

طراحی کنترل کننده مقاوم SVC مبتنی بر WAMS با در نظر گرفتن نامعینی تأخیر زمانی سیگنال‌های راه دور

سعید ابازری^۱، استادیار، مجتبی برخوردار یزدی^۲، استادیار، عباس عرب دردری کارشناسی ارشد

۱- دانشکده فنی - دانشگاه شهرکرد - شهرکرد- ایران - abazari-s@eng.sku.ac.ir

۲- بخش مهندسی برق - دانشگاه شهید باهنر کرمان - کرمان - ایران - barkhordari@uk.ac.ir

۳- دانش آموخته دانشگاه ولی عصر (ع) رفسنجان - abbasarab-88@yahoo.com

چکیده: سیستم اندازه‌گیری محدوده وسیع (WAMS)، از طریق اندازه‌گیری سیگنال راه دور از سراسر سیستم قدرت و ارسال آن‌ها توسط خطوط مخابراتی به کنترل کننده محدوده وسیع (WAC)، باعث میراسازی مؤثر نوسانات بین ناحیه‌ای می‌شود. یکی از مسائل مهم وجود تأخیری زمانی در انتقال سیگنال‌های اندازه‌گیری شده به WAC است که می‌تواند در عملکرد کنترلی WAC در میراسازی نوسانات بین ناحیه‌ای اختلال ایجاد کند. یکی از راه‌های غلبه بر این مشکل، در نظر گرفتن تأخیر زمانی در مرحله طراحی کنترل کننده است تا از عملکرد مؤثر WAC اطمینان حاصل شود. در این مطالعه با توجه به خاصیت نامعینی تأخیر زمانی، استفاده از تقریب پاد و تبدیل کسری خطی (LFT) جهت مدل سازی تأخیر زمانی پیشنهاد شده و در مرحله طراحی WAC از روش حساسیت مرکب H^∞ و تبدیل مسئله به LMI استفاده شده است. نتایج حاصل از شبیه سازی در یک سیستم ۱۶ ماشین-۶۸ باسه نشان می‌دهد که WAC طراحی شده جهت اعمال سیگنال پایدارساز به SVC، در گستره وسیعی از دامنه تغییرات تأخیر زمانی عملکرد مقاومی جهت میرایی نوسانات حاصل از اغتشاش از خود نشان می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: نوسانات مد بین ناحیه‌ای، تأخیر زمانی نامعین، کنترل مقاوم، SVC، کنترل کننده محدوده وسیع (WAC)

Design of WAMS-based SVC robust controller considering time delay uncertainty of remote signals

Saeed Abazari¹, Mojtaba Barkhordari Yazdi², Abbas Arab Dori³

1- Faculty of Engineering, University of shahrekord, shahrekord, Iran, Email: abazari-S@eng.sku.ac.ir

2- Electrical Engineering Department, Shahid Bahonar University of Kerman, Kerman, Iran. Email: barkhordari@uk.ac.ir

3- Vali-e-Asr University of Rafsanjan, Iran, Email: abbasarab-88@yahoo.com

Abstract: Wide area measurement system (WAMS) prepares and transmits the measured remote signals of a whole power system to wide area controller (WAC) to achieve an effective inter-area oscillations damping. One of the main issue is the existence of transfer time delay in WAC input signals which can degrade the damping performance of WAC. One way to overcome this problem is to consider time delay in the controller design procedure to ensure effective control of WAC. In this paper, time delays are modeled by padé approximations and the time delay uncertainty is described by linear fractional transformations (LFT). The synthesis of the WAC is defined as a problem of H^∞ mixed sensitivity control and is resolved by the linear matrix inequality (LMI) approach. The simulation results on 16-machine 68-bus system show that the WAC designed to provide a supplementary control signal of SVC, has satisfactory performance in a wide range of time delay.

Keywords: Inter- area oscillation, uncertain time delay, robust control, SVC, WAMS

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۲/۱۲/۲۲

تاریخ اصلاح مقاله: ۱۳۹۳/۹/۱۹

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۳/۹/۱۹

نام نویسنده مسئول: سعید ابازری

نشانی نویسنده مسئول: ایران - دانشکده فنی - دانشگاه شهرکرد - شهرکرد - ایران

۱- مقدمه

با توسعه سیستم‌های قدرت به هم پیوسته در جهان، احتمال به وجود آمدن اغتشاشات محدوده وسیع بیشتر می‌شود [۱-۲]. این اغتشاشات علاوه بر کاهش میرایی نوسانات بین ناحیه‌ای می‌تواند منجر به انفصال سیستم قدرت و یا خاموشی‌های گسترده شود. به‌طور کلی راه عملی مقابله با این گونه اغتشاشات، استفاده از ادواتی در سیستم قدرت است که توانایی تغییر توان انتقالی را دارند، بدون اینکه به محدودیت‌های بهره‌برداری پرهزینه یا به تقویت انتقال توان نیازی داشته باشند [۳]. از آنجایی که سیستم‌های اندازه‌گیری محلی توانایی دقیق تشخیص اغتشاشات جهت میراسازی نوسانات را ندارند، در دهه اخیر جهت غلبه بر این مسئله و افزایش پایداری سیستم‌های قدرت، استفاده از سیستم اندازه‌گیری محدوده وسیع مبتنی بر واحد اندازه‌گیری فازور (PMU) سنکرون شده به وسیله سیستم موقعیت‌یاب جهانی برای طراحی کنترل کننده‌های محدوده وسیع (WAC) با هدف ایجاد سیگنال‌های پایدارساز اضافی پیشنهاد شده است [۴-۵].

WAC طراحی شده با استفاده از تئوری کنترل مقاوم، برای پایدارساز سیستم قدرت (PSS) [۶]، سیستم‌های انعطاف‌پذیر انتقال قدرت AC (FACTS) [۳، ۷]، ابررسانای ذخیره کننده انرژی مغناطیسی (SMES) [۸] و سیستم‌های انتقال قدرت با بهره‌گیری از خطوط HVDC [۹] عملکرد قابل قبولی در افزایش میرایی نوسانات از خود نشان داده‌اند و مقاومت هر یک در برابر نامعینی و تغییر توپولوژی سیستم بررسی شده است.

جبران ساز استاتیکی توان راکتیو (SVC) یکی از ساده‌ترین نوع از ادوات FACTS است که در [۱۰] با استفاده از روش حساسیت مرکب H_{∞} به طراحی WAC برای آن باهدف میرایی نوسانات بین ناحیه‌ای پرداخته شده است. اما با به کارگیری WAMS و به علت تأخیر زمانی خطوط ارتباطی در ارسال سیگنال‌های اندازه‌گیری شده از فواصل دور به WAC، کارایی کنترل کننده در صورت نادیده گرفتن تأخیر زمانی در مرحله طراحی، کاهش یافته و در برخی موارد حتی باعث ناپایداری سیستم قدرت می‌شود [۱۱-۱۲].

در [۱۳-۱۵] کنترل کننده‌های پایدارساز محدوده وسیع بر اساس جبران سازی اثر تأخیر زمانی ثابت طراحی شده‌اند. اما از آنجاکه تأخیر زمانی دارای ماهیتی نامعین است ممکن است با تغییر مقدار تأخیر زمانی از مقدار ثابت در نظر گرفته شده در مرحله طراحی، اثر پایدارسازی WAC کاهش یافته و منجر به ناپایداری سیستم می‌شود [۲۶].

در این مقاله، از تقریب پاد برای مدل کردن تأخیر و با توجه به نامعین بودن تأخیر از تبدیل کسری خطی (LFT) [۲۹] جهت توصیف نامعینی در تأخیر زمانی استفاده می‌شود. همچنین جهت دستیابی به اهداف چندگانه کاهش اثر اغتشاش ورودی بر پاسخ و جلوگیری از افزایش سیگنال کنترل در حضور تأخیر زمانی نامعین، از روش حساسیت مرکب H_{∞} برای طرح مسئله طراحی کنترل کننده استفاده شده است. همچنین مسئله طراحی کنترل کننده طی مراحل به یک

مسئله نامعادلات ماتریسی خطی (LMI) تبدیل و با حل این نامعادلات پارامترهای WAC به دست می‌آید. این تکنیک در یک مطالعه موردی برای سیستم نمونه ۱۶ ماشینه-۶۸ باسه مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج حاصل از تشکیل سیستم حلقه بسته و شبیه سازی نشان می‌دهند که WAC طراحی شده با استفاده روش پیشنهادی در گستره وسیعی از تأخیر زمانی که ممکن است توسط خطوط ارتباطی مورد استفاده حاصل شود، عملکرد قابل قبولی از خود نشان می‌دهد.

در بخش دوم این مقاله بعد از توضیح اصول سیستم‌های اندازه‌گیری محدوده وسیع و مدل SVC به تشریح روش مدل سازی تأخیر زمانی نامعین پرداخته شده است. بخش سوم به طراحی کنترل کننده مقاوم اختصاص یافته است. در بخش چهارم مطالعه موردی و شبیه سازی ارائه شده و سرانجام در بخش پنجم نتیجه گیری ارائه شده است.

۲- اصول مدل سازی سیستم

۲-۱- سیستم اندازه‌گیری محدوده وسیع

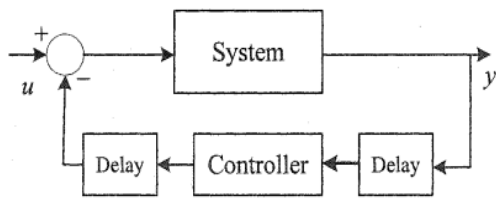
سیستم اندازه‌گیری محدوده وسیع یکی از تکنولوژی‌های پیشرفته است که از دهه گذشته به علت کاربردهای فراوان در سیستم قدرت مورد استفاده قرار گرفته است. ایده اصلی این سیستم، متمرکز کردن داده‌هایی است که از نقاط مختلف سیستم قدرت ارسال می‌شود و این داده‌ها به‌طور همزمان و همگام شده با یکدیگر، جمع‌آوری می‌گردند. از جمله کاربردهای این سیستم می‌توان به تحلیل بعد از اغتشاش [۱۶-۱۷]، کنترل و مانیتورینگ و مدیریت تراکم زمان واقعی [۱۷]، ثبت رویدادها [۱۸]، شناسایی اولیه ناپایداری [۱۹]، تخمین حالت [۲۰] و ارزیابی مدل سیستم [۲۱] اشاره کرد.

ساختار کلی WAMS به همراه SVC برای میرایی نوسانات موجود در سیستم قدرت، که در شکل ۱ نشان داده شده، دارای اجزای زیر هست:

(۱) واحد اندازه‌گیری فازور (PMU): این واحد با استفاده از سیگنال سنکرون کننده که غالباً از طرف سیستم موقعیت‌یاب جهانی (GPS) صادر می‌شود، قادر به اندازه گیری فازور جریان، فازور ولتاژ، فرکانس و توان از قسمت های مختلف سیستم است [۶، ۲۲].

(۲) متمرکزکننده اطلاعات فازور (PDC): این واحد اطلاعات اندازه‌گیری شده توسط PMU را از طریق تجهیزات مخابراتی دریافت می‌کند و پس از انجام پردازش‌های مقدماتی مانند حذف اطلاعات نامناسب، اطلاعات را به کنترل کننده محدوده وسیع ارسال می‌کند [۲۳].

(۳) کنترل کننده محدوده وسیع (WAC): این بخش با دریافت اطلاعات از PDC، سیگنال کنترلی مناسب برای ادوات قابل کنترل مانند SVC را باهدف بهبود عملکرد دینامیکی سیستم قدرت فراهم می‌کند.



شکل ۳: سیستم کنترل به همراه تأخیر زمانی

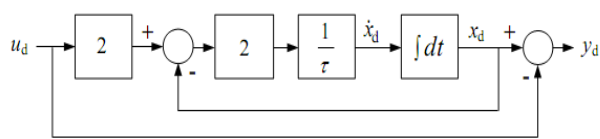
تأخیر زمانی τ به صورت تابع نمایی $e^{-s\tau}$ در حوزه لاپلاس توصیف می شود که می تواند به وسیله تقریب پاد مرتبه اول [۱۴] به فرم تابع:

$$e^{-s\tau} = \frac{-\frac{1}{2}s\tau + 1}{\frac{1}{2}s\tau + 1} \quad (2)$$

نوشته شود. با استفاده از تقریب مرتبه اول پاد، تأخیر $e^{-s\tau}$ می تواند توسط معادلات:

$$\begin{aligned} \dot{x}_d &= -\frac{2}{\tau}x_d(t) + u_d(t) \\ y_d &= \frac{4}{\tau}x_d(t) - u_d(t) \end{aligned} \quad (3)$$

نشان داده شود. همچنین نمودار بلوکی معادله حالت مربوط به تأخیر زمانی با استفاده از این تقریب در شکل (۴) ارائه شده است.



شکل ۴: بلوک دیاگرام تقریب مرتبه اول پاد برای تأخیر زمانی

از آنجایی که پارامتر تأخیر زمانی τ نامعین است، می تواند به صورت

$$\tau = \bar{\tau}(1 + P_r\delta_r) \quad (4)$$

بیان گردد، که $\bar{\tau}$ مقدار نامی τ و پارامترهای P_r و δ_r به ترتیب مقادیر ثابت و متغیر در بازه [۱ و -۱] هستند که مقدار انحراف ممکن تأخیر را نشان می دهد.

قاعده اصلی در مدل سازی یک سیستم نامعین جداسازی قسمت نامعین از معین در یک اتصال پس خور و مرزبندی مقادیر معین از پارامتر نامعین است. در حالت کلی یک سیستم نامعین می تواند توسط یک اتصال پس خور از یک ماتریس ثابت و یک ماتریس قطری به همراه پارامترهای دینامیکی توصیف شود. این تحقق به عنوان تبدیل کسری خطی (LFT) بیان می شود [۲۶].

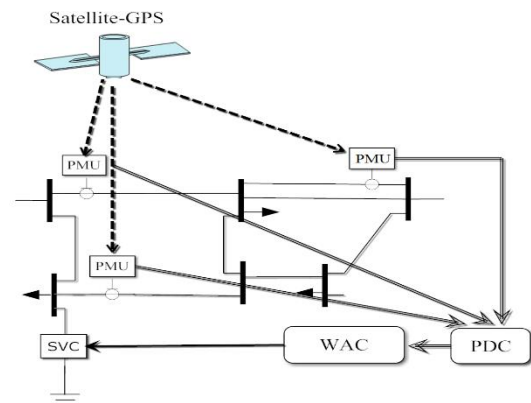
عبارت $\frac{1}{\tau}$ در شکل ۴ می تواند به صورت:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\bar{\tau}(1 + P_r\delta_r)} = \frac{1}{\bar{\tau}} - \frac{P_r}{\bar{\tau}}\delta_r(1 + P_r\delta_r)^{-1} = F_u(M_r, \delta_r) \quad (5)$$

به عنوان یک LFT بیان شود.

برای ماتریس ثابت

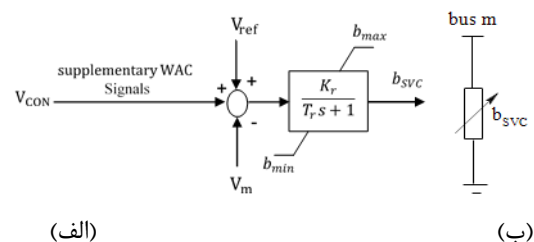
(۴) SVC یک تولیدکننده یا جذب کننده توان راکتیو با اتصال موازی است که خروجی آن برای مبادله جریان سلفی یا خازنی تنظیم می شود [۲۴].



شکل ۱: اجزای تشکیل دهنده WAMS

۲-۲- مدل سازی SVC

ساختار نوعی یک SVC از ترکیب موازی یک راکتور کنترل شده با ترستور و یک خازن ثابت تشکیل شده است. در یک تقریب معادل رایج، SVC به صورت یک سوسپتانس متغیر مدل می شود (شکل ۲-الف). مدل دینامیکی تقریب SVC در شکل ۲-ب نمایش داده شده است.



شکل ۲: (الف) مدل معادل SVC، (ب) مدل دینامیکی تقریب SVC

رابطه (۱) بیانگر مدل دینامیکی شکل ۲-ب است.

$$\dot{b}_{SVC} = (K_r(V_{ref} + V_{con} - V_m) - b_{SVC})/T_r \quad (1)$$

که در این رابطه K_r ضریب بهره، V_{ref} ولتاژ مرجع، V_{con} سیگنال کمکی کنترل کننده، T_r ثابت زمانی SVC و V_m ولتاژ باس m است [۲۵].

۳-۲- مدل سازی تأخیر زمانی نامعین

با توجه به ساختار WAMS، تأخیر زمانی به دو قسمت تقسیم شده که شامل تأخیر خروجی حاصل از فرآیند اندازه گیری، همگام سازی و انتقال از PMU به کنترل کننده مرکزی و تأخیر ورودی حاصل از محاسبات سیگنال کنترل و انتقال از کنترل کننده به SVC است [۵]. سیستم کنترل حلقه بسته به همراه تأخیر زمانی در شکل (۳) نشان داده شده است.

مقدار نامی و گستره نامعینی تأخیر ورودی و خروجی در نظر گرفته شده است.

$$x = [x_{o1} \ x_{w1} \ x_{x2} \ x_{d1} \ x_{d2}]^T \quad (18)$$

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$y = y_{d1} \quad (20)$$

$$u = u_{d2} \quad (21)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 & B_u \\ B_{w1}C & A_{w1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_{w2} & 0 & B_{w2} \\ 4M_{22}C & 0 & 0 & -2M_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2M_{22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_w \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -B_u \\ 0 \\ -B_{w2} \\ 0 \\ 4M_{22} \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} D_{w1}C & C_{w1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{w2} & 0 & D_{w2} \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$C_2 = [-C \ 0 \ 0 \ 1 \ 0] \quad (25)$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ -D_{w2} \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$D_{11} = D_{12} = D_{22} = 0 \quad (27)$$

$$Q_{x1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{21} \\ 0 \end{bmatrix} \quad Q_{x2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_{21} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$Q_{N1} = [4M_{12}C \ 0 \ 0 \ -2M_{12} \ 0] \quad (29)$$

$$Q_{N1} = [4M_{12}C \ 0 \ 0 \ -2M_{12} \ 0] \quad (30)$$

سیگنال های u_{d1} ، y_{d1} و u_{N2} برای مدل تأخیر خروجی و سیگنال های u_{d2} ، y_{d2} و u_{N2} برای تأخیر ورودی در نظر گرفته شده است. به این ترتیب با توجه به معادله رابطه ۹ و شکل (۵) می توان رابطه (۱۲) را استنتاج نمود.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{di} \\ y_{Ni} \\ y_{di} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2M_{22} & M_{21} & 4M_{22} \\ -2M_{21} & M_{11} & 4M_{12} \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{di} \\ u_{Ni} \\ u_{di} \end{bmatrix} \quad (12)$$

که در رابطه فوق $i=1$ برای تأخیر خروجی و $i=2$ برای تأخیر ورودی است. به این ترتیب $u_p = y_{d2}$ ، $y_p = u_{d1}$ و $u_p = y_{d2}$ و $y_p = u_{d1}$ می باشند.

با توجه به شکل ۶ و با در نظر گرفتن معادله حالت سیستم حلقه باز قدرت به صورت رابطه زیر بیان می گردد:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{ol} &= Ax_{ol} + B_w w + B_u u_p \\ y_p &= Cx_{ol} \end{aligned} \quad (13)$$

معادلات حالت فیلترهای وزن دهی W_1 و W_2 به صورت :

$$\begin{aligned} \dot{x}_{w1} &= A_{w1} x_{w1} + B_{w1} y_p \\ z_1 &= C_{w1} x_{w1} + D_{w1} y_p \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_{w2} &= A_{w2} x_{w2} + B_{w2} u_p \\ z_2 &= C_{w2} x_{w2} + D_{w2} u_p \end{aligned} \quad (15)$$

بیان می گردد. همچنین با در نظر گرفتن نامعینی های تأخیر ورودی و خروجی در مدل LFT با δ_{r1} و δ_{r2} ، می توان روابط کلی سیستم حلقه باز افزوده شده را به صورت:

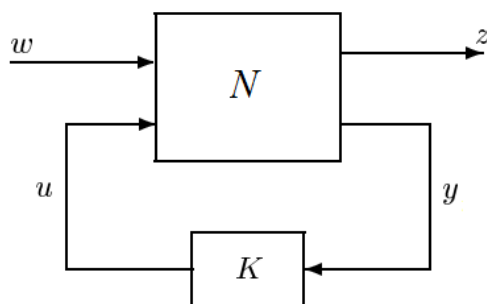
$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \\ y_{N1} \\ y_{N2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 & B_2 & Q_{x1} & Q_{x2} \\ C_1 & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 \\ C_2 & D_{21} & D_{22} & 0 & 0 \\ Q_{N1} & 0 & 0 & M_{11} & 0 \\ Q_{N2} & 0 & 4M_{12} & 0 & M_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \\ u_{N1} \\ u_{N2} \end{bmatrix} \quad (16)$$

۹

$$\begin{bmatrix} u_{N1} \\ u_{N2} \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} y_{N1} \\ y_{N2} \end{bmatrix} \quad (17)$$

بیان کرد. در رابطه (۱۶)

اکنون مطابق شکل ۷ کل نامعینی سیستم در یک بلوک نمایش داده شده و کنترل کننده نیز با توجه به ایده LFT نمایش داده می شود. در ادامه با توجه به هدف مسئله که طراحی کنترل کننده با در نظر گرفتن نامعینی است پیکربندی شکل (۸) که برای طراحی مناسب است در نظر گرفته می شود. به این ترتیب:



شکل ۸: ساختار عمومی NK برای طراحی کنترل کننده

۳-۲- تبدیل مسئله طراحی کنترل کننده به LMI

در این مرحله بخش نهایی و اصلی روند استفاده شده برای طراحی کنترل کننده مقاوم تشریح می شود. برای استفاده از روش مبتنی بر LMI لازم است نمایش فضای حالت معادل تابع تبدیل حلقه بسته T_{wz} محاسبه شود. در صورتی که نمایش فضای حالت کنترل کننده K به صورت:

$$\dot{x}_k = A_k x_k + B_k y_{d1} \quad (36)$$

$$u_{d2} = C_k x_k + D_k y_{d2}$$

در نظر گرفته شود، با کمی تلاش و جاگذاری معادلات ۱۶ الی ۲۷ و ۳۶ می توان معادله فضای حالت سیستم حلقه بسته را به صورت:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{cl} &= A_{cl} x_{cl} + B_{cl} w \\ z &= C_{cl} x_{cl} + D_{cl} w \end{aligned} \quad (37)$$

به دست آورد که:

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A_1 + B_2 D_k C_2 & B_2 C_k \\ B_k C_2 & A_k \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$B_{cl} = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$C_{cl} = [C_1 + D_{12} D_k C_2 \quad D_{12} C_k] \quad (40)$$

$$D_{cl} = D_{11} + D_{12} D_k D_{21} = 0 \quad (41)$$

به این ترتیب تابع تبدیل حلقه بسته از w به z از رابطه:

$$T_{wz}(s) = C_{cl}(sI - A_{cl})^{-1} B_{cl} + D_{cl} \quad (42)$$

به دست آید. لازم است توجه شود که متغیرهای حالت سیستم حلقه بسته شامل متغیرهای حالت حلقه باز طبق رابطه (۱۸) و متغیرهای حالت کنترل کننده یعنی x_k می باشند.

علاوه بر دستیابی به هدف $\|T_{wz}\|_{\infty} < \gamma$ لازم است در سیستم قدرت قطب های حلقه بسته به گونه ای جابجایی شوند که میرا شدن نوسانات پاسخ در ۱۰ الی ۱۵ ثانیه تضمین شود. به عبارت دیگر لازم است کنترل کننده K به گونه ای طراحی شود که:

$$\|T_{wz}\|_{\infty} < \gamma - 1$$

$$N = F_u(P, \Delta) \quad (31)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \delta_{\tau 1} & 0 \\ 0 & \delta_{\tau 2} \end{bmatrix} \quad (32)$$

و با توجه به روابط ۱۶ الی ۳۰ تحقق فضای حالت فرآیند تعمیم یافته P به صورت:

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (33)$$

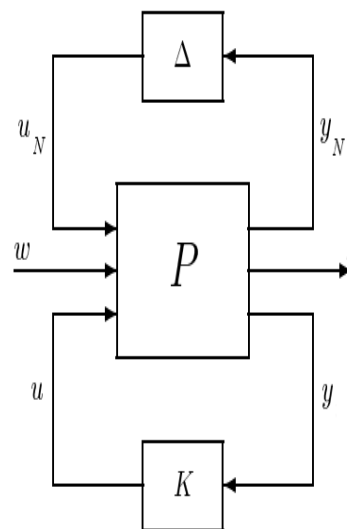
است. همچنین با توجه شکل (۸)

$$z = F_l(N, K)w \quad (34)$$

است. همان طور که قبلاً اشاره شد کنترل کننده بهینه H_{∞} باید به گونه ای طراحی شود که نرم بی نهایت تابع تبدیل حلقه بسته:

$$T_{wz} = F_l(N, K) \quad (35)$$

کمینه شود و یا در مسئله زیر بهینه $\|T_{wz}\|_{\infty} < \gamma$ باشد. برای حل این مسئله و یافتن پاسخ راه حل های مختلفی پیشنهاد شده است که هر کدام مزایا و معایب و شرایط کاربرد ویژه ای دارند [۳، ۲۶، ۳۰]. در این مقاله با توجه به ویژگی های مسئله مورد نظر از کاربرد لم حقیقی کران دار و از روشی استفاده شده است که نخستین بار در [۳۰] معرفی شده است. اساس این روش بر تبدیل مسئله طراحی کنترل کننده H_{∞} به یک مسئله LMI است.



شکل ۷: ساختار کلی سیستم در قالب LFT برای طراحی کنترل کننده

۲- قطب‌های حلقه بسته در محدوده D از صفحه مختلط قرار بگیرد.

استفاده از تغییر متغیر مناسب برای کنترل کننده بر اساس روش تشریح شده در ضمیمه ۲ نامساوی‌های (۴۳) و (۴۴) خطی می‌شوند.

۴- مطالعه موردی و شبیه‌سازی

کارایی روش پیشنهادی در یک سیستم تست نمونه ۱۶ ماشین-۶۸ با سه که در شکل ۹ نشان داده شده است، مورد ارزیابی قرار گرفته است. نتایج حاصل از آنالیز مدال بر روی سیستم مورد مطالعه در جدول ۱ قابل مشاهده است و نشان می‌دهد که سیستم مورد مطالعه دارای چهار مد بین ناحیه‌ای بحرانی با فرکانس‌های بین ۰/۱ تا ۱/۱ هرتز است لذا نیاز به طراحی WAC جهت ایجاد سیگنال کنترل اضافی در SVC برای افزایش میرایی نوسانات حاصل از چهار مد بین ناحیه‌ای حس می‌شود.

در این مطالعه از روش پسماند جهت انتخاب باس ۵۱ به عنوان مناسب‌ترین محل برای نصب SVC استفاده شده است (ضمیمه ۱). همچنین توان حقیقی خطوط ۱۳-۱۷، ۱۶-۱۸ و ۱۵-۴۲ با استفاده از بررسی بالاترین مقدار مشاهده‌پذیری هر یک از خطوط به ازای ۴ مد بین ناحیه‌ای به عنوان سیگنال پس خور کنترل کننده در نظر گرفته شده‌اند. مرتبه کنترل کننده‌هایی که با استفاده از روش‌های مبتنی بر H_∞ طراحی می‌شوند حداقل به تعداد مرتبه سیستم حلقه باز است و از آنجاکه در این مورد مرتبه سیستم به همراه SVC، ۱۳۶ است بنابراین برای ساده‌تر شدن طراحی و جلوگیری از پیچیدگی کنترل کننده نهایی از روش برش متوازن [۳] که یکی از انواع روش کاهش مرتبه است استفاده شده و مرتبه سیستم به ۱۰ کاهش یافته است. توضیحات بیشتر در مورد مطالب مذکور در مرجع [۱۰] ارائه شده است.

جدول ۱: مدهای بین ناحیه‌ای سیستم مورد مطالعه

شماره مد	مقدار ویژه $\sigma + j\omega$	فرکانس (Hz)	نسبت میرایی $\frac{-\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$
۱	۰/۰۹۵ ± j۲/۴۱	۰/۳۸	۰/۰۳۹
۲	۰/۰۲۵ ± j۳/۴۸	۰/۵۵	۰/۰۰۷
۳	۰/۱۵۷ ± j۳/۸۲	۰/۶۰	۰/۰۴۱
۴	۰/۲۱۱ ± j۵/۱۲	۰/۸۱	۰/۰۴۱

محدوده D بر اساس حداقل نسبت میرایی قابل قبول $\xi_{\min}$ و ارتباط آن با زاویه داخلی محدوده یعنی رابطه $\xi_{\min} = \cos^{-1} \frac{\theta}{2}$ مشخص می‌شود.

مراحل کامل تبدیل مسئله به یک مسئله LMI و حل آن در [۳۰، ۱۰، ۳] تشریح شده است. نشان داده شد که برقراری قید $\|T_{wz}\|_{\infty} < \gamma$ معادل یافتن $X_{\infty} = X_{\infty}^{-1} > 0$ است که در نامعادله ماتریسی:

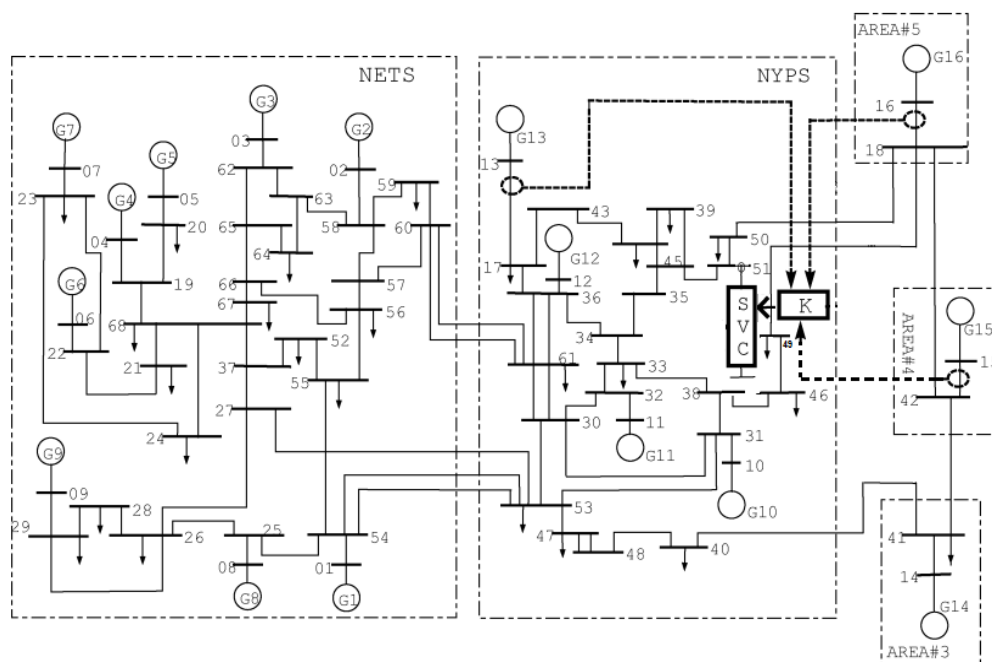
$$\begin{bmatrix} X_{\infty} A_{cl} + X_{\infty}^T A_{cl} & B_{cl} & X_{\infty} C_{cl}^T \\ B_{cl}^T & -\gamma I & D_{cl}^T \\ C_{cl} X_{\infty} & D_{cl} & -\gamma I \end{bmatrix} < 0 \quad (43)$$

صدق کند. همچنین قید دیگر مسئله که معادل قرار گرفته قطب‌های حلقه بسته در محدوده D مفروض است، معادل است با وجود $X_D = X_D^{-1} > 0$ که در نامعادله ماتریسی:

$$\begin{bmatrix} \sin \theta (A_{cl} X_D + X_D A_{cl}^T) & \cos \theta (A_{cl} X_D - X_D A_{cl}^T) \\ \cos \theta (X_D A_{cl}^T - A_{cl} X_D) & \sin \theta (X_D A_{cl}^T + A_{cl} X_D) \end{bmatrix} < 0 \quad (44)$$

صدق کند. بنابراین در صورتی مسئله طراحی کنترل کننده جواب دارد که هر دو نامعادله ماتریسی (۴۳) و (۴۴) حل داشته باشند. این دو نامساوی تنها در صورتی نسبت به X_D و X_{∞} هم‌زمان کوژ است که $X = X_D = X_{\infty}$ باشد.

با توجه به اینکه نامساوی‌های ماتریسی فوق شامل عوامل ضربی مانند X و A_{cl} هستند به طوری که هم X و هم A_{cl} به پارامترهای کنترل کننده مربوط می‌باشند این نامساوی‌های ماتریسی نسبت به X خطی نیستند. هر چند برای حل نامساوی‌های ماتریسی خطی در حال حاضر ابزارهای محاسباتی مناسبی مانند [۲۸] وجود دارد ولی حل نامساوی‌های ماتریسی غیرخطی دشوار است. لذا در این مقاله با



شکل ۹: سیستم ۱۶ ماشین ۶۸ باسه مورد مطالعه

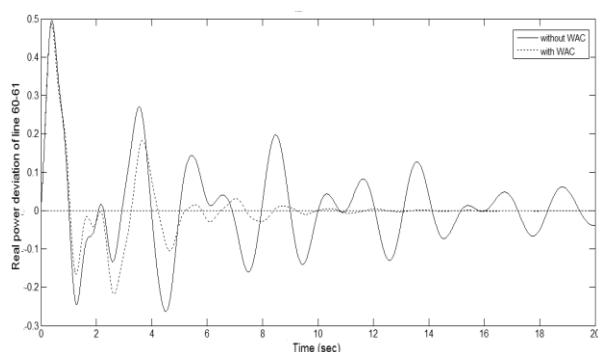
۴-۱- شبیه سازی و طراحی کنترل کننده با نادیده گرفتن اثر تأخیر زمانی

جهت بررسی عملکرد WAC طراحی شده، آن را با هدف اعمال سیگنال کمکی SVC، به سیستم اعمال کرده و سیستم حلقه بسته تشکیل شده است. جدول ۲ تأثیر WAC روی افزایش نسبت میرایی مدهای بین ناحیه ای را نشان می دهد. شکل ۱۰ پاسخ ضربه توان حقیقی خط ۶۰-۶۱ که از خطوط مهم و استراتژیک سیستم قدرت مورد مطالعه هست را نشان می دهد. اغتشاش ضربه به توان مکانیکی ژنراتور ۶ اعمال شده است.

جدول ۲: نسبت میرایی و فرکانس مدهای بین ناحیه ای در شرایط وجود و عدم

وجود WAC

شماره مد	بدون کنترل کننده		کنترل کننده محدوده وسیع	
	ζ	f(Hz)	ζ	f(Hz)
۱ مد	۰/۳۸	۰/۳۹	۰/۲۲	۰/۳۶
۲ مد	۰/۵۵	۰/۰۷	۰/۳۹	۰/۵۵
۳ مد	۰/۶۰	۰/۴۱	۰/۱	۰/۶۰
۴ مد	۰/۸۱	۰/۴۱	۰/۰۸۱	۰/۸۱

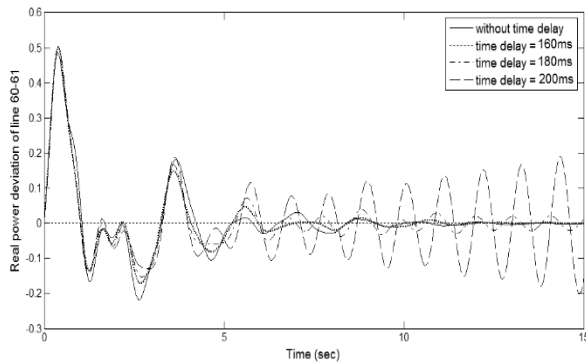


شکل ۱۰: پاسخ دینامیکی خط ۶۰-۶۱ به تغییر توان مکانیکی

ژنراتور ۶

$$W_1(s) = \frac{50}{s+50} \quad W_2(s) = \frac{65s}{s+65} \quad (45)$$

انتخاب شده اند. در این قسمت با این فرض که مقدار تأخیر زمانی سیستم WAMS بسیار ناچیز است و به نحوی که عملکرد WAC را تحت تأثیر قرار نمی دهد، به طراحی کنترل کننده پرداخته می شود. پس از تبدیل مسئله به یک مسئله LMI طراحی WAC با کمک جعبه ابزار کنترل مقاوم و جعبه ابزار LMI نرم افزار MATLAB، انجام شده است [۲۸].



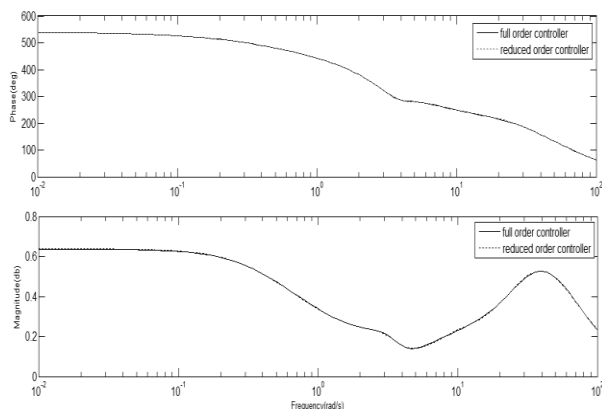
شکل ۱۲: پاسخ دینامیکی خط ۶۰-۶۱ به تغییر توان مکانیکی ژنراتور ۶

همان طور که از شکل ۱۲ مشاهده می شود سیستم به ازای تأخیر ۱۶۰ میلی ثانیه پایدار بوده و در برابر تأخیر زمانی ۱۸۰ میلی ثانیه به بالا ناپایدار خواهد شد.

۴-۴ طراحی کنترل کننده با در نظر گرفتن نامعینی تأخیر زمانی اطلاعات راه دور

با دو فرض استفاده از خط ارتباطی فیبر نوری جهت انتقال اطلاعات و یکسان بودن مدت تأخیر زمانی بین لحظه اندازه گیری اطلاعات تا اعمال به WAC (τ_1) و همچنین بین لحظه خروج سیگنال کنترلی تا وسیله تحت کنترل (τ_2)، مقدار تأخیر هر قسمت بین ۰ تا ۲۰۰ میلی ثانیه در نظر گرفته شده است. با توجه به رابطه (۴) پارامترهای تأخیر زمانی نامعین به صورت $\delta_{\tau_i} \in [-1, 1]$ ، $P_{\tau_i} = 1$ و $\tau_i = 0.1$ برای $i=1, 2$ است.

مرتبه WAC طراحی شده با روش طراحی مذکور برابر با مرتبه ۱۷ است که با استفاده از روش برش متوازن، WAC به مرتبه ۱۱ کاهش یافته که پاسخ فرکانسی WAC مرتبه اصلی و کاهش مرتبه یافته در شکل ۱۳ نشان داده شده است. عملکرد WAC برای تأخیرهای مختلف زمانی که تحت اغتشاش ضربه قرار گرفته است، در شکل ۱۴ آورده شده است.

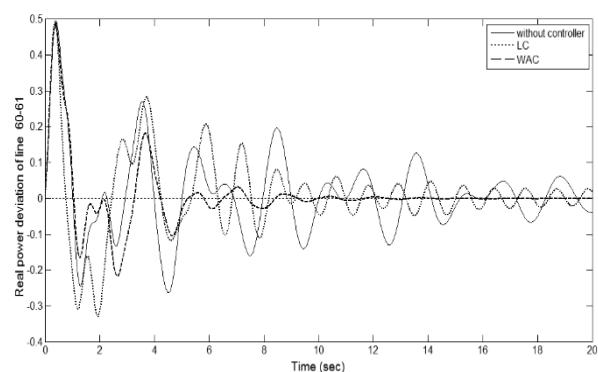


شکل ۱۳: پاسخ فرکانسی WAC مرتبه کامل و کاهش مرتبه یافته

۴-۲ مقایسه عملکرد سیستم اندازه گیری محدوده وسیع (WAMS) با

سیستم اندازه گیری محلی در میرایی نوسانات

به علت وسیع بودن سیستم های قدرت وسایل اندازه گیری محلی که به دریافت سیگنال از خط یا باس نزدیک SVC می پردازند قادر به پایش و تشخیص دقیق خطاها و مدهای نوسانی مخصوصاً مدهای بین ناحیه ای نخواهند بود. امروزه WAMS به علت پوشش معایب دستگاه های اندازه گیری محلی، جایگزین خوبی به حساب می آیند. جهت ارزیابی تأثیر سیستم های اندازه گیری، کنترل کننده محلی مبتنی بر توان حقیقی خط ۵۱-۵۰ به عنوان سیگنال اندازه گیری ورودی محلی طراحی شده و با WAC مقایسه شده است. شکل ۱۱ میزان تأثیر و عملکرد هر کنترل کننده را در میرایی نوسانات و مقاوم بودن در برابر اغتشاش نشان می دهند.



شکل ۱۱: پاسخ دینامیکی خط ۶۰-۶۱ به تغییر توان مکانیکی ژنراتور ۶ در حضور WAC و کنترل کننده محلی (LC)

همان طور که از شکل ۱۱ مشخص است استفاده از WAMS منجر به افزایش قابل توجه میرایی نوسانات بین ناحیه ای و نوسانات حاصل از اغتشاش، نسبت به سیستم اندازه گیری محلی می شود.

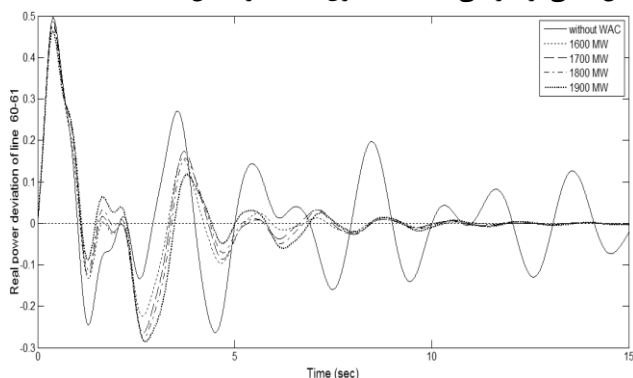
۴-۳ بررسی تأثیر اثر تأخیر زمانی بر عملکرد WAC

در WAMS، اطلاعات اندازه گیری شده توسط PMU از طریق خط ارتباطی به کنترل WAC و از کنترل کننده نیز به SVC ارسال می شود. متناسب با نوع وسیله ارتباطی و فاصله انتقال اطلاعات تأخیری از لحظه اندازه گیری اطلاعات تا رسیدن به SVC به وجود می آید. در قسمت های قبل WAC با فرض صفر بودن تأخیر زمانی اطلاعات طراحی شدند. اثر تأخیر زمانی اطلاعات راه دور به وسیله شبیه سازی خطی در نرم افزار MATLAB بررسی شده است. شکل ۱۲ پاسخ خط ۶۰-۶۱ را به تغییر توان مکانیکی ورودی ژنراتور ۶ در حالتی که تأخیر زمانی در مرحله طراحی WAC در نظر گرفته نشده است، نشان می دهد.

۴-۱-۲-۴-۴ مقاوم بودن WAC در برابر تغییر توان انتقالی بین نواحی

سیستم

با تغییر توان حقیقی انتقالی بین نواحی ۲ و ۵ در سیستم مورد مطالعه (شکل ۹)، مقاوم بودن WAC طراحی شده در برابر نقطه کاری سیستم قدرت با در نظر گرفتن تأخیر زمانی ۳۰۰ میلی ثانیه مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج شبیه سازی در شکل ۱۶ نشان داده شده است. با توجه به شبیه سازی ها که در بخش ۴ صورت پذیرفت ملاحظه می گردد که استفاده از WAC با توجه به در نظر گرفتن نامعینی تأخیر زمانی و عملکرد حذف اغتشاش در روند طراحی و مقاوم بودن آن در برابر تغییر توان انتقالی بین نواحی سیستم باعث میرا شدن نوسانات گردیده که این ناشی از طراحی مناسب کنترل کننده در بخش ۳ است.



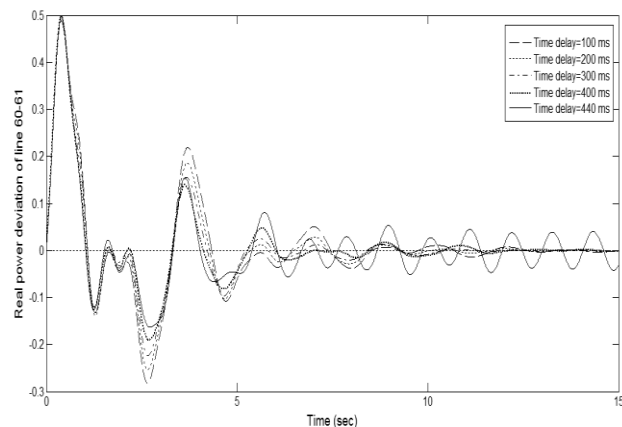
شکل ۱۶: پاسخ دینامیکی خط ۶۰-۶۱ به تغییر توان مکانیکی ژنراتور ۶ در برابر افزایش توان انتقالی بین نواحی ۲ و ۵

۵- نتیجه گیری

در این مطالعه، روش طراحی کنترل میراساز سیستم قدرت با در نظر گرفتن تأخیر زمانی در رسیدن سیگنال پس خور از نقاط دوردست در سیستم اندازه گیری محدوده وسیع (WAMS) تشریح شد. برای مدل سازی تأخیر زمانی نامعین از تقریب پاد و ساختار LFT پیشنهاد شده است. طراحی کنترل کننده با استراتژی حساسیت مرکب به منظور کاهش اثر اغتشاش در خروجی و دستیابی به یک سیگنال کنترل کوچک انجام شده است. با توجه به مزایای محاسباتی، روندی برای تبدیل و حل مسئله با تکنیک LMI استفاده شده است. همان طور که بر اساس مراحل طراحی و تئوری های استفاده شده انتظار می رود این روش عملکرد خوبی در حذف اغتشاش در حضور تأخیر زمانی نامعین دارد. این موضوع در یک مطالعه موردی و با انجام شبیه سازی های مختلف تأیید شده است.

مراجع

- [1] G. Andersson, P. Donalek, R. Farmer, N. Hatziairgyriou "Causes of the 2003 major grid blackouts in North America and Europe, and recommended means to improve system dynamic performance," IEEE Trans. Power Syst. vol. 20, no. 4, pp.1922–1928, 2005.
- [2] N. Dizdarevic, "Blackout from the system operators' perspective" Proceedings of Power Systems Conference and Exposition, pp. 937–942, 2004.



شکل ۱۴: پاسخ دینامیکی خط ۶۰-۶۱ به تغییر توان مکانیکی ژنراتور

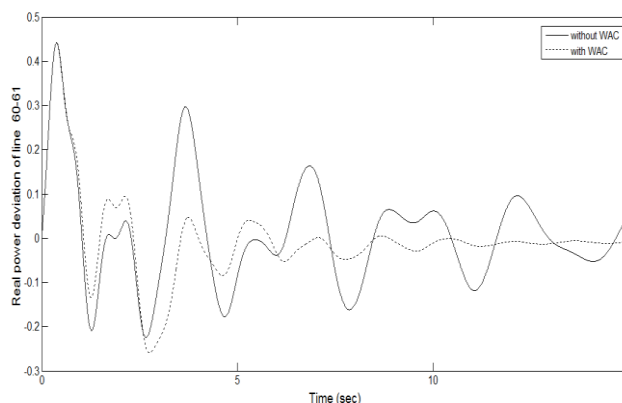
با توجه به شکل ۱۴، WAC در گستره تأخیر زمانی بین ۰ تا ۴۰۰ میلی ثانیه که در مرحله طراحی در نظر گرفته شد دارای میرایی کندگی قابل قبولی است.

۴-۱-۴-۴ بررسی مقاوم بودن WAC

در این مطالعه به مقاوم بودن WAC در برابر اغتشاشات ناشی از حذف خط و تغییر توان انتقالی بین نواحی سیستم می پردازیم.

۴-۱-۴-۴ مقاوم بودن WAC در برابر حذف خط

جهت ارزیابی عملکرد کنترل کننده محدوده وسیع طراحی شده در برابر تغییر ساختار و توپولوژی سیستم، خط بین باس ۴۹-۱۸ که در شرایط نرمال ۳۰۰ مگاوات توان انتقال می دهد حذف گردید. شکل ۱۵ پاسخ خط ۶۰-۶۱ را در برابر تغییر توان مکانیکی ورودی ژنراتور ۶ با در نظر گرفتن تأخیر زمانی ۳۰۰ میلی ثانیه نشان می دهد. استفاده از WAC با توجه به در نظر گرفتن نامعینی تأخیر زمانی و عملکرد حذف اغتشاش در روند طراحی باعث میرا شدن نوسانات در کمتر از ۱۰ ثانیه شده است.



شکل ۱۵: پاسخ دینامیکی خط ۶۰-۶۱ به تغییر توان مکانیکی ژنراتور ۶ در برابر حذف خط ۴۹-۱۸

- bias correction," IEEE Trans. Power Syst., vol.26, no.1, pp. 111 – 119, 2011.
- [21] K. E. Martin et al, "Exploring the IEEE standard C37.118–2005 synchrophasors for power systems," IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 23, no. 4, pp. 1805 - 1811, 2008.
- [22] J. Rasmussen and P. Jorgensen, "Synchronized Phasor Measurements of a Power System Event in Eastern Denmark," IEEE Computer Applications in Power, vol. 6, no. 2, pp. 10-15, 1993.
- [23] X.P. Zhang, C. Rehtanz and B. Pal, Flexible AC Transmission Systems: Modelling and Control, Springer, 2012.
- [24] N. Mithulananthan, A. Canizares, J. Reeve and G. J. Rogers, , " Comparison of PSS, SVC and STATCOM controllers for damping power system oscillations," IEEE Transactions on Power Systems, vol. 18, no. 2, pp. 786 - 792, 2003.
- [25] F. Milano, Power Systems: Power System Modelling and Scripting, Springer, 2010.
- [26] R. Goldoost, Y. Mishra, Utilizing Wide-Area Signals for off-center SVCs to damp interarea oscillations, Proceedings IEEE Power and Energy Society General Meeting (PES), IEEE, Vancouver, British Columbia, Canada, pp. 1-5, 2013.
- [27] A. Hashmani, "Damping of electromechanical oscillations in power systems using wide area control", PH.D. Dissertation, 2010.
- [28] P. Gahinet, A. Nemirovski, A. Laub, and M. Chilali, LMI Control Toolbox for Use With Matlab. Natick, MA: MathWorks Inc, 1995.
- [29] K.Zhou, J.C, Doyle, K Glover, Robust and Optimal Control, Newjerseu, Prentice-Hall, Inc., 1996
- [30] P. Gahinet, P. Apkarian, "A linear matrix inequality approach to H_∞ control". International journal of robust and nonlinear control, vol. 4, no. 4, pp. 421-448, 1994.
- [3] B. Pal, B. Chaudhuri, Robust control in power system, McGraw Hill, USA, 2005.
- [4] A.G .Phadke, J.S. Thorp, Synchronized Phasor Measurements and their Applications, Springer, 2008.
- [5] Y. Zhang, "Design of wide area damping control system for power system low frequency inter Area oscillations," PH.D. Dissertation, Washington State University, Dec, 2007.
- [6] Y. Zhang and A. Bose, "Design of wide-area damping controllers for inter-area oscillations," IEEE Trans. Power Syst., vol. 23, no. 3, pp.1136–1143, 2008.
- [7] Chaudhuri, and B. C. Pal, "Robust damping of multiple swing modes employing global stabilizing signals with a TCSC," IEEE Trans. Power Syst., vol. 19, no. 1, pp.499-506, 2004.
- [8] I. Ngamrooa, C. S. A. Nandaa, S. Dechanupapritthab, M.Watanabeb, Y. Mitani, "A robust SMES controller design for stabilization of inter-area oscillations based on wide area synchronized phasor measurements," Elect.Power Syst. Res. vol.79 , no.12 ,pp.1738–1749, 2009.
- [9] Y. Li C. Rehtanz, D. Yang, S. Ruberg , U. Hager, "Robust high-voltage direct current stabilising control using wide-area measurement and taking transmission time delay into consideration," IET Gener. Transm. Distrib., vol. 5, no. 3, pp. 289–297, 2011.
- [10] S. Abazari, A. Arab, M.Barkhordari, facts device wide area robust control for damping power system inter-area oscillations: a comparison between svc and tcsc, Accept in U.P.B. ISSN 1223-7027.
- [11] B. Naduvathuparambil, "Communication delays in wide area measurement systems," Proc. 34th Southeastern Symp. Syst. Theory, pp. 118–122, 2002.
- [12] H. Wu, AZ, Tempe, K.S. Tsakalis, G.T.Heydt "Evaluation of time delay effects to wide-area power system stabilizer design," IEEE Trans. Power Syst. vol. 19, no. 4 ,pp. 1935–1941, 2004.
- [13] B. Chaudhuri, R. Majumder, B.C Pal, "Wide-area measurement-based stabilizing control of power system considering signal transmission delay," IEEE Trans. Power Syst., vol.19, no.4, pp. 1971–1979, 2004.
- [14] H. A. A. Ahmed, " A centralized wide area control of facts for damping power system inter-area oscillation," PH.D. Dissertation, Dept. Elec., Egypt, Univ. Crarbondala, College, 2011.
- [15] D. Dotta, A.S. Silva, I.C. Decker, "Wide-area measurements-based two-level control design considering signal transmission delay, IEEE Trans. Power Syst, vol. 24, no. 1, 208–216, 2009.
- [16] J. Hauer, The Electric Power Engineering Handbook: Power System Stability and Control, 2007.
- [17] M. Parashar and J. Mo, "Real Time Dynamics Monitoring System (RTDMS): Phasor applications for the control room," in Proc. 42nd Hawaii International Conf. System Sciences, pp. 1-11, 2009.
- [18] F. Galvan, S. Mandal, and M. Thomas, "Phasor measurement units (PMU) instrumental in detecting and managing the electrical island created in the aftermath of hurricane Gustav", IEEE/PES Power Systems Conference and Exposition, pp. 1-4, 2009.
- [19] M. Zima, M. Larsson, P. Korba, C. Rehtanz, and G. Andersson, "Design aspects for wide-area monitoring and control systems," Proc. IEEE, vol. 93, no. 5, pp. 980–996, 2005.
- [20] L. Vanfretti, J. Chow, S. Sarawgi, and B. Fardanesh, "A phasor-data-based state estimator incorporating phase

ضمیمه ۱: جایابی بهینه SVC

SVC یکی از انواع ادوات FACTS است که قابلیت افزایش پایداری و میرایی نوسانات بین ناحیه‌ای را در سیستم‌های قدرت را دارد. با استفاده از روش پسماند یا باقی‌مانده که در مرجع [۱۰] بیان شده بهترین باس از بین ۶۸ باس موجود، جهت تأثیر بهتر سیگنال WAC و افزایش میرایی بیشتر نوسانات در سیستم قدرت، انتخاب شده است. بر طبق این روش هرچه مقدار پسماند متناسب با یک مد در هر باس از سیستم بیشتر باشد، نصب SVC در این باس تأثیری بیشتری در میرایی آن مد خواهد داشت. جدول (۳) مقادیر نرمالیزه شده پسماند به ازای قرارگیری SVC در برخی از باس‌ها را نشان می‌دهد. از بین باس‌های موجود در جدول ۵، باس‌های ۴۸ و ۵۱ دارای بیشترین مقدار نرمالیزه شده پسماند برای ۴ مد بین ناحیه‌ای هستند. از آنجایی که بحرانی‌ترین مد بین ناحیه‌ای در این سیستم مد شماره ۲ است لذا باس ۵۱ مناسب‌ترین محل برای نصب SVC است

$$MN^T = I - RS \quad (49)$$

اگر ماتریس‌های M و N دارای رتبه سطری کامل باشند، همواره می‌توان ماتریس‌های کنترل کننده یعنی A_k, B_k, C_k و D_k را با توجه به ماتریس‌های $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, M, N, R$ و S محاسبه کرد. با پیش و پس ضرب کردن نامعادله $X > 0$ به ترتیب در Π_2^T و Π_2 و همچنین با پیش و پس ضرب کردن نامعادله (۴۳) به ترتیب در $diag(\Pi_2^T, I, I)$ و $diag(\Pi_2, I, I)$ اعمال تغییر متغیرهای مناسب با استفاده از روابط (۴۸) نامعادلات ماتریس خطی:

$$\begin{pmatrix} R & i \\ I & S \end{pmatrix} > 0 \quad (50)$$

و

$$\begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{21}^T \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix} < 0 \quad (51)$$

به دست می‌آید. در رابطه (۵۱)

$$\begin{aligned} \psi_{11} &= \begin{bmatrix} AR + RA^T + B_2 \hat{C} + \hat{C}^T B_2^T & B_1 + B_2 \hat{D} D_{21}^T \\ (B_1 + B_2 \hat{D} D_{21}^T)^T & -\gamma I \end{bmatrix} \\ \psi_{21} &= \begin{bmatrix} \hat{A} + (A + B_2 \hat{D} C_2)^T & SB_1 + \hat{B} D_{21} \\ C_1 R + D_{12} \hat{C} & D_{11} + D_{12} \hat{D} D_{21}^T \end{bmatrix} \\ \psi_{22} &= \begin{bmatrix} A^T S + SA + \hat{B} C_2 + C_2^T \hat{B}^T & (C_1 + D_{12} \hat{D} C_2)^T \\ C_1 + D_{12} \hat{D} C_2 & -\gamma I \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (52)$$

به طریق مشابه با پیش و پس ضرب کردن نامساوی (۴۴) به ترتیب در Π_2^T و Π_2 و با استفاده از تغییر متغیرهای مناسب با توجه به روابط (۴۷) نامعادله ماتریسی خطی (۵۳) حاصل می‌شود

$$\begin{bmatrix} \sin \theta (\Phi + \Phi^T) & \cos \theta (\Phi - \Phi^T) \\ \cos \theta (\Phi^T - \Phi) & \sin \theta (\Phi + \Phi^T) \end{bmatrix} < 0 \quad (53)$$

که در این رابطه:

$$\Phi = \begin{bmatrix} AR + B_2 \hat{C} & A + B_2 \hat{D} D_{21}^T \\ \hat{A} & SA + \hat{B} C_2 \end{bmatrix} \quad (54)$$

اکنون می‌توان دستگاه نامعادلات ماتریسی خطی متشکل از (۴۹)، (۵۰) و (۵۱) را حل کرد و ماتریس‌های $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}, R$ و S را به دست آورد. با معلوم شدن این شش ماتریس و به دنبال آن‌ها تعیین ماتریس‌های M و N از رابطه (۴۸) می‌توان از حل دستگاه معادلات خطی (۴۷) ماتریس‌های کنترل کننده یعنی A_k, B_k, C_k و D_k را به دست آورد [۳ و ۱۰].

جدول ۳: مقادیر نرمالیزه شده پسماند به ازای ۴ مد بین ناحیه‌ای

شماره باس	پسماند			
	مد ۱	مد ۲	مد ۳	مد ۴
۱۸	۰/۰۷۶	۰/۵۶	۰/۲۴	۰/۸۳
۲۳	۰/۰۰۲	۰/۰۶۷	۰/۳۲	۰/۰۰۱ >
۲۹	۰/۰۰۳	۰/۱	۰/۴	۰/۰۰۱ >
۳۰	۰/۱۳	۰/۰۶	۰/۵۹	۰/۱۱
۳۱	۰/۱۳۲	۰/۰۴۵	۰/۴۵	۰/۱۲
۳۳	۰/۱۲	۰/۰۴	۰/۳۹	۰/۰۸۵
۳۶	۰/۰۷۶	۰/۰۳	۰/۳۰	۰/۴۵
۳۵	۰/۶۵	۰/۲	۰/۰۰۱	۰/۱۵
۳۹	۰/۲۶۵	۰/۳۱	۰/۵۹	۰/۱۶
۴۱	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۰۲	۰/۰۲۷
۴۲	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۳۲
۴۵	۰/۰۰۴	۰/۶۶	۰/۹	۰/۳۴
۴۶	۰/۱۵۳	۰/۰۰۲	۰/۴۳	۰/۰۹۵
۴۸	۱	۰/۳۱	۰/۴۵	۱
۴۹	۰/۲۹	۰/۴۲	۰/۵۳	۰/۲۷
۵۰	۰/۳۳	۰/۹	۰/۶۳	۰/۷۲
۵۱	۰/۵۶	۱	۱	۰/۴۸
۵۲	۰/۰۰۱	۰/۱۶	۰/۸۵	۰/۰۰۱
۵۳	۰/۱۷۴	۰/۰۰۸	۰/۵۹	۰/۱۵۵
۵۴	۰/۰۰۳	۰/۱۵	۰/۷۳	۰/۰۰۱
۶۱	۰/۰۷	۰/۰۰۶	۰/۷۳	۰/۰۰۶۶

ضمیمه ۲: خطی سازی نامعادلات ماتریسی

به منظور خطی سازی نامعادلات ماتریسی (۴۳) و (۴۴) متغیرهای کنترل کننده به صورت ضمنی بر حسب ماتریس X بیان می‌شوند. به این منظور X و X^{-1} به صورت:

$$X = \begin{pmatrix} R & M \\ M^T & U \end{pmatrix} \quad (46)$$

$$X^{-1} = \begin{pmatrix} S & N \\ N^T & V \end{pmatrix} \quad (47)$$

و تفکیک می‌شوند. با تعریف ماتریس‌های $\Pi_1 = \begin{pmatrix} R & I \\ M^T & 0 \end{pmatrix}$

اتحاد $\Pi_2 = \Pi_1 X \Pi_2 = \Pi_1$ برقرار است. متغیرهای کنترل کننده جدید به صورت:

$$\begin{aligned} \hat{A} &= NA_k M^T + NB_k C_2 R + SB_k C_k M^T + S(A + B_2 D_k C_2)R \\ \hat{B} &= NB_k + SB_k D_k \\ \hat{C} &= C_k M^T + D_k C_2 R \\ \hat{D} &= D_k \end{aligned}$$

تعریف می‌شوند. با توجه به روابط (۴۶) و (۴۷) و رابطه $XX^{-1} = 1$