

## مقایسه‌ی روش‌های مختلف در تحلیل ترموالاستیک دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد هدفمند

فرید وکیلی تهامی\*

دانشیار، دانشگاه تبریز، دانشکده‌ی فنی مهندسی مکانیک

اکبر رسولیان

دانشجوی دکترا، دانشگاه تبریز، دانشکده‌ی فنی مهندسی مکانیک

آرش محمدعلیزاده فرد

دانشجوی دکترا، دانشگاه تبریز، دانشکده‌ی فنی مهندسی مکانیک

### چکیده

در این مقاله رفتار ترموالاستیک یک دیسک دوار هدفمند با ضخامت متغیر با استفاده از روش‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. بدین منظور، نخست با گسترش معادله‌ی دیفرانسیل انتقال حرارت، توزیع دما در دیسک به دست آمده سپس با در نظر گرفتن توزیع دما و با گسترش معادله‌ی دیفرانسیل جابه‌جایی، رفتار ترموالاستیک دیسک بررسی شده است. در گسترش این معادلات خواص فیزیکی به صورت تابعی توانی از شعاع فرض شده‌اند. معادلات دیفرانسیل ترمومکانیکی به دست آمده با روش‌های تحلیلی، شبه‌تحلیلی و روش کوادراتور دیفرانسیلی حل شده و همچنین پاسخ‌های به دست آمده با نتایج حاصل از روش تحلیل المان محدود مقایسه شده‌اند. مقایسه‌ی این چهار روش از آن جهت صورت گرفته است که حل تحلیلی معادلات مذکور در تمامی حالات بعید به نظر می‌رسد و از این رو تعیین روشی مناسب با دقت کافی و زمان حل مناسب به خصوص برای انجام اهدافی همچون بهینه‌سازی اهمیت ویژه‌ای دارد. نتایج حاصل، نشان از مناسب‌تر بودن روش حل شبه‌تحلیلی برای تحلیل ترموالاستیک دیسک‌های دوار دارد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل ترموالاستیک، حل تحلیلی، حل شبه‌تحلیلی، کوادراتور دیفرانسیلی، المان محدود.

## Comparison of Different Methods for Thermoelastic Analysis of Functionally Graded Rotating Disks

F. Vakili-Tahami

Associate Professor, University of Tabriz, Faculty of Mechanical Engineering

A. Rasoulian

Ph.D. Student, University of Tabriz, Faculty of Mechanical Engineering

A. Mohammad Alizadeh Fard

Ph.D. Student, University of Tabriz, Faculty of Mechanical Engineering

### Abstract

In this paper the thermoelastic behavior of a functionally graded (FG) rotating disc with variable thickness is investigated with different methods. For this purpose, the temperature gradient along the disc radius is obtained by solving the governing heat transfer differential equation. Using this temperature gradient, Navier differential equation is developed. All the thermo mechanical properties of the material are obtained using the power law function of radius. The solution of governing differential equations is obtained using different methods: analytical, semi-analytical and Differential Quadrature Method (DQM). Also, the results are compared with those obtained using finite element analysis. Considering that, the closed-form solution of these equations seems unlikely, determining the appropriate solution method with the sufficient accuracy and acceptable solution time is important especially for optimization purposes. The results indicate that the semi-analytical method is more appropriate in terms of accuracy and solution time comparing with other methods.

**Keywords:** Thermoelastic Analysis, Analytical Solution, Semi-analytical Solution, Differential Quadrature, Finite Element.

## ۱- مقدمه

دیسک‌های دوار به علت کاربردهای فراوانی که در صنعت دارند، از دیرباز موضوع تحقیقات و مطالعات متعددی بوده‌اند. از میان کاربردهای دیسک دوار می‌توان به مواردی همچون موتورهای صنایع هوایی، اتومبیل‌ها، توربین‌ها، پمپ‌ها و کمپرسورها اشاره نمود. در اثر وجود بارهای ترمومکانیکی در این قطعات تحلیل ترموالاستیک آنها ضروری می‌باشد. از سوی دیگر با پیشرفت سریع تکنولوژی، نیاز به استفاده از مواد جدید به عنوان اولویت مهندسی در سیستم‌های پیچیده‌ی با راندمان بالا مطرح شده است. در برخی از این موارد، نیاز به تأمین مقاومت توأمان ماده در برابر بارهای حرارتی و مکانیکی متفاوت، منجر به معرفی و تولید مواد هدفمند با قابلیت تحمل بارهای متفاوت و تغییرات خواص فیزیکی پیوسته در جهات مختلف گردیده است. در نظر گرفتن خواص فیزیکی متغیر این مواد در معادلات ترموالاستیک موجب پیچیدگی در تحلیل این معادلات می‌گردد که لزوم انتخاب روش مناسب در تحلیل ترموالاستیک را ایجاب می‌کند.

در ادبیات فن بررسی‌های مختلفی برای تحلیل ترموالاستیک دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد هدفمند صورت گرفته است. در سال ۲۰۰۷ میلادی، کردخیلی و نقدآبادی [۱] یک روش حل شبه‌تحلیلی برای تحلیل ترموالاستیک دیسک‌های دوار هدفمند پیشنهاد داده‌اند. آنها توزیع خواص فیزیکی را در تمامی موارد به غیر از ضریب پواسون، توانی فرض کرده‌اند. شرایط مرزی مورد استفاده برای حل معادله‌ی دیفرانسیل توزیع دما و معادله‌ی ترموالاستیک ناویر به ترتیب دما ثابت و جابه‌جایی آزاد فرض شده‌اند. در همین سال، یو و همکارانش [۲] به تحلیل تنش در دیسک‌های دوار با فرض تغییرات توانی مدول الاستیسیته، ضریب انبساط حرارتی و چگالی در جهت شعاع و یکنواخت بودن توزیع دما پرداخته‌اند. در مطالعه‌ی دیگر در این سال، وی‌ویو و والو [۳] تنش‌های الاستیک دیسک‌های دوار مخروطی را با در نظر گرفتن بار حرارتی و تغییرات چگالی در راستای شعاعی دیسک مورد مطالعه قرار داده‌اند. آنان در این بررسی به تحلیل الاستیک میدان جابه‌جایی و تنش در دیسک مخروطی با وجود گرادیان دمایی و تغییرات چگالی در راستای شعاعی پرداخته‌اند. در سال ۲۰۰۸ میلادی، والو و وی‌ویو [۴] تنش‌های الاستیک در دیسک‌های دوار با در نظر گرفتن گرادیان دمایی و تغییرات چگالی در راستای شعاعی و تغییرات ضخامت دیسک با مقطع چهار لایه را به دست آورده‌اند. در سال ۲۰۰۹ میلادی، زنگور [۵] به بررسی توزیع تنش در دیسک‌های دوار با ساختاری مرکب پرداخته است. در این پژوهش دو ساختار مرکب برای دیسک‌ها در نظر گرفته شده است، به طوری که دو لایه‌ی بیرونی از مواد همسانگرد متفاوت و هسته‌ی درونی از یک ماده‌ی هدفمند ساخته شده باشد. سپس یک حل الاستیک دقیق برای دیسک‌های دوار با توجه به شرایط

مرزی سطوح خارجی ارائه شده است. در همین سال، بیات و همکارانش [۶] تنش‌های مکانیکی و حرارتی دیسک‌های دوار با ضخامت متغیر ساخته شده از مواد هدفمند در اثر بارهای متقارن شعاعی را مورد بررسی قرار دادند. آنان در این بررسی دیسک را در یک میدان دمایی یکنواخت قرار دادند. نتایج ایشان نشان می‌دهند که مقادیر تنش و جابه‌جایی در دیسک‌های با مقطع ضخامت سهموی و هذلولوی در مقایسه با دیسک‌های دارای ضخامت یکنواخت کمتر بوده و محل وقوع بیشینه تنش شعاعی ناشی از نیروی گریز از مرکز در دیسک‌های با مقطع ضخامت سهموی در مقایسه با دیسک‌های با ضخامت یکنواخت متفاوت است. همچنین نتایج بیانگر سبک‌تر بودن دیسک‌های هدفمند با ضخامت متغیر در مقایسه با دیسک‌های با ضخامت یکنواخت با استحکام یکسان می‌باشند. در سال ۲۰۱۰ میلادی، نی و باترا [۷] به تحلیل تنش و یکپارچگی مواد<sup>۱</sup> در دیسک‌های دوار با ضخامت متغیر ساخته شده از مواد هدفمند همسانگرد با خواص ترموالاستیک خطی پرداختند. آنان در این پژوهش ضخامت، چگالی جرم، ضریب انبساط حرارتی و مدول برشی را در راستای شعاعی متغیر فرض کرده و به منظور تحلیل مسئله از یک تابع تنش ابری بهره گرفته‌اند. در سال ۲۰۱۰ میلادی، حسنی و همکارانش [۸] پاسخ‌های ترمومکانیکی شبه‌تحلیلی برای دیسک دوار هدفمند را به دست آورده‌اند. در بررسی آنها توزیع تنش و کرنش برای دیسکی با ضخامت متغیر با شرایط مرزی مختلف و با فرض وجود توزیع دمای توانی با روش هوموتوبی تعیین شده است. در سال ۲۰۱۴ میلادی، احمدی و جبارزاده [۹] به تحلیل ترموالاستیک غیرخطی دیسک‌های دوار هدفمند توخالی با استفاده از تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه‌ی اول و سوم پرداخته‌اند. آنها در این بررسی تغییرات خواص مواد در راستای ضخامت را به صورت تابع توانی در نظر گرفته‌اند.

به دلیل اهمیت موضوع، روش‌های مختلفی برای تحلیل دیسک‌های دوار ساخته شده از مواد هدفمند پیشنهاد شده است، به همین دلیل لزوم مقایسه‌ی این روش‌ها و تعیین روش با راندمان بالا احساس می‌شود. از طرف دیگر به علت تنوع هندسه، نوع بارگذاری و خصوصیات مواد مورد استفاده در دیسک‌ها لزوم ارائه‌ی یک راه حل عمومی وجود دارد. از این رو، این دو موضوع هدف اصلی این پژوهش می‌باشند.

در مقاله‌ی حاضر ابتدا معادلات دیفرانسیل توزیع دما و جابه‌جایی در دیسک دوار با ضخامت متغیر و با فرض وجود توزیع خواص توانی استخراج شده‌اند. سپس پاسخ معادلات با استفاده از روش‌های تحلیلی، شبه‌تحلیلی، روش کوادراتور دیفرانسیلی<sup>۲</sup> و روش تحلیل المان محدود تعیین شده‌اند.

<sup>1</sup> Material Tailoring

<sup>2</sup> DQM

## ۲-۲- تعیین توزیع دما

معادله‌ی انتقال حرارت رسانش در مختصات استوانه‌ای و بدون وجود منبع حرارتی، برای دیسکی با ضخامت متغیر به صورت رابطه‌ی (۴) بیان می‌شود:

$$hk \frac{d^2T}{dr^2} + \left(\frac{hk}{r} + \frac{d}{dr}(hk)\right) \frac{dT}{dr} = 0 \quad (4)$$

که در آن  $T$ ،  $h$  و  $k$  به ترتیب بیانگر دما، ضخامت جسم و ضریب رسانش می‌باشند.

## ۲-۳- تعیین توزیع جابه‌جایی و تحلیل تنش- کرنش

به منظور تحلیل ترمومکانیکی مسئله، کرنش‌های دیسک برابر مجموع کرنش‌های مکانیکی و حرارتی در نظر گرفته شده است. تحلیل در مختصات استوانه‌ای صورت گرفته و با توجه به ضخامت کم دیسک در مقایسه با اندازه‌ی شعاعی آن، شرایط تنش صفحه‌ای فرض شده است. روابط تنش-کرنش برای دیسک در مختصات استوانه‌ای به صورت روابط (۵) می‌باشند:

$$\sigma_{rr} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{rr} + \nu \varepsilon_{\theta\theta} - \alpha(1+\nu)\Delta T] \quad (5)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{E}{1-\nu^2} [\varepsilon_{\theta\theta} + \nu \varepsilon_{rr} - \alpha(1+\nu)\Delta T]$$

در روابط (۵)،  $\varepsilon$ ،  $\sigma$ ،  $\Delta T$  به ترتیب معرف تنش، کرنش و اختلاف دما بوده و زیرنویس‌های  $rr$  و  $\theta\theta$  به ترتیب جهت‌های شعاعی و مماسی را نشان می‌دهند. روابط کرنش-جابه‌جایی نیز به صورت روابط (۶) نوشته می‌شوند:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_{\theta\theta} = \frac{u}{r} \quad (6)$$

معادله‌ی تعادل برای دیسک دوار با ضخامت متغیر به صورت رابطه‌ی (۷) بیان می‌شود:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rh\sigma_r) + \frac{-h\sigma_{\theta}}{r} + \rho rh\omega^2 = 0 \quad (7)$$

با جانشانی روابط (۶) در روابط (۵) و سپس جانشانی نتیجه‌ی حاصل در رابطه‌ی (۷)، معادله‌ی دیفرانسیل (۸) برای توصیف جابه‌جایی یک دیسک دوار هدفمند با ضخامت متغیر تحت بارهای ترمومکانیکی به دست می‌آید:

$$C_1 \frac{d^2u}{dr^2} + C_2 \frac{du}{dr} + C_3 u + C_4 = 0 \quad (8)$$

ضرایب  $C_1$  تا  $C_4$  نیز بدین صورت محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} C_1 &= hE \\ C_2 &= E \frac{dh}{dr} + \frac{hE}{r} + h \frac{dE}{dr} \\ C_3 &= \frac{\nu E}{r} \frac{dh}{dr} - \frac{hE}{r^2} + \frac{\nu h}{r} \frac{dE}{dr} \\ C_4 &= -(1+\nu) \left[ \alpha h \frac{dE}{dr} + \alpha E \frac{dh}{dr} + hE \frac{d\alpha}{dr} \right] T \\ &\quad - \alpha(1+\nu) hE \frac{dT}{dr} + (1-\nu^2) \rho rh\omega^2 \end{aligned} \quad (9)$$

این مقایسه از آن جهت مهم است که تعیین پاسخ‌های تحلیلی معادلات دیفرانسیل مذکور برای تمامی حالات بعید به نظر می‌رسد و از این رو انتخاب روش مناسب با دقت کافی و زمان حل مناسب به خصوص برای اهدافی همچون بهینه‌سازی اهمیت ویژه‌ای دارد.

## ۲- مبانی و روش‌ها

### ۲-۱- الگوی توزیع خواص و هندسه‌ی مفروض

در پژوهش حاضر از فرض توزیع خواص توانی برای تمامی خواص فیزیکی همچون چگالی، مدول الاستیسته، ضریب انبساط حرارتی و ضریب رسانش استفاده شده است. لازم به ذکر است که به علت تغییرات جزئی ضریب پواسون، مقدار آن ثابت در نظر گرفته شده است. بر اساس این فرض هر یک از خواص فیزیکی را می‌توان با استفاده از معادله‌ی (۱) توصیف نمود:

$$P(r) = P_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^n \quad (1)$$

که در آن  $P$  خاصیت دلخواه موردنظر و  $P_0$  مقدار آن خاصیت در شعاع خارجی  $r_0$  شعاع دلخواه موردنظر و  $r_i$  شعاع خارجی می‌باشد. توان  $n$  را نیز می‌توان از طریق رابطه‌ی (۲) تعیین نمود:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{P_i}{P_0}\right)}{\ln\left(\frac{r_i}{r_0}\right)} \quad (2)$$

در رابطه‌ی (۲)،  $P_i$  مقدار خاصیت موردنظر در شعاع داخلی و  $r_i$  شعاع داخلی دیسک می‌باشند. توان متناظر برای هر یک از خواص فیزیکی در جدول ۱ موجود است.

جدول ۱- نمادهای مورد استفاده در حل تحلیلی

خاصیت	نماد خاصیت	نماد توان
ضریب رسانش	$k$	$\beta$
مدول الاستیسته	$E$	$\gamma$
ضریب انبساط حرارتی	$\alpha$	$\chi$
چگالی	$\rho$	$\mu$

تغییرات ضخامت در راستای شعاعی نیز مطابق رابطه‌ی (۳) به صورت توانی انگاشته شده است:

$$h(r) = h_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^{-\xi} \quad (3)$$

که در آن  $h_0$  ضخامت دیسک در شعاع خارجی می‌باشد. باید خاطر نشان کرد که به علت مشکلات و محدودیت‌های تولید، تغییرات خصوصیات مواد و همچنین ضخامت دیسک در صنعت دقیقاً مطابق آنچه فرض شده است تولید نمی‌شود ولی با تقریب مناسب می‌توان این تغییرات را با تابع توانی برازش نمود.

با انجام این تغییر متغیر و با جانشانی روابط موجود برای خواص و ضخامت در معادله دیفرانسیل (۱۱) و با دو مرحله انتگرال‌گیری در راستای شعاعی می‌توان نوشت:

$$\theta(\bar{R}) = \frac{a_1}{(\zeta - \beta)} \left( \frac{r_0 - r_i}{r_0} \bar{R} + \frac{r_i}{r_0} \right)^{\zeta - \beta} + a_2 \quad (16)$$

در رابطه‌ی فوق مقادیر  $a_1$  و  $a_2$  ثوابت انتگرال‌گیری می‌باشند. با فرض شرایط مرزی دما ثابت در جدار داخلی و خارجی با توجه به رابطه‌ی (۱۷)، ثوابت انتگرال‌گیری مطابق رابطه‌ی (۱۸) به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \theta(\bar{R}_i) &= \theta_i \\ \theta(\bar{R}_o) &= \theta_o \\ a_1 &= \frac{(\theta_o - \theta_i)(\zeta - \beta)}{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^{\zeta - \beta}}, \quad a_2 = \theta_o - \frac{(\theta_o - \theta_i)}{1 - \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^{\zeta - \beta}} \end{aligned} \quad (18)$$

به این ترتیب می‌توان توزیع دمای به دست آمده را با توزیع دماهای به دست آمده از روش‌های دیگر مقایسه نمود. با تعیین توزیع دما می‌توان به حل معادله دیفرانسیل جابه‌جایی پرداخت. با استفاده از تغییر متغیر (۱۵) و با جانشانی خواص فیزیکی و پروفیل ضخامت مفروض در معادله دیفرانسیل (۱۳) می‌توان به این ضرایب دست یافت:

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \left( \frac{r_0 - r_i}{r_0} \bar{R} + \frac{r_i}{r_0} \right)^{-\zeta + \gamma} \\ \bar{C}_2 &= (\gamma + 1 - \zeta) \left( \frac{r_0 - r_i}{r_0} \bar{R} + \frac{r_i}{r_0} \right)^{-\zeta + \gamma - 1} \\ \bar{C}_3 &= (\nu\gamma - \nu\zeta - 1) \left( \frac{r_0 - r_i}{r_0} \bar{R} + \frac{r_i}{r_0} \right)^{-\zeta + \gamma - 2} \\ \bar{C}_4 &= - \left[ (\gamma + \chi - \zeta)\theta + \left( \frac{r_0 - r_i}{r_0} \bar{R} + \frac{r_i}{r_0} \right) \frac{d\theta}{d\bar{R}} \right] \\ &\quad \times (1 + \nu) \left( \frac{r_0 - r_i}{r_0} \bar{R} + \frac{r_i}{r_0} \right)^{-\zeta + \gamma + \chi - 1} \\ &\quad + (1 - \nu^2) \left( \frac{r_0 - r_i}{r_0} \bar{R} + \frac{r_i}{r_0} \right)^{-\zeta + \mu + 1} \end{aligned} \quad (19)$$

در رابطه‌ی (۱۹)،  $\theta$  توزیع دمای به دست آمده از رابطه‌ی (۱۶) می‌باشد که با جانشانی مقدار آن می‌توان ضریب  $\bar{C}_4$  را به شکل رابطه‌ی (۲۰) نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{C}_4 &= - \left[ \frac{(\gamma + \chi - \beta)}{(\zeta - \beta)} a_1 \left( \frac{r_0 - r_i}{r_0} \bar{R} + \frac{r_i}{r_0} \right)^{\zeta - \beta} \right. \\ &\quad \left. + (\gamma + \chi - \zeta) a_2 \right] \\ &\quad \times (1 + \nu) \left( \frac{r_0 - r_i}{r_0} \bar{R} + \frac{r_i}{r_0} \right)^{-\zeta + \gamma + \chi - 1} \\ &\quad + (1 - \nu^2) \left( \frac{r_0 - r_i}{r_0} \bar{R} + \frac{r_i}{r_0} \right)^{-\zeta + \mu + 1} \end{aligned} \quad (20)$$

شرایط مرزی در نظر گرفته شده برای حل معادله‌ی (۸) به صورت جابه‌جایی آزاد در شعاع داخلی و خارجی دیسک می‌باشد.

## ۲-۴- بی‌بعدسازی معادلات

معادلات دیفرانسیل (۴) و (۸) در جهت افزایش دقت حل با استفاده از تغییر متغیرهای زیر بی‌بعدسازی شده‌اند:

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{T}{\hat{T}}, \quad \hat{T} = \frac{\rho_0 \omega^2 (r_o - r_i)^2}{E_o \alpha_o} \\ \bar{U} &= \frac{u}{\hat{u}}, \quad \hat{u} = \frac{\rho_0 \omega^2 (r_o - r_i)^3}{E_o} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{r - r_i}{r_o - r_i}, \quad \bar{H} = \frac{h}{h_o} \\ \bar{E} &= \frac{E}{E_o}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_o}, \quad \bar{k} = \frac{k}{k_o}, \quad \bar{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha_o} \end{aligned}$$

پس از اعمال بی‌بعدسازی، معادله‌ی (۴) به شکل رابطه‌ی (۱۱) در می‌آید:

$$\bar{H}\bar{K} \frac{d^2\theta}{d\bar{R}^2} + \left( \frac{\bar{H}\bar{K}}{\xi + \bar{R}} + \frac{d}{d\bar{R}}(\bar{H}\bar{K}) \right) \frac{d\theta}{d\bar{R}} = 0 \quad (11)$$

که در آن  $\xi$  مطابق رابطه‌ی (۱۲) تعریف می‌شود:

$$\xi = \frac{r_i}{r_o - r_i} \quad (12)$$

همچنین معادله دیفرانسیل (۸) به رابطه‌ی (۱۳) تبدیل می‌شود:

$$\bar{C}_1 \frac{d^2\bar{U}}{d\bar{R}^2} + \bar{C}_2 \frac{d\bar{U}}{d\bar{R}} + \bar{C}_3\bar{U} + \bar{C}_4 = 0 \quad (13)$$

که در آن ضرایب  $\bar{C}_1$  تا  $\bar{C}_4$  به این صورت به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \bar{C}_1 &= \bar{H}\bar{E} \\ \bar{C}_2 &= \bar{E} \frac{d\bar{H}}{d\bar{R}} + \frac{\bar{H}\bar{E}}{\xi + \bar{R}} + (1 - \nu^2)\bar{H} \frac{d}{d\bar{R}} \left( \frac{\bar{E}}{1 - \nu^2} \right) \\ \bar{C}_3 &= \frac{\nu\bar{E}}{\bar{R}} \frac{d\bar{H}}{d\bar{R}} - \frac{\bar{H}\bar{E}}{(\xi + \bar{R})^2} \\ &\quad + (1 - \nu^2) \frac{\nu\bar{H}}{\xi + \bar{R}} \frac{d}{d\bar{R}} \left( \frac{\bar{E}}{1 - \nu^2} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \bar{C}_4 &= -(1 + \nu) \left[ \bar{\alpha}\bar{H} \frac{d\bar{E}}{d\bar{R}} + \bar{\alpha}\bar{E} \frac{d\bar{H}}{d\bar{R}} + \bar{H}\bar{E} \frac{d\bar{\alpha}}{d\bar{R}} \right] \theta \\ &\quad - \bar{\alpha}(1 + \nu)\bar{H}\bar{E} \frac{d\theta}{d\bar{R}} + (1 - \nu^2)\bar{\rho}(\xi + \bar{R})\bar{H} \end{aligned}$$

## ۲-۵- حل تحلیلی معادلات

برای سهولت در انجام حل تحلیلی، ابتدا از تغییر متغیر (۱۵) استفاده شده است:

$$\hat{R} = \frac{r_o - r_i}{r_o} \bar{R} + \frac{r_i}{r_o} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{U}_p = & \frac{-(1-\nu^2)}{(\mu-q_1-\gamma+3)(\mu-q_2-\gamma+3)} \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{\mu-\gamma+3} \\ & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)a_2}{(\chi-q_1+1)(\chi-q_2+1)} \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{\chi+1} \\ & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)a_1}{(\zeta-\beta)(\zeta-\beta+\chi-q_1+1)(\zeta-\beta+\chi-q_2+1)} \\ & \times \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{\zeta-\beta+\chi+1} \end{aligned} \quad (28)$$

توجه به رابطه‌ی (23) چنین نتیجه‌ای می‌دهد:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= -(\gamma - \zeta) \\ q_1 q_2 &= (\nu\gamma - \nu\zeta - 1) \end{aligned} \quad (29)$$

حال با جانشانی روابط (29) در رابطه‌ی (28) می‌توان داشت:

$$\begin{aligned} \bar{U}_p = & \frac{-(1-\nu^2)}{(\mu-\gamma+3)(\mu-\zeta+3)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)} \\ & \times \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{\mu-\gamma+3} \\ & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)a_2}{(\chi+1)(\chi+\gamma-\zeta+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)} \\ & \times \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{\chi+1} \\ & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)a_1}{(\zeta-\beta)[(\zeta-\beta+\chi+1)(\gamma-\beta+\chi+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)]} \\ & \times \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{\zeta-\beta+\chi+1} \end{aligned} \quad (30)$$

در نهایت جواب کل معادله‌ی دیفرانسیل به صورت رابطه‌ی (31) خواهد بود:

$$\bar{U} = a_1 \bar{U}_1 + a_2 \bar{U}_2 + \bar{U}_p \quad (31)$$

در این مرحله ثابت انتگرال‌گیری را می‌توان با اعمال شرایط مرزی محاسبه نمود. با جانشانی جواب‌های معادلات دیفرانسیل توزیع دما و جابه‌جایی در روابط (5) تنش‌های شعاعی و مماسی به این شرح به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{rr} = & \left\{ \frac{-(\mu-\gamma+3+\nu)(1-\nu^2)}{(\mu-\gamma+3)(\mu-\zeta+3)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)} \right. \\ & \times \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{\mu-\gamma+2} \\ & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\zeta)(\chi+1+\nu)a_2}{(\chi+1)(\chi+\gamma-\zeta+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)} \\ & \times \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{\chi} \\ & + \frac{(1+\nu)(\gamma+\chi-\beta)(\zeta-\beta+\chi+1+\nu)a_1}{(\zeta-\beta)[(\zeta-\beta+\chi+1)(\gamma-\beta+\chi+1)+(\nu\gamma-\nu\zeta-1)]} \\ & \times \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{\mu-\gamma+2\zeta-\beta+\chi} \end{aligned}$$

با جانشانی ضرایب مذکور مشاهده می‌شود که معادله‌ی دیفرانسیل حاصل از نوع معادله‌ی دیفرانسیل اولر-کوشی است. این معادله دارای دو قسمت جواب عمومی و خصوصی می‌باشد که با در نظر گرفتن قسمت همگن این معادله و با استفاده از تغییر متغیر (21) می‌توان نوشت:

$$\bar{Z} = \ln(\hat{R}) \quad (21)$$

$$\frac{d^2 \bar{U}}{d\bar{Z}^2} + (\gamma - \zeta) \frac{d\bar{U}}{d\bar{Z}} + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1)\bar{U} = 0 \quad (22)$$

معادله‌ی دیفرانسیل (22) یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم همگن با ضرایب ثابت است که معادله‌ی مشخصه‌ی آن به شکل رابطه‌ی (23) می‌باشد:

$$q^2 + (\gamma - \zeta)q + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1) = 0 \quad (23)$$

با حل این معادله‌ی جبری، ریشه‌های معادله‌ی مشخصه به دست می‌آیند:

$$q_{1,2} = \frac{-(\gamma - \zeta) \pm \sqrt{(\gamma - \zeta)^2 - 4(\nu\gamma - \nu\zeta - 1)}}{2} \quad (24)$$

با توجه به بازه‌ی تغییرات ضریب پواسون، ریشه‌های رابطه‌ی (24) همواره اعدادی حقیقی خواهند بود. بنابراین جواب‌های قسمت همگن معادله به صورت رابطه‌ی (25) قابل بیان می‌باشند:

$$\begin{aligned} \bar{U}_h &= a_3 \bar{U}_1 + a_4 \bar{U}_2 \\ &= a_3 \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{q_1} + a_4 \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{q_2} \end{aligned} \quad (25)$$

ضرایب  $a_3$  و  $a_4$  ثابت انتگرال‌گیری می‌باشند که با توجه به شرایط مرزی تعیین می‌شوند. برای تعیین جواب‌های خصوصی، روش لاگرانژ به کار گرفته شده که برای استفاده از آن، نخست باید رونسکین جواب‌های همگن به دست آید:

$$\begin{aligned} W &= \begin{vmatrix} \bar{U}_1 & \bar{U}_2 \\ \bar{U}'_1 & \bar{U}'_2 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{q_1} & \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{q_2} \\ q_1 \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{q_1-1} & q_2 \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{q_2-1} \end{vmatrix} \\ &= (q_2 - q_1) \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \bar{R} + \frac{f_1}{r_0} \right)^{q_1+q_2-1} \end{aligned} \quad (26)$$

با استفاده از روش لاگرانژ، جواب قسمت ناهمگن به صورت رابطه‌ی (27) قابل بیان است:

$$\begin{aligned} \bar{U}_p &= -\bar{U}_1 \int \frac{\bar{U}_2 \left( -\frac{\bar{C}_4}{\bar{C}_1} \right) \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \right) d\bar{R}}{W} \\ &+ \bar{U}_2 \int \frac{\bar{U}_1 \left( -\frac{\bar{C}_4}{\bar{C}_1} \right) \left( \frac{r_0-f_1}{r_0} \right) d\bar{R}}{W} \end{aligned} \quad (27)$$

با جانشانی روابط مربوط و انتگرال‌گیری می‌توان نوشت:

$$a_3 = \frac{-1}{(q_1 + \nu) \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^{q_1 - q_2} \right]} \times \left[ \frac{-(\mu - \gamma + 3 + \nu)(1 - \nu^2)}{(\mu - \gamma + 3)(\mu - \zeta + 3) + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1)} \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^{\mu - \gamma - q_2 + 3} \right] \right. \\ \left. + \frac{(1 + \nu)(\gamma + \chi - \zeta)(\chi + 1 + \nu)a_2}{(\chi + 1)(\chi + \gamma - \zeta + 1) + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1)} \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^{\chi - q_2 + 2} \right] \right. \\ \left. + \frac{(1 + \nu)(\gamma + \chi - \beta)(\zeta - \beta + \chi + 1 + \nu)a_1}{(\zeta - \beta)[(\zeta - \beta + \chi + 1)(\gamma - \beta + \chi + 1) + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1)]} \right. \\ \left. \times \left[ 1 - \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^{\zeta - \beta + \chi - q_2 + 2} \right] \right] \quad (35)$$

$$- (1 + \nu) \left[ \frac{a_1}{(\zeta - \beta)} + a_2 \right] \\ + \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^{\chi - q_2 + 1} (1 + \nu) \left[ \frac{a_1}{(\zeta - \beta)} \left( \frac{r_i}{r_o} \right)^{\zeta - \beta} + a_2 \right]$$

$$a_4 = \frac{-1}{(q_2 + \nu)} \times \left[ \frac{-(\mu - \gamma + 3 + \nu)(1 - \nu^2)}{(\mu - \gamma + 3)(\mu - \zeta + 3) + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1)} \right. \\ \left. + \frac{(1 + \nu)(\gamma + \chi - \zeta)(\chi + 1 + \nu)a_2}{(\chi + 1)(\chi + \gamma - \zeta + 1) + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1)} \right. \\ \left. + \frac{(1 + \nu)(\gamma + \chi - \beta)(\zeta - \beta + \chi + 1 + \nu)a_1}{(\zeta - \beta)[(\zeta - \beta + \chi + 1)(\gamma - \beta + \chi + 1) + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1)]} \right. \\ \left. + a_3(q_1 + \nu) \right] \quad (36)$$

$$\bar{\sigma}_{eq} = \sqrt{\bar{\sigma}_{rr}^2 - \bar{\sigma}_{rr}\bar{\sigma}_{\theta\theta} + \bar{\sigma}_{\theta\theta}^2} \quad (37)$$

## ۲-۶- حل شبه تحلیلی

از آنجایی که یافتن حل تحلیلی دو معادله‌ی دیفرانسیل (۱۱) و (۱۳) برای تمامی حالات بعید به نظر می‌رسد، برای تحلیل دیسک‌هایی با هندسه، توزیع مواد و یا شرایط مرزی پیچیده، استفاده از روش‌های شبه تحلیلی یا عددی نیز پیشنهاد می‌شود. در این قسمت به معرفی روش شبه تحلیلی گسسته‌سازی [۱] پرداخته می‌شود. در این روش دیسک به n حلقه با ضخامت معلوم تقسیم شده و خواص مواد در هر حلقه ثابت در نظر گرفته می‌شود. این امر معادلات دیفرانسیل موجود را به مجموعه‌ی معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم خطی ناهمگن با ضرایب ثابت تبدیل می‌کند که حل تحلیلی آن موجود است. شکل ۱ این تقسیم‌بندی را نشان می‌دهد. به منظور یافتن ثوابت انتگرال‌گیری حاصل از حل، باید در مرز المان‌ها شرایط پیوستگی اعمال شود. این شرایط برای معادله‌ی دیفرانسیل (۱۱) شرایط پیوستگی دمایی مرتبه‌ی اول و دوم می‌باشند که شامل برابری مقادیر و شیب

$$- \left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{\chi} (1 + \nu) \quad (32)$$

$$\times \left[ \frac{a_1}{(\zeta - \beta)} \left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{\zeta - \beta} + a_2 \right] \\ + a_3(q_1 + \nu) \left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{q_1 - 1} \\ + a_4(q_2 + \nu) \left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{q_2 - 1} \left. \right\} \\ \times \frac{\left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{\gamma}}{1 - \nu^2}$$

$$\bar{\sigma}_{\theta\theta} = \left[ \frac{-(\mu\nu - \gamma\nu + 3\nu + 1)(1 - \nu^2)}{(\mu - \gamma + 3)(\mu - \zeta + 3) + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1)} \right. \\ \left. \times \left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{\mu - \gamma + 2} \right. \\ \left. + \frac{(1 + \nu)(\gamma + \chi - \zeta)(\chi\nu + 1 + \nu)a_2}{(\chi + 1)(\chi + \gamma - \zeta + 1) + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1)} \right. \\ \left. \times \left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{\chi} \right. \\ \left. + \frac{(1 + \nu)(\gamma + \chi - \beta)(\zeta\nu - \beta\nu + \chi\nu + 1 + \nu)a_1}{(\zeta - \beta)[(\zeta - \beta + \chi + 1)(\gamma - \beta + \chi + 1) + (\nu\gamma - \nu\zeta - 1)]} \right. \\ \left. \times \left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{\zeta - \beta + \chi} \right] \quad (33)$$

$$- \left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{\chi} (1 + \nu)$$

$$\times \left[ \frac{a_1}{(\zeta - \beta)} \left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{\zeta - \beta} + a_2 \right] \\ + a_3(1 + q_1\nu) \left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{q_1 - 1} \\ + a_4(1 + q_2\nu) \left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{q_2 - 1} \left. \right\} \\ \times \frac{\left( \frac{r_o - r_i \bar{R} + r_i}{r_o} \right)^{\gamma}}{1 - \nu^2}$$

شرایط مرزی جابه‌جایی آزاد در جداری داخلی و خارجی در رابطه‌ی (۳۴) آورده شده است:

$$\bar{\sigma}_{rr}(\bar{R}_i) = 0 \quad (34)$$

$$\bar{\sigma}_{rr}(\bar{R}_o) = 0$$

با اعمال این رابطه، شرایط مرزی مطابق روابط (۳۵) و (۳۶) تعیین می‌شوند. با توجه به وضعیت تنش صفحه‌ای، تنش مؤثر نیز با استفاده از رابطه‌ی (۳۷) محاسبه می‌شود:

است که از جمله روش‌های پرکاربرد در این مورد، استفاده از ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف می‌باشد. با استفاده از ریشه‌های چندجمله‌ای چبیشف فواصل بین نقاط نمونه با رابطه‌ی (۴۱) تعریف می‌شود [۱۱]:

$$r_i = \frac{R}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{i-1}{N-1} \pi \right) \right], \quad i=1, \dots, N \quad (41)$$

که در آن  $r_i$  و  $R$  به ترتیب معرف فاصله‌ی بین نقاط و طول دامنه می‌باشند. چنان‌که پیش‌تر توضیح آن گذشت، برای حل یک معادله‌ی دیفرانسیل با این روش، باید مشتقات را به صورت حاصلضرب ماتریسی ضرایب وزنی در بردار مجهولات نوشت. روش‌های مختلفی برای تعیین ماتریس ضرایب وزنی پیشنهاد شده است. در این روش‌ها نخست با استفاده از تابع معلوم  $f$ ، معروف به تابع آزمایش، مشتقات محاسبه و ضرایب وزنی تعیین می‌شوند؛ سپس، برای محاسبه‌ی مشتقات توابع مجهول معادله‌ی دیفرانسیل از این ضرایب استفاده می‌شود. در این پژوهش از روش دوم بلمن که مبتنی بر چندجمله‌ای‌های لاگرانژ می‌باشد استفاده شده است [۱۰]. با انتخاب ریشه‌های چندجمله‌ای‌های انتقال‌یافته‌ی لاگرانژ به‌عنوان توابع آزمایش، روابط جبری (۴۲) برای محاسبه‌ی ضرایب وزنی به‌دست می‌آیند [۱۲ و ۱۳]:

$$a_{ij}^{(l)} = \begin{cases} \frac{O(r_i)}{(r_i - r_j)O(r_j)}, & \text{if } i \neq j, i, j=1, 2, \dots, N \\ - \sum_{j=1, j \neq i} a_{ij}^{(l)}, & \text{if } i = j, j=1, 2, \dots, N \end{cases} \quad (42)$$

که در آنها:

$$O(r_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^N (r_i - r_j) \quad (43)$$

برای مشتق مرتبه‌ی بالاتر  $\lambda$  می‌توان نوشت [۱۰]:

$$a_{ij}^{(\lambda)} = n \left( a_{ii}^{(\lambda-1)} a_{ij}^{(l)} - \frac{a_{ij}^{(\lambda-1)}}{(r_i - r_j)} \right) \quad (44)$$

برای به‌دست آوردن ضرایب وزنی مشتقات بالاتر می‌توان به این صورت نیز عمل نمود [۱۰]:

$$[a^{(\lambda)}] = [a^{(l)}]^\lambda \quad (45)$$

برای اعمال شرایط مرزی نیز از روش اصلاح ماتریس ضرایب وزنی استفاده شده است.

## ۲-۸- روش المان محدود

توزیع دما و تنش-کرنش در دیسک‌های دوار را می‌توان با استفاده از روش المان محدود نیز تعیین کرد. بدین‌منظور دیسک به تعداد محدودی حلقه تقسیم و خواص هر حلقه ثابت فرض می‌شود. سپس این حلقه‌ها با روش المان محدود مدل شده و در مرز میان حلقه‌ها، سطوح موجود به هم متصل می‌شوند.

تغییرات دما در مرز المان‌هاست که با رابطه‌ی (۳۸) بیان می‌گردد:

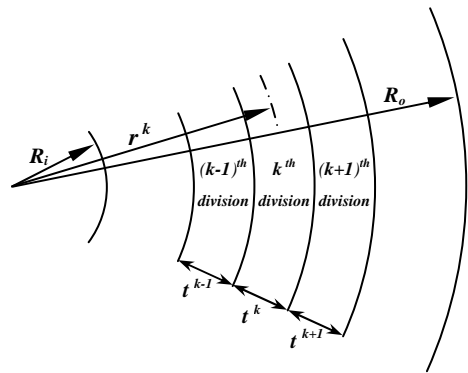
$$\theta(r) \Big|_{r=r^k + \frac{t^k}{2}} = \theta(r) \Big|_{r=r^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}} \quad (38)$$

$$\frac{d\theta(r)}{dR} \Big|_{r=r^k + \frac{t^k}{2}} = \frac{d\theta(r)}{dR} \Big|_{r=r^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}}$$

شرایط پیوستگی برای معادله‌ی دیفرانسیل (۱۳) نیز شامل برابری جابه‌جایی‌ها و شیب جابه‌جایی‌ها در مرز المان‌هاست. این شرایط با رابطه‌ی (۳۹) بیان می‌شود:

$$\bar{U}(r) \Big|_{r=r^k + \frac{t^k}{2}} = \bar{U}(r) \Big|_{r=r^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}} \quad (39)$$

$$\frac{d\bar{U}(r)}{dR} \Big|_{r=r^k + \frac{t^k}{2}} = \frac{d\bar{U}(r)}{dR} \Big|_{r=r^{k+1} - \frac{t^{k+1}}{2}}$$



شکل ۱- تقسیم‌بندی شعاعی دیسک

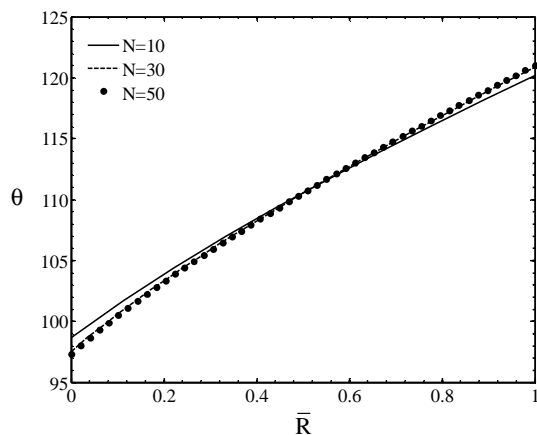
## ۲-۷- روش کوادراتور دیفرانسیلی (DQM)

روش کوادراتور دیفرانسیلی از جمله‌ی روش‌های عددی است که در آنها با استفاده از ضرایب وزنی، معادلات دیفرانسیلی حاکم به دسته‌ای از معادلات جبری مرتبه‌ی اول تبدیل می‌شوند. بدین ترتیب که در هر نقطه، مشتق به صورت ترکیب خطی وزن‌دار مقادیر تابع در آن نقطه و دیگر نقاط دامنه بیان می‌شود. رابطه‌ی اصلی این روش در حالت تک‌بعدی، به شکل رابطه‌ی (۴۰) بیان می‌شود [۱۰]:

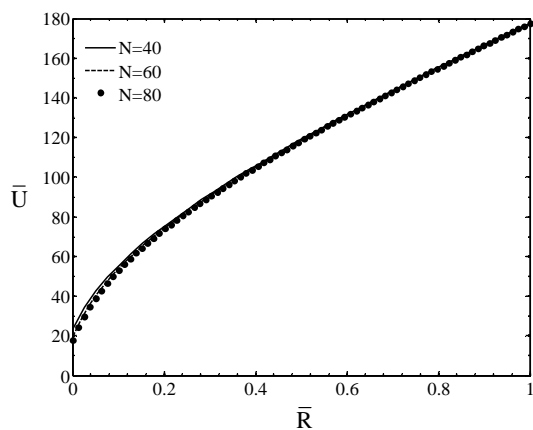
$$\frac{df}{dx} \Big|_{r=r_i} = \sum_{j=1}^N C_{ij} f_j \quad (40)$$

که در آن  $f_i$ ،  $f$ ،  $N$  و  $r_i$  به ترتیب تابع موردنظر، مقدار تابع در نقاط نمونه، تعداد نقاط نمونه و موقعیت نقطه‌ی نمونه‌ی  $i$ ام می‌باشند. همچنین در این رابطه  $C_{ij}$  ضرایب وزنی لازم برای محاسبه‌ی مشتق می‌باشد. نحوه‌ی انتخاب نقاط نمونه یکی از مهمترین پارامترهای مؤثر در دقت جواب‌هاست؛ چند روش برای انتخاب نقاط نمونه وجود دارد اما تجربه نشان داده است که انتخاب نقاط نمونه با فواصل نامساوی به جواب‌های دقیق‌تر می‌انجامد [۱۱]. استفاده از ریشه‌های چندجمله‌ای‌های متعامد یکی از روش‌های رایج در انتخاب نقاط نمونه با فواصل نامساوی

در دو روش حل شبه‌تحلیلی و DQM به‌ترتیب تعداد لایه‌ها و تعداد نقاط آزمون تا همگرایی پاسخ‌ها افزایش داده شده است. نتایج به‌دست‌آمده برای توزیع دمای بی‌بعد در حل حرارتی و جابه‌جایی بی‌بعد در حل مکانیکی در ضخامت دیسک بر حسب تعداد لایه‌های مختلف به‌ترتیب در شکل‌های ۲ و ۳ قابل مشاهده است. با توجه به همگرایی نتایج ارائه‌شده در دو شکل ۲ و ۳، ۳۰ لایه در حل حرارتی و ۶۰ لایه در حل مکانیکی مناسب می‌باشند.



شکل ۲- تغییرات توزیع دمای بی‌بعد در جداره‌ی دیسک به‌منظور آزمون حساسیت به تعداد لایه‌ها در روش شبه‌تحلیلی برای حل حرارتی



شکل ۳- تغییرات توزیع جابه‌جایی بی‌بعد در جداره‌ی دیسک به‌منظور آزمون حساسیت به تعداد لایه‌ها در روش شبه‌تحلیلی برای حل مکانیکی

نتایج آزمون حساسیت به تعداد نقاط در روش کوادراتور دیفرانسیلی برای حل‌های حرارتی و مکانیکی به‌ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵ قابل مشاهده است. در این شکل‌ها توزیع دما و جابه‌جایی بی‌بعد در جداره‌ی دیسک بر حسب تعداد نقاط آزمون ارائه شده‌اند. چنان‌که مشاهده می‌شود، حل حرارتی و مکانیکی هریک به‌ترتیب با ۸ و ۱۴ نقطه‌ی آزمون همگرا می‌شوند.

در پژوهش حاضر برای انجام تحلیل المان محدود مسئله از نرم‌افزار المان محدود انسیس استفاده شده است. تحلیل صورت گرفته به‌صورت کوپل غیرمستقیم و در دو بخش حرارتی و مکانیکی انجام شده است. همچنین تحلیل المان محدود مسئله به‌صورت دوبعدی و با فرض وجود تقارن محوری با استفاده از المان‌های PLANE55 و PLANE182 [۱۴] صورت گرفته است. در حل مکانیکی نیز سرعت دورانی ثابت به‌عنوان نیروی حجمی اعمال شده است. لازم به‌ذکر است برای راحتی کار زبان پارامتری انسیس برای نگارش کد ماکرو به‌کار رفته است.

### ۳- نتایج

در این قسمت نتایج به‌دست‌آمده از روش‌های معرفی‌شده باهم مقایسه شده‌اند. بدین منظور دیسکی با مشخصات ارائه‌شده در جدول ۲ مورد بررسی قرار گرفته است. فرض شده است دیسک حاصل، ترکیب هدفمند دو ماده‌ی آلومینیوم (Al) و سیلیکون کاربید (SiC) با خلوص آلومینیوم در جدار داخلی و خلوص سیلیکون کاربید در جدار خارجی باشد. توان متناظر با توزیع خواص فیزیکی از طریق رابطه‌ی (۲) محاسبه شده و جدول ۳ مقدار خواص فیزیکی مفروض را ارائه می‌دهد. لازم به‌ذکر است مقدار ضریب پواسون برابر با ۰٫۲۵ در نظر گرفته شده است.

جدول ۲- مشخصات و شرایط کاری دیسک دوار مورد مطالعه

مقدار مفروض	مشخصه
۱۲٫۵	نسبت قطر خارجی به داخلی
۸۰	قطر داخلی، $d_i$ (mm)
۱۰۰۰	سرعت دورانی (rpm)
۷۰۰	دما در جداره‌ی داخلی (K)
۸۰۰	دما در جداره‌ی خارجی (K)
۳۰۰	دمای مرجع (K)
$0.105 \bar{R}^{-1.5}$	پروفیل ضخامت (mm)

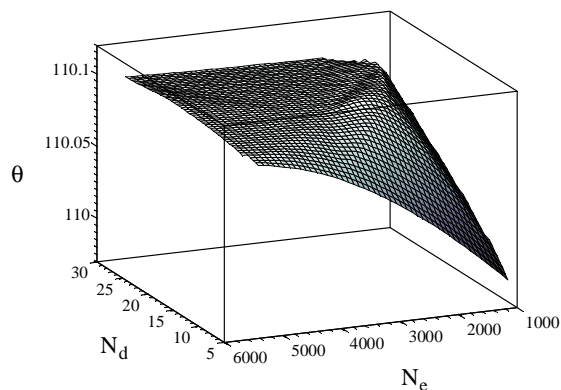
جدول ۳- مقدار خواص فیزیکی مفروض [۱۵]

SiC	Al	مشخصه
۱۲۰	۲۳۷	ضریب رسانش، $k$ (W/m.°C)
۴۱۰	۷۰	مدول الاستیسیته، $E$ (MPa)
$4 \times 10^{-6}$	$23.1 \times 10^{-6}$	ضریب انبساط حرارتی، $\alpha$ (1/K)
۳۲۰۰	۲۷۰۰	چگالی، $\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )

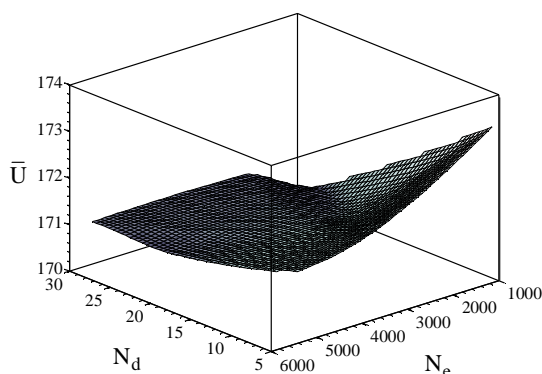
### ۳-۱- آزمون حساسیت

در استفاده از روش‌های شبه‌تحلیلی، DQM و المان محدود، نخست باید به‌ترتیب آزمون حساسیت به تعداد تقسیمات، تعداد نقاط آزمون و تعداد المان‌ها و تقسیمات انجام شود.

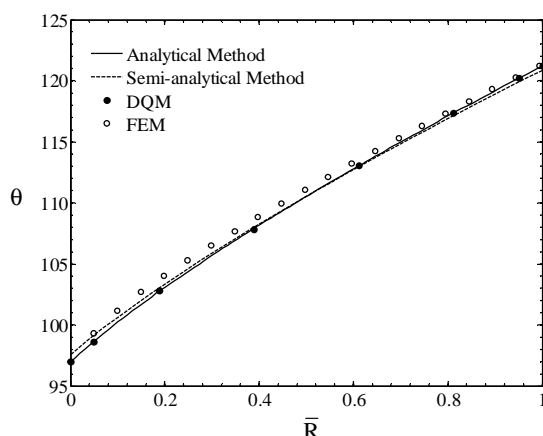




شکل ۶- تغییرات توزیع دمای بی بعد در شعاع میانی دیسک بر حسب تعداد المان ( $N_e$ ) و تعداد تقسیمات ( $N_d$ ) به منظور آزمون حساسیت در روش المان محدود برای حل حرارتی

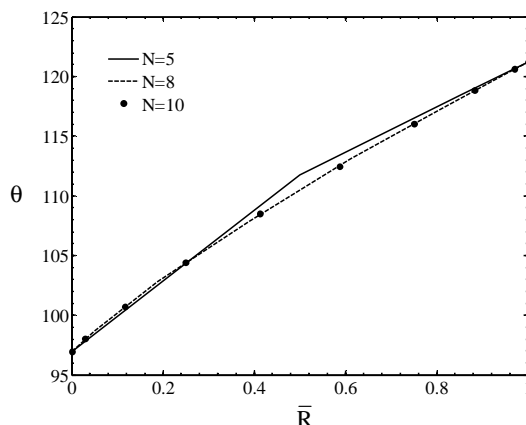


شکل ۷- تغییرات توزیع جابه جایی بی بعد در شعاع میانی دیسک بر حسب تعداد المان ( $N_e$ ) و تعداد تقسیمات ( $N_d$ ) به منظور آزمون حساسیت در روش المان محدود برای حل مکانیکی

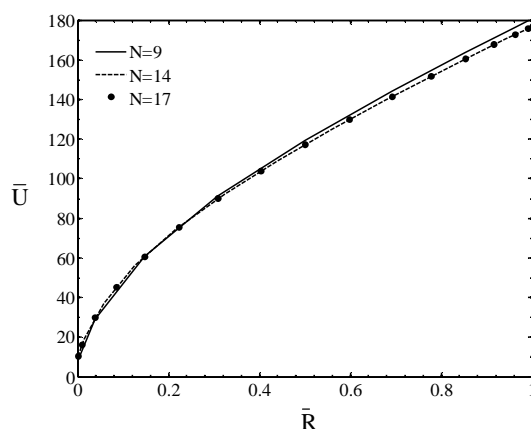


شکل ۸- مقایسه ی توزیع دمای بی بعد به دست آمده در جداره ی دیسک با روش های مختلف

شکل ۹ مقایسه ی جابه جایی بی بعد به دست آمده از روش های مختلف را نمایش می دهد. چنان که مشاهده می شود، نتایج



شکل ۴- تغییرات توزیع دمای بی بعد در جداره ی دیسک به منظور آزمون حساسیت به تعداد نقاط آزمون در DQM برای حل حرارتی



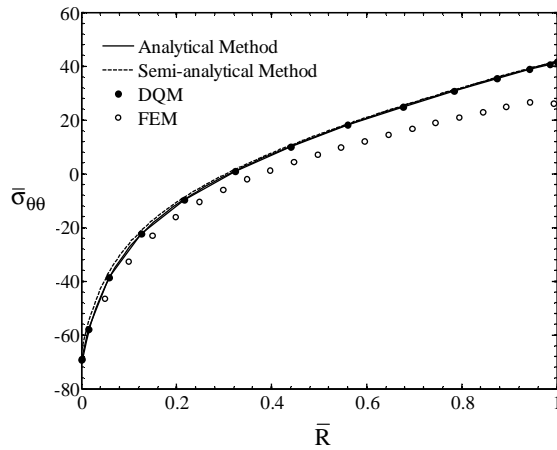
شکل ۵- تغییرات توزیع جابه جایی بی بعد در جداره ی دیسک به منظور آزمون حساسیت به تعداد نقاط آزمون در DQM برای حل مکانیکی

در روش تحلیل المان محدود علاوه بر تعیین تعداد تقسیمات، می بایست تعداد المان ها نیز تعیین شوند. شکل های ۶ و ۷ به ترتیب آزمون حساسیت به تعداد تقسیمات و المان ها را در مورد حل حرارتی و مکانیکی نمایش می دهند. لازم به ذکر است نتایج دو شکل ۶ و ۷ به ترتیب برای دما و جابه جایی بی بعد در شعاع میانی دیسک استخراج شده اند.

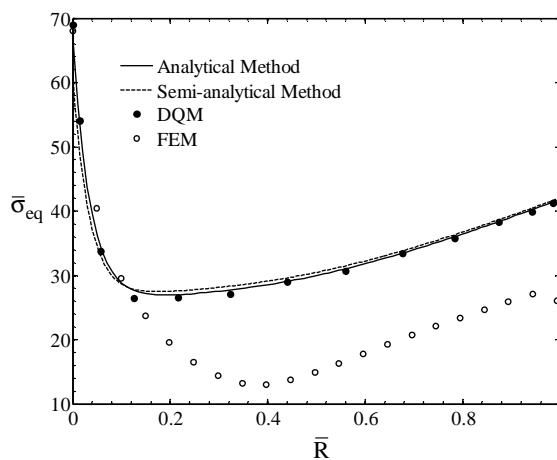
همگرایی نتایج آزمون حاکی از کفایت ۱۵ قسمت با ۳۵۰۰ المان در حل حرارتی و ۲۰ قسمت با ۵۶۰۰ المان در حل مکانیکی با استفاده از روش المان محدود دارد.

### ۳-۲- مقایسه ی نتایج روش های مختلف

پس از انجام آزمون های حساسیت، در این مرحله نتایج حاصل از روش های مختلف با هم مقایسه شده اند. شکل ۸ نتایج حاصل از تعیین توزیع دمای بی بعد به دست آمده با استفاده از روش های مختلف را نمایش می دهد. چنان که مشاهده می شود روش های مختلف توافق خوبی با یکدیگر دارند.



شکل ۱۱- مقایسه‌ی روش‌های مختلف در تعیین تنش مماسی بی‌بعد



شکل ۱۲- مقایسه‌ی روش‌های مختلف در تعیین تنش معادل بی‌بعد

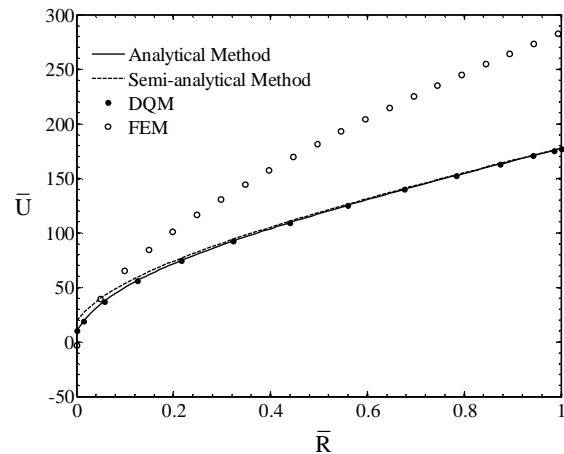
برای مقایسه‌ی زمان حل لازم در روش‌های معرفی‌شده، به‌منظور حذف تغییرات زمان پردازش، هر مورد ۱۰۰۰ بار حل شده و زمان حل هر روش از متوسط‌گیری زمان‌های به‌دست‌آمده محاسبه شده است. لازم به‌ذکر است که حل‌ها توسط نرم‌افزار متلب در پردازنده‌ای ۶۴ بیتی با مشخصات Intel® Core™ i7 CPU 960 @ 3.20 GHz با حافظه‌ی دسترسی تصادفی<sup>۱</sup> ۱۲ گیگابایتی صورت گرفته شده است. با توجه به نتایج مقایسه که در جدول ۴ آمده است روش حل شبه‌تحلیلی در مقایسه با دیگر روش‌ها زمان حل پایین‌تری دارد.

جدول ۴- مقایسه‌ی زمان حل روش‌های مختلف

زمان یک حل (ثانیه)		روش حل
حل حرارتی	حل مکانیکی	
$0.57 \times 10^{-3}$	$1.38 \times 10^{-3}$	شبه‌تحلیلی
$2.49 \times 10^{-3}$	$2.74 \times 10^{-3}$	DQ
۶۱	۸۰	FE

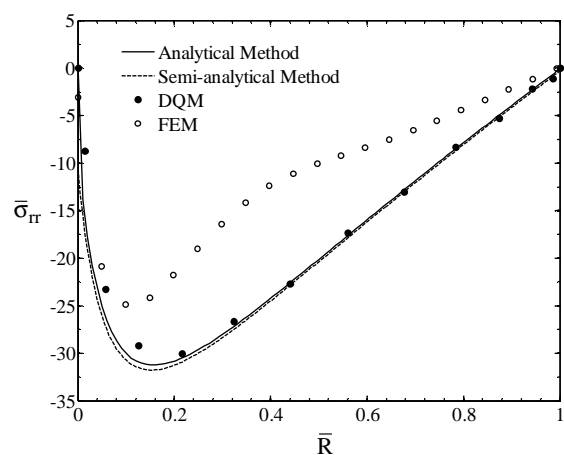
<sup>۱</sup> Random Access Memory (RAM)

روش‌های حل تحلیلی، شبه‌تحلیلی و DQM برهم منطبق بوده و نتایج روش المان محدود با نتایج سه روش دیگر اختلاف دارد. دلیل عمده‌ی اختلاف نتایج روش المان محدود عدم امکان اعمال شرایط تنش صفحه‌ای در حالت تقارن محوری است. لازم به‌ذکر است اختلاف مذکور با افزایش فاصله از مرکز دیسک دوار افزایش می‌یابد و در بیشترین حالت در مقایسه با پاسخ‌های تحلیلی به ۳۷/۳۱ درصد می‌رسد.



شکل ۹- مقایسه‌ی روش‌های مختلف در تعیین جابه‌جایی بی‌بعد

شکل‌های ۱۰، ۱۱ و ۱۲ به‌ترتیب توزیع تنش شعاعی، مماسی و معادل بی‌بعد را در مقابل شعاع بی‌بعد نمایش می‌دهند. با توجه به شکل ۱۲، روش‌های مختلف نتایج یکسانی را در تعیین مقدار تنش معادل بیشینه که در جدار داخلی دیسک اتفاق می‌افتد، ارائه می‌دهند؛ در حالی‌که با پیشروی در طول شعاع دیسک، اختلاف بین روش المان محدود و روش‌های تحلیلی، شبه‌تحلیلی و DQM بیشتر می‌شود. همان‌طور که قبلاً نیز توضیح داده شد، این امر به علت عدم امکان تعریف حالت تنش صفحه‌ای در مدل المان محدود با تقارن محوری می‌باشد.



شکل ۱۰- مقایسه‌ی روش‌های مختلف در تعیین تنش شعاعی بی‌بعد

#### ۴- نتیجه گیری

در این پژوهش ابتدا معادلات تحلیل ترمومکانیکی یک دیسک دوار هدفمند با ضخامت متغیر، با فرض توزیع خواص توانی گسترش یافته و سپس چهار روش حل تحلیلی، شبه تحلیلی، کوادراتور دیفرانسیلی و تحلیل المان محدود با یکدیگر مقایسه شده‌اند. با توجه به اینکه حل تحلیلی معادلات موجود در تمامی حالات بعید به نظر می‌رسد، تعیین روشی با دقت کافی و زمان حل مناسب ضروری است. نتایج بررسی حاکی از آن است که از طرفی حل شبه تحلیلی با سرعت حل بالاتری صورت می‌گیرد اما از طرف دیگر روش DQM که دارای عمومیت و نیز سرعت همگرایی بیشتری است، نسبت به سایر روش‌ها برتری دارد.

#### مراجع

- سوم"، مجله‌ی مهندسی مکانیک مدرس، دوره‌ی ۱۴، شماره‌ی ۱، صفحه‌ی ۱۷۵ تا ۱۸۸، ۲۰۱۴.
- [10] Shu, C., "Differential quadrature and its application in engineering", Springer, 2000.
- [11] Bert, C.W., Malik, M., "The differential quadrature method for irregular domains and application to plate vibration", *International journal of mechanical sciences*, vol. 38, no. 6, pp. 589-606, 1996.
- [12] Fereidoon, A., & Mohyeddin, A., "Bending analysis of thin functionally graded plates using generalized differential quadrature method", *Archive of Applied Mechanics*, vol. 81, no. 11, pp.1523-1539, 2011.
- [13] Rajasekaran, S., "Differential transformation and differential quadrature methods for centrifugally stiffened axially functionally graded tapered beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, vol. 74, pp. 15-31, 2013.
- [14] Fluent, A. N. S. Y. S., 14.0 User's Manual. ANSYS Inc., Canonsburg, PA, 2011.
- [15] Loghman, A., Arani, A. G., Shajari, A. R., & Amir, S., "Time-dependent thermoelastic creep analysis of rotating disk made of Al-SiC composite", *Archive of Applied Mechanics*, vol. 81, no. 12, pp.1853-1864, 2011.
- [1] Kordkheili, S. A., & Naghdabadi, R., "Thermoelastic analysis of a functionally graded rotating disk", *Composite Structures*, vol. 79, no. 4, pp. 508-516, 2007.
- [2] You, L. H., You, X. Y., Zhang, J. J., & Li, J., "On rotating circular disks with varying material properties", *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, vol. 58, no. 6, pp.1068-1084, 2007.
- [3] Vivio, F., & Vullo, V., "Elastic stress analysis of rotating converging conical disks subjected to thermal load and having variable density along the radius", *International journal of solids and structures*, vol. 44, no. 24, pp. 7767-7784, 2007.
- [4] Vullo, V., & Vivio, F., "Elastic stress analysis of non-linear variable thickness rotating disks subjected to thermal load and having variable density along the radius", *International Journal of Solids and Structures*, vol. 45, no. 20, pp. 5337-5355, 2008.
- [5] Zenkour, A. M., "Stress distribution in rotating composite structures of functionally graded solid disks", *Journal of Materials Processing Technology*, vol. 209, no. 7, pp. 3511-3517, 2009.
- [6] Bayat, M., Saleem, M., Sahari, B. B., Hamouda, A. M. S., & Mahdi, E., "Mechanical and thermal stresses in a functionally graded rotating disk with variable thickness due to radially symmetry loads", *International Journal of Pressure Vessels and Piping*, vol. 86, no. 6, pp. 357-372, 2009.
- [7] Nie, G. J., & Batra, R. C., "Stress analysis and material tailoring in isotropic linear thermoelastic incompressible functionally graded rotating disks of variable thickness", *Composite Structures*, vol. 92, no. 3, pp. 720-729, 2010.
- [8] Hassani, A., Hojjati, M. H., Farrahi, G., & Alashti, R. A., "Semi-exact elastic solutions for thermo-mechanical analysis of functionally graded rotating disks", *Composite Structures*, vol. 93, no. 12, pp. 3239-3251, 2011.
- [۹] احمدی نوخندان، مصطفی و جبارزاده گنجی، مهرداد، "تحلیل غیرخطی ترموالاستیک دیسک‌های دوار توخالی FGM با استفاده از تئوری‌های تغییرشکل برشی مرتبه اول و