

حل عددی مدل شار- رانشی جریان دوفازی با روش پایستار در امتداد مسیر مرکزی PRICE-C

اسماعیل نامور بهرغانی
ابراهیم حاجی دولو*
یونس شکاری
محسن خضریان

دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز
استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز
استادیار، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه یاسوج
دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

چکیده

جریان‌های دوفازی در صنایع نفت و گاز و نیروگاه‌های هسته‌ای از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. در تحقیق حاضر از مدل شار رانشی برای مدل‌سازی ریاضی جریان‌های دوفازی استفاده شده و تحلیل هذلولوی آن نیز انجام شده است. برای حل عددی معادلات هذلولوی مدل شار رانشی، از روش پایستار در امتداد مسیر مرکزی اولیه PRICE-C (PRImitive CEntered) استفاده شده است. به دلیل اینکه در این روش برای حل سیستم معادلات نیاز به محاسبه تمام ساختار مشخصه سیستم نیست، سرعت حل بالا می‌باشد. مسائل لوله ضربه، موج انبساطی و انبساط گذر صوتی با استفاده از این روش حل شده است. نتایج به‌دست آمده نشان دهنده این است که روش PRICE-C توانایی بالایی در تسخیر ناپیوستگی‌های میدان جریان دارد و به‌خوبی می‌تواند رفتار جریان را پیش‌بینی نماید.

واژه‌های کلیدی: جریان دوفازی، مدل شار رانشی، روش پایستار در امتداد مسیر PRICE-C

Numerical Solution of Drift-flux Model of Two-phase Flow Using Path-conservative PRICE-C Scheme

E. Namvar-Beherghani M.Sc. Student, Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz.
E. Hajidavalloo* Professor, Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz.
Y. Shekari Assistant Professor, Faculty of Engineering, Yasouj University
M. Khezrian M.Sc. Student, Faculty of Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz.

Abstract

Two-phase flows are of great importance in the oil, gas and nuclear power plant industries. In this paper drift-flux model was used for mathematical modeling of two-phase flows and then its hyperbolic analysis was performed. For numerical solution of hyperbolic equations, primitive (PRI) centered (CE) or PRICE-C scheme, which is a conservative scheme along the central path was used. The scheme does not need calculation of whole eigenstructure for solving the system of governing equations; therefore, the speed of solution is high. Shock-tube, pure rarefaction and transonic rarefaction problems were solved using this method. The results indicate that the PRICE-C scheme has high ability in capturing the discontinuities in the flow field and can predict the flow behavior successfully.

Key words: Two phase flow, Drift-flux model, PRICE-C scheme

۱ - مقدمه

با توجه به کاربرد جریان‌های دو فازی در بسیاری از فرآیندهای صنعتی، مدل‌سازی ریاضی و حل عددی آنها از اهمیت به‌سزایی در طراحی بهینه فرآیندهای صنعتی برخوردار است. به‌همین خاطر تاکنون مدل‌های ریاضی و روش‌های حل متنوعی برای این جریان‌ها ارائه شده‌است [۱، ۲]. ساده‌ترین مدل موجود مدل همگن بوده که در آن مخلوط دو فازی توسط معادلات شبیه معادلات جریان تک‌فازی تشریح می‌گردد. این روش هنگامی که دو فاز به‌خوبی با یکدیگر مخلوط بوده و با سرعت یکسانی حرکت کنند، جواب‌های رضایت‌بخشی ارائه می‌کند ولی اگر دو فاز اختلاف سرعت داشته باشند، این مدل قادر به پیش‌بینی مناسب رفتار جریان دو فازی نمی‌باشد [۳]. در حالت وجود اختلاف سرعت بین دو فاز، مدل‌های دوسیالی دقیق‌ترین روش برای تشریح جریان دو فاز هستند. اما به دلیل حضور جملات ناپایستار در معادلات حاکم و مشخص نبودن عبارت‌هایی دقیق برای متغیرهای مربوط به فصل مشترک، حل عددی آنها غالباً با مشکلات متعددی مواجه می‌شود [۱]. اگر دو فاز به‌خوبی با یکدیگر مخلوط بوده ولی اختلاف سرعت معینی بین آنها وجود داشته باشد، آنگاه مدل شار رانشی را می‌توان برای تشریح رفتار دینامیکی جریان به‌کار برد [۴]. این مدل را می‌توان به‌صورت پایستار نوشت و همانند مدل همگن فقط سه معادله دیفرانسیل جزئی دارد. این مدل را می‌توان به‌صورت پایستار نوشت و همانند مدل همگن فقط سه معادله دیفرانسیل جزئی دارد. در این مدل از دو معادله پیوستگی و یک معادله مومنتم برای مخلوط دو فاز، برای تشریح رفتار دینامیکی جریان استفاده می‌شود و برای محاسبه سرعت هر فاز از یک رابطه جبری موسوم به رابطه لغزش استفاده می‌شود.

سیستم معادلات مدل شار-رانشی یک سیستم پایستار است و برای بازه قابل قبولی از پارامترهای جریان سیستمی هذلولوی است [۵]. تیرون [۶] و بنزونی-گویچ [۷] سیستم معادلات مدل شار-رانشی را مطالعه کردند و مقادیر ویژه این سیستم را با فرض تراکم‌ناپذیری مایع و همچنین در نظر گرفتن این فرض که حاصل‌ضرب چگالی گاز در کسر حجمی گاز خیلی کمتر از حاصل‌ضرب چگالی مایع در کسر حجمی مایع باشد با انجام دادن یک سری ساده سازی به دست آوردند. همچنین اوج و فلاتن [۸] مقادیر ویژه و بردارهای ویژه این سیستم را با تحلیل اغتشاشی به‌دست آوردند.

روش‌های عددی زیادی برای حل سیستم پایستار مدل شار-رانشی وجود دارد [۹، ۱۰]. به‌طور کلی روش‌های حل عددی را می‌توان در دو گروه تقسیم‌بندی کرد: روش‌های مرکزی و روش‌های فراباد^۱. روش‌های فراباد معمولاً از تمام ساختار

مشخصه‌ای سیستم برای حل عددی جریان استفاده می‌کنند. این روش‌ها به دلیل استفاده از ساختار مشخصه‌ای کامل سیستم (شامل بردارهای ویژه سمت چپ و راست و مقادیر ویژه) روش‌های مناسبی برای حل عددی جریان‌های دو فازی می‌باشند. نقطه ضعف این روش‌ها زمان محاسبات طولانی آنها به دلیل محاسبه ساختار مشخصه‌ای کامل سیستم می‌باشد. سرعت حل عددی روش‌های مرکزی بسیار بیشتر از روش‌های فراباد می‌باشد، زیرا در اینگونه روش‌ها از اطلاعات مربوط به بردارهای ویژه جریان استفاده نمی‌شود. این دسته از روش‌ها بوسیله محققان زیادی برای حل سیستم‌های پایستار ارائه شده‌اند [۱۱-۱۳].

اوج و افجلد [۱۴] با روش AUSM معادلات مدل شار-رانشی را حل کردند. ویژگی اصلی روش AUSM سادگی و کارایی قابل توجه این روش می‌باشد زیرا در این روش نیازی به ماتریس ژاکوبی نیست ولی نقطه ضعف این روش TVD نبودن آن است که این امر ممکن است در برخی از نواحی جریان، باعث بروز نوسانات عددی شود. مانکچورد و همکاران [۱۵] با استفاده از روش چند مرحله‌ای MUSTA معادلات مدل شار-رانشی را در حالت دما ثابت حل کردند. در این روش مساله ریمن بر روی مرزهای هر سلول، به صورت عددی و با دقت مرتبه یک بر روی یک شبکه محاسباتی حل می‌گردد. مشکل اصلی روش MUSTA پیچیدگی اعمال آن است. همچنین به دست آوردن نتایج با دقت، مستلزم شبکه محاسباتی ریز است. روش Roe از جمله روش‌های فراباد است که برای حل معادلات شار-رانشی به کار می‌رود. رومیت [۵] روشی مرتبه اول و کاملاً عددی را برای ایجاد کردن ماتریس Roe ارائه داد. روش ایشان دارای محدودیت‌هایی نیز هست. یکی از محدودیت‌ها این است که مثبت ماندن حل (همانند کسر حجمی و یا چگالی) تضمین نمی‌شود. فلاتن و مانکچورد [۱۶] یک ماتریس Roe تحلیلی برای سیستم بسته معادلات شار-رانشی را ارائه دادند. در این روش بردارهای شار در حالت کلی توابع جبری از متغیرهای پایستار نیستند. ایشان مسایل را با دقت مرتبه اول و دوم حل کردند.

هدف اصلی این مقاله، حل معادلات با روشی است که در آن نیازی به محاسبه بردارهای ویژه سیستم نباشد. یکی از این روش‌ها PRICE-C است که اخیراً معادلات آب کم عمق با بسترهای ثابت و متغیر به‌وسیله کانسترتلی و همکاران [۱۷] با آن حل شده است. بررسی متون علمی در دسترس نشان می‌دهد که تاکنون مدل شار رانشی با این روش حل نشده‌است. در این مقاله از این روش برای حل معادلات شار-رانشی جریان دوفاز تراکم‌پذیر استفاده می‌شود و دقت و کارایی آن در تسخیر ناپیوستگی‌های موجود در میدان جریان دوفازی بررسی می‌شود.

^۱ Upwind

چون روش PRICE-C دقت مرتبه یک دارد، برای افزایش دقت عددی به مرتبه دو در زمان و مکان از روش MUSCL- Hancock استفاده می‌شود.

۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر مدل شار رانشی شامل معادله پیوستگی برای هر یک از فازها و یک معادله مومنتم برای مخلوط می‌باشد که این معادله از جمع کردن معادلات مومنتم فازها به دست می‌آید. به دلیل کمتر بودن تعداد معادلات نسبت به تعداد مجهولات، برای بسته شدن سیستم معادلات به تعدادی معادله کمکی نیاز است. این معادلات کمکی شامل معادلات حالت برای هر یک از فازها و رابطه لغزش می‌باشد. این معادلات در مراجع [۴، ۱۸، ۱۹] بیان شده‌اند.

معادله پیوستگی برای فاز گاز:

$$\frac{\partial(\rho_g \alpha_g)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_g \alpha_g u_g)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

معادله پیوستگی برای فاز مایع:

$$\frac{\partial(\rho_l \alpha_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_l \alpha_l u_l)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

معادله مومنتم مخلوط دو فاز:

$$\frac{\partial(\rho_g \alpha_g u_g + \rho_l \alpha_l u_l)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho_g \alpha_g u_g^2 + \rho_l \alpha_l u_l^2 + p)}{\partial x} = -q \quad (3)$$

در رابطه ۳ عبارت چشمه q در برگیرنده نیروهای ناشی از گرانش و اصطکاک بوده و به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$q = f_w + f_g = -\frac{2f_f \rho_m u_m^2}{d_h} - \rho_m g \quad (4)$$

در معادلات (۱) تا (۴) α_1 کسر حجمی مایع، α_g کسر حجمی گاز، u_l سرعت گاز، u_g سرعت مایع، ρ_g چگالی گاز، ρ_l چگالی مایع و p فشار است. همچنین ρ_m چگالی میانگین دو فاز و u_m سرعت میانگین دو فاز است.

۳- شکل پایستار مدل شار-رانشی

معادلات حاکم بر مدل شار رانشی را می‌توان به صورت کلی زیر نوشت:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{G} \quad (5)$$

که در آن

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 \\ u_1 u_g + u_2 u_l \end{pmatrix} \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -q \end{pmatrix} \quad (6)$$

و

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} u_1 u_g \\ u_2 u_l \\ u_1 u_g^2 + u_2 u_l^2 + p(u_1, u_2) \end{pmatrix} \quad (7)$$

در روابط بالا $u_2 = \alpha_l \rho_l$ و $u_1 = \alpha_g \rho_g$ می‌باشند.

۳-۱ ماتریس ژاکوبی

معادله (۵) را می‌توان به شکل شبه خطی زیر نوشت:

$$\mathbf{U}_t + \mathbf{J} \mathbf{U}_x = \mathbf{G} \quad (8)$$

در رابطه (۸)، \mathbf{J} ماتریس ژاکوبی نامیده می‌شود که به وسیله اوج و فلاتن $[\mathbf{J}]$ به دست آورده شده است.

$$\mathbf{J} = \frac{1}{\hat{\rho}} \times \begin{pmatrix} u_1 u_2 \delta_g + \zeta u_2 u_g & u_1 u_2 \delta_l - u_1 u_l & u_1 \\ -(u_1 u_2 \delta_g + \zeta u_2 u_g) & u_1 u_l - u_1 u_2 \delta_l & \zeta u_2 \\ j_{31} & j_{32} & 2(u_1 u_g + \zeta u_2 u_l) \end{pmatrix} \quad (9)$$

که در این رابطه:

$$j_{31} = \kappa \hat{\rho} \rho_l + 2u_1 u_2 \delta_g (u_g - u_l) + (\zeta u_2 - u_1) u_g^2 - 2\zeta u_2 u_g u_l \quad (10)$$

$$j_{32} = \kappa \hat{\rho} \rho_g + 2u_1 u_2 \delta_l (u_g - u_l) - (\zeta u_2 - u_1) u_l^2 - 2u_1 u_g u_l$$

در ماتریس ژاکوبی پارامترهای δ_l ، δ_g ، ζ ، κ و $\hat{\rho}$ مجهول هستند و در بخش ۲-۳ بیان می‌شوند.

۳-۲ رابطه زوبر و فاینبدلی

برای بسته شدن سیستم معادلات و یافتن سرعت هر یک از فازها با استفاده از مدل شار رانشی، به رابطه‌ای جبری برای ارتباط دادن سرعت دو فاز به یکدیگر نیاز است و در اینجا معادله زوبر و فاینبدلی به کار می‌رود [۲۰].

$$u_g = c_0 (\rho_g \alpha_g + \rho_l \alpha_l) + v_d \quad (11)$$

می‌توان این رابطه را مانند زیر نیز نوشت:

$$u_g - u_l = \varphi (\rho_g \alpha_g, \rho_l \alpha_l, u_g) \quad (12)$$

که در آن:

$$\varphi = \frac{v_d + (c_0 - 1)u_g}{c_0 \alpha_l} \quad (13)$$

پارامترهای c_0 و v_d در رابطه بالا را پارامترهای جریان گویند. پس از تعریف رابطه زوبر و فاینبدلی (رابطه لغزش)

$$c_m = 0.5\psi_1\psi_3 + \frac{\psi_2\rho_l}{\psi_3\hat{\rho}} \left(2 - \zeta\alpha_l \left(\frac{\rho_l - \rho_g}{\hat{\rho}} \right) \right) (u_g - u_l) + o(\varepsilon^2) \quad (24)$$

که در آن:

$$\psi_1 = (\kappa\hat{\rho}(\alpha_g + \zeta\alpha_l))^{0.5} \quad (25)$$

$$\psi_2 = \delta_g \frac{\alpha_l u_1}{\psi_1}$$

$$\psi_3 = \left(\psi_2^2 \left(\frac{\rho_l - \rho_g}{\hat{\rho}} \right) + 4 \frac{\rho_l \rho_g}{\hat{\rho}} \right)^{0.5}$$

در معادلات پیوستگی، مومنتم و رابطه لغزش (چهار معادله) هفت مجهول وجود دارد که عبارت اند از: کسر حجمی مایع α_l ، کسر حجمی گاز α_g ، سرعت گاز u_g ، سرعت مایع u_l ، چگالی گاز ρ_g ، چگالی مایع ρ_l و فشار p . برای کامل شدن سیستم معادلات به روابط دیگری نیاز است.

شرط زیر برای کسر حجمی مایع و گاز باید برقرار باشد.

$$\alpha_g + \alpha_l = 1 \quad (26)$$

از طرف چون هر دو فاز تراکم پذیر در نظر گرفته می‌شوند بنابراین معادله حالت برای دو فاز مانند زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\rho_k = \rho_{k,0} + \frac{p - p_{k,0}}{c_k^2} \quad k = g, l \quad (27)$$

در معادله (27) $\rho_{k,0}$ چگالی مرجع، $p_{k,0}$ فشار مرجع و c_k سرعت صوت برای فاز k ام است.

۴- روش حل عددی (PRICE-C)

در این تحقیق هدف روش عددی است که در آن نیازی به محاسبه ساختار ویژه کامل سیستم نباشد. از اینرو روش پایستار در امتداد مسیر مرکزی PRICE-C مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش ابتدا برای سیستم معادلات ناپایستار آب کم عمق معرفی شد [۱۷]. در مرجع [۱۷] چند روش PRICE پایستار در امتداد مسیر معرفی شده است که روش PRICE-C به دلیل اینکه برای محاسبه ماتریس Roe در مرز سلول محاسباتی فقط از اطلاعات دو سلول مجاور استفاده می‌کند، نسبت به سایر روش‌ها کارایی بهتری دارد. بنابراین در این مقاله روش PRICE-C در حل معادلات حاکم بر مدل شار رانشی به کار گرفته می‌شود. جزئیات بیشتر درباره سایر روش‌های PRICE در [۱۷] وجود دارد.

در این روش لازم است که معادلات به صورت شبه خطی نوشته شوند. بنابراین از سیستم معادلات جهت اعمال این روش استفاده می‌شود. شکل گسسته شده سیستم معادلات (۸) با روش PRICE-C به صورت زیر بیان می‌گردد.

پارامترهای δ_g ، δ_l ، κ ، ζ و $\hat{\rho}$ که در ماتریس ژاکوبی تعریف می‌شود از روابط زیر به دست می‌آیند [۸].

$$\delta_g = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_1} \right)_{u_2, u_g} = (u_g - u_l) \kappa \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial p} \right) \quad (14)$$

$$\delta_l = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_2} \right)_{u_1, u_g} = (u_l - u_g) \kappa \left(\frac{\alpha_g}{\alpha_l} \right) \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial p} \right) \quad (15)$$

$$\zeta = \left(\frac{\partial u_l}{\partial u_g} \right)_{u_1, u_2} = \frac{1 - c_0 \alpha_g}{c_0 \alpha_l} \quad (16)$$

$$\hat{\rho} = u_1 + \zeta u_2 \quad (17)$$

$$\kappa = \frac{1}{\left(\frac{\partial \rho_g}{\partial p} \right) \rho_l \alpha_g + \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial p} \right) \rho_g \alpha_l} \quad (18)$$

اوج و فلاتن [۸] سه مقدار ویژه ماتریس ژاکوبی را با تحلیل اغتشاشی تحت شرایطی که رابطه لغزش φ طبق معادله دیفرانسیل زیر برقرار باشد، به دست آوردند.

$$\alpha_l \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha_l} \right)_p + \varphi = 0 \quad (19)$$

بردار ویژه متناظر با موج مادی به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\lambda_2 = u_g - \frac{\alpha_g \alpha_l}{\alpha_g + \zeta \alpha_l} \delta_g \frac{(u_g - u_l)^2}{\kappa} + o(\varepsilon^3) \quad (20)$$

و بردارهای ویژه متناظر با امواج صوتی به صورت زیر بیان می‌گردند:

$$\lambda_{1,3} = u_p \pm c_m \quad (21)$$

که در آن ε پارامتر اغتشاشی است و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\varepsilon = \frac{u_g - u_l}{\left(\kappa \hat{\rho} (\alpha_g - \zeta \alpha_l) \right)} \quad (22)$$

همچنین:

$$u_p = \frac{u_1 u_g + \zeta u_2 u_l}{u_1 + \zeta u_2} + \alpha_l u_1 \delta_g \frac{\rho_l - \rho_g}{2 \hat{\rho}} + \frac{\alpha_g \alpha_l}{\alpha_g + \zeta \alpha_l} \delta_g \frac{(u_g - u_l)^2}{2 \kappa} + o(\varepsilon^3) \quad (23)$$

در رابطه (21) c_m سرعت صوت در مخلوط است.

۱- گسسته سازی شبکه

۲- وارد کردن شرایط اولیه

۳- محاسبه گام زمانی به صورت $\Delta t = \frac{CFL \times \Delta x}{ABS(\lambda_{max})}$

۴- محاسبه بردار شار عددی $(J_{i+\frac{1}{2}}^-, J_{i-\frac{1}{2}}^+)$ در گام زمانی

جدید با استفاده از روش عددی مورد استفاده

۵- به دست آوردن متغیرهای پایستار با روش گسسته سازی

حجم محدود در گام زمانی جدید (معادله ۲۸)

۶- به دست آوردن پارامترها در گام زمانی جدید

فشار: با جای گذاری معادله (۲۷) در معادله (۲۶)، عبارت

درجه ۲ زیر برای فشار به دست می آید:

$$p^2 + ap + b = 0$$

$$a = (\rho_{g,0}c_g^2 + \rho_{l,0}c_l^2) - (p_{l,0} + p_{g,0}) - (u_1c_g^2 + u_2c_l^2) \quad (34)$$

$$b = \rho_{g,0}\rho_{l,0}c_g^2c_l^2 - (p_{g,0}\rho_{l,0} + u_1c_g^2\rho_{l,0} - u_2p_{g,0})c_l^2 - (p_{l,0}\rho_{g,0} + u_2c_l^2\rho_{g,0} - u_1p_{l,0})c_g^2 - p_{l,0}p_{g,0}$$

چگالی فازها: از معادلات حالت هر فاز به دست می آیند.

کسر حجمی گاز: از متغیر پایستار مربوط به معادله پیوستگی

فاز گاز به دست می آید.

کسر حجمی مایع: مجموع کسر حجمی دو فاز برابر یک است

سرعت فازها:

با داشتن متغیر پایستار معادله مومنتم و معادله لغزش

سرعت فاز گاز و مایع محاسبه می شوند.

$$u_g = \frac{u_2v_d + u_3c_0\alpha_l}{u_2(1 - c_0\alpha_g) + u_1c_0\alpha_l} \quad (35)$$

$$u_l = \frac{u_3(1 - c_0\alpha_g) - u_1v_d}{u_2(1 - c_0\alpha_g) + u_1c_0\alpha_l} \quad (36)$$

۴-۲- ارتقای دقت عددی باشیوه MUSCL Hancock

یکی از راه های افزایش دقت عددی در زمان و مکان، استفاده

از شیوه MUSCL-Hancock می باشد. این شیوه شامل سه مرحله است.

مرحله اول: بازسازی اطلاعات هر سلول

با مقادیر متوسط سلول، یک چند جمله ای خطی تکه ای هموار بر

روی هر سلول محاسباتی به دست می آید. مقادیر برونمایی شده

مرزهای سمت و چپ سلول با استفاده از روابط زیر به دست

می آیند:

$$u_j^L = u_j^n - \frac{\Delta j}{2}, \quad u_j^R = u_j^n + \frac{\Delta j}{2} \quad (37)$$

در جایی که

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(J_{i+\frac{1}{2}}^-(u_{i+1}^n - u_i^n) + J_{i-\frac{1}{2}}^+(u_i^n - u_{i-1}^n) \right) + \Delta t S_i \quad z$$

که در رابطه بالا

$$J_{i+\frac{1}{2}}^- = \frac{1}{4} \left(2J_{\Psi}^M(u_i^n, u_{i+1}^n) - \frac{\Delta x}{\Delta t} I - \frac{\Delta t}{\Delta x} (J_{\Psi}^M(u_i^n, u_{i+1}^n))^2 \right) \quad (28)$$

$$J_{i-\frac{1}{2}}^+ = \frac{1}{4} \left(2J_{\Psi}^M(u_{i-1}^n, u_i^n) + \frac{\Delta x}{\Delta t} I + \frac{\Delta t}{\Delta x} (J_{\Psi}^M(u_{i-1}^n, u_i^n))^2 \right) \quad (29)$$

در معادلات (۲۸) و (۲۹) را ماتریس نوع Roe گویند.

$$\Psi(s) = \Psi(u_L, u_R, s) = u_L + s(u_R - u_L) \quad (30)$$

پس از تعیین مسیر Ψ باید ماتریس نوع J_{Ψ}, Roe محاسبه

گردد. با جایگذاری معادله (۳۰) رابطه زیر برای J_{Ψ} بدست

می آید:

$$J_{\Psi}(u_L, u_R) = \int_0^1 J(\Psi(s, u_L, u_R)) ds \quad (31)$$

با محاسبه انتگرال (۳۱) ماتریس نوع Roe بدست می آید.

این انتگرال را می توان به صورت تحلیلی برای بعضی از مسائل

بدست آورد اما برای بیشتر مسائل حل تحلیلی این انتگرال بسیار

طاقت فرسا است. بنابراین این انتگرال به صورت عددی و از روش

تربیع-گوس محاسبه می شود. کانستریلی و همکاران [۱۷] این

انتگرال را به صورت عددی حل کردند. روش انتگرال گیری

تربیع-گوس M نقطه ای با وزنه های ω_j و موقعیت s_j در

بازه $[0, 1]$ ، می تواند انتگرال یک چند جمله ای تا مرتبه

$2M - 1$ را به صورت دقیق محاسبه کند. بنابراین با نقاط بیشتر

می توان به دقت بالاتری دست یافت. در تحقیق حاضر ماتریس

Roe به صورت زیر محاسبه می شود.

$$J_{\Psi}^M(u_L, u_R) = \sum_{j=1}^M \omega_j J(\Psi(s_j, u_L, u_R)) \quad (32)$$

در [۱۷] برای محاسبه انتگرال از گوس سه نقطه ای استفاده

شده است. در این مقاله از روش گوس پنج نقطه ای برای محاسبه

انتگرال استفاده می شود که دقت بیشتری نسبت به روش گوس

سه نقطه ای دارد.

۴-۱- الگوریتم حل جریان

برای به دست آوردن پارامترهای جریان دوفازی در طول لوله

ضربه بر حسب مکان و زمان، به ترتیب زیر عمل می شود:

جدول ۱- شرایط اولیه در مساله لوله ضربه

$u_l(m/s)$	$u_g(m/s)$	$p(Pa)$	$\alpha_g(-)$	
۲۴,۷۷۴۱	۲۹,۵۱۳۸	۵۲۲۸۲۵	۰,۵۵	سمت چپ
۱,۷۳۷۲	۲,۵۵۸۲	۸۰۳۹۵۹	۰,۵۵	سمت راست

در جدول ۲ پارامترهای معادله حالت ذکر شده است همچنین ضرایب موجود در رابطه زوبر و فاینبدلی (رابطه لغزش) برابر $c_o = 1.07$ و $v_d = 0.2162$ در نظر گرفته می‌شود. نتایج شبیه‌سازی برای سرعت‌های گاز و مایع، کسر حجمی گاز و فشار با استفاده از روش PRICE-C در شکل‌های ۱ تا ۴ برای زمان $t = 0.5 s$ نشان داده شده است. این نتایج برای تعداد سلول‌های مختلف ۵۰، ۲۰۰، ۸۰۰، ۱۶۰۰ و ۳۲۰۰ ارائه شده است.

جدول ۲- پارامترهای معادله حالت برای لوله ضربه

$\rho_{k,0}(\frac{kg}{m^3})$	$c_k(\frac{m}{s})$	فاز
۰	۳۰۰	گاز
۹۹۹,۹۱۶	۱۰۰۰	مایع

ملاحظه می‌شود که روش به‌کار رفته، به‌خوبی می‌تواند ناپیوستگی‌های میدان جریان را ردگیری نماید. به دلیل اینکه این روش دقت مرتبه یک دارد، مقداری پخش عددی در حل مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد سلول‌های محاسباتی از این پخش عددی کاسته شده‌است. بررسی جواب‌های به‌دست آمده نشان می‌دهد که در پروفیل‌های سرعت فازها و کسر حجمی فاز گاز سه ناپیوستگی مشاهده می‌شود ولی تنها دو ناپیوستگی در میدان فشار وجود دارد. این امر را می‌توان با توجه به مشخصه‌های مساله توجیه کرد. مدل مخلوط سه مشخصه حقیقی دارد که دو مشخصه متناظر با امواج فشاری و انبساطی و یک مشخصه متناظر با ناپیوستگی تماسی می‌باشد. بدیهی است که اطلاعات فشار تنها توسط مشخصه‌های فشاری و تراکمی منتقل می‌شوند. ولی اطلاعات سایر متغیرها توسط هر سه مشخصه منتقل می‌گردد. در محل ناپیوستگی تماسی فشار و سرعت فاز گاز هیچ تغییری نمی‌کند ولی سایر متغیرها در عبور از این محل دچار تغییر می‌شوند. علت عدم تغییر سرعت فاز گاز در این محل آن است که در مدل شار رانشی ناپیوستگی تماسی با سرعت فاز گاز حرکت می‌کند. مقایسه نتایج با کارهای دیگران [۱۵، ۱۰] نیز تطابق خوبی را نشان می‌دهد.

$$\Delta_j = \frac{1}{2}(1+w)\Delta_{j-1/2} + \frac{1}{2}(1-w)\Delta_{j+1/2} \quad (38)$$

$$\Delta_{j-1/2} = u_j - u_{j-1}, \quad \Delta_{j+1/2} = u_{j+1} - u_j$$

در معادله (۳۸) $w \in [-1, 1]$ می‌باشد. برای غیرخطی کردن روش، از محدودگر شار MINMOD استفاده شده‌است [۲۱].

مرحله دوم: پیمایش زمانی مقادیر مرزی

مقادیر مرزی برونیایی شده هر سلول، از این توابع به اندازه نصف یک گام در زمان به پیش برده می‌شوند.

$$\bar{u}_j^L = u_j^n - \frac{1}{2} \left(I + \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{A}_j \right) \Delta_j + \frac{\Delta t}{2} S_j \quad (39)$$

$$\bar{u}_j^R = u_j^n + \frac{1}{2} \left(I - \frac{\Delta t}{\Delta x} \bar{A}_j \right) \Delta_j + \frac{\Delta t}{2} S_j$$

در رابطه بالا $\bar{A}_j = A(u_j)$ می‌باشد. روش معرفی شده، از مرتبه دو و خطی می‌باشد.

مرحله سوم: محاسبه متغرها در گام زمانی جدید.

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(j_{+1/2}^- (u_{i+1}^n - u_i^n) + j_{j-1/2}^+ (u_i^n - u_{i-1}^n) - \frac{1}{\Delta x} A u_x + \Delta t S_j \right) \quad (40)$$

جمله $A u_x$ که انتگرال عبارت غیرپایستار بر روی سلول محاسباتی می‌باشد، برای روش‌های مرتبه اول صفر می‌باشد و برای روش‌های مرتبه دوم به بالا با استفاده از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

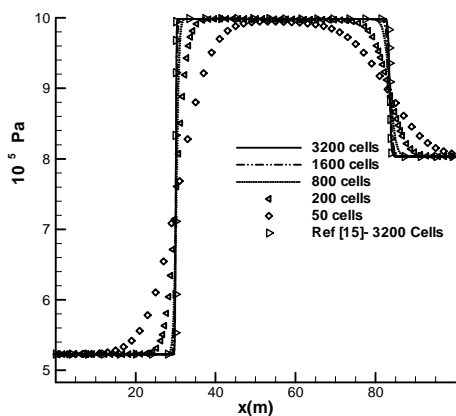
$$A u_x = \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{w_{j-1/2}^+}^{w_{j+1/2}^-} A(u_j(x, t)) \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial x} dx dt \quad (41)$$

۵- نتایج حل عددی

در این بخش عملکرد روش عددی به‌کار گرفته شده برای چند مساله جریان دو فازی مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. این مسائل توسط محققان زیادی بررسی شده‌است [۱۵، ۱۰]. تمام مسائل شامل لوله‌ای افقی به طول ۱۰۰ متر با یک دیافراگم در وسط است که شرایط اولیه در طرفین دیافراگم با هم فرق می‌کنند. چون حل تحلیلی برای این مسائل وجود ندارد لذا حل با تعداد سلول بیشتر به عنوان حل مرجع در نظر گرفته می‌شود.

۱-۵ - مساله لوله ضربه

این مساله را بادین و همکاران [۲۲] با فرض تراکم ناپذیری مایع حل کردند. شرایط اولیه موجود در این مساله در جدول ۱ داده شده است.



شکل ۴- توزیع فشار در طول لوله ضربه

در جدول ۴ پارامترهای معادله حالت ذکر شده است. فرض می‌شود که بین فازها لغزش وجود ندارد یعنی، $\phi = 0$ ، $v_d = 0$ و $c_0 = 1$. در این مساله مقدار عدد کورانت-فردریش-لوی برابر $CFL = 0.5$ در نظر گرفته می‌شود. شکل ۵ توزیع فشار در طول لوله را برای $t = 0.8$ sec با استفاده از روش PRICE-C نشان می‌دهد. این نتایج برای تعداد سلول‌های مختلف ۵۰، ۲۰۰، ۸۰۰، ۱۶۰۰ و ۳۲۰۰ ارائه داده شده است. مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج مرجع [۱۵] تطابق خوبی را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که جواب‌های دو شبکه ۱۶۰۰ و ۳۲۰۰ سلولی با دقت قابل قبولی با نتایج مرجع [۱۵] تطابق دارند. بنابراین می‌توان از استقلال از شبکه حل اطمینان حاصل کرد.

جدول ۴- پارامترهای معادله حالت برای مسائل انبساطی درون لوله

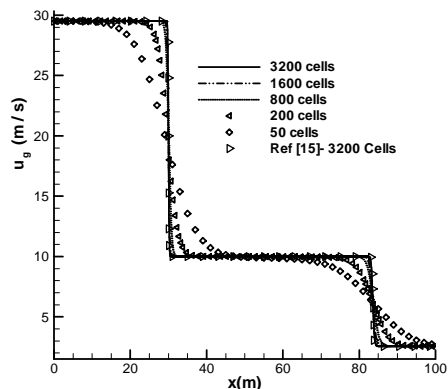
فاز	$c_k (\frac{m}{s})$	$\rho_{k,0} (\frac{kg}{m^3})$
گاز	۱۰۰	۰
مایع	۱۰۰۰	۹۹۹/۹۲۴

۵-۳- مساله انبساط گذر صوتی

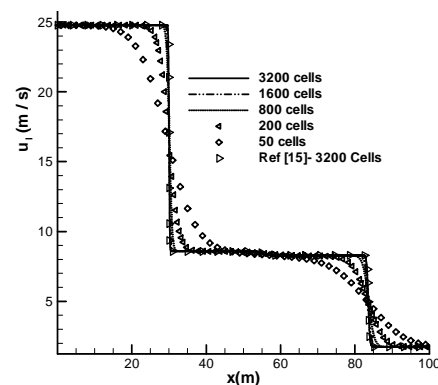
مساله انبساط گذر صوتی را می‌توان با کاهش دادن فشار و افزایش سرعت در سمت راست لوله انبساط خالص ایجاد کرد. شرایط اولیه موجود در این مساله در جدول ۵ داده شده است.

جدول ۵- شرایط اولیه در مساله انبساط خالص

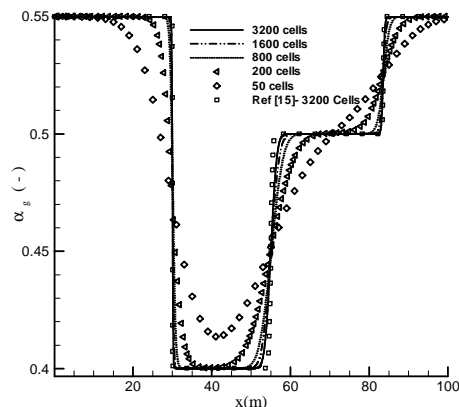
سمت چپ	$u_l (m/s)$	$u_g (m/s)$	$p (Pa)$	$\alpha_g (-)$
سمت چپ	۳۴,۴۲۳۳	۳۴,۴۲۳۳	۱۶۶۶۶۷۰	۰,۶
سمت راست	۷۰	۷۰	۷۰۰۰۰۰	۰,۶۸



شکل ۱- سرعت گاز در طول لوله ضربه



شکل ۲- سرعت مایع در طول لوله ضربه



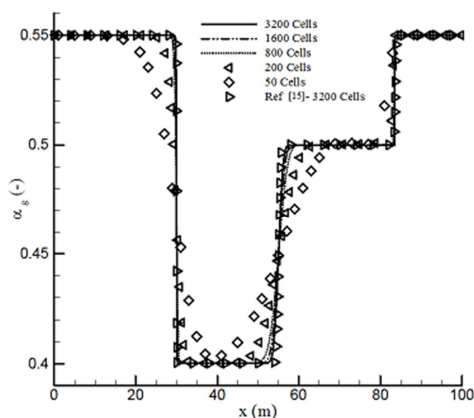
شکل ۳- کسر حجمی گاز در طول لوله ضربه

۵-۲- موج انبساطی

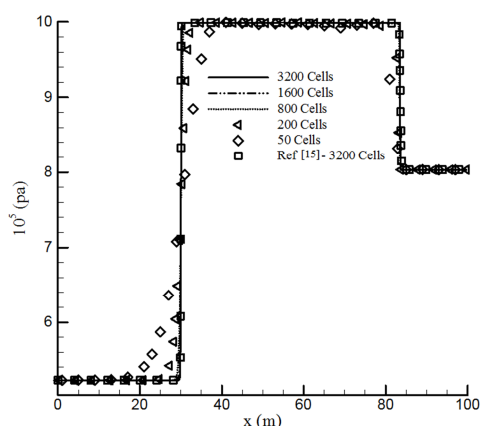
در این قسمت مساله انبساط خالص بررسی می‌شود که توسط بادین و همکاران [۲۲] ارائه شده است. شرایط اولیه این مساله در جدول ۳ داده شده است.

جدول ۳- شرایط اولیه در مساله انبساط خالص

سمت چپ	$u_l (m/s)$	$u_g (m/s)$	$p (Pa)$	$\alpha_g (-)$
سمت چپ	۳۴,۴۲۳۳	۳۴,۴۲۳۳	۱۶۶۶۶۷۰	۰,۶
سمت راست	۵۰	۵۰	۱۱۷۶۴۷۰	۰,۶۸



شکل ۷- توزیع کسر حجمی گاز (روش MUSCL Hancock)

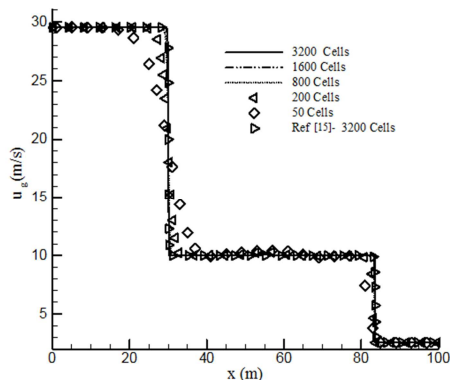


شکل ۸- توزیع فشار (روش MUSCL Hancock)

توزیع سرعت فاز گاز و مایع به ترتیب در شکل‌های ۹ و ۱۰ نشان داده شده است.

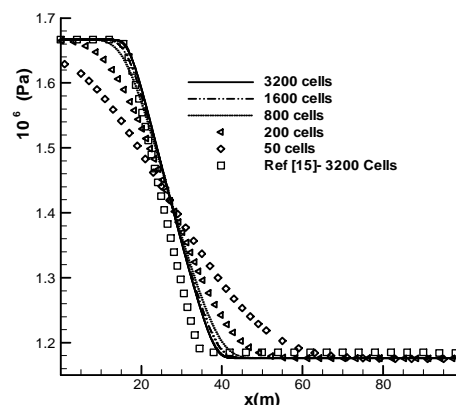
۵-۵- حل مساله لوله ضربه با شرایط اولیه کسر حجمی نزدیک صفر

به منظور بررسی قابلیت روش عددی در تحلیل جریان‌های نزدیک تک‌فاز از یک مساله لوله ضربه استفاده می‌شود. شرایط اولیه این مساله در جدول زیر ارائه شده است:

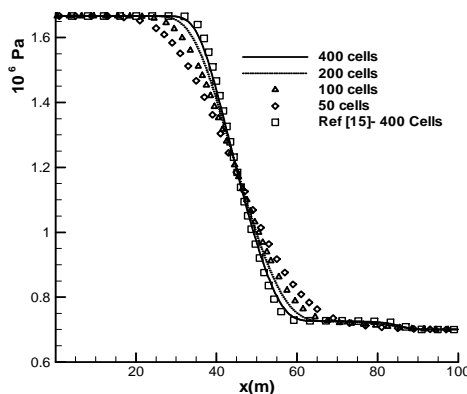


شکل ۹- توزیع سرعت گاز (روش MUSCL Hancock)

در جدول ۴ پارامترهای معادله حالت بیان شده است. فرض می‌شود که بین فازها لغزش وجود ندارد یعنی $\phi = 0$ ، $C_0 = 1$ ، $v_d = 0$. در این مساله مقدار عدد کورانت-فردریش-لوی برابر $CFL = 0.5$ در نظر گرفته می‌شود. شکل ۶ دیافراگم فشار در طول لوله را برای $t=0.3$ sec با استفاده از روش PRICE-C نشان می‌دهد. این نتایج برای تعداد سلول‌های مختلف ۵۰، ۱۰۰، ۲۰۰ و ۴۰۰ ارائه شده است. ملاحظه می‌شود که با ریزتر کردن شبکه، جواب‌های روش PRICE-C به نتایج مرجع [۱۵] نزدیکتر شده‌اند. همچنین جواب‌های دو شبکه ۲۰۰ و ۴۰۰ سلولی بر هم منطبق شده‌اند که این نشان دهنده عدم وابستگی حل به شبکه محاسباتی است.



شکل ۵- توزیع فشار در طول لوله در مساله انبساط خالص

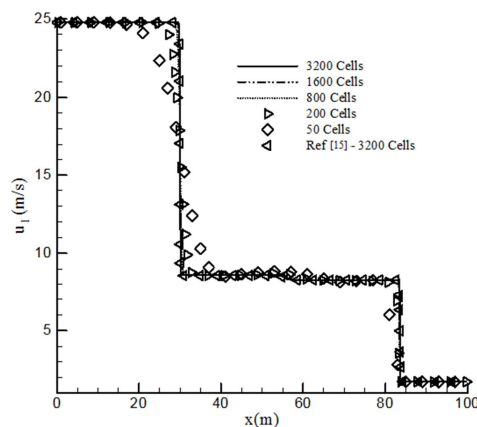


شکل ۶- توزیع فشار در طول لوله در مساله انبساط گذر صوتی

۵-۴- حل مساله لوله ضربه با دقت مرتبه ۲

در این قسمت حل مساله لوله ضربه با روش MUSCL Hancock ارائه شده است. شکل ۷ توزیع کسر حجمی گاز و شکل ۸ توزیع فشار درون لوله را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که با به‌کارگیری این روش از پخش عددی بر روی امواج صوتی کاسته شده است گرچه نوساناتی با دامنه کم در محل موج مادی قابل ملاحظه است.

چون روش ارایه شده دارای دقت مرتبه یک است، لذا برای افزایش مرتبه دقت از روش MUSCL Hancock استفاده شد و نتایج آن نیز ارایه شد. از مزایای استفاده از این روش، کاهش پخش عددی بر روی امواج صوتی می‌باشد. نقطه ضعف روش MUSCL بروز نوساناتی با دامنه کم در محل امواج مادی است. با حل مساله لوله ضربه دوفازی این نتیجه حاصل شد که پروفیل فشار و سرعت فاز گاز دو ناپیوستگی دارند ولی پروفیل‌های سرعت فاز مایع و کسر حجمی گاز سه ناپیوستگی دارند. علت این امر این است که تنها دو مشخصه از سه مشخصه سیستم اطلاعات مربوط به فشار را در میدان جریان منتشر می‌کنند ولی اطلاعات مربوط به سرعت و کسر حجمی توسط هر سه مشخصه منتشر می‌شود. علاوه بر این ناپیوستگی تماسی با سرعت فاز گاز جابجا می‌شود که این امر باعث می‌شود که در این محل سرعت فاز گاز تغییری نداشته باشد. همچنین این روش هم محل وقوع ناپیوستگی را به درستی پیش‌بینی می‌کند و هم دامنه تغییرات پارامترهای جریان را به درستی محاسبه می‌کند. به دلیل عدم استفاده از ساختار مشخصه‌ای کامل سیستم روش PRICE-C روش بسیار مناسبی برای حل عددی مسائل دوفازی کاربردی می‌باشد. نتایج روش عددی توانایی بالایی در تسخیر ناپیوستگی‌های میدان جریان دارد.

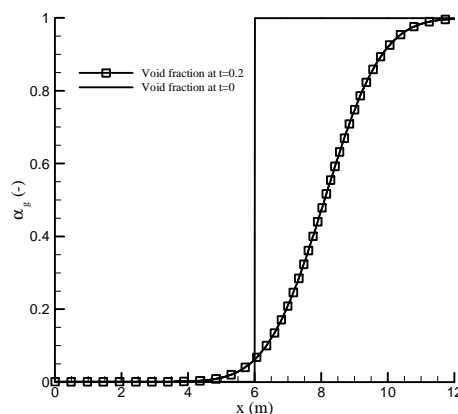


شکل ۱۰- توزیع سرعت مایع (روش MUSCL Hancock)

جدول ۶- شرایط اولیه مساله ۵-۵

$u_l(m/s)$	$u_g(m/s)$	$p(Pa)$	$\alpha_g(-)$	
۱۰	۱۰	1.0×10^5	۰٫۰۰۱	سمت چپ
۱۰	۱۰	1.0×10^5	۰٫۹۹۹	سمت راست

در لحظه صفر دیافراگم پاره می‌شود. حال هدف آن است که کمیت‌های جریان در لحظه $t=0.2$ محاسبه شوند. همان‌طور که در جدول مشخص است، مقدار کسر حجمی فاز گاز در سمت چپ دیافراگم در حالت اولیه تقریباً نزدیک صفر است (جریان تک‌فازی). شکل ۱۱ تغییرات کسر حجمی فاز گاز را بعد از 0.2 نشان می‌دهد.



شکل ۱۱- توزیع کسر حجمی فاز گاز در طول لوله

۶- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر جریان دو فازی همدم با مدل شار رانشی مورد بررسی قرار گرفت. روش پایستار در امتداد مرکزی PRICE-C برای حل عددی این مدل مورد استفاده قرار گرفت و مساله لوله ضربه، مساله فن انبساطی و مساله انبساط گذر صوتی با استفاده از این روش حل شده و نتایج آنها ارائه گردید.

مراجع

- [1] Ishii M., and Hibiki T., "Thermo-fluid dynamics of two-phase flow", vol. 1, West Lafayette, Springer, 2005.
- [2] Prosperetti A., and Tryggvason G., "Computational Methods for Multiphase flow", Cambridge University Press, 2007.
- [3] G. B. Wallis, One-Dimensional Two-Phase Flow vol. 1: McGraw-Hill, Inc 1969.
- [4] Ishii M., "One-Dimensional Drift-Flux Model and Constitutive Equations for Relative Motion Between Phases in Various Two-Phase Flow Regimes", Argonne National Laboratory, October 1977.
- [5] Romate J. E., "An approximate Riemann solver for a two-phase flow model with numerically given slip relation", Int. J. Computers & Fluids, vol. 27, pp. 455-477, 1998.
- [6] Teyron B., "Ecoulements diphasique instationnaires en conduite horizontale", Institut national polytechnique Toulouse, 1989.
- [7] Benzoni-Gavage S., "Analyse numerique des modes hydrodynamiques decoulements diphasique instationnaires dans les reseaux de production petroliere", École normale supérieure lyon, 1991.
- [8] Evje S. A. F., Flatten T., "On the wave structure of two phase flow models", Petroleum.nsf, 2005b.

- [9] Evje S. A. F., Fjelde K. K., "Hybrid flux splitting schemes for a two phase flow model", Computational physics, vol. 175, pp. 674-701, 2002.
- [10] Fjelde K. K., Karlsen K. H., "High resolution hybrid primitive-conservative upwind schemes for the drift flux model," Computers & fluids, vol. 31, pp. 335-367, 2002.
- [11] Ansari M. R., and Shokri V., "Numerical modeling of slug flow initiation in a horizontal channels using a two-fluid model", Int. J. Heat and Fluid Flow, vol. 32, pp. 145-155, 2011.
- [12] Loilier P., "Numerical simulation of Two-Phase Gas-Liquid Flows in Inclined and Vertical Pipelines", Ph. D. Thesis, Applied Mathematics and Computing Group Cranfield University, 2006.
- [13] Omgba-Essama C., "Numerical Modelling of Transient Gas-Liquid Flows (Application to Stratified & Slug Flow Regimes)", Ph. D. Thesis, Applied Mathematics and Computing Group, Cranfield, 2004.
- [14] Evje s., and Fjelde K. K., "On a rough AUSM scheme for a one-dimensional two-phase model", Int. J. Computers & Fluids, vol. 32, pp. 1497-1530, 2003.
- [15] Munkejord S. T., et al., "The multi-stage centred-scheme approach applied to a drift-flux two-phase flow model", Int. J., for Numerical Methods in Fluids, vol. 52, pp. 679-705, 2006.
- [16] Flåtten T., Munkejord S. T., "The approximate Riemann solver of Roe applied to a drift-flux two-phase flow model", Int. J. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, vol. 40, pp 735-764. 2006.
- [17] Canestrelli A. S. A., Dumbser M., and Toro E. F., "Well-balanced high-order centred schemes for non-conservative hyperbolic systems. Applications to shallow water equations with fixed and mobile bed", Advances in Water Resources, vol. 32, pp. 834-844, 2009.
- [18] Chermisinoff N. P., Encyclopedia of Fluid Mechanics, vol. 3, 1986.
- [19] Santos O. L. A., "A Dynamic Model of Diverter Operations for Handling Shallow Gas Hazards in Oil and Gas Exploratory Drilling", Ph. D. Thesis, Louisiana State University, 1989.
- [20] Zuber N., "Average Volumetric Concentration in Two-Phase Flow Systems", Int. J. Heat Transfer, vol. 87, pp. 453-464, 1965.
- [21] Toro E. F., "Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics", Second edition ed, Springer verlag, Berlin, 1990.
- [22] Baudin M., Berthon C., Coquel F., Masson R., and Tran q. H., "A relaxation method for two phase flow models with hydrodynamic closure law", Numerische mathematik, vol. 99, pp. 411-440, 2005a.