy1}^T \\ + \theta^T(t) C_{Zy2}^T C_{Zy2} \theta(t) + \frac{\gamma_2}{2} \|\theta(t)\|^2, \\ \int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \gamma_2 \|\theta(t)\|^2] dt \\ = \int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \gamma_2 \|\theta(t)\|^2 \\ + \dot{v}(t, x_t)] dt + V(0, x_0) \\ \leq \xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) C_{Zy1}^T C_{Zy1} (I_{(2N+3)} \\ \otimes \hat{P}) \xi(t) + 2 \xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) C_{Zy1}^T \\ + \theta^T(t) C_{Zy2}^T C_{Zy2} \theta(t) + \frac{\gamma_2}{2} \|\theta(t)\|^2 \\ - \gamma_2 \|\theta(t)\|^2 \\ - \xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) C_{Zy1}^T C_{Zy1} (I_{(2N+3)} \\ \otimes \hat{P}) \xi(t) - 2 \xi^T(t) (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P}) C_{Zy1}^T \\ - \theta^T(t) C_{Zy2}^T C_{Zy2} \theta(t) + V(0, x_0), \quad (60)$$

$$\int_0^s [\|Z(t)\|^2 - \frac{\gamma_2}{2} \|\theta(t)\|^2] dt \leq V(0, x_0),$$

$$E_B = \begin{bmatrix} 0 & E_{B12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & H_{B22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (۷۴)$$

$$E_{B12} = E_{B12} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 E_{B1} \\ \dots \\ H_i \otimes C_i E_{Bi} \end{bmatrix}, H_{B22} = \text{diag}\{H_{B1}K_{D1}, \dots, H_{Bi}K_{Di}\},$$

$$E_C = \begin{bmatrix} 0 & E_{C12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & H_{C22} \end{bmatrix}, \quad (۷۵)$$

$$E_{C12} = E_{C12} = \text{diag}\{C_1 E_{A1}, \dots, C_i E_{Ai}\}, H_{C22} = \begin{bmatrix} H_{A1}C_1^{-1} \\ \dots \\ H_{Ai}C_i^{-1} \end{bmatrix},$$

$$czy1 = [H \otimes C_Z \quad -H \otimes C_Z \quad 0], \quad (۷۶)$$

$$czy2 = (I_N \otimes C_Z) * \begin{bmatrix} H_1 * \text{diag}\{D_{d1}, \dots, D_{di}\} & 0 \\ \dots & \dots \\ H_i * \text{diag}\{D_{d1}, \dots, D_{di}\} & 0 \end{bmatrix}, \quad (۷۷)$$

در روابط $czy1, czy2$ ماتریس H گراف ارتباطی عامل‌ها، بردار H_1 سطر اول ماتریس H و بردار H_i سطر i ام ماتریس H را نشان می‌دهند. بردار $\psi^T(t)$ و نظریه استفاده شده در روش قبل نیز در این مورد استفاده می‌شوند. بعد از اعمال $\xi(t) = (I_{(2N+3)} \otimes \hat{P})\xi(t)$ در تعیین بهره‌های کنترل گر، ماتریس‌های سیستم به صورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_{11} & 0 & \hat{A}_{13} \\ \hat{A}_{21} & \hat{A}_{22} & \hat{A}_{23} \\ 0 & 0 & \hat{A}_{33} \end{bmatrix}, \quad (۷۸)$$

$$\hat{A}_{11} = \text{diag}\{C_1 A_1 C_1^{-1} \hat{P}, \dots, C_i A_i C_i^{-1} \hat{P}\},$$

$$\hat{A}_{13} = \text{diag}\{C_1 B_1 \hat{K}_{C1}, \dots, C_i B_i \hat{K}_{Ci}\}, \hat{A}_{21} = \text{diag}\{C_1 A_1 C_1^{-1} \hat{P}, \dots, C_i A_i C_i^{-1} \hat{P}\}$$

$$+ \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 \hat{L}_1 \\ \dots \\ H_i \otimes C_i \hat{L}_i \end{bmatrix},$$

$$\hat{A}_{33} = \text{diag}\{\hat{K}_{A1}, \dots, \hat{K}_{Ai}\}, \hat{K}_{Ai} = K_{Ai} * \hat{P}, \hat{K}_{Ci} = K_{Ci} * \hat{P}, \hat{L}_i = L_i * \hat{P}, i = 1, \dots, N$$

$$\hat{A}_{22} = - \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 \hat{L}_1 \\ \dots \\ H_i \otimes C_i \hat{L}_i \end{bmatrix}, \hat{A}_{23} = \text{diag}\{C_1 B_1 \hat{K}_{C1}, \dots, C_i B_i \hat{K}_{Ci}\},$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{B}_{12} & 0 \\ 0 & \hat{B}_{22} & 0 \\ 0 & \hat{B}_{32} & 0 \end{bmatrix}, \hat{B}_{12} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 B_1 \hat{K}_{D1} \\ \dots \\ H_i \otimes C_i B_i \hat{K}_{Di} \end{bmatrix}, \quad (۷۹)$$

$$\hat{B}_{22} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 B_1 \hat{K}_{D1} \\ \dots \\ H_i \otimes C_i B_i \hat{K}_{Di} \end{bmatrix}, \hat{B}_{32} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes \hat{K}_{B1} \\ \dots \\ H_i \otimes \hat{K}_{Bi} \end{bmatrix}, \hat{K}_{Di} = K_{Di} * \hat{P}, \hat{K}_{Bi} = K_{Bi} * \hat{P}, i = 1, \dots, N$$

$$\hat{H}_A = \begin{bmatrix} \hat{H}_{A11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{H}_{A33} \end{bmatrix}, \quad (۸۰)$$

$$\hat{H}_{A11} = \text{diag}\{H_{A1}C_1^{-1} \hat{P}, \dots, H_{Ai}C_i^{-1} \hat{P}\}, \hat{H}_{A33} = \text{diag}\{H_{B1} \hat{K}_{C1}, \dots, H_{Bi} \hat{K}_{Ci}\},$$

$$\hat{H}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{H}_{B22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \hat{H}_{B22} = \begin{bmatrix} H_{B1} \hat{K}_{D1} \\ \dots \\ H_{Bi} \hat{K}_{Di} \end{bmatrix}, \quad (۸۱)$$

$$\mathcal{A}_{11} = \text{diag}\{C_1 A_1 C_1^{-1}, \dots, C_i A_i C_i^{-1}\}, \mathcal{A}_{13} = \text{diag}\{C_1 B_1 K_{C1}, \dots, C_i B_i K_{Ci}\},$$

$$\mathcal{A}_{21} = \text{diag}\{C_1 A_1 C_1^{-1}, \dots, C_i A_i C_i^{-1}\} + \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 L_1 \\ \dots \\ H_i \otimes C_i L_i \end{bmatrix}, \mathcal{A}_{22} = - \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 L_1 \\ \dots \\ H_i \otimes C_i L_i \end{bmatrix}, \mathcal{A}_{23} = \text{diag}\{C_1 B_1 K_{C1}, \dots, C_i B_i K_{Ci}\}, \mathcal{A}_{33} = \text{diag}\{K_{A1}, \dots, K_{Ai}\},$$

$$\Delta \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \Delta \mathcal{A}_{11} & 0 & \Delta \mathcal{A}_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (۶۸)$$

$$\Delta \mathcal{A}_{11} = \text{diag}\{C_1 (\Delta A_1) C_1^{-1}, \dots, C_i (\Delta A_i) C_i^{-1}\}, \Delta \mathcal{A}_{13} = \text{diag}\{C_1 (\Delta B_1) K_{C1}, \dots, C_i (\Delta B_i) K_{Ci}\},$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & B_{12} & 0 \\ 0 & B_{22} & 0 \\ 0 & B_{32} & 0 \end{bmatrix}, B_{12} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 B_1 K_{D1} \\ \dots \\ H_i \otimes C_i B_i K_{Di} \end{bmatrix}, \quad (۶۹)$$

$$B_{22} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 B_1 K_{D1} \\ \dots \\ H_i \otimes C_i B_i K_{Di} \end{bmatrix}, B_{32} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes K_{B1} \\ \dots \\ H_i \otimes K_{Bi} \end{bmatrix},$$

$$\Delta B = \begin{bmatrix} 0 & \Delta B_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta B_{12} = \begin{bmatrix} H_1 \otimes C_1 (\Delta B_1) K_{D1} \\ \dots \\ H_i \otimes C_i (\Delta B_i) K_{Di} \end{bmatrix}, \quad (۷۰)$$

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{11} = \text{diag}\{C_1 B_{d1}, \dots, C_i B_{di}\}, \quad (۷۱)$$

$$C_{12} = \begin{bmatrix} C_1 A_1 C_1^{-1} - C_0 A_0 \\ \dots \\ C_i A_i C_i^{-1} - C_0 A_0 \end{bmatrix}, C_{21} = \begin{bmatrix} (H_1 \otimes C_1 L_1) * \text{diag}\{D_{d1}, \dots, D_{di}\} \\ \dots \\ (H_i \otimes C_i L_i) * \text{diag}\{D_{d1}, \dots, D_{di}\} \end{bmatrix},$$

نماد " $H_1 \sim H_i$ " نشان دهنده سطرهای اول تا i گراف ارتباطی عامل‌ها هستند.

$$C_{22} = \begin{bmatrix} C_1 A_1 C_1^{-1} C_0 \\ \dots \\ C_i A_i C_i^{-1} C_0 \end{bmatrix},$$

$$\Delta C = \begin{bmatrix} 0 & \Delta C_{12} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \Delta C_{12} = \begin{bmatrix} C_1 (\Delta A_1) C_1^{-1} \\ \dots \\ C_i (\Delta A_i) C_i^{-1} \end{bmatrix}, \quad (۷۲)$$

ماتریس‌های $\Delta \mathcal{A}, \Delta B, \Delta C$ را می‌توان به قسمت‌های معین و نامعین تقسیم‌بندی نمود. به همین منظور $\Delta \mathcal{A} = E_A F(t) H_A$ و $\Delta B = E_B F(t) H_B$ و $\Delta C = E_C F(t) H_C$ در نظر گرفته می‌شوند. به گونه ای که $E_A, E_B, E_C, H_A, H_B, H_C$ ماتریس‌های ثابت و $F(t)$ متغیر با زمان است. در روابط زیر ماتریس‌های $E_{Ai}, E_{Bi}, E_{Ci}, H_{Ai}, H_{Bi}, H_{Ci}$ ثابت هستند:

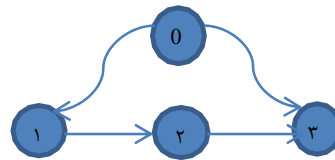
$$E_A = \begin{bmatrix} E_{A11} & 0 & E_{A13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, H_A = \begin{bmatrix} H_{A11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{A33} \end{bmatrix}, \quad (۷۳)$$

$$E_{A11} = E_{A11} = \text{diag}\{C_1 E_{A1}, \dots, C_i E_{Ai}\}, E_{A13} = \text{diag}\{C_1 E_{B1}, \dots, C_i E_{Bi}\}, H_{A11} = \text{diag}\{H_{A1} C_1^{-1}, \dots, H_{Ai} C_i^{-1}\}, H_{A33} = \text{diag}\{H_{B1} K_{C1}, \dots, H_{Bi} K_{Ci}\},$$

۴- شبیه سازی

در این قسمت، مثال عددی برای مشاهده گر مقاوم در کنار کنترل گر ارائه شده در تضمین ردیابی عامل مرجع و سرعت اجماع آورده شده است.

مثال ۱: سیستم زیر با ۳ عامل و یک عامل مرجع در نظر گرفته می شود. گراف ارتباطی میان عامل ها به صورت مستقیم است. شکل زیر نحوه ارتباط میان آن ها را نمایش می دهد:



شکل ۳: گراف ارتباطی میان عامل های غیر متمرکز [۱]

از آن جا که عامل ها به صورت ناهماهنگ هستند هر کدام با دینامیک متفاوتی توصیف می گردند. ماتریس H که بیان گر گراف ارتباطی بین عامل ها و عامل مرجع است و به عنوان ماتریس لاپلاس شناخته می شود، به صورت زیر آورده شده است [۱]:

$$H = \begin{bmatrix} 1.049 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1.049 \end{bmatrix}$$

با استفاده از رابطه ۱ دینامیک عامل ها به صورت چندوردی- چندخروجی (MIMO) در نظر گرفته شده اند و به همراه ماتریس های نامعینی و اغتشاش به صورت زیر معرفی می گردند [۹] و [۱۴]:

$$\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -1.3 & 0.3 \\ -0.5 & 0.1 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.6 \\ -0.5 & 0.3 \end{bmatrix}, C_1 \\ &= \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 \\ 0.2 & -0.3 \end{bmatrix}, \\ A_2 &= \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \\ A_3 &= \begin{bmatrix} -1.6 & -1.5 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0.2 \\ -0.1 & 0 \end{bmatrix}, \\ C_3 &= \begin{bmatrix} 0.5 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, C_z = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}, \\ A_o &= \begin{bmatrix} -0.5 & 1 \\ 0.2 & -1.4 \end{bmatrix}, C_o = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (۸۲)$$

سیگنال $F(t)$ به عنوان یک تابع نامعین و متغیر با زمان به صورت زیر در نظر گرفته شده است [۹]. با در اختیار داشتن ماتریس های $E_{ai}, H_{ai}, E_{bi}, H_{bi}$ سیگنال $F(t)$ به گونه ای انتخاب می گردد که $\sup Norm[E_{bi}F(t)H_{bi}] \leq 10\%A$ و $\sup Norm[E_{ai}F(t)H_{ai}] \leq 10\%A$ باشد. ماتریس های A, B از $"A + \Delta A = A + E_a F(t)H_a"$ و $"B + \Delta B = B + E_b F(t)H_b"$ در نظر گرفته شده اند.

$$F(t) = 2 + 1.7 * \sin^2(t), \quad (۸۳)$$

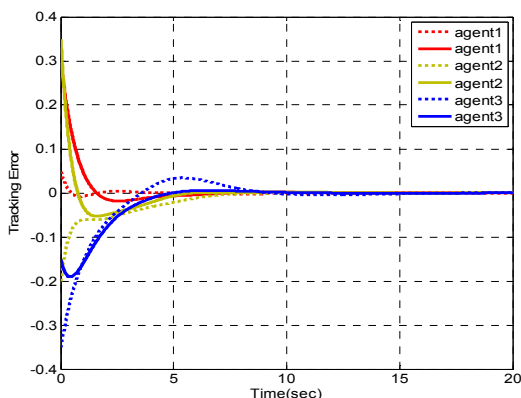
سیگنال های $d_{oi}(t), i = 1, \dots, n$ به عنوان سیگنال های اغتشاش در خروجی به صورت نویز سفید با توان 0.005 با پهنای باند محدود و طول بردار برابر ۲ اعمال شده اند [۱۳]. سیگنال های اغتشاش $d_i(t), i = 1, \dots, n$ به گونه ای انتخاب می گردند که فرکانسی برابر فرکانس کنترل گر و بهره آن ها کمتر از بهره کنترل گر باشد. ماتریس های نامعینی و اغتشاش نیز به صورت زیر اعمال می گردند [۹] و [۱۴]:

$$\begin{aligned} d_{oi}(t) &= [0.1 \sin(8t) \quad (0.3/t) \sin(8t)]^T, i = 1, \dots, n \\ E_{ai} &= \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{bmatrix}, E_{bi} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, b_{ai} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ H_{ai} &= \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & -0.3 \end{bmatrix}, H_{bi} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, d_{d1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ d_{d2} &= \begin{bmatrix} 0.15 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, d_{d3} \\ &= \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (۸۴)$$

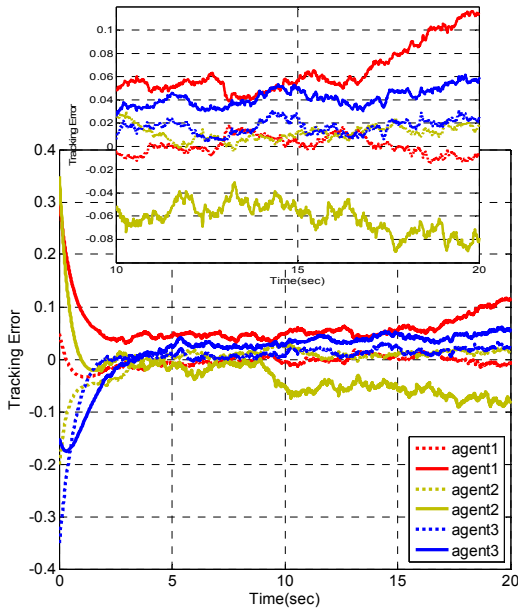
با استفاده از نرم افزار Yalmip که به سادگی در محیط Matlab قابل اجرا است و تعیین پارامترهای $\mu = 1, \varepsilon = 1, h_1 = 0.1, h_2 = 1$ بهره های کنترل گر و مشاهده گر تعیین می گردند. در بخش ضمایم به بهره ها اشاره شده است. مقادیر اولیه در نظر گرفته شده برای حالات سیستم، حالات کنترل گر و مشاهده گر به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} \emptyset(t) &= [0.05 \quad 0.3 \quad -0.2 \quad 0.35 \quad 0 \quad -0.15 \quad -0.25 \quad 0.25 \\ &\quad -0.15 \quad 0.45 \quad 0.15 \quad -0.3]^T \end{aligned} \quad (۸۵)$$

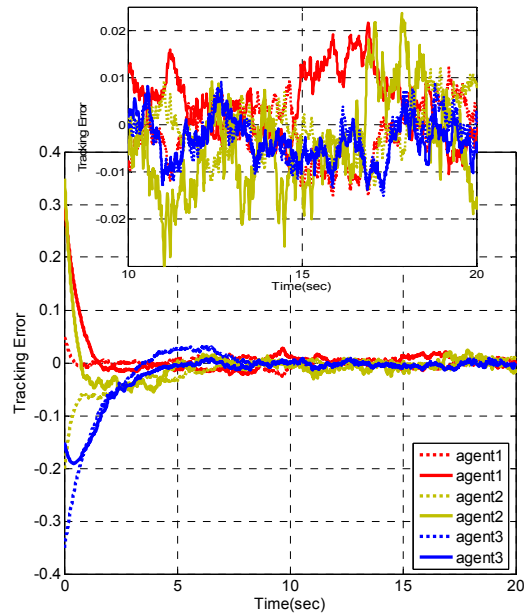
شکل های زیر پاسخ مقاوم خطای خروجی به منظور ردیابی عامل مرجع در شرایط نمونه برداری از سیگنال های خروجی در مشاهده گر نمایش داده می شود:



شکل ۴: سیگنال خطا در شرایط حذف اثر اغتشاش در خروجی با بیشینه تأخیر برابر $h_2 = 1$ ثانیه

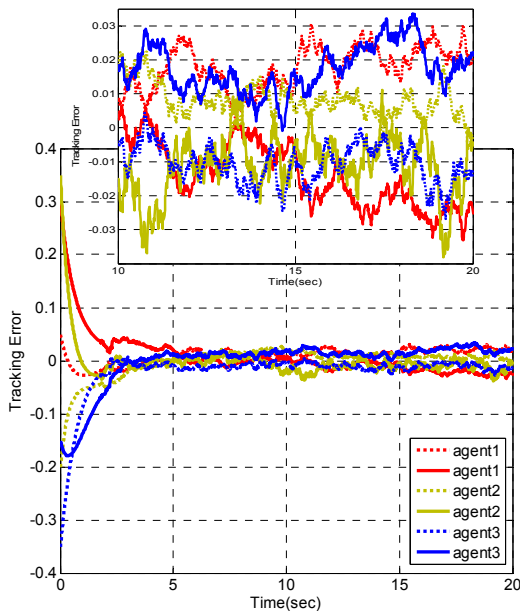


شکل ۷: سیگنال خطا با بیشینه تأخیر $h_2 = 2/5$ ثانیه و زمان شروع اغتشاش از ۲ ثانیه و تقسیم‌بندی بازه تأخیر به ۲ قسمت

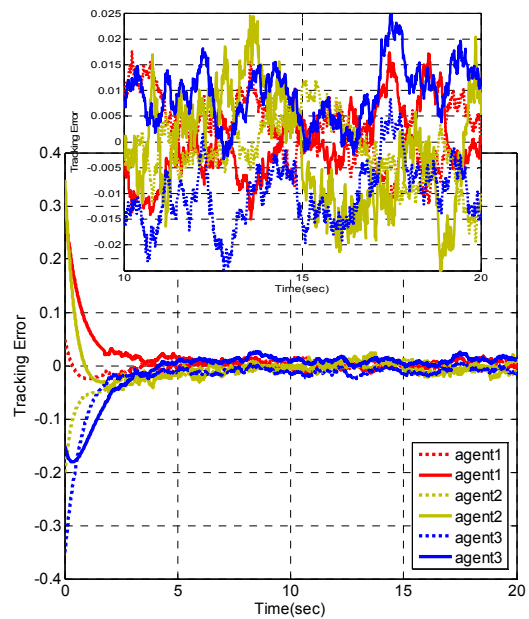


شکل ۵: سیگنال خطا با بیشینه تأخیر $h_2 = 1$ ثانیه و زمان شروع اغتشاش از ۲ ثانیه و مشتق تأخیر برابر $m_u = 0$ و $\epsilon = 1$

در ادامه با تغییرات پارامترهای طراحی، نتایج نمونه‌برداری از سیگنال خروجی در مشاهده‌گر مورد بررسی قرار می‌گیرد.



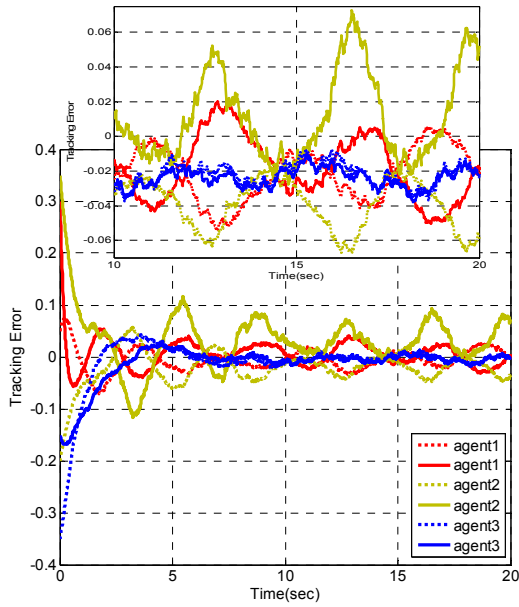
شکل ۸: سیگنال خطا با بیشینه تأخیر $h_2 = 2/5$ ثانیه و زمان شروع اغتشاش از ۲ ثانیه و تقسیم‌بندی بازه تأخیر به ۴ قسمت



شکل ۶: سیگنال خطا با بیشینه تأخیر $h_2 = 2/2$ ثانیه و زمان شروع اغتشاش از ۲ ثانیه

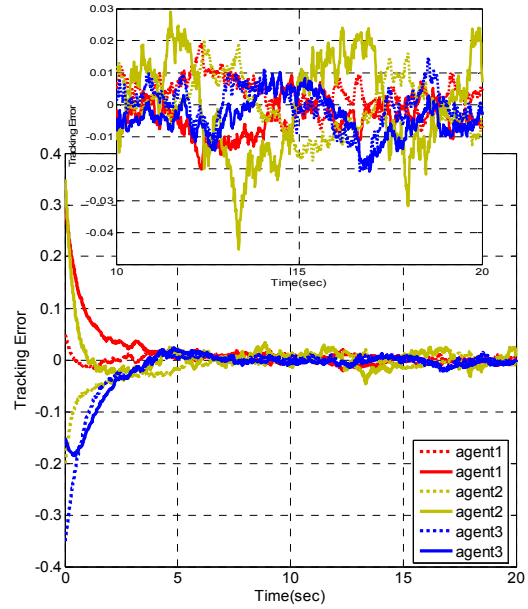
در شکل‌های ۹ و ۱۰ میزان همگرایی و سرعت اجماع برای بیشینه تأخیر ۱ ثانیه با تغییر مشتق تأخیر m_u و پارامتر طراحی ϵ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در شکل‌های ۷ و ۸ نتیجه تحمل بیشینه تأخیر با تعداد تقسیم‌بندی بازه تأخیر مورد بررسی قرار می‌گیرد.



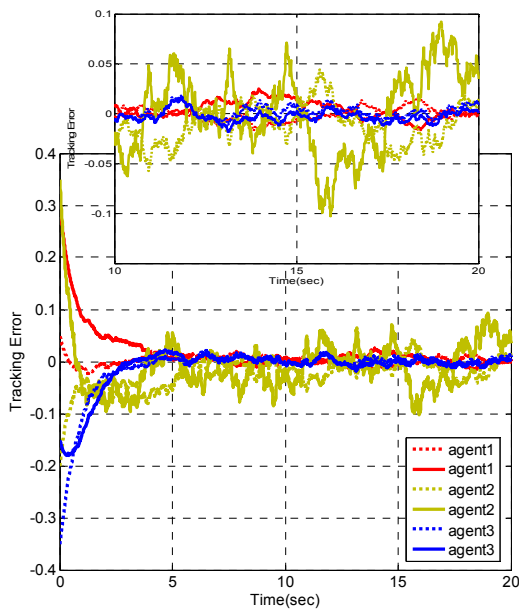
شکل ۱۱: سیگنال خطا با سه برابر شدن ماتریس‌های نامعینی

$$E_{a_i}, E_{b_i}, H_{a_i}, H_{b_i}, i = 1, 2, 3$$

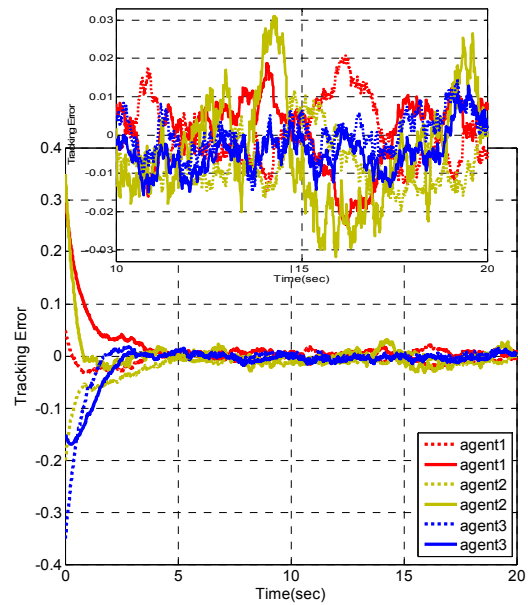


شکل ۹: سیگنال خطا با بیشینه تأخیر $h_2 = 1$ ثانیه و مشتق تأخیر برابر

$$\varepsilon = 1 \text{ و } m_u = 3$$



شکل ۱۲: سیگنال خطا با سه برابر شدن ماتریس اغتشاش b_{a2}



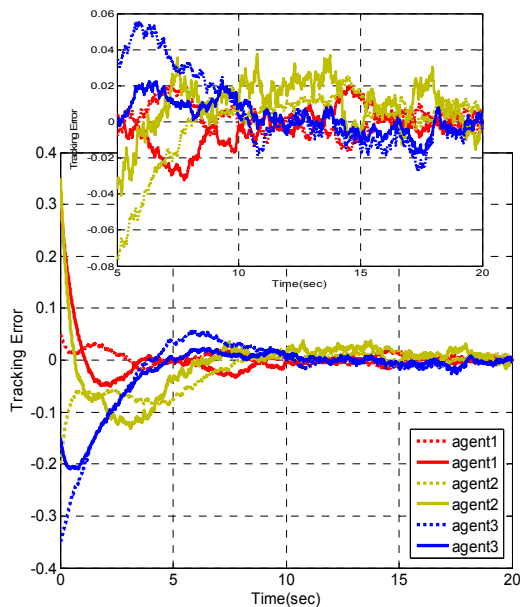
شکل ۱۰: سیگنال خطا با بیشینه تأخیر $h_2 = 1$ ثانیه و زمان شروع اغتشاش

$$\varepsilon = 3 \text{ و } m_u = 3 \text{ از } 2 \text{ ثانیه و مشتق تأخیر برابر}$$

در ادامه اثر نامعینی بر روی سرعت اجماع در اشکال ۱۱ تا ۱۳ آورده

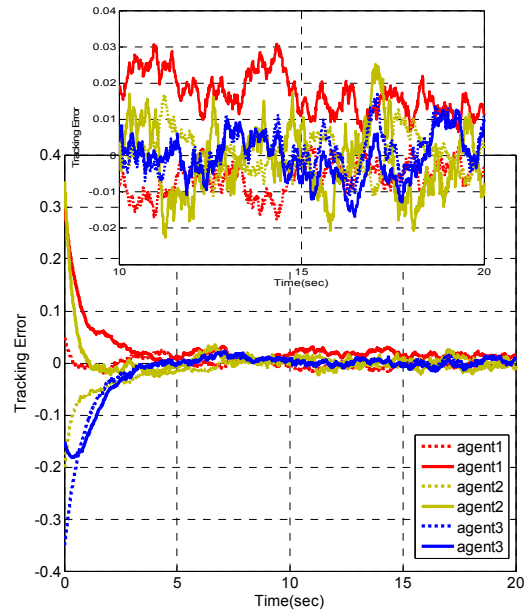
شده است.

تقسیم‌بندی شود، میزان تحمل بیشینه تأخیر بیشتر می‌گردد. در شکل‌های ۷ و ۸ به این مسئله اشاره شده است. در شکل ۸ با تقسیم‌بندی ناحیه تأخیر به چهار قسمت در مقایسه با تقسیم‌بندی ناحیه به دو قسمت، تحمل بیشینه تأخیر افزایش یافته است و واگرایی در زمان‌های طولانی‌تری صورت می‌گیرد. در شکل ۹ به بررسی اثر افزایش مشتق تأخیر پرداخته شده است. افزایش مشتق تأخیر، باعث تغییر در زمان نشست عامل‌ها می‌گردد.



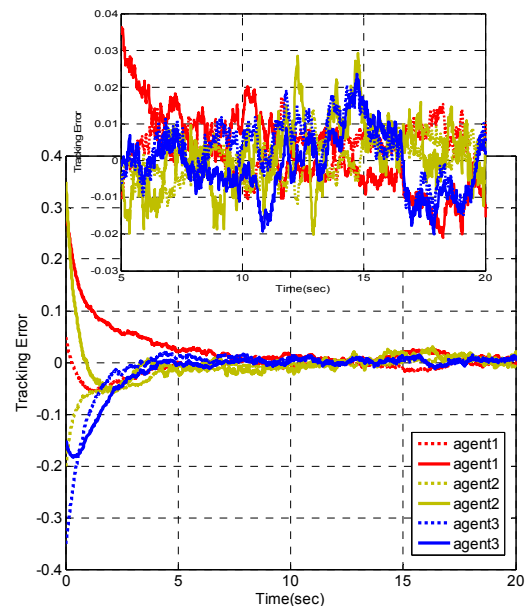
شکل ۱۵: سیگنال خطا با ۳ برابر شدن ماتریس C_z

افزایش ε به‌عنوان ضریب ماتریس وزنی S_1 باعث کاهش زمان نشست و کم شدن زمان گذرا می‌گردد. نتیجه افزایش ضریب ماتریس وزنی S_1 در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود. با تغییر اندازه ماتریس‌های نامعینی و اغتشاش به بررسی اثر آن‌ها در اجماع عامل‌ها پرداخته می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که اعمال تغییرات در ضرایب و ماتریس‌های نامعینی باعث تغییرات در میزان بالادگی و پایین‌آمدگی سیگنال خطای عامل‌ها در زمان‌های گذرا و ماندگار می‌گردد. همچنین در سرعت اجماع، زمان نشست و واگرایی سیستم نیز تغییرات قابل ملاحظه است. بهره‌های ماتریس‌های نامعینی بایستی به‌گونه‌ای انتخاب گردند که با در اختیار داشتن سیگنال معین $F(t)$ توسط کنترل‌گر قابل کنترل باشند. نتایج شبیه‌سازی‌ها بر روی تغییرات اغتشاش در شکل ۱۳ نمایش داده شده است. تغییرات در ماتریس‌های اغتشاش خروجی اثرات کمتری بر روی زمان اجماع عامل‌ها در مقایسه با ماتریس‌های نامعینی دارند. در متن تحقیق به نقش ماتریس C_z در تضمین اجماع و تغییرات در سرعت اجماع اشاره گردیده است. همان‌طور که در شکل ۱۴ مشاهده می‌شود، کاهش مقدار ماتریس C_z باعث افزایش زمان نشست می‌گردد. شکل ۱۵ نشان می‌دهد که افزایش ماتریس C_z باعث افزایش میزان نوسانات و کاهش سرعت اجماع می‌شود.



شکل ۱۳: سیگنال خطا با سه برابر شدن ماتریس اغتشاش d_{d1}, d_{d2}, d_{d3}

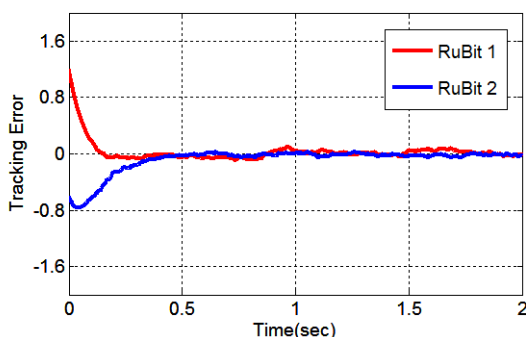
در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ اثر ماتریس خروجی C_z در سرعت اجماع مورد بررسی قرار می‌گیرد.



شکل ۱۴: سیگنال خطا با ۰/۵ برابر شدن ماتریس C_z

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهند که با افزایش بیشینه تأخیر سرعت اجماع کمتر شده و زمان نشست افزایش می‌یابد. با افزایش بیشینه تأخیر برابر ۲/۵ ثانیه و تقسیم‌بندی ناحیه تأخیر به دو قسمت، پاسخ به سمت ناپایداری پیش می‌رود. هر چه ناحیه تأخیر به فواصل کوچک‌تر

در شکل زیر خطای ردیابی برای دو ربات روبیت مشاهده می شود:



شکل ۱۶: سیگنال خطای ردیابی در ربات روبیت

در ادامه به مقایسه نتایج روش های موجود با تحقیق ارائه شده پرداخته می شود.

۵- مقایسه روش های موجود

از آنجا که در زمینه تحقیق ارائه شده کاری صورت نگرفته است، روش های اشاره شده در آن از نقطه نظر چند روش مورد بررسی قرار می گیرد. در ابتدا روش تقسیم بندی بازه تأخیر با مراجع به کار برده شده مورد مقایسه قرار می گیرد و نتایج آن از نظر انعطاف پذیری و محافظه کاری آن در تحمل بیشینه تأخیر به دست می آید. سپس در مورد نوع کنترل گر انتخابی در شرایط وجود تأخیر بازه ای متغیر با زمان و روش تقسیم بندی بازه تأخیر مقایسات صورت می گیرد. در مرحله بعد سیستم در حضور نامعینی و اغتشاش و انتخاب روابط لیاپانوف برای شرایط وجود تأخیرهای بازه ای (با در نظر گرفتن نوع کنترل گر انتخابی و روش تقسیم بندی بازه تأخیر) با یک مقاله مرجع (کنترل گر فیدبک حالت و بدون استفاده از روش تقسیم بندی بازه تأخیر) مقایسه می شود. سپس اثر ماتریس C_z در نتایج اجماع و بدون اعمال مشاهده گر مورد بررسی قرار می گیرد. در ادامه اثر کنترل گر و مشاهده گر انتخابی بر روی یک سیستم خطی که در یک مقاله مرجع به کار برده شده است، بررسی می شود. شرایط مقایسه با وجود تأخیر بازه ای در تحقیق ارائه شده و بدون وجود تأخیر در مقاله مرجع صورت می گیرد. روش تقسیم بندی بازه تأخیر در مقایسه با روش های ارائه شده در مراجع، از محافظه کاری کمتری برخوردار است و می تواند بیشینه تأخیر بیشتری را تحمل نماید. علاوه بر این هرچقدر که بازه تأخیر در فواصل کوچک تری مورد بررسی قرار گیرد، سرعت اجماع بیشتر می شود. در مواردی که واگرایی در یک سیستم رخ دهد، این روش زمان واگرایی را افزایش می دهد. در جداول زیر نتایج سرعت اجماع به ازای تغییر پارامترهای کمینه تأخیر " h_1 "، مشتق تأخیر " μ " و بازه تقسیم بندی " N " آورده شده است. پارامترهای تأخیر برحسب ثابته بیان می گردند. ماتریس های دینامیک سیستم به صورت زیر ارائه شده اند [۴]:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

در این تحقیق با وجود تأخیر در انتقال اطلاعات، افزایش تحمل بیشینه تأخیر ضرورت دارد. با استفاده از طراحی صورت گرفته و تقسیم بندی ناحیه تأخیر به فواصل کوچک تر، تحمل سیستم در این خصوص افزایش می یابد. در طراحی انجام گرفته بایستی به نقش ماتریس C_z در تضمین اجماع و سرعت ردیابی اشاره کرد. این ماتریس در انعطاف پذیری اجماع عامل ها، خصوصاً عامل های ناهماهنگ نقش دارد. نکته دیگر در نظر گرفتن اثر القای اغتشاش عامل مرجع در طراحی است که در مراجع به آن اشاره نگردیده است. از آنجا که عامل ها تحت شبکه پراکنده اند، از اطلاعات سیگنال های مشاهده گر نیز نمونه برداری صورت می گیرد. علاوه بر این مسئله ردیابی عامل مرجع نیز در طراحی مشاهده گر مورد بررسی قرار می گیرد. در سیگنال کنترل گر از وزن ارتباطی میان عامل ها استفاده شده است. در طراحی مشاهده گر، می توان وزن ارتباطی متفاوتی را در نظر گرفت.

مثال ۲: دو ربات میکرومینیوپلاتور روبیت ساخت شرکت فن آوری نوین قرن برای رسیدن به توافق مورد استفاده قرار گرفت. این ربات با دو عامل و یک عامل مرجع در نظر گرفته می شود. دینامیک هر عامل به صورت زیر نمایش داده می شود.

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \theta_1 x_i(t) + \theta_2 u_i(t) + \theta_3 d_i(t) \\ x_i(t_0) = x_i^0 \quad i = 1, 2 \\ y_i(t) = C_i x_i(t) + D_{di} d_{oi}(t) \\ \theta_1 = A_i + \Delta A_i, \theta_2 = B_i + \Delta B_i, \theta_3 = B_{di} \end{cases} \quad (۸۶)$$

ماتریس های $D_{di} \in \mathbb{R}^{q \times r}$, $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times p}$, $C_i \in \mathbb{R}^{q \times n}$, $B_{di} \in \mathbb{R}^{n \times r}$ برای $i = 1, 2$ ثابت در نظر گرفته شده اند. نماد Δ بیان گر وجود نامعینی در دینامیک سیستم است. $x_i(t)$ سیگنال حالت، $u_i(t)$ سیگنال کنترل، $d_i(t)$ سیگنال اغتشاش وارد شده به دینامیک سیستم، $d_{oi}(t)$ سیگنال اغتشاش در خروجی و $y_i(t)$ خروجی سیستم است. دینامیک عامل مرجع به صورت زیر توصیف می گردد.

$$\begin{cases} \dot{x}_o(t) = A_o x_o(t) \\ x_o(t_0) = x_o^0 \\ y_o(t) = C_o x_o(t) \end{cases} \quad (۸۷)$$

در معادله فوق $x_o \in \mathbb{R}^n$ حالت عامل مرجع و A_o, C_o ماتریس های ثابت و x_o^0 شرایط اولیه سیستم را بیان می کنند. $x_o(t)$ سیگنال حالت و $y_o(t)$ خروجی عامل مرجع است.

ماتریس های سیستم به صورت زیر تعریف می گردند.

$$A_i = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.1 & 1 \\ 0.16 & -0.15 & 0 \\ 0 & 0.22 & -0.15 \end{bmatrix}, \Delta A_i = 0.01 \sin 20t I_3,$$

$$B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \Delta B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$$B_{di} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}, D_{di} = 0, C_i = [1 \quad 0 \quad 0],$$

$$A_o = -0.02 I_3, C_o = [1 \quad 0 \quad 0]$$

در ادامه نتایج حاصل از تحقیق ارائه شده و استفاده از کنترل‌گر فیدبک خروجی دینامیکی و نقش ماتریس C_z با [۱] مورد مقایسه قرار می‌گیرد. گراف ارتباطی میان عامل‌ها در [۱] با گراف عامل‌ها در تحقیق ارائه شده یکسان است. دینامیک سیستم بدون در نظر گرفتن اغتشاش و نامعینی مورد بررسی قرار می‌گیرد. دینامیک عامل‌ها و مرجع و پارامترهای طراحی در [۱] به صورت زیر می‌باشند. که در آن $x_i(t)$ سیگنال حالت، $u_i(t)$ سیگنال کنترل و ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ، $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ، $\mu \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ، $\varepsilon \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ پارامترهای طراحی در تحقیق [۱] می‌باشند.

$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t), i = 1, \dots, N \quad (۸۸)$$

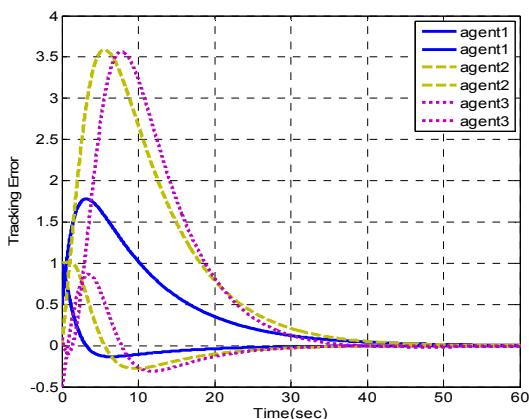
$$\dot{x}_o(t) = Ax_o(t), \quad (۸۹)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \varepsilon = 2, \mu = 1, h_1 = 0.1, h_2 = 0.3,$$

کنترل‌گر خروجی پویا در مقایسه با کنترل‌گر فیدبک حالت روش‌های اضافه کمتری را در تشکیل روابط لیاپانوف-کراسوفسکی تحمیل می‌کند. دینامیک سیستم در [۱] کراندار نیست. به همین دلیل انتخاب الگوریتم در تضمین اجماع عامل‌ها بسیار اهمیت دارد. در تحقیق ارائه شده بدون استفاده از خروجی کمکی و ماتریس مناسب C_z اجماع عامل‌های بی‌کران صورت نمی‌گیرد. در صورتی که این مشکل برای عامل‌های کران‌دار وجود ندارد. ماتریس‌های دینامیک روابط ۱ و ۲ بدون حضور ماتریس‌های اغتشاش و نامعینی به صورت زیر آورده شده‌اند. ماتریس کمکی C_z توسط طراح انتخاب می‌گردد.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [0 \quad -1], C_z = [-2 \quad -2], h_1 = 0.1, h_2 = 0.3, \mu = 1, \varepsilon = 1, \gamma_2 = 1,$$

به پارامترهای فوق در متن تحقیق اشاره شده است. در شکل‌های ۱۷ و ۱۸ نتایج شبیه‌سازی روش‌های [۱]، [۹] و مزایای استفاده از کنترل‌گر فیدبک خروجی پویا و ماتریس کمکی C_z اشاره شده است.



شکل ۱۷: خطای ردیابی عامل‌های تحت شبکه در تحقیق [۱]

در مقالات مرجع مقایسه پیشینه تأخیر " h_2 " بدون در نظر گرفتن کنترل‌گر و مشاهده‌گر مورد بررسی قرار گرفته است.

در این تحقیق نیز به منظور انجام مقایسه با مراجع، نامعینی و اغتشاش صفر در نظر گرفته شده و مقایسه بدون طراحی کنترل‌گر و مشاهده‌گر انجام شده است. در جداول ۱ و ۲ مقدار h_2 در مراجع ۷ و ۸ و تحقیق ارائه شده با تغییر تعداد تقسیم‌بندی بازه تأخیر " N " مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

جدول ۱: مقایسه نتیجه پیشینه تأخیر با مرجع [۷]

$\mu = \text{Unknown}$	$h_1 = 0.3$	$h_1 = 0.5$	$h_1 = 0.8$	$h_1 = 1$
$N = 2$ در h_2	۱/۲۳۱۰	۱/۳۷۰۰	۱/۵۹۵۰	۱/۷۵۲۰
$N = 4$ در h_2	۱/۳۴۴۰	۱/۴۶۲۰	۱/۶۵۳۵	۱/۸۵۳۰
$N = 6$ در h_2	۱/۴۳۲۰	۱/۵۶۷۰	۱/۷۴۲۰	۱/۹۵۰۰
h_2 در مرجع [۷]	۱/۴۲۵۰	۱/۵۶۹۴	۱/۷۹۴۵	۱/۹۴۹۳

در مقایسه دوم دینامیک سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۸].

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -0.9 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

جدول ۲: مقایسه نتیجه پیشینه تأخیر با مرجع [۸]

$\mu = \text{Unknown}$	$h_1 = 2$	$h_1 = 3$	$h_1 = 4$
$N = 2$ در h_2	۲/۶۲۷۰	۳/۳۴۸۰	۴/۱۸۴۰
$N = 4$ در h_2	۲/۸۰۱۰	۳/۴۶۲۰	۴/۴۷۳۰
h_2 در مرجع [۸]	۳/۱۰۴۶	۳/۴۱۸۱	۴/۲۱۰۲

در جداول ۱ و ۲ مقایسه با مراجع [۷] و [۸] صورت گرفته است. در مرجع [۷] تعداد متغیرها ۲۳ عدد و برای کل بازه تأخیر از ۲ نابرابری ماتریس خطی استفاده می‌شود. در این تحقیق تعداد متغیرها از روش [۷] کمتر است و برای N بازه تقسیم‌بندی، تعداد نابرابری‌های ماتریسی خطی $2N$ خواهد بود. در روش [۸]، هر کدام از المان‌های ماتریس لیاپانوف P به طور جداگانه در اثبات روابط لیاپانوف به کار برده می‌شوند. در روش [۸] از این ویژگی به عنوان یک ایده در کاهش محافظه‌کاری اشاره کرده است. از نتایج جداول ۱ و ۲ می‌توان به انعطاف‌پذیری و توانایی روش ارائه شده با تقسیم‌بندی بیشتر بازه تأخیر اشاره کرد. در این تحقیق هر چقدر که بازه تأخیر به فواصل کوچک‌تری تقسیم‌بندی شود، نتایج پیشینه تأخیر به نتایج روش‌های ارائه شده با کمترین محافظه‌کاری نزدیک‌تر می‌گردد.

در تحقیق [۱] به ردیابی و اجماع عامل‌های تحت شبکه با استفاده از کنترل‌گر فیدبک حالت و نابرابری ماتریسی خطی پرداخته است. در این تحقیق میان عامل‌هایی که به طور مستقل از یکدیگر عمل می‌کنند نیز ارتباط برقرار می‌گردد. نویسندگان به منظور رفع مشکل از روش‌های جدیدی استفاده کرده‌اند.

سیستم هستند. نماد $F(t)$ بردار نامعین سیستم می‌باشد. اغتشاش و نامعینی اعمال شده کران دار هستند.

$$F(t) = 2 + 1.7 * \sin^2(t),$$

سیگنال‌های $d(t)$ به‌عنوان اغتشاش به‌صورت نویز سفید و توان 0.05 با پهنای باند محدود و طول بردار برابر ۲ در انتخاب شده است [۱۳]. مقادیر کمینه و بیشینه تأخیر برابر $h_2(t) = 3/7$ و $h_1(t) = 2$ و $\gamma_2 = 4$ در نظر گرفته شده‌اند.

به نماد γ_2 در قسمت تحلیل روابط نابرابری ماتریسی خطی اشاره شده است. در متن تحقیق [۹] به سیگنال نامعینی و اغتشاش اشاره نشده است و دینامیک سیستم [۹] به‌صورت زیر استفاده شده است:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \theta_1 x(t) + \theta_2 x(t - h(t)) + \theta_3 u(t) + \theta_4 w(t) \\ z(t) = \theta_5 x(t) + \theta_6 x(t - h(t)) + \theta_7 u(t) \end{cases} \quad (91)$$

$$\theta_1 = [A + \Delta A(t)], \theta_2 = [D + \Delta D(t)], \theta_3 = [B + \Delta B(t)], \theta_4 = [C + \Delta C(t)],$$

$$\theta_5 = [E + \Delta E(t)], \theta_6 = [G + \Delta G(t)], \theta_7 = [F + \Delta F(t)],$$

$$[\Delta A \ \Delta D \ \Delta B \ \Delta C \ \Delta E \ \Delta G \ \Delta F] = KH(t)[L_a \ L_d \ L_b \ L_c \ L_e \ L_g \ L_f],$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.3 & -0.3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.01 \\ 0.02 & -0.03 \end{bmatrix},$$

$$E = G = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.06 \\ -0.08 & 0.08 \end{bmatrix}, F = \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.6 \end{bmatrix},$$

$$K = L_a = L_c = L_d = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}, L_b = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

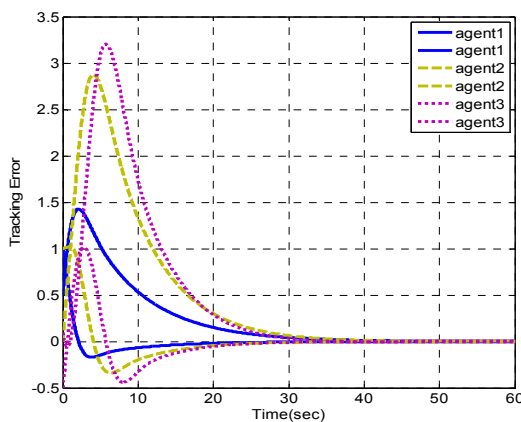
$$L_e = L_g = L_f = \begin{bmatrix} 0.03 & 0 \\ 0 & 0.03 \end{bmatrix},$$

ماتریس‌های:

$$A + \Delta A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, B + \Delta B(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}, D + \Delta D(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}, C + \Delta C(t) \in \mathbb{R}^{n \times q}, E + \Delta E(t) \in \mathbb{R}^{r \times n}, G + \Delta G(t) \in \mathbb{R}^{r \times n}, F + \Delta F(t) \in \mathbb{R}^{r \times p}$$

به‌ترتیب ماتریس‌های حالت سیستم، ورودی، حالت سیستم در حضور تأخیر، ماتریس اغتشاش، ماتریس خروجی، ماتریس خروجی در حضور تأخیر، ماتریس اغتشاش در خروجی هستند. از آن‌جا که در متن تحقیق به مقدار سیگنال نامعین $H(t)$ اشاره نشده است، مقدار آن با سیگنال $F(t)$ در تحلیل سیستم‌های چندعاملی یکسان در نظر گرفته می‌شود. ماتریس‌های $[K, L_a, L_d, L_b, L_c, L_e, L_g, L_f]$ قسمت‌های ثابت و با ابعاد مناسب ماتریس‌های نامعین سیستم هستند. مقادیر کمینه و بیشینه تأخیر و مقدار γ_2 با مقدار به‌کار برده شده در تحقیق یکسان هستند. ضریب نمایی β برابر 0.1 در نظر گرفته شده است. ماتریس‌های نامعینی و اغتشاش با ماتریس‌های $F(t)$ و $d(t)$ برابر در نظر گرفته شده‌اند. در شکل‌های ۱۹ و ۲۰ نتایج شبیه‌سازی برای عامل‌های هماهنگ تحت شبکه با ماتریس‌های خروجی متفاوت و نتیجه تحقیق [۹] در شکل ۱۶ آورده شده‌اند.

در تحقیق [۱] با استفاده از کنترل گر فیدبک حالت و روابط جدید لیاپانوف به ردیابی عامل‌های تحت شبکه پرداخته است.



شکل ۱۸: خطای ردیابی عامل‌های تحت شبکه در تحقیق ارائه‌شده و استفاده از کنترل گر فیدبک خروجی پویا

نتایج به افزایش سرعت اجماع و کاهش میزان بالازدگی و پایین‌آمدگی سیگنال‌ها در تحقیق ارائه‌شده نسبت به تحقیق [۱] اشاره می‌کند. در مقاله [۹] از کنترل گر فیدبک حالت در کنار روش‌های مقاوم‌سازی سیستم در حضور نامعینی و اغتشاش استفاده کرده است. جهت تحلیل پایداری نیز از نابرابری‌های ماتریسی خطی استفاده شده است. در ادامه نتیجه مقایسه شبیه‌سازی تحقیق ارائه‌شده با روش [۹] آورده شده است. در ابتدا مقادیر ماتریس‌های سیستم چندعاملی مانند دینامیک سیستم در تحقیق [۹] انتخاب می‌گردند. دو ماتریس کمکی C_{z1}, C_{z2} به‌منظور بررسی اثر آن در اجماع و نوسانات در سیستم اعمال می‌گردند.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + \Delta A)x(t) + (B + \Delta B)u(t) + (N + \Delta N)d(t) \\ y(t) = Cx(t) \end{cases} \quad (90)$$

$$\Delta A = E_a F(t) H_a, \Delta B = E_b F(t) H_b, \Delta N = E_n F(t) H_n,$$

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0.1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.3 & -0.3 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.06 & -0.06 \\ -0.08 & 0.08 \end{bmatrix}, C_{z1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$N = \begin{bmatrix} -0.02 & 0.01 \\ 0.02 & -0.03 \end{bmatrix}, C_{z2} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},$$

$$E_a = E_b = E_n = H_a = H_b = H_n = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix},$$

$$h(t) = 2 + 1.7 * \sin^2(t),$$

اطلاعات میان عامل‌ها از بستر شبکه انتقال می‌یابند. بنابراین تأخیر الفاشده در سیستم به‌صورت مصنوعی $h(t)$ تعریف می‌گردد. نمادهای $A + \Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ماتریس حالت سیستم، $B + \Delta B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ماتریس ورودی سیستم، $N + \Delta N \in \mathbb{R}^{n \times r}$ ماتریس اغتشاش هستند. نمادهای $E_a, E_b, E_n, H_a, H_b, H_n$ ماتریس‌های ثابت قسمت‌های نامعین

نتایج نشان می‌دهند که میزان بالازدگی و پایین آمدگی از تحقیق [۹] کمتر است و سرعت اجماع افزایش یافته است. تأثیر بهره نامی β در مقایسه با ماتریس C_z در کاهش میزان بالازدگی و پایین آمدگی بسیار کمتر است. نتایج شبیه‌سازی مزایای تحقیق ارائه شده را تأیید می‌کند. در ادامه به مقایسه اثر مشاهده گر رابطه ۵ در سیستم‌های چندعاملی متأثر از تأخیرهای القایی پرداخته می‌شود. در تحقیق [۱۶] مشاهده گر به همراه کنترل گر فیدبک حالت برای سیستم‌های چندعاملی خطی طراحی گردیده است. توپولوژی ارتباطی میان عامل‌ها از مرجع [۱] برگرفته شده است. با استفاده از روابط ۴ و ۵ و روش تقسیم‌بندی بازه تأخیر به بررسی نتایج پرداخته می‌شود. دینامیک عامل‌ها، کنترل گر و مشاهده گر در تحقیق [۱۶] به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود. ماتریس‌های $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ حالت سیستم، $B \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ورودی، $C \in \mathbb{R}^{q \times n}$ خروجی و $F \in \mathbb{R}^{q \times q}$ ، $K \in \mathbb{R}^{p \times q}$ بهره‌های کنترل گر دینامیک خروجی هستند. بردار $v_i(t), i = 1, \dots, N$ دینامیک کنترل گر می‌باشد. نماد a_{ij} برای ماتریس مجاورتی عامل‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. نماد $C > 0$ بیان گر قدرت تزویج است.

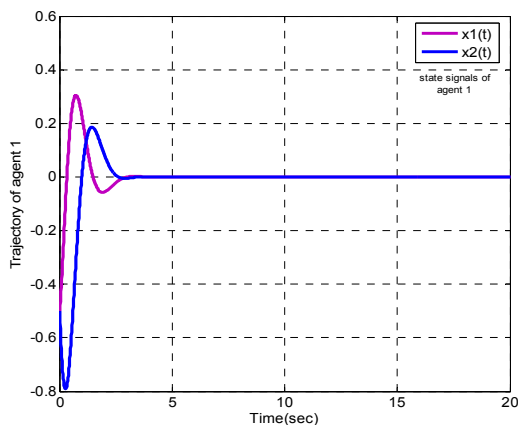
$$\dot{x}_i(t) = Ax_i(t) + Bu_i(t), y_i(t) = Cx_i(t), \quad (92)$$

$$\begin{cases} u_i(t) = Kv_i(t) \\ \dot{v}_i(t) = (A + BK)v_i(t) + FC \sum_{j \in N_i} \ell_j(t) \end{cases} \quad (93)$$

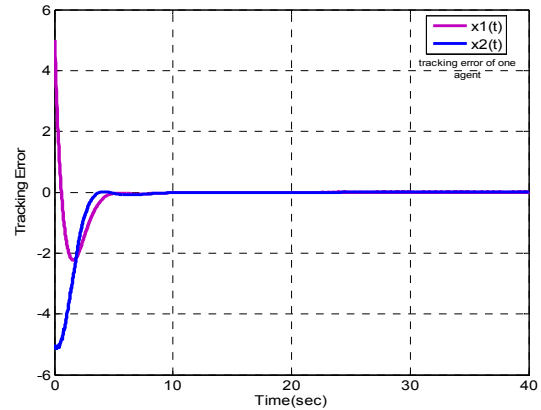
$$\sum_{j \in N_i} \ell_j(t) = a_{ij} [C(v_i(t) - v_j(t)) - (y_i(t) - y_j(t))]$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

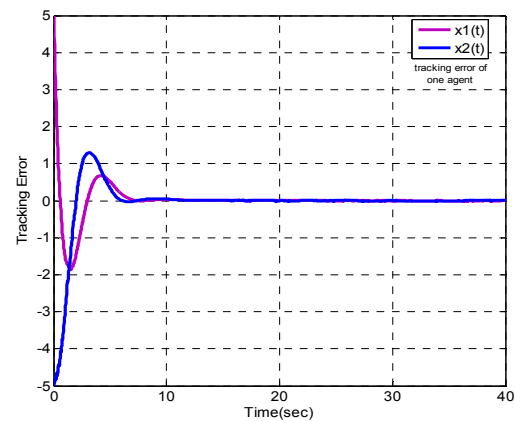
ماتریس‌های فوق در روابط ۱، ۲، ۴ و ۵ استفاده شده و از روش تقسیم‌بندی بازه تأخیر برای عامل‌های تحت شبکه استفاده می‌گردد. در شکل ۲۲ به بررسی نتایج [۱۶] در حضور مشاهده گر برای یک عامل پرداخته است. شکل ۲۳ به بررسی مشاهده گر طراحی شده در این تحقیق برای چند عامل تحت شبکه پرداخته می‌شود.



شکل ۲۲: منحنی مسیر سیگنال حالت عامل اول در [۱۶]

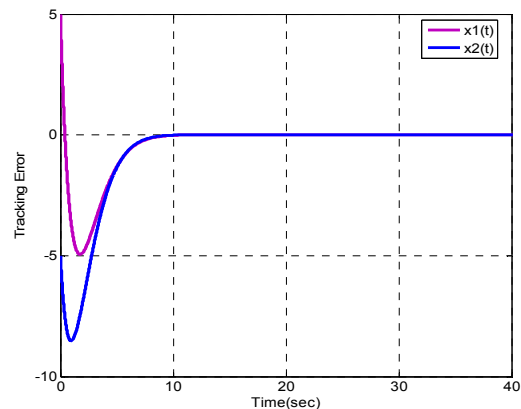


شکل ۱۹: خطای ردیابی عامل اول با در نظر گرفتن کنترل گر فیدبک خروجی پویا و بدون اعمال مشاهده گر و انتخاب C_{z1}



شکل ۲۰: خطای ردیابی عامل اول با در نظر گرفتن کنترل گر فیدبک خروجی پویا، بدون اعمال مشاهده گر و انتخاب C_{z2}

نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که با انتخاب مناسب ماتریس C_z سرعت اجماع و همگرایی سیستم تغییر می‌کنند.



شکل ۲۱: خطای سیستم در تحقیق [۹] با در نظر گرفتن کنترل گر فیدبک حالت و بدون اعمال مشاهده گر

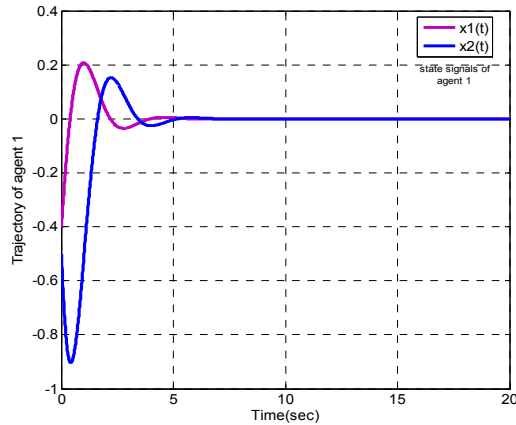
پیوست

در این بخش، داده‌های مربوط به بهره‌های کنترل‌گر و مشاهده‌گر برای مقادیر $\mu = 1, \varepsilon = 1, h_1 = 0.1, h_2 = 1$ آورده شده‌اند.

$$K_{A1} = \begin{bmatrix} -1.892 & 0.885 \\ 0.879 & -1.932 \end{bmatrix}, K_{B1} = \begin{bmatrix} 0.672 \times 10^{-11} & -0.469 \times 10^{-11} \\ -0.256 \times 10^{-11} & 0.305 \times 10^{-11} \end{bmatrix},$$

$$K_{B2} = \begin{bmatrix} 0.392 \times 10^{-11} & -0.684 \times 10^{-11} \\ -0.673 \times 10^{-11} & 0.411 \times 10^{-11} \end{bmatrix}, K_{B3} = \begin{bmatrix} -0.074 \times 10^{-11} & 0.245 \times 10^{-11} \\ 0.209 \times 10^{-11} & -0.021 \times 10^{-11} \end{bmatrix},$$

$$K_{C1} = \begin{bmatrix} -0.187 \times 10^{-10} & 0.151 \times 10^{-10} \\ -0.196 \times 10^{-10} & 0.445 \times 10^{-10} \end{bmatrix}, K_{C2} = \begin{bmatrix} -0.214 \times 10^{-11} & 0.054 \times 10^{-11} \\ -0.079 \times 10^{-11} & 0.030 \times 10^{-11} \end{bmatrix}, K_{C3} = \begin{bmatrix} 0.054 \times 10^{-10} & -0.102 \times 10^{-10} \\ 0.082 \times 10^{-10} & -0.279 \times 10^{-10} \end{bmatrix}, K_{D1} = \begin{bmatrix} 0.008 & -0.208 \\ 0.350 & -1.011 \end{bmatrix}, K_{D2} = \begin{bmatrix} 0.034 & -0.028 \\ 0.003 & -0.023 \end{bmatrix}, K_{D3} = \begin{bmatrix} -0.032 & 0.220 \\ -0.364 & 1.034 \end{bmatrix}, L_1 = \begin{bmatrix} -3.367 & -0.996 \\ -1.586 & -2.220 \end{bmatrix}, L_2 = \begin{bmatrix} 0.226 & 0.036 \\ 0.090 & 0.125 \end{bmatrix}, L_3 = \begin{bmatrix} 0.678 & -0.341 \\ -0.091 & 0.234 \end{bmatrix},$$



شکل ۲۳: منحنی مسیر سیگنال حالت عامل اول با تأخیر بازه‌ای

مقدار کمینه و بیشینه تأخیر برابر $h_1 = 0.1$ و $h_2 = 1$ در نظر گرفته شده‌اند. نتایج نشان می‌دهند که با وجود القای تأخیر در شبکه، کنترل‌گر و مشاهده‌گر ۴ و ۵ توانسته‌اند سرعت اجماع را به شرایط ایده‌آل (عدم وجود تأخیرهای بازه‌ای) نزدیک نمایند.

۶- نتیجه‌گیری

در این تحقیق مسئله کنترل‌گر و مشاهده‌گر مقاوم در سیستم‌های چندعاملی ناهم‌بند تحت شبکه با تأخیرهای بازه‌ای متغیر با زمان و در حضور نامعینی و اغتشاش مورد بررسی قرار گرفته است. با معرفی کنترل‌گر خروجی پویا و استفاده از مشاهده‌گر و بهره‌گیری از کم‌های مناسب، شرایط وابسته به تأخیر به‌منظور کنترل مقاوم و ردیابی مرجع به‌صورت نابرابری‌های ماتریسی خطی ارائه گردیده است. کاربرد مشاهده‌گر بدون نمونه‌برداری از سیگنال خروجی عملی نیست. به‌دلیل ماهیت شبکه بایستی از سیگنال‌های خروجی در مشاهده‌گر نمونه‌برداری صورت گیرد. ماتریس C_z در به اجماع رساندن سیگنال‌های سیستم مؤثر است. با انتخاب مناسب این ماتریس می‌توان سرعت اجماع را تحت کنترل قرار داد. علاوه بر این بیشینه تأخیر نیز در سرعت اجماع اثر دارد. سرعت اجماع در صورت نیاز به تحمل تأخیر بیشتر، کاسته می‌شود. با اعمال تغییرات در پارامترهای طراحی نظیر مشتق تأخیر، پارامتر ε به‌عنوان ضریب ثابت در ماتریس وزنی S_1 و ماتریس C_z می‌توان سرعت اجماع مناسبی را برای عامل‌های شبکه به‌دست آورد. علاوه بر این می‌توان با تقسیم‌بندی بیشتر بازه تأخیر، تحمل بیشینه تأخیر را افزایش داد. مثال‌های ارائه‌شده مؤثر بودن روش ارائه‌شده را در افزایش سرعت اجماع با وجود بیشینه تأخیر القاشده نشان می‌دهد.

تشکر و قدردانی

از شرکت فن‌آوری نوین قرن که امکان استفاده از ربات میکرومینیوپلاتور روبوت را به‌منظور آزمون و ارزیابی نتایج فراهم آورد، تقدیر می‌گردد.

مراجع

- [1] L. Ding, Q.L. Han, and G. Guo, "Network-based leader-following consensus for distributed multi-agent systems," *Automatica*, vol. 49, pp. 2281-2286, 2013.
- [2] Y. Hu, P. Li, and J. Lam, "Consensus of Multi-Agent Systems: A Simultaneous Stabilization Approach," *IET Control Theory and Applications*, vol. 6, no. 11, pp. 1758-1765, 2012.
- [3] A. Papachristodoulou, M.M. Peet, and S.I. Niculescu, "Stability analysis of linear systems with time-varying delays: delay uncertainty and quenching," *IEEE Conference on Decision and Control*, vol. 12, pp. 2117-2122, 2007.
- [4] M. Tang, Y.W. Wang, and C. Wen, "Improved delay-range-dependent stability criteria for linear systems with interval time-varying delays," *IET Control Theory and Applications*, vol. 6, no. 6, pp. 868-873, 2012.
- [5] M.C. De Oliveira, J.C. Geromel, and L. Hsu, "LMI characterization of structural and robust stability," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 296, pp. 27-38, 1999.
- [6] H. Shao, "New delay-dependent stability criteria for systems with interval delay," *Automatica*, vol. 45, pp. 744-749, 2009.
- [7] P.L. Liu, "Further improvement on delay-range-dependent stability results for linear systems with interval time-varying delays," *ISA Transactions*, vol. 52(6), pp. 725-729, 2013.
- [8] F. Souza, "Further improvement in stability criteria for linear systems with interval time-varying delay," *IET Control Theory and Applications*, vol. 7, no. 3, pp. 440-446, 2013.
- [9] N.T. Thanh, and V.N. Phat, " H_∞ control for nonlinear systems with interval non-differentiable time-varying delay," *European Journal of Control*, vol. 19, pp. 190-198, 2013.

- [14] M.R. Davoodi, K. Khorasani, H.A. Talebi, and H.R. Momeni, "A novel distributed robust fault detection and isolation filter design for a network of nonhomogeneous multi-agent systems," *IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 10-13, 2012.
- [15] V.N. Phat, Y. Khongtham, and K. Ratchagit, "LMI approach to exponential stability of linear systems with interval time varying delays," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 436, pp. 243- 251, 2012.
- [16] L. Zonggang, *et al.*, "Observer- based containment control of multi- agent system with linear dynamics," *24th Chinese Control and Decision Conference*, pp. 574- 579, 2012.
- [17] K. Ruohonen, *Graph Theory*, 2013.
- [18] N. Wei, *et al.*, "Consensus controllability, observability and robust design for leader- following linear multi- agent systems," *Automatica*, vol. 49, pp. 2199- 2205, 2013.
- [10] N.T. Thanh, and V.N. Phat, "Decentralized stability for switched nonlinear large-scale systems with interval time-varying delays in interconnections," *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, vol. 11, pp. 22-36, 2013.
- [11] Li. Zhongkui, Duan. Zhisheng, and Chen. Guanrong, "Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: a unified viewpoint," *IEEE Transactions on Circuit and Systems*, vol. 57, no. 1, pp. 213-224, 2010.
- [12] A.S. Tlili, and N.B.H. Braiek, "Decentralized observer based tracking control of uncertain interconnected systems," *IEEE International Journal of Control and Automation*, pp. 1-8, 2011.
- [13] M. Zhong, S.X. Ding, and J. Lam, "An LMI approach to design fault detection filter for uncertain LTI systems," *Automatica*, vol.39, pp. 543-550, 2003.

زیر نویس ها

⁴ Jensen's Inequality⁵ Schure Complement¹ Kronecker Matrix² Cauchy Inequality³ Newton- Leibniz Formula