

ارتعاشات غیرخطی لوله ترک‌دار با ترک باز و بسته شونده

دانشیار، دانشگاه تبریز، دانشکده فنی مهندسی مکانیک
دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه تبریز، دانشکده فنی مهندسی مکانیک
دانشیار، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، مرکز کامپوزیت
کارشناس مهندسی مکانیک، شرکت بهاب تدبیر

موسی رضائی*
وحید عرب‌ملکی
جعفر اسکندری جم
پیمان فرزانفرد

چکیده

در مقاله حاضر، معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاشات عرضی لوله ترک‌دار با بکارگیری اصل Hu-Washizu استخراج گردیده است. اثر ترک به صورت اغتشاش پیوسته در میدان‌های تنش و جابجائی مدل شده است. به منظور به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی لوله با ترک باز و بسته شونده، مدل دو خطی جدیدی برای سفتی معادل در هر شکل مود ارتعاش عرضی ارائه شده است. به کمک این مدل، معادله دیفرانسیل حاکم به شکل قابل حل به روش لیندست-پوانکاره تبدیل و فرکانس‌های طبیعی لوله با ترک باز و بسته شونده استخراج شد. جمله اول حل تحلیلی، معرف پاسخ سیستم خطی متناظر با سفتی میانگین لوله در حالت‌های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک بوده و جملات بعد نشان دهنده اثر غیرخطی ناشی از باز و بسته شدن ترک می‌باشند. نتایج نشان می‌دهد که کاهش فرکانس‌های طبیعی برای ترک باز و بسته شونده کمتر از ترک باز می‌باشد. صحت نتایج به دست آمده با استفاده از نتایج تجربی موجود در ادبیات فن به اثبات رسیده است.

واژه‌های کلیدی: آنالیز ارتعاشی، لوله ترک‌دار، مدل پیوسته، ترک باز و بسته شونده، روش لیندست-پوانکاره

Nonlinear Vibration of a Cracked Pipe with a Breathing Crack

M. Rezaee Associate Professor, University of Tabriz, Faculty of Mechanical Engineering
V. A. Maleki M.Sc. student, University of Tabriz, Faculty of Mechanical Engineering
J. E. Jam Associate Professor, Malek Ashtar University, Composite Materials and Technology, Center of Technology
P. Farzanfard B.Sc. of Mechanical Engineering, Behab Tadbir Co

Abstract

In this paper, using the Hu-Washisu principle, the equation governing the lateral vibration of a pipe with a breathing crack has been derived. The crack is modeled as a continuous disturbance function in stress and displacement fields. In order to obtain the natural frequencies of the pipe with a breathing crack, a new model is introduced for the bilinear stiffness of the pipe at each lateral vibration mode. Using this model, the governing equation of motion is converted into the standard form which can be analyzed by the Lindstedt-Poincaré method. Then the natural frequencies of the cracked pipe are derived. The first term of the solution is the response of the corresponding linear system with a stiffness equal to the mean value of the cracked pipe stiffness in fully open and fully closed cases of the crack, and the remaining terms represent the effect of nonlinearity due to the opening and closing the crack. The results reveal that the reduction in the natural frequencies for the case of breathing crack is less than that for open crack. The accuracy of the model is verified by comparing the theoretical results with the experimental data reported in the literature.

Keywords: Vibration analysis, Cracked pipe, Breathing crack, Continuous model, Lindstedt-Poincaré

ترک باز برای بررسی رفتار ترک خستگی می‌تواند منجر به نتایج نادرستی شود که مهم‌ترین آن پیش‌بینی عمق ترک خستگی کمتر از مقدار واقعی آن است. اخیراً محققین متعددی به بررسی رفتار ارتعاشی تیرهای ترکدار با مدل ترک باز و بسته شونده ترک پرداخته‌اند ولی تاکنون مدل باز و بسته شونده ترک در مورد لوله‌های ترکدار ارائه نشده است.

هدف اصلی تحقیق حاضر، ارائه مدل پیوسته جدیدی برای مطالعه رفتار ارتعاشی لوله‌های ترکدار با ترک باز و بسته شونده می‌باشد. بدین مظور، اثر ترک به صورت اغتشاش پیوسته که در میدان‌های جابجایی، تنش و کرنش اثر می‌کند مدل شده است. با مدنظر قرار دادن تابع اثر ترک، فرضیات سینماتیکی جدیدی برای لوله ترکدار با ترک باز و بسته شونده پیشنهاد شده است. پس از استخراج معادله حرکت با استفاده از اصل Hu-Washizu خطی، معادله دیفرانسیل حاکم به شکل استانداردی که قابل تحلیل با روش اغتشاشات باشد، نوشته می‌شود. سپس پاسخ سیستم با استفاده از روش لیندست-پوانکاره به دست می‌آید. نتایج نشان می‌دهد جملات تصحیح اضافه شده به پاسخ سیستم خطی متناظر در برگیرنده رفتار غیر خطی سیستم ناشی از باز و بسته شدن ترک، می‌باشد که با افزایش عمق ترک تأثیر آنها بر پاسخ سیستم خطی افزایش می‌یابد. صحت نتایج به دست آمده توسط نتایج تجربی موجود در ادبیات فن به اثبات رسیده است. نتایج نشان می‌دهد که مدل جدید ارائه شده با دقت مناسبی رفتار ارتعاشی لوله‌های ترکدار را به ازای بازه گسترده‌ای از پارامترهای ترک پیش‌بینی می‌کند.

۲- فرضیات سینماتیکی برای ترک باز و بسته شونده
در مدل پیوسته ترک، اثر ترک به صورت یک تابع پیوسته بیان می‌شود که توزیع تنش و کرنش ناشی از ترک در سازه را تحت تأثیر قرار می‌دهد. تادا و همکاران [۲۷] و اروین [۲۸] در مطالعات خود توزیع تنش و کرنش ناشی از ترک در اجسام الاستیک را مورد مطالعه قرار دادند. بر اساس تحقیق آنها، تابع اغتشاش ترک که بر میدان‌های تنش و کرنش عمودی اثر می‌کند را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\sigma_x = (-z + f(x, z))T(x, t), \quad \epsilon_x = (-z + f(x, z))S(x, t) \quad (1)$$

که در آن $f(x, z)$ تابع اثر ترک بر میدان تنش و $T(x, t)$ و $S(x, t)$ تابع مجهولی هستند که می‌بایست تعیین شوند. تابع $f(x, z)$ در رأس ترک دارای بیشترین مقدار می‌باشد. این تابع در وجوده ترک برابر صفر بوده و با دور شدن از موقعیت ترک در طول لوله به صورت نمایی کاهش می‌یابد. با توجه به توضیحات فوق، تابع اغتشاش ترک را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت [۱۵]:

۱- مقدمه

مطالعه رفتار دینامیکی خطوط لوله‌ها به علت کاربردهای گسترده‌ای که در نیروگاه‌ها، پالایشگاه‌ها، مجتمع‌های پتروشیمی، سازه‌های دریایی و سکوهای نفتی دارند، جایگاه ویژه‌ای را به خود اختصاص داده است. از آنجایی که این سازه‌ها اغلب تحت بارهای تکراری هستند، بنابراین احتمال ایجاد ترک‌های ناشی خستگی در آنها بیشتر بوده و اگر به موقع تشخیص داده نشوند، می‌توانند منجر به خرابی و خسارات فاجعه‌باری شوند. بنابراین، مطالعه و بررسی روش‌هایی که بتوانند به راحتی و با دقت مناسبی پارامترهای ترک را پیش‌بینی کنند مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است [۴-۱].

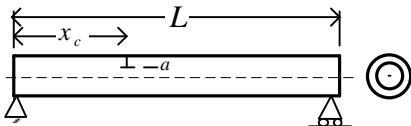
وجود ترک در سازه باعث کاهش سفتی معادل سازه و در نتیجه باعث تغییر فرکانس‌های طبیعی سازه می‌شود. دیماراگوناس [۵] خلاصه‌ای از اقدامات و تحقیقات انجام شده توسط سایر محققین در زمینه ارتعاش سازه‌های ترکدار را ارائه کرده است. بر اساس تحقیق مذبور روش‌های مختلف مدل‌سازی سازه‌های ترکدار را می‌توان به مدل‌های مبتنی بر روش‌های المان محدود [۶]، مدل‌های انعطاف‌پذیری موضعی [۱۰-۷] و مدل‌های پیوسته ترک که در آنها اثر ترک به صورت پیوسته در نظر گرفته می‌شود [۲۱-۱۱]، تقسیم‌بندی نمود. شن و پیر با استفاده از تئوری مدل پیوسته ترک رفتار ارتعاشی تیر اوبل-برنولی ترکدار با ترک باز را مورد بررسی قرار داده‌اند. آنها اثر ترک را به صورت یک تابع اغتشاش نمایی که در میدان تنش نرمال اعمال نموده‌اند. نانی‌وادکار و همکاران [۲۲] با استفاده از روش ماتریس انتقال به بررسی اثر پارامترهای ترک بر رفتار ارتعاشی لوله‌ها پرداخته‌اند. آنها اثر پارامترهای ترک و همچین جهت ترک را بر فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار داده‌اند. موری‌گاندراپا و همکاران [۲۳] به مطالعه تئوری و تجربی رفتار ارتعاشی لوله‌های ترکدار پرداخته‌اند. آنها ترک را به صورت ترک باز و با فنر پیچشی مدل کرده و سپس با استفاده از روش ماتریس انتقال به بررسی اثر پارامترهای ترک بر رفتار ارتعاشی و عیب‌یابی در لوله‌ها پرداخته‌اند. همچنین آنها در تحقیق دیگری [۲۴] با استفاده از روش انرژی به مطالعه رفتار ارتعاشی و ترک‌یابی در لوله‌های حاوی سیال پرداخته‌اند.

هر چند در بسیاری از تحقیقات انجام شده به بررسی اثر پارامترهای ترک در لوله‌های ترکدار پرداخته شده است، اما عمدۀ تحقیقات انجام شده در این زمینه عمدتاً بر اساس روش‌های عددی از قبیل روش ماتریس انتقال، روش المان محدود و با فرض ترک باز بوده که سبب بروز خطای زیادی در محاسبات می‌گردد. البر [۲۵] در تحقیقات خود دریافتۀ است که ترک خستگی در هنگام ارتعاش باز و بسته می‌شود. گادمان‌سون [۲۶] با بررسی این پدیده به این نتیجه رسید که استفاده از مدل

سطح مقطع لوله را به صورت خطی در نظر می‌گیریم. با توجه به اینکه در غیاب ترک و در موقعیت مشخص، گشتاور خمشی یکسانی در لوله ترکدار و لوله سالم ایجاد می‌شود، پارامتر m را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\int_A (-zT(x_c, t))z \, dA = \int_{A_c} (-z + f(x_c, t))f(x_c, t)(z) \, dA \quad (7)$$

که در آن A_c سطح مقطع لوله در موقعیت ترک می‌باشد.



شکل ۱- لوله ترکدار با تکیه‌گاههای ساده در دو انتهای

-۳- معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار ارتعاشی لوله ترکدار با مدل ترک باز و بسته شونده

با توجه به این که در فرضیات سینماتیکی میدان‌های جابجایی، تنش و کرنش به صورت مستقل از هم اختیار شده‌اند، بنابراین توابع تنش و کرنش مجھول ($S(x, t)$ و $T(x, t)$) باستخراج معادله حرکت میدان‌ها برقرار باشد. بدین منظور، برای استخراج معادله حرکت از اصل *Hu-Washizu* استفاده می‌کنیم [۲۹]. با جایگذاری فرضیات سینماتیکی ذکر شده در رابطه (۵) در اصل *Hu-Washizu* و انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء، معادله دیفرانسیل جدید حاکم بر رفتار ارتعاش عرضی لوله ترکدار با ترک باز و بسته شونده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & (I + \gamma [L_1 - K - K_1]) Q_1 w^{(n)} \\ & + [(I + \gamma [L_1 - K - K_1])(2Q'_1 + Q_2) \\ & \quad + \gamma (2L_3 - 2K' - K_2 + L_2)Q_1]w'' \\ & + [(I + \gamma [L_1 - K - K_1])(Q''_1 + 2Q'_2) \\ & \quad + \gamma (2L_3 - 2K' - K_2 + L_2)(Q'_1 + Q_2) + \gamma (L'_3 - K'')Q]w''' \\ & + [(I + \gamma [L_1 - K - K_1])Q''_2 + \gamma (2L_3 - 2K' - K_2 + L_2)Q'_2 \\ & \quad + \gamma (L'_3 - K'')Q_2]w' + \frac{\rho A}{E}\ddot{w} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

که در رابطه اخیر، توابع انتگرالی به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} I &= \int_A z^2 dA, \quad K = \int_A zf \, dA, \quad K_1 = \int_A z\phi \, dA \\ L &= \int_A f^2 \, dA, \quad L_1 = \int_A \phi f \, dA \end{aligned} \quad (9)$$

$$K_2 = \int_A z\phi' \, dA, \quad L_2 = \int_A f\phi' \, dA, \quad L_3 = \int_A f\phi \, dA$$

$$Q_1 = \frac{I - K_1 - K + L_1}{I - 2K + L}, \quad Q_2 = \frac{L_2 - K_2}{I - 2K + L} \quad (10)$$

با اعمال برخی عملیات ریاضی می‌توان نشان داد که معادله دیفرانسیل (۸) را می‌توان به شکل زیر ساده نمود:

$$f(x, z) = \left[z - m \left(z + \frac{a}{2} \right) H(R_o - a - z) \right] e^{-\frac{|x-x_c|}{R_o}} \quad (2)$$

که در آن a, x_c و R_o به ترتیب موقعیت ترک، عمق ترک و شعاع خارجی لوله می‌باشند. ثابت m شبیه توزیع تنش در جهت عرضی لوله و در مقطع ترک را نشان می‌دهد و تابع $H(\cdot)$ معرف تابع پله واحد می‌باشد.

وجود ترک در لوله باعث تغییر موقعیت سطح خنثی در لوله ترکدار می‌شود که این امر به نوبه‌ی خود میدان جابجایی لوله را تحت تأثیر قرار می‌دهد. بنابراین اثر ترک بر میدان جابجایی را مشابه رابطه (۱) به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$u_x(x, z, t) = (-z + \varphi(x, z))w'(x, t) \quad (3)$$

که در آن، $w(x, t)$ خیز عرضی لوله، $\varphi(x, z)$ تابع اثر ترک بر میدان جابجایی و علامت پرمیم معرف مشتق نسبت به متغیر مکانی x می‌باشد. تابع اثر ترک بر میدان جابجایی را مشابه تابع $f(x, z)$ در رابطه (۲) و به صورت زیر فرض می‌کنیم:

$$\varphi(x, z) = \left[z - \left(z + \frac{a}{2} \right) H(R_o - a - z) \right] e^{-2\beta \frac{|x-x_c|}{R_o}} \quad (4)$$

برای اعمال اثرات باز و بسته شدن ترک، فرضیات سینماتیکی پیشنهاد شده در روابط (۱) و (۳) برای حالت ترک باز و بسته شونده را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم:

$$u_x = (-z + \gamma\varphi(x, z))w'(x, t), \quad u_y = 0, \quad u_z = w(x, t), \quad (5)$$

$$p_z = P(x, t),$$

$$\varepsilon_x = (-z + \gamma\varphi(x, z))S(x, t), \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -v\varepsilon_x, \quad (5)$$

$$\sigma_x = (-z + \gamma\varphi(x, z))T(x, t),$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{xz}(x, z, t).$$

در رابطه اخیر، V نسبت پواسون می‌باشد. پارامتر γ به منظور اعمال اثرات حاصل از باز و بسته شدن ترک در معادله حرکت در نظر گرفته شده است. زمانی که ترک باز باشد، $\gamma = 0$ بوده و توابع اغتشاش در میدان‌های جابجایی، تنش و کرنش اثر می‌کنند و زمانی که ترک بسته شود $\gamma = 1$ بوده و در این صورت اثر توابع اغتشاش در معادلات از بین می‌رود. مقدار γ با استفاده از علامت احنان منحنی خیز در موقعیت ترک $(x = x_c)$ تعیین می‌شود. برای لوله نشان داده شده در شکل ۱ و با توجه به مختصات نشان داده شده، پارامتر γ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\gamma = \begin{cases} 1 & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=x_c} < 0 \\ 0 & \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_{x=x_c} > 0 \end{cases} \quad (6)$$

در مدل پیوسته ترک، توزیع تنش و کرنش تحت اثر تابع اغتشاش $f(x, z)$ قرار می‌گیرند که دارای پارامتر ثابت و مجھول m می‌باشد. برای محاسبه ثابت m ، توزیع تنش در

۵- ارائه مدل جدید دو خطی

برای استخراج پاسخ زمانی متناظر با هر شکل مود ارتعاشی از معادله حرکت (۱۳)، روش گالرکین را به کار می‌بریم. بدین منظور، تابع خیز عرضی را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$w_i(x,t) = \gamma W_i^c(x)u_i(t) + (1-\gamma)W_i^{nc}(x)u_i(t) \quad (17)$$

در رابطه فوق، $W_i^c(x)$ و $W_i^{nc}(x)$ به ترتیب معرف شکل مود ارتعاشی i أم لوله ترکدار و لوله سالم و $u_i(t)$ معرف بخش زمانی متناظر با شکل مود ارتعاشی i أم می‌باشد. با جایگذاری

$w_i(x,t)$ از رابطه (۱۷) در معادله (۱۳) بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} &\gamma \left\{ \left[\frac{d^2}{dx^2} \left[q_2(x) \frac{d^2 W_i^c}{dx^2} \right] + \frac{d}{dx} \left[q_1(x) \frac{d W_i^c}{dx} \right] \right] u + \frac{\rho A}{E} W_i^c \ddot{u} \right\} \\ &+ (1-\gamma) \left\{ \left[\frac{d^2}{dx^2} \left[q_2(x) \frac{d^2 W_i^{nc}}{dx^2} \right] + \frac{d}{dx} \left[q_1(x) \frac{d W_i^{nc}}{dx} \right] \right] u + \frac{\rho A}{E} W_i^{nc} \ddot{u} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

با ضرب طوفین رابطه اخیر در عبارت $\gamma W_i^c + (1-\gamma)W_i^{nc}$ و انتگرال‌گیری از رابطه حاصله در بازه $[0, L]$ ، معادله زیر بدست می‌آید:

$$m_i \ddot{u}_i(t) + k_i(u_i)u_i(t) = 0 \quad (19)$$

که در آن، جرم m_i و سفتی (u_i) به صورت زیر تعریف می‌شود: در رابطه اخیر k_i^c و k_i^{nc} به ترتیب سفتی متناظر با لوله ترکدار و لوله سالم است. بنابراین معادله (۱۹) را می‌توان به شکل یک معادله دیفرانسیل دوخطی به صورت زیر بیان نمود:

$$m_i = \rho A \int_0^L W_i W_i dx, \quad k_i(u_i) = \begin{cases} k_i^c & \gamma = 1 \\ k_i^{nc} & \gamma = 0 \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \ddot{u}_i + \omega_i^{c^2} u_i &= 0 & \gamma = 1 \\ \ddot{u}_i + \omega_i^{nc^2} u_i &= 0 & \gamma = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

که در آن ω_i^c و ω_i^{nc} به ترتیب فرکانس‌های طبیعی لوله سالم و ترکدار می‌باشند. با در نظر گرفتن تابع دو ضابطه‌ای ارائه شده برای (u_i) ، می‌توان سفتی دو خطی لوله ترکدار را به صورت زیر بیان کرد:

$$k_i(u_i)u_i = \bar{k}_i u_i + \varepsilon_i \bar{k}_i |u_i| \cdot \text{sgn} \left(\frac{d^2 W_i}{dx^2} \Big|_{x=x_c} \right) \quad (22)$$

که در رابطه فوق تابع $\text{sgn}(\cdot)$ ، تابع علامت می‌باشد. \bar{k}_i را به صورت میانگین سفتی معادل لوله ترکدار در حالت‌های کاملاً باز و کاملاً بسته ترک تعریف می‌کنیم. ε_i پارامتری بعد و کوچک‌تر از واحد می‌باشد. با جایگذاری رابطه (۲۲) در رابطه (۱۹) و تقسیم طوفین بر m_i ، معادله دیفرانسیل حاکم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\ddot{u}_i + \omega_{0i}^2 u_i = -\varepsilon_i \omega_{0i}^2 |u_i| \cdot \text{sgn} \left(\frac{d^2 W_i}{dx^2} \Big|_{x=x_c} \right) \quad (23)$$

که در این رابطه ω_{0i} فرکانس طبیعی سیستم خطی متناظر با شکل مود ارتعاشی i أم می‌باشد. با توجه به اینکه در معادله (۲۳) پارامتر ε_i بسیار کوچک‌تر از واحد می‌باشد، بنابراین مدل جدید

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[q_2(x) \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[q_1(x) \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right] + \frac{\rho A}{E} \ddot{w}(x,t) = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

در رابطه اخیر، توابع $q_1(x)$ و $q_2(x)$ عبارتند از:

$$q_1(x) = (I + L_1 - K_1 - K) Q'_2(x) + (L_3 - K') Q_2(x) \quad (12)$$

$$q_2(x) = (I + L_1 - K_1 - K) Q_1(x)$$

۴- فرکانس‌های طبیعی لوله ترکدار

رفتار ارتعاشی لوله ترکدار را می‌توان با فرض حرکت هارمونیک و با فرکانس ω بررسی کرد. با در نظر گرفتن پاسخ سیستم به صورت $w(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$ ، معادله دیفرانسیل

(۱۱) را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2}{dx^2} \left[q_2(x) \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right] \\ &+ \frac{d}{dx} \left[q_1(x) \frac{d W(x)}{dx} \right] - \frac{\rho A}{E} \omega^2 W(x) = 0 \end{aligned} \quad (13)$$

با توجه به معادله فوق مشاهده می‌شود که ضرایب معادله تابعی از پارامتر کنترلی γ می‌باشند. با اختیار کردن $\gamma = 1$ در معادله دیفرانسیل (۱۳) معادله ارتعاشی لوله ترکدار با ترک باز حاصل می‌شود. برای به دست آوردن فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی لوله ترکدار با ترک باز، مسئله مقدار ویژه معادله (۱۳) با فرض $\gamma = 1$ و با استفاده از روش گالرکین حل می‌شود. بدین منظور، حل فرایمی معادله اخیر را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$W_i^c(x) = \sum_{j=1}^N c_{ji} \xi_j^c(x) \quad (14)$$

که در آن $(\xi_j^c(x))$ ، توابع مقایسه‌ای هستند که شرایط مرزی هندسی و طبیعی را ارضا می‌کنند. با جایگذاری معادله (۱۴) در معادله (۱۳) و با اعمال روش گالرکین، مسئله مقدار ویژه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\det([K_c] - \omega^2 [M_c]) = 0 \quad (15)$$

که در آن ماتریس‌های $[M_c]$ و $[K_c]$ به ترتیب ماتریس‌های جرم و سفتی هستند که به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} [M^c] &= \frac{\rho A}{E} [I] \\ [K^c] &= \int_0^L \left[\frac{d^2 \varphi_i(x)}{dx^2} q_2(x) \frac{d^2 \varphi_j(x)}{dx^2} - \frac{d \varphi_i(x)}{dx} q_1(x) \frac{d \varphi_j(x)}{dx} \right] dx \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن $[I]$ معرف ماتریس واحد می‌باشد.

معادلات (۲۸) و (۲۹) به دست می‌آیند. با فرض شرایط اولیه جابجایی با دامنه A و سرعت اولیه صفر، بخش اصلی پاسخ ناشی از حل معادله (۳۷) به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_{0i} = A \cos \tau \quad (30)$$

که در آن A دامنه اولیه می‌باشد. برای حذف جملات سکولار، بایستی ضرایب جملاتی که منجر به عبارات سکولار می‌شوند برابر صفر قرار داد. با جایگذاری رابطه (۳۰) در معادله (۲۸) برای حذف تنها جمله سکولار خواهیم داشت:

$$-2\omega_{0i}\omega_{li}\frac{d^2u_{0i}}{d\tau^2} = 0 \quad (31)$$

بنابراین $\omega_{li} = 0$ به دست می‌آید. با حذف جمله سکولار از معادله (۲۸) و جایگذاری u_{0i} به دست آمده در آن، این معادله به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{d^2u_{1i}}{d\tau^2} + u_{1i} = -A \cdot \text{sgn} \left(\frac{d^2W_i}{dx^2} \Big|_{x=x_c} \right) \cdot |\cos \tau| \quad (32)$$

با حل معادله اخیر جمله تصحیح مرتبه اول به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_{1i}(\tau) = A \left\{ \left(\frac{2}{\pi} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4(-1)^m}{\pi(1-4m^2)^2} \right) \cos \tau - \frac{2}{\pi} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4(-1)^m}{\pi(1-4m^2)^2} \cos 2m\tau \right\} \cdot \text{sgn} \left(\frac{d^2\eta_i}{dx^2} \Big|_{x=x_c} \right) \quad (33)$$

در رابطه (۲۹)، عبارت $\frac{|u_{0i} + \varepsilon u_{1i}|}{u_{0i} + \varepsilon u_{1i}}$ را می‌توان با استفاده از بسط فوریه به صورت زیر نوشت:

$$g(\tau) = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos m\tau \quad (34)$$

با قرار دادن بسط فوریه ارائه شده برای عبارت u_{1i} در معادله (۳۰) مشاهده می‌شود که اولین جمله از این بسط، جمله سکولار بوده که برای حذف آن لازم است:

$$\omega_{2i} = \frac{\omega_{0i}b_1}{2A} \quad (35)$$

مشاهده می‌شود که فرکانس تصحیح مرتبه دوم ω_{2i} ، تابعی از دامنه نوسان است که از غیرخطی بودن سیستم ناشی می‌شود. با حذف جمله سکولار از معادله (۲۹) و حل این معادله، پاسخ تصحیح مرتبه دوم به صورت زیر به دست می‌آید:

$$u_{2i}(\tau) = A \left\{ \left(b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{1-m^2} \right) \cos \tau - b_0 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{1-4m^2} \cos m\tau \right\} \cdot \text{sgn} \left(\frac{d^2\eta_i}{dx^2} \Big|_{x=x_c} \right) \quad (36)$$

در رابطه اخیر b_0 و b_m از رابطه (۳۴) به دست می‌آیند. در نهایت پاسخ سیستم از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$u_i(\tau) = u_{0i}(\tau) + \varepsilon u_{1i}(\tau) + \varepsilon^2 u_{2i}(\tau) \quad (37)$$

سفتی دو خطی ارائه شده برای لوله ترکدار را می‌توان با استفاده از روش اغتشاشات تحلیل نمود.

۶- استخراج پاسخ زمانی سیستم با استفاده از روش لیندست-پوانکاره

در روش لیندست-پوانکاره با انجام تعویض متغیر $\tau = \omega t$ ، پاسخ سیستم به صورت $\sum_{j=0}^n \varepsilon^j u_j$ در نظر گرفته می‌شود. به

علاوه، فرکانس پاسخ نیز به صورت $\sum_{i=1}^n \varepsilon^i \omega_i$ بسط داده می‌شود که در آن ω ضرایب مجھولی هستند که از حذف جملات سکولار بدست می‌آیند. در تحقیق حاضر پاسخ سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u_i(t) = u_{0i}(t) + \varepsilon u_{1i}(t) + \varepsilon^2 u_{2i}(t) + O(\varepsilon^3) \quad (24)$$

که در آن i شماره شکل مود ارتعاشی را بیان می‌کند. با توجه به اینکه پارامتر ε کوچکتر از واحد می‌باشد، بنابراین جملات شامل توان‌های بالاتر ε نقش تصحیح را در پاسخ دارند.

فرکانس طبیعی سیستم به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\omega_i = \omega_{0i} + \varepsilon_i \omega_{li} + \varepsilon_i^2 \omega_{2i} \quad (25)$$

با جایگذاری روابط (۲۴) و (۲۵) در معادله دیفرانسیل (۲۳) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} & (\omega_{0i} + \varepsilon_i \omega_{li} + \varepsilon_i^2 \omega_{2i})^2 \frac{d^2}{d\tau^2} (u_{0i} + \varepsilon_i u_{1i} + \varepsilon_i^2 u_{2i}) \\ & + \omega_{0i}^2 (u_{0i} + \varepsilon_i u_{1i} + \varepsilon_i^2 u_{2i}) \\ & + \varepsilon_i \omega_{0i}^2 |u_{0i} + \varepsilon_i u_{1i} + \varepsilon_i^2 u_{2i}| \cdot \text{sgn} \left(\frac{d^2W_i}{dx^2} \Big|_{x=x_c} \right) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

برای برقراری تساوی فوق بایستی ضرایب توان‌های مختلف ε_i برابر صفر باشند. بنابراین خواهیم داشت:

$$\varepsilon_i^0: \omega_0^2 \left(\frac{d^2u_{0i}}{d\tau^2} + u_{0i} \right) = 0 \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^1: \omega_0^2 \left(\frac{d^2u_{1i}}{d\tau^2} + u_{1i} \right) = \\ - 2\omega_{0i}\omega_{li} \frac{d^2u_{0i}}{d\tau^2} - \omega_{0i}^2 |u_{0i}| \cdot \text{sgn} \left(\frac{d^2W_i}{dx^2} \Big|_{x=x_c} \right) \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^2: \omega_0^2 \left(\frac{d^2u_{2i}}{d\tau^2} + u_{2i} \right) = - (\omega_{li}^2 + 2\omega_{0i}\omega_{2i}) \frac{d^2u_{0i}}{d\tau^2} \\ - 2\omega_{0i}\omega_{li} \frac{d^2u_{1i}}{d\tau^2} - \omega_{0i}^2 \frac{|u_{0i} + \varepsilon u_{1i}|}{u_{0i} + \varepsilon u_{1i}} u_{1i} \cdot \text{sgn} \left(\frac{d^2W_i}{dx^2} \Big|_{x=x_c} \right) \end{aligned} \quad (29)$$

رابطه (۲۷) نشان دهنده سیستم خطی متناظر است که در برگیرنده بخش اصلی پاسخ می‌باشد. اثرات تغییر سفتی معادل در پاسخ سیستم که ناشی از باز و بسته شدن ترک است، از حل

بیشتر می‌باشد. در لوله‌های ترکدار با توجه به اینکه عمق ترک بسیار کم بوده و فاصله آن از محور اصلی لوله زیاد می‌باشد، بنابراین ترک در طول ارتعاش دارای رفتار باز و بسته شونده‌ای بوده و خطای مدل ترک باز بیشتر خواهد بود.

همچنین از جدول ۱ مشاهده می‌شود که حداقل خطای مدل در تعیین فرکانس‌های طبیعی با مدل ترک باز و بسته شونده ارائه شده به ازای دامنه $A = 0.01$ برابر 3.6% می‌باشد. همان‌طور که مشاهده می‌شود مدل دوخطی پیشنهادی با دقت بسیار مناسبی رفتار ارتعاشی لوله‌های ترکدار را پیش‌بینی می‌کند و می‌توان از این مدل با دقت مناسبی در عیوب‌بایی بر اساس آنالیز ارتعاشی استفاده نمود.

نتایج نشان می‌دهد که وجود ترک باعث کاهش فرکانس‌های رزونانس سازه‌های ترکدار می‌شود و با توجه به این که سفتی معادل متناظر با مدل ترک باز کمتر از سفتی معادل مدل ترک باز و بسته شونده می‌باشد بنابراین، اثر ترک باز بر کاهش فرکانس‌های رزونانس بیشتر از مدل ترک باز و بسته شونده می‌باشد که این امر در جدول ۱ به وضوح مشاهده می‌شود.

در شکل ۲ پاسخ سیستم خطی متناظر، رابطه (30) ، با پاسخ کلی سیستم به دست آمده از روش عددی نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود در نیم‌سیکل‌های بالایی دو پاسخ بر هم منطبق هستند. در نیم‌سیکل‌های بالایی با توجه به اینکه ترک بسته است، بنابراین رفتار سیستم مشابه تیر سالم بوده و در نتیجه اختلاف بین دو پاسخ بسیار ناچیز می‌باشد. همچنین در نیم‌سیکل‌های پایین اختلاف پاسخ سیستم خطی متناظر و پاسخ به دست آمده به روش عددی بیشتر می‌باشد که علت این امر ناشی از باز شدن ترک بوده و در نتیجه کاهش سفتی معادل سیستم در این قسمت از پاسخ، اثر بیشتری نسبت به نیم‌سیکل‌های بالا می‌گذارد.

که در آن $t = \omega_i \tau$ بوده و فرکانس رزونانس سیستم از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\omega_i = \omega_{0i} + \varepsilon_i^2 \omega_{2i} \quad (38)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود تنوری جدید، فرکانس‌های تشیدید را به صورت تابعی از دامنه ارتعاش بیان می‌کند.

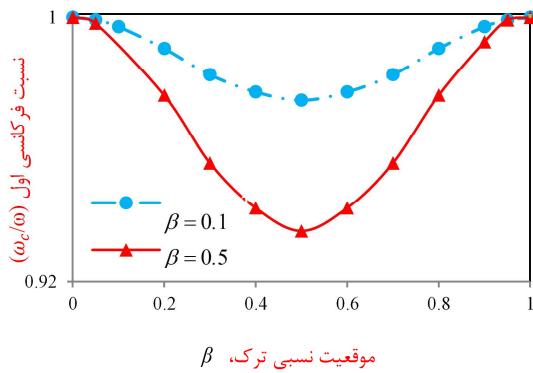
۷- نتایج تحلیلی

به منظور تصدیق مدل در نظر گرفته شده از نتایج تست‌های تجربی مرجع [۴] استفاده شده است. ابعاد هندسی و مشخصات مکانیکی لوله فولادی ترکدار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها مورد بررسی به این صورت است: طول لوله $L = 1570\text{mm}$ ، قطر داخلی $D_i = 61\text{ mm}$ ، قطر خارجی $D_o = 73\text{ mm}$ ، مدل الاستیسیته $E = 206\text{ GPa}$ و جرم واحد حجم $\rho = 7860\text{ Kg/m}^3$. علاوه بر این، پارامترهای بی بعد ترک عبارتند از: $\alpha = \frac{a}{D_o}$ نشان دهنده عمق نسبی ترک (نسبت عمق ترک به قطر خارجی لوله) و $\beta = \frac{c}{L}$ نشان دهنده موقعیت نسبی ترک (نسبت موقعیت ترک به طول لوله).

با توجه به اینکه در مورد رفتار ارتعاشی لوله‌های ترکدار با مدل ترک باز و بسته شونده مطالعه‌ای صورت نپذیرفته است، بنابراین به منظور فراهم آوردن امکان مقایسه و بررسی دقت مدل ارائه شده مدل ترک باز را در نظر گرفته و نتایج را با نتایج تست تجربی ارائه شده در مرجع [۴] مورد مقایسه قرار می‌دهیم. در جدول ۱ فرکانس‌های طبیعی لوله ترکدار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها آورده شده است. در این جدول مقایسه بین نتایج تجربی مرجع [۴] و نتایج به دست آمده از مدل ترک باز ارائه شده آورده شده است. این جدول نشان می‌دهد که حداقل خطای مدل در تعیین فرکانس‌های طبیعی با مدل ترک باز ارائه شده برابر $11/14\%$ می‌باشد. همان‌طور که مطالعات نشان می‌دهد خطای مدل ترک باز در تعیین فرکانس طبیعی سازه‌های ترکدار

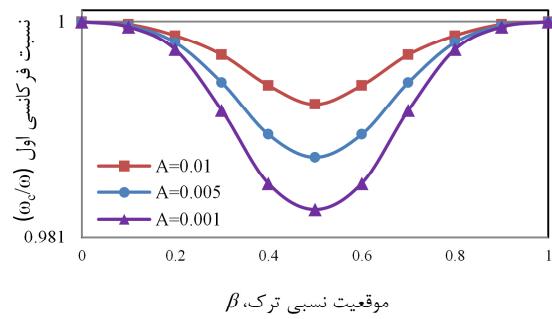
جدول ۱- فرکانس‌های رزونانس لوله ترکدار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها و مقایسه آن با نتایج تجربی [۴] به ازای ترک واقع در موقعیت نسبی $0.2 = \beta$

عمق نسبی	فرکانس‌های تشیدید، (Hz)			درصد خطای	
	نتایج تجربی [۴] ترک		نتایج تئوری تحقیق حاضر مدل ترک باز و بسته	با نتایج تجربی، %	مدل ترک باز
	نتایج تجربی (Hz)	نتایج تئوری (Hz)			
$\alpha = 0.15$	ω_1 (Hz)	۷۵,۴۹	۶۷,۵۶	۱۰,۵۰	۲,۹۸
	ω_2 (Hz)	۲۸۹,۸۳	۲۷۱,۱۱	۶,۴۶	۰,۱۳
	ω_3 (Hz)	۶۵۳,۷۰	۶۱۰,۰۶	۶۶۸	۰,۳۷
$\alpha = 0.25$	ω_1 (Hz)	۷۲,۷۹	۶۵,۰۳	۱۰,۶۶	۳,۶۰
	ω_2 (Hz)	۲۶۸,۸۳	۲۳۷,۷۲	۱۱,۵۷	۰,۳۱
	ω_3 (Hz)	۶۲۲,۹۲	۵۳۵,۰۰	۱۴,۱۱	۲,۵۸



شکل ۴- تغییرات نسبت فرکانسی اول بر حسب موقعیت نسبی ترک،
• (●) عمق نسبی $\alpha = 0.1$ ، (▲) عمق نسبی $\alpha = 0.5$

در شکل ۵ تأثیر دامنه اولیه ارتعاش سیستم بر فرکانس تشدید لوله ترکدار با مدل ترک باز و بسته شونده نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود افزایش دامنه نوسانات باعث افزایش فرکانس تشدید لوله ترک دار می‌گردد.

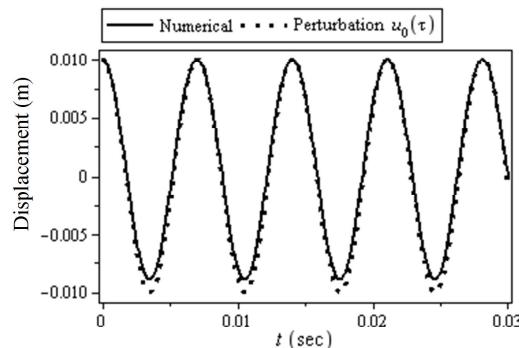


شکل ۵- تأثیر دامنه اولیه نوسانات بر تغییرات نسبت فرکانسی اول بر حسب موقعیت نسبی ترک برای ترک با عمق نسبی $\alpha = 0.1$

۸- نتیجه‌گیری

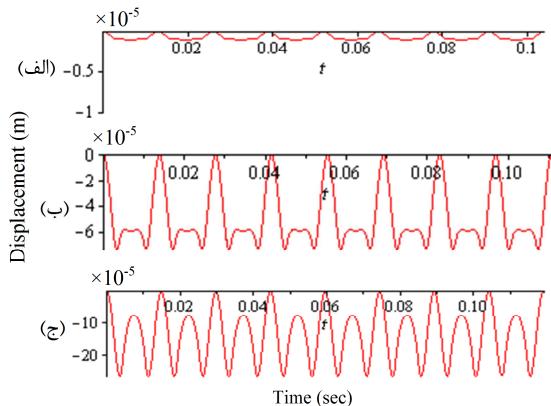
اگل محققان در تحقیقات خود در مورد ارتعاش لوله‌های ترکدار، برای اجتناب از پیچیدگی‌های ناشی از رفتار غیرخطی ترک در نتیجه باز و بسته شدن آن، ترک را به صورت باز مدل کرده و معادلات خطی حاکم را مورد بررسی قرار داده‌اند. در تحقیق حاضر رفتار غیرخطی ارتعاشات آزاد لوله دارای ترک خستگی با مدل پیوسته ترک مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور، با فرض رفتار باز و بسته شونده ترک و در نظر گرفتن اثر ترک به صورت یک اغتشاش پیوسته، فرضیات سینماتیکی جدیدی برای میدان جابجایی و کرنش پیشنهاد و معادله حرکت استخراج گردید.

نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که کاهش فرکانس‌های تشدید ناشی از ترک خستگی واقعی که رفتاری باز و بسته شونده دارد کمتر از فرض ترک باز می‌باشد. بنابراین استفاده از



شکل ۶- مقایسه پاسخ سیستم خطی متناظر (—) و پاسخ نهایی (· · ·) به دست آمده به روش عددی، برای موقعیت نسبی $A = 0.01$ و دامنه اولیه $\alpha = 0.15$ و $\beta = 0.2$

در شکل ۳ اثر افزایش عمق نسبی ترک در یک موقعیت نسبی ثابت بر دامنه نوسانات جمله تصحیح مرتبه دوم نشان داده شده است. با افزایش عمق نسبی ترک دامنه نوسانات جمله تصحیح مرتبه دوم به منظور جبران سازی اثرات غیرخطی ناشی از بسته شدن ترک افزایش می‌یابد.



شکل ۳- جمله تصحیح مرتبه دوم پاسخ به دست آمده به روش لیندست-پوانکاره برای موقعیت نسبی ترک $\beta = 0.2$ و عمق‌های نسبی (الف) $\alpha = 0.05$ (ب) $\alpha = 0.15$ و (ج) $\alpha = 0.25$

در شکل ۴ منحنی تغییرات نسبت فرکانسی اول (نسبت فرکانس طبیعی لوله ترکدار، ω)، به لوله سالم متناظر، ω_0 به ازای عمق نسبی ترک برای لوله ترکدار با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتهای نشان داده شده است. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که در یک موقعیت نسبی مشخص، فرکانس طبیعی لوله ترکدار با عمق نسبی ترک رابطه معکوس دارد و با افزایش عمق ترک فرکانس طبیعی لوله کاهش می‌یابد. همچنین مشاهده می‌شود که در مود اول با نزدیک شدن موقعیت ترک به مرکز لوله، اثر ترک بر کاهش فرکانسی بیشتر می‌شود.

- Sound and Vibration, Vol. 261, pp. 17–29, 2003.
- [10] Viola, E., Ricci, P., Aliabadi, M. H., “Free vibration analysis of axially loaded cracked Timoshenko beam structures using the dynamic stiffness method” Journal of Sound and Vibration, Vol. 304, pp. 124–153, 2007.
- [11] Christides, S., Barr, A. D. S., “One dimensional theory of cracked Bernoulli-Euler beams.” International Journal of Mechanical Science, Vol. 26, Issue (11/12), pp. 639-648, 1984.
- [12] Christides, S., Barr, A. D. S., “Torsional vibration of cracked beams of non-circular cross-section.” International Journal of Mechanical Science, Vol. 28, pp. 473-490, 1986.
- [13] Shen, M. H. H, Chu, Y. C. “Analysis of forced bilinear oscillators and the application to cracked beam dynamics.” Am Inst Aeronaut Astronaut Journal, Vol. 30, pp. 2512-2519, 1992.
- [14] Shen, M.H. H, Pierre, C., “Natural modes of Bernoulli-Euler beams with symmetric cracks.” Journal of Sound and Vibration, Vol. 138, Issue 1, pp. 115-134, 1990.
- [15] Shen, M.H. H, Pierre, C., “Free vibrations of beams with a single-edge crack.” Journal of sound and vibration, Vol. 170, Issue 2, pp. 237-259, 1994.
- [16] Behzad, M., Meghdari, A., Ebrahimi, A., “A new continuous model for flexural vibration analysis of a cracked beam.” Polish Maritime Research, Vol. 2, pp. 32-39, 2008.
- [17] Shen, M. H. H, Pierre, C., “On-line structural damage detection.” Structural Systems: Smart Structures, Devieces and Systems, Vol. 14, pp. 271-332, 1998.
- [18] Chondros, T. G., Dimarogonas, A. D., “Vibration of a beam with a breathing crack.” J. of Sound and Vibration, Vol. 239, Issue 1, 57-67, 2001.
- [19] Chondros, T.G., Labeas, G.N, “Torsional vibration of a cracked rod by variational formulation and numerical analysis.” Journal of Sound and Vibration, Vol. 301, pp. 994–1006, 2007.
- [20] Behzad, M., Meghdari, A., Ebrahimi, A., “A new approach for vibration analysis of a cracked beam.” International Journal of Engineering, Vol. 18, Issue 4, pp.319-330, 2005.
- [21] Barr, A. D. S., “An extension of the Hu-Washizu variational principle in linear elasticity for dynamic proplem.” Transactions of the

مدل ترک باز برای بررسی رفتار ترک خستگی می‌تواند منجر به نتایج نادرستی شود که مهم‌ترین آن پیش‌بینی عمق ترک خستگی کمتر از مقدار واقعی آن است. چنین تخمین نادرستی می‌تواند خطراتی را در پی داشته باشد که در عیب‌یابی ترک باشیست این عوامل در نظر گرفته شوند.

مقایسه نتایج حل تحلیلی ارائه شده با نتایج حاصل از تست‌های تجربی موجود تطابق بسیار خوب دو پاسخ را به ازای بازه گسترهای از پارامترهای ترک نشان می‌دهد.

مراجع

- [1] Wu, N., Wang, Q., “Experimental studies on damage detection of beam structures with a wavelet transform” International Journal of Engineering Science, Vol. 49, pp. 253–261, 2011.
- [2] Han-Ik Yoona, In-Soo Son, “Dynamic behavior of cracked simply supported pipe conveying fluid with moving mass” Journal of Sound and Vibration, Vol. 292, pp. 941–953, 2006.
- [3] Yongteng, Z., Jiawei X., “Pipe damage detection method based on BSWI and SVR” International Conference on Measuring Technology and Mechatronics Automation, 2010.
- [4] Junjie, Y.,Yumin, H., Xuefeng C., Zhi Z., Youming W., Zhengjia H., “Pipe crack identification based on finite element method of second generation wavelets” Mechanical Systems and Signal Processing,Vol. 24, pp. 379–393, 2010.
- [5] Dimarogonas, A. D., “Vibration of cracked structures: A state of the art reviews.” Eng. Frac. Mech., Vol. 55, Issue 5, pp. 831-857, 1996.
- [6] Xin, F., Chunyuan, Z., Jiashun, H., Jing., Z., “The Local Flexibility of A Pipe with A Part-Through Circumferential Crack” Advanced Materials Research, Vol. 243,pp. 995-1002, 2011.
- [7] Kirmser, P. G., “The effect of discontinuities on the natural frequency of beams”, In Proceeding of the American Society of Testing and Materials, Vol. 44, pp. 897-904, 1944.
- [8] Tasi, T. C., Wang, Y. Z., “Vibration analysis and diagnosis of a craced shaft” Journal of Applied Mechanics, Vol.192, Issue 3, pp. 607-620, 1996.
- [9] Liu, D., Gurgenci, H., Veidt, M., “Crack detection in hollow section structures through coupled response measurements” Journal of

ASME Applid Mechanic, Vol. 33, Issue 2, pp. 480-493, 1996.

[22] Naniwadekar, M. R., Naik, S. S., Maiti, S. K., "On prediction of crack in different orientations in pipe using frequency based approach" Mechanical Systems and Signal Processing, Vol. 22, pp. 693-708, 2008.

[23] Murigendrappa, S. M., Maiti, S. K., Srirangarajan, H. R., "Experimental and theoretical study on crack detection in pipes filled with fluid" Journal of Sound and Vibratior, Vol.270, pp.1013-1032, 2004.

[24] Murigendrappa, S. M., Maiti, S. K., Srirangarajan, H. R., "Frequency-based experimental and theoretical identification of multiple cracks in straight pipes filled with fluid" NDT&E International, Vol. 37, pp. 431-438, 2004.

[25] Elber, W., "The Significance of fatigue crack closure." Damage Tolerance in Aircraft Structures, pp. 230-242, 1971.

[26] Gudmundson, P., "The dynamic behaviour of slender structures with cross-sectional cracks." Journal of Mechanics and Physics of Solids, Vol. 31, pp. 329-345, 1983.

[27] Tada, H., Paris, P. C., Irwin, G. R. "The Stress Analysis of Cracks Handbook, Third Edition", ASME, New York, 2000.

[28] Irwin, G. R., "Discussion of `Crack-Extension Force for a Part-Through Crack in a Plate", Journal of Applied Mechanics, Vol. 30, Issue 3, pp.475-476, 1962

[۲۹] رضائی، موسی، عرب‌ملکی، وحید، "ارائه مدل غیرخطی جدید برای بررسی رفتار ارتعاشات عرضی تیز ترکدار با ترک خستگی"، نشریه علوم کاربردی و محاسباتی در مکانیک، سال

.۱۳۹۰، ۴۲-۳۵، صفحه ۲۲، شماره ۲