

مدل تحلیلی اثرات لغزش بین فازهای بخار و مایع در جریان فرا صوت چگالشی در یک نازل همگرا- واگرا

استادیار گروه مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه حکیم سبزواری
دانشجوی کارشناسی ارشد تبدیل انرژی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه حکیم سبزواری
دانشجوی کارشناسی ارشد تبدیل انرژی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه حکیم سبزواری
دانشجوی دکتری تبدیل انرژی، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه حکیم سبزواری

اسماعیل لکزیان*

سیما شعبانی

احمد مسجدی

فهیمه سلمانی

چکیده

جریانهای چگالشی درون نازلها و پره‌های ثابت توربین بخار همواره موضوع بسیاری از پژوهش‌ها بوده است. تاکنون در مطالعات جریان چگالشی اغلب از لغزش بین دو فاز (بخار و مایع) چشم پوشی شده است، ولی در تحقیق حاضر معادلات حاکم با در نظر گرفتن اثرات لغزش بین فازها و اضافه کردن معادله اندازه حرکت قطره بیان می‌شوند. معادلات مذکور با استفاده از روش اولری- لاگرانژی و طرح رانگ کوتای مرتبه چهارم حل و نتایج حالت‌های لغزشی و عدم لغزش با داده‌های تجربی مقایسه شده‌اند. بنابراین نوآوری این پژوهش اضافه کردن معادله مومنتم قطره به معادلات حاکم و شبیه سازی لغزش بین فازها در جریان فراصوت چگالشی برای اولین بار بصورت تحلیلی می باشد که در سه نازل همگرا- واگرا بصورت یک بعدی مورد بررسی قرار گرفته است. در هر سه نازل بادر نظر گرفتن لغزش، شعاع قطرات نسبت به حالت بدون لغزش افزایش یافته و به مقادیر تجربی نزدیک تر شده است. همچنین کسر رطوبت نسبت به حالت بدون لغزش کاهش یافته است.

واژه‌های کلیدی: جریان‌های چگالشی، لغزش، نازل همگرا-واگرا، شعاع قطرات، کسر رطوبت

Analytical Model for Slip Effects Between Vapor and Liquid Phases in a Supersonic Condensing Flow Through a Convergent - Divergent Nozzle

E. Lakzian

S. Shabani

A. Masjedi

F. Salmani

Assistant Professor Faculty of Engineering, Hakim Sabzevari University

MS student in mechanical engineering, Faculty of Engineering Hakim Sabzevari University

MS student in mechanical engineering, Faculty of Engineering Hakim Sabzevari University

PhD student in mechanical engineering, Faculty of Engineering Hakim Sabzevari University

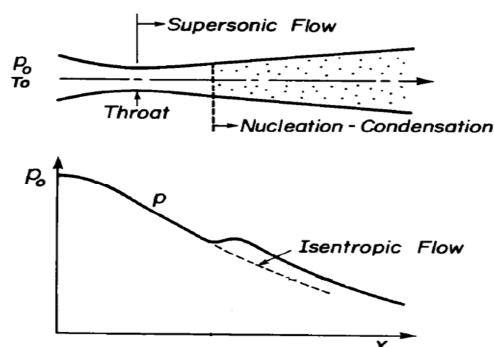
Abstract

Condensing flows in nozzles and stationary blades of steam turbine have always been the subject of many studies in recent years. The slip between two phases of droplet and vapor has been ignored in calculations but, in the present study, the governing equations by considering slip between two phases and also incorporating droplet momentum equation have been developed to the solution. The governing equations have been solved using the Eulerian-Lagrangian method and fourth order Runge- kutta scheme. The numerical results of slip and no slip cases have been compared with the experimental data. The innovation of this study is developing an analytical code by adding the droplet momentum equation to governing equations and modeling the slip between phases in supersonic condensing flow. All the solutions are based on a one dimensional analytical code in convergent-diverging nozzles. Considering slip in these three nozzles shows that the radius of droplets has a good agreement with experimental data and its value is increased. Also, wetness fraction is reduced compared to no slip case.

Keywords: Condensing flows, slip, convergent-divergent nozzle, radius of droplets, wetness fraction

۱- مقدمه

جریان‌های فراصوت همراه با جوانه‌زایی و شوک چگالش در نازل‌های همگرا- واگرا و گذرگاه پره‌های توربین، در صنعت کاربرد فراوان دارند. در شکل ۱ جوانه‌زایی و چگالش در نازل همگرا- واگرا ارائه شده است که در آن جریان بخار پس از گلوگاه به عدد ماخ یک رسیده و در ادامه در قسمت واگرا، جریان فرا صوت و منبسط می‌شود. با کاهش فشار در قسمت واگرا، بخار مافوق گرم خط بخار اشباع را قطع می‌کند. اما به دلیل سرعت بالا، بخار همچنان به صورت تک فاز باقی می‌ماند که به آن بخار مافوق سرد (غیرتعادلی) گفته می‌شود.



شکل ۱- جوانه‌زایی و چگالش در نازل همگرا- واگرا و مقایسه فشار در حالت غیر تعادلی با حالت آیزنتروپیک تعادلی

با ادامه انبساط پس از نقطه ویلسون، بخار گرمای نهان خود را از دست داده و به قطرات مایع تبدیل می‌شود که این پدیده را جوانه‌زایی می‌نامند. نقطه ویلسون جایی است که در آن حداکثر ناپایداری اتفاق می‌افتد. گرمای نهان آزاد شده ابتدا به قطره و از قطره به بخار منتقل شده و باعث ایجاد شوک چگالشی در جریان می‌گردد. دادن حرارت به جریان فراصوت باعث افزایش فشار و کاهش سرعت نسبت به حالت آیزنتروپیک می‌گردد. جریان بعد از این مرحله، دوفازی شده که به آن بخار مرطوب می‌گویند.

در بیشتر پژوهش‌های انجام شده در جریان‌های بخار مرطوب، اثر لغزش بین دو فاز، کوچک و قابل چشم‌پوشی فرض شده و سرعت فاز مایع برابر با سرعت بخار در نظر گرفته می‌شود. اما در مواردی که دقت بیشتری برای محاسبه متغیرها لازم بوده و یا میزان لغزش قابل توجه باشد، لغزش باید در نظر گرفته شود و سرعت قطره با سرعت بخار مجاور آن یکسان فرض نشود. با در نظر گرفتن لغزش بین دو فاز مایع و بخار، بر تعداد معادلات حاکم و متغیرهای جریان نسبت به حالت بدون لغزش افزوده شده، که در نتیجه محاسبات پیچیده تر خواهد

شد. اغلب در شبیه‌سازی لغزش بین دو فاز از رویکرد اولری- اولری استفاده شده و با تعریف جمله تولید، اثرات لغزش شبیه‌سازی شده است. از جمله گرماسی و یانگ مدلی را برای در نظر گرفتن برهم‌کنش و لغزش بین دو فاز در جریان بخار مرطوب ارائه دادند [۲ و ۱]. وایت و یانگ اثرات بخار غیر تعادلی در پراب پیتوت در جریان بخار مرطوب فراصوت را مورد بررسی قرار دادند و از مدل گرماسی و یانگ برای مدل‌سازی لغزش بین دو فاز استفاده کردند [۳]. دایکاس و رولسکی با رویکرد اولری- اولری و با بهره‌گیری از دو مدل تحلیل سیال (مدل‌های تک سیالی و دو سیالی)، جریان چگالشی در نازل‌های همگرا- واگرا را بررسی کرده و به مقایسه دو مدل با داده‌های تجربی پرداختند و قانون استوکس را جهت شبیه‌سازی لغزش بین فازها به کار گرفتند [۴]. کرمانی و گربر با روش اولری- لاگرانژی بخار مرطوب را به طور عددی در تعدادی از نازل‌های همگرا- واگرا همراه با شوک عمودی و بدون شوک و بدون در نظر گرفتن اثرات لغزش مورد مطالعه قرار دادند [۵]. همچنین گربر در یک مدل دو فازی اولری- لاگرانژی، جریان بخار مرطوب را از طریق جمله‌های تولید مورد تحلیل قرار داد [۶].

هدف اصلی این پژوهش اضافه کردن معادله مومنتم قطره به معادلات حاکم و مدل‌سازی لغزش بین فازها در جریان فراصوت چگالشی برای اولین بار بصورت تحلیلی می‌باشد. همچنین این مدل برای سه نازل همگرا- واگرا به صورت یک بعدی و با روش اولری- لاگرانژی بررسی شده است که در آن فاز مایع به صورت لاگرانژی و فاز بخار به صورت اولری تحلیل می‌گردند. لحاظ کردن لغزش بین دو فاز، نتایج را به واقعیت نزدیکتر و دقت حل را افزایش داده است.

۲- معادلات حاکم

حل‌های ارائه شده برای جریان فراصوت در نازل‌ها بر مبنای روش‌های اولری- اولری و اولری- لاگرانژی می‌باشند. در رویکرد اولری- اولری، معادلات حاکم بر هر دو فاز شامل معادلات پیوستگی، اندازه حرکت، انرژی و معادلات حالت به صورت جداگانه برای هر فاز نوشته می‌شوند و مجموعه این معادلات در یک شبکه ثابت و بدون حرکت، با روشی عددی یا تحلیلی حل می‌شوند. اما در رویکرد اولری- لاگرانژی که در آن فاز مایع به صورت لاگرانژی و فاز بخار به صورت اولری تحلیل می‌گردند، معادلات فاز بخار همانند قبل جداگانه در یک قالب و شبکه ثابت نوشته می‌شوند، ولی فاز مایع با معادلاتی تحلیل می‌شود که شامل تعقیب ذره مایع و بدون شبکه ثابت به دست می‌آیند. در این تحقیق جریان با رویکرد اولری- لاگرانژی بررسی می‌شود. معادلات پیوستگی، اندازه حرکت، انرژی و معادله حالت برای جریان فرا صوت با فرض یکنواخت و یک بعدی در نازل

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{1}{1 - \left(\frac{Z}{\zeta}\right) \left(1 + \frac{(\gamma - X)}{Y}\right)}$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{\gamma - X}{Y}\right) (\gamma Z + 1) + \gamma + 1 \right] \right.$$

$$\left. \left(\frac{fZdx}{2D_e} - \frac{W_L(U_G - U_L)}{AP} \frac{dU_L}{U_L} \right) \right. \quad (4)$$

$$+ \left(1 + \frac{\gamma Z}{\zeta} \right) \frac{Y}{X} \left(\frac{1}{C_p T_G} \frac{d(W_L L)}{W} + \frac{W_L}{W} \frac{(U_G^2 - U_L^2)}{C_p T_G} \frac{dU_L}{U_L} \right) -$$

$$\left\{ 2 + \frac{Z}{\zeta} \left[(\gamma - 1) - (1 - \zeta) \left(\frac{\gamma - X}{Y} \right) \right] \right\} \left[\frac{dA}{A} + \frac{dW_L}{W - W_L} \right]$$

$$\frac{dT_G}{T_G} = \frac{1}{1 - \left(\frac{Z}{\zeta}\right) \left(1 + \frac{(\gamma - X)}{Y}\right)}$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{\gamma - X}{Y^2}\right) \right. \right.$$

$$\left. \left(X - Y - \gamma Z \right) \left(\frac{fZdx}{2D_e} - \frac{W_L(U_G - U_L)}{AP} \frac{dU_L}{U_L} \right) \right. \quad (5)$$

$$+ \left(1 - \frac{\gamma Z}{\zeta X} \right) \left(\frac{1}{C_p T_G} \frac{d(W_L L)}{W} \right.$$

$$+ \left. \frac{W_L}{W} \frac{(U_G^2 - U_L^2)}{C_p T_G} \frac{dU_L}{U_L} \right)$$

$$+ \left. Z \left(\frac{\gamma - X}{Y^2} \right) \left(X + \frac{X - Y}{\zeta} \right) \left[\frac{dA}{A} + \frac{dW_L}{W - W_L} \right] \right\}$$

$$\frac{d\rho_G}{\rho_G} = \frac{1}{1 - \left(\frac{Z}{\zeta}\right) \left(1 + \frac{(\gamma - X)}{Y}\right)}$$

$$\left\{ \left[\left(\frac{Z}{Y}\right) (X - Y - \gamma Z) \right. \right.$$

$$\left. \left(\frac{fZdx}{2D_e} - \frac{W_L(U_G - U_L)}{AP} \frac{dU_L}{U_L} \right) \right. \quad (6)$$

$$- \frac{Y}{X} \left(\frac{1}{C_p T_G} \frac{d(W_L L)}{W} + \frac{W_L}{W} \frac{(U_G^2 - U_L^2)}{C_p T_G} \frac{dU_L}{U_L} \right)$$

$$+ \left. \frac{Z}{\zeta} \left[1 + (1 - \zeta) \left(\frac{\gamma - X}{Y} \right) \right] \left[\frac{dA}{A} + \frac{dW_L}{W - W_L} \right] \right\}$$

در روابط (۴)، (۵) و (۶) Z مجذور عدد ماخ می باشد و X و Y ضرایبی هستند که روابط آنها در ضمیمه (۱) آورده شده است.

۲-۲- معادله اندازه حرکت برای فاز مایع

با فرض کروی بودن قطرات مایع، معادله اندازه حرکت برای

قطره مایع به صورت زیر نوشته می شود [۳]:

$$\frac{dU_L}{dx} = - \frac{1}{\rho_L U_L} \frac{dP}{dx} + \frac{F}{\frac{4}{3} \pi r^3 \rho_L U_L} \quad (7)$$

که در آن F نیروی پسا بین قطره و بخار است. به دلیل وجود لغزش و اختلاف سرعت بین قطرات مایع و بخار پیرامون آن، نیروی پسایی بین دو فاز به وجود می آید که نقش اساسی را در لغزش ایفا می کند. برای نیروی پسا روابطی ارائه شده است که

همگرا-واگرا در ضمیمه (۱) آمده است. معادلات مربوط به ناحیه همگرای نازل (ناحیه خشک) با صفر قرار دادن سرعت فاز مایع در معادلات اصلی جریان در ضمیمه (۱)، بدست می آیند. پس از جوانه زایی جمله هایی که وابسته به میزان رطوبت و همچنین سرعت فاز مایع هستند، وارد معادلات می شوند. در پژوهش های پیشین اغلب سرعت دو فاز مایع و بخار برابر فرض شده و یکی از متغیرها (سرعت فاز مایع) از معادلات حذف می شد و تعداد معادلات برای محاسبه متغیرهای باقیمانده کافی بود. اما در این مقاله بحث اصلی پیرامون لغزش بین دو فاز مایع و بخار، تفاوت سرعت آنها و تاثیر لغزش بر روی خواص جریان می باشد. با در نظر گرفتن لغزش بین دو فاز، سرعت فاز مایع به متغیرهای جریان افزوده شده که می بایست معادله اندازه حرکت فاز مایع، اضافه گردد.

۲-۱- معادلات فاز بخار

معادلات اصلی جریان در ضمیمه (۱) آورده و اثبات شده اند. برای لحاظ کردن اثرات لغزش، دو تقریب زیر در نظر گرفته می شود [۷]:

$$\frac{W_L U_L}{AP} \frac{dU_L}{U_L} = \frac{W_L (U_L + U_G - U_G)}{AP} \frac{dU_L}{U_L} \approx$$

$$\frac{W_L U_G}{AP} \frac{dU_G}{U_G} - \frac{W_L (U_G - U_L)}{AP} \frac{dU_L}{U_L} \quad (1)$$

$$\frac{W_L}{W} \frac{U_L^2}{C_p T_G} \frac{dU_L}{U_L} = \frac{W_L}{W} \frac{(U_L^2 + U_G^2 - U_G^2)}{C_p T_G} \frac{dU_L}{U_L}$$

$$\approx \frac{W_L}{W} \frac{U_G^2}{C_p T_G} \frac{dU_G}{U_G} - \frac{W_L}{W} \frac{(U_G^2 - U_L^2)}{C_p T_G} \frac{dU_L}{U_L} \quad (2)$$

کسر خشکی، ζ بصورت زیر تعریف می شود:

$$\zeta = \frac{W_G}{W} = \frac{(W - W_L)}{W} \quad (3)$$

معادلات اصلی جریان، معادلات (۱-۲)، (۱-۴)، (۱-۹)، (۱-۱۳) و (۱-۱۹) موجود در ضمیمه (۱) معادلات اصلی جریان هستند که اثبات آنها در ضمیمه (۱) ارائه شده است، با در نظر گرفتن تفاوت سرعت فاز مایع و بخار و استفاده از معادلات ۱، ۲ و ۳ صورت زیر بازنویسی می شوند:

از جمله معتبرترین این روابط قانون پسای استوکس می‌باشد. یک فرض مهم در بدست آوردن قانون استوکس این است که سرعت نسبی بخار در سطح قطره صفر است اما این فرض برای قطرات کوچک قابل قبول نبوده و بنابراین در این حالت از یک ضریب تصحیح برای معادله پسای استوکس استفاده می‌شود همچنین باید توجه داشت که در هر دو حالت مذکور نیروی پسا وجود دارد [۴]. ما در این مقاله از نیروی پسای ارائه شده توسط یانگ [۳] استفاده می‌کنیم که به صورت زیر تعریف می‌شود. همچنین لازم به ذکر است که در این مقاله منظور از (بدون لغزش) این است که سرعت فاز بخار و قطره با هم برابر و نیروی پسا صفر می‌باشد.

$$F = \frac{9}{2} \frac{\mu_G (U_G - U_L)}{\rho_L r^2 (1 + 3.78Kn)} \quad (8)$$

در رابطه (۸)، Kn عدد بی بعد ندسن است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Kn = \frac{1.88\mu_G}{2r\rho_G\sqrt{RT_G}} \quad (9)$$

معادله اندازه حرکت فاز مایع به صورت جداگانه، برای بدست آوردن U_L و $\frac{dU_L}{U_L}$ حل می‌شود. همچنین فقط در اولین گام

محاسباتی پس از جوانه زایی، سرعت فاز مایع با سرعت فاز بخار یکسان فرض شده (مقدار اولیه) و سپس با استفاده از معادلات (۷) و (۸) مقدار سرعت مایع اصلاح می‌شود. نحوه محاسبات در بخش روش عددی توضیح داده شده است.

۳-۲- معادلات جوانه‌زایی

جوانه‌زایی در این تحقیق به صورت همگن و بدون ذرات خارجی در نظر گرفته می‌شود و روی سطوح و ذرات خارجی، جوانه‌زایی صورت نمی‌گیرد.

شعاع بحرانی r^* به صورت زیر تعریف می‌شود [۸]:

$$r^* = \frac{2\sigma_r}{\rho_L RT_G \ln \left[\frac{P}{P_s(T_G)} \right]} \quad (10)$$

به دلیل تمایل فرآیندهای طبیعی به کاهش انرژی گیبس، قطراتی که شعاع آنها از r^* کمتر است، تبخیر می‌شوند و آنهایی که شعاعی بزرگتر از r^* دارند، رشد خواهند کرد. زلدویچ [۹] رابطه زیر را برای جوانه زایی در حالت پایا ارائه کرد:

$$J_{st} = \sqrt{\frac{2N^3}{\pi}} \frac{qP^2\sqrt{\sigma_r}}{\rho_L (RT_G)^2} \times \exp \left[\frac{-16\pi N \sigma_r^3}{3\rho_L^2 (RT_G)^3 \left\{ \ln \left(\frac{P}{P_s(T_G)} \right) \right\}^2} \right] \quad (11)$$

رابطه (۱۱) معادله جوانه‌زایی کلاسیک نام دارد و بعدها اصلاحاتی برای تطبیق بیشتر با واقعیت برای این معادله پیشنهاد شد که به برخی از آنها اشاره می‌شود؛ کورتنی فشار جزئی خوشه‌ها را در نظر گرفت. همچنین کانترویتز پیشنهاد کرد که بیشتر بودن دمای قطره نسبت به دمای بخار، در محاسبات لحاظ شود [۱۰]. تصحیح کورتنی بصورت زیر می‌باشد:

$$J_{Co} = \frac{J_{st}}{S} = \frac{P_s(T_G)}{P} J_{st} \quad (12)$$

همچنین بنسون و شاتل ورث [۹] اصلاحاتی را در مقدار تنش سطحی، پیشنهاد کردند. ولک [۱۱] با بررسی نتایج اصلاحات پیشین و نتایج تجربی، با استفاده از روش حداقل مربعات، یک تابعی تجربی پیشنهاد داد. این فرمول برای بخار آب به صورت زیر می‌باشد:

$$J_{H_2O} = J_{class} EXP \left(-27.56 + \frac{6.5 \times 10^3}{T} \right) \quad (13)$$

در این مقاله از تصحیحات کورتنی و تابع تجربی (معادلات (۱۲) و (۱۳)) استفاده شده است.

۴-۲- معادلات رشد قطره

اگر شعاع بزرگتر از r^* باشد، قطرات شروع به رشد می‌کنند. یک رابطه نیمه تجربی برای نرخ رشد قطره توسط زیدی و باختر [۱۲] به صورت زیر ارائه شده است:

$$\frac{dm_r}{dt} = \frac{q_c Kn \sqrt{8\pi R}}{Kn + 0.375q_c S_c} \times \left[\rho_G \sqrt{T_G} - \rho_s(T_L, r) \sqrt{T_L} \right] \quad (14)$$

در رابطه (۱۴)، S_c عدد اشمیت بوده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S_c = \frac{\mu_G P^{0.86}}{\rho_G} \frac{1}{(4.2415 \times 10^{-15} \sqrt{T_G})} \quad (15)$$

تبادل انرژی بین قطره و بخار بوسیله رابطه زیر ارائه می‌شود:

$$L \frac{dm_r}{dt} = 4\pi r^2 \alpha_r (T_L - T_G) \quad (16)$$

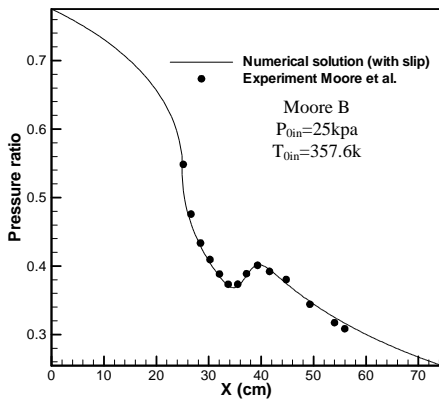
که α_r ضریب انتقال گرمای جابجایی بوده و رابطه‌ای تجربی برای آن، توسط گرماسی [۱] به صورت زیر ارائه شده است:

$$\alpha_r = \frac{\lambda}{r(1 + 3.18Kn)} \quad (17)$$

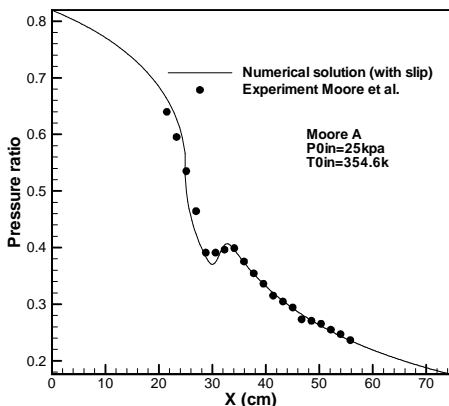
۳- روش عددی

معادلات اصلی جریان پس از بازنویسی، به شکل معادلات (۴) تا (۶) در می‌آیند. این معادلات با روش عددی رانگ-کوتای مرتبه چهارم انتگرال‌گیری می‌شوند و متغیرهای dZ/Z

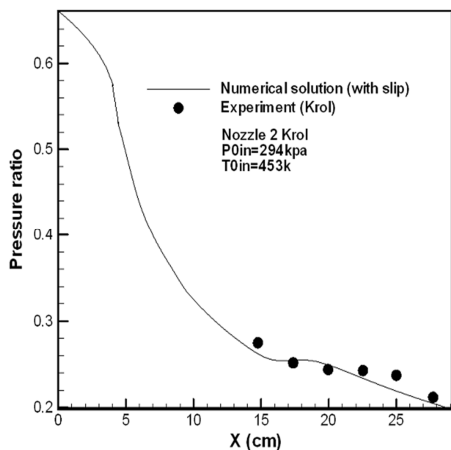
در شکل‌های ۲، ۳ و ۴ حل عددی برای نسبت فشار $(P_r = \frac{p}{p_{0in}})$ با لغزش بین دو فاز با نتایج تجربی [۵ و ۱۳] برای سه نازل مقایسه شده است. نتایج عددی توافق خوبی با نتایج تجربی دارند.



شکل ۲- مقایسه حل عددی نسبت فشار در حالت لغزشی با مقادیر تجربی برای نازل مور B



شکل ۳- مقایسه حل عددی نسبت فشار در حالت لغزشی با مقادیر تجربی برای نازل مور A



شکل ۴- مقایسه حل عددی نسبت فشار در حالت لغزشی با مقادیر تجربی برای نازل ۲ کرول

با این روش در هر المان به دست می‌آیند و با استفاده از این مقادیر، متغیرهای dU_G/U_G و dP/P با روابطی که در ضمیمه (۱) آمده است، بدست می‌آیند. در ناحیه خشک جریان، پنج معادله با متغیرهای مستقل dA/A و fdx/De برای محاسبه پنج مجهول dZ/Z ، dT_G/T_G ، dP/P ، dU_G/U_G و $d\rho_G/\rho_G$ وجود دارند [۹].

با ورود به ناحیه مرطوب، ابتدا معادله اندازه حرکت فاز مایع برای هر المان حل شده و سپس مقادیر dU_L/U_L و dW_L/W به عنوان متغیرهای مستقل وارد معادلات اصلی جریان می‌شوند. بنابراین در ناحیه جوانه‌زایی و ناحیه مرطوب، متغیرهای مستقل در نظر گرفته شده و پنج معادله، برای حل پنج متغیر dZ/Z ، dT_G/T_G ، dP/P ، dU_G/U_G و $d\rho_G/\rho_G$ استفاده می‌شوند.

برای حل معادله (۷)، جمله‌های $\frac{dP}{dx}$ و U_G در این معادله از مقادیر المان قبلی به دست می‌آیند و $\frac{dP}{dx}$ از تقسیم اختلاف فشار از تفاضل دو مرحله قبلی محاسبه می‌شود. روش حل معادله اندازه حرکت فاز مایع، روش انتگرال‌گیری عددی رانگ-کوتای مرتبه چهارم است. فقط در لحظه ایجاد قطره، سرعت آن برابر با سرعت بخار در نظر گرفته شده است. معادلات رشد و دمای قطره یعنی معادلات (۱۴) تا (۱۷) نیز با انتگرال‌گیری و استفاده از روش تکرار حل می‌شوند. با حل آنها می‌توان شعاع و دمای قطره را برحسب خواص بخار بدست آورد.

۴- هندسه و شرایط مرزی مسئله

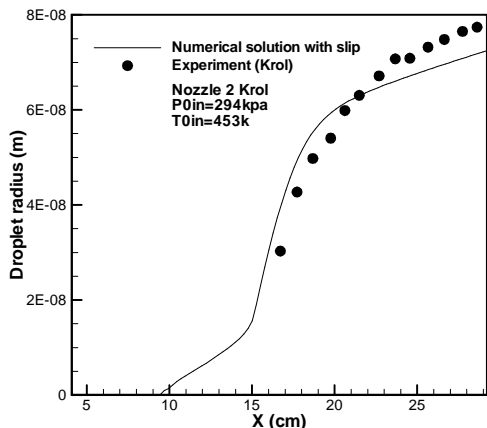
هندسه‌های مورد بررسی در این تحقیق نازل‌های همگرا-واگرای مور نوع A و B [۵] و نازل ۲ کرول [۱۳] می‌باشند. شرایط مرزی ورودی برای سه نازل مذکور در جدول ۱ آورده شده است.

جدول ۱- شرایط مرزی ورودی

نوع نازل	P_{0in} (kpa)	T_{0in} (k)
مور B	۲۵	۳۵۷٫۶
مور A	۲۵	۳۵۴٫۶
نازل ۲ کرول	۲۹۴	۴۵۳

۵- بحث و بررسی نتایج شبیه‌سازی عددی

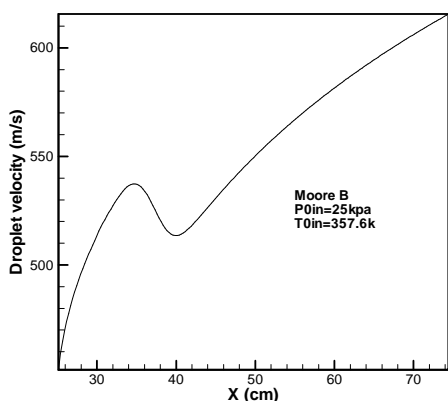
در این قسمت نتایج حل عددی برای متغیرهای مهم جریان روی خط مرکزی نازل مورد بررسی قرار گرفته و نتایج حالت‌های با لغزش و بدون لغزش مقایسه شده‌اند.



شکل ۷- حل عددی برای شعاع متوسط قطرات و مقایسه آن با مقدار تجربی برای نازل ۲ کرول

۵-۲- سرعت فاز مایع

در نظر گرفتن لغزش به این معنی است که تفاوت سرعت بین دو فاز مایع و بخار در نظر گرفته شود. به دلیل بیشتر بودن اینرسی و ویسکوزیته قطرات مایع نسبت به بخار، سرعت فاز مایع کمتر از سرعت فاز بخار می باشد. سرعت فاز مایع برای نازل مور B در شکل ۸ و مقایسه سرعت دو فاز برای این نازل در شکل ۹ نشان داده شده است. با توجه به شکل ۹ مشاهده می شود که با در نظر گرفتن لغزش، سرعت فاز مایع نسبت به حالت بدون لغزش کاهش یافته است.



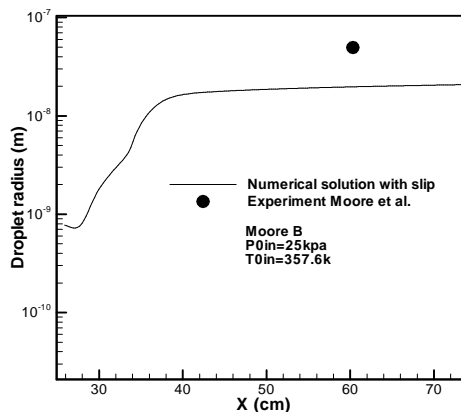
شکل ۸- سرعت فاز مایع در حالت لغزشی برای نازل مور B

۵-۱- شعاع متوسط قطرات

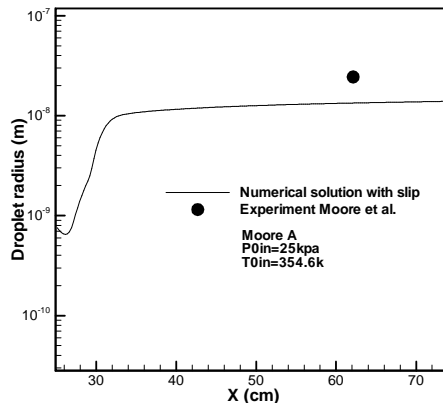
در شکل های ۵، ۶ و ۷ شعاع متوسط قطرات در حالت لغزشی با مقدار تجربی [۵ و ۱۳] برای هر سه نازل مقایسه گردیده است. در نظر گرفتن لغزش باعث نزدیکتر شدن شعاع قطرات به مقدار تجربی شده است.

شعاع متوسط قطرات در حالت لغزشی نسبت به عدم لغزش افزایش می یابد (جدول ۲). افزایش شعاع متوسط قطرات به این دلیل رخ می دهد که با کمتر شدن سرعت قطرات نسبت به حالت بدون لغزش زمان طی کردن مسیر توسط قطرات افزایش پیدا کرده و با توجه به معادلات رشد قطره، قطرات فرصت بیشتری برای رشد می یابند.

با توجه به اینکه نتایج عددی نسبت فشار و شعاع قطره برای هر سه نازل با نتایج تجربی توافق خوبی دارند و همچنین به دلیل مشابه بودن نتایج برای هر سه نازل، در ادامه فقط نتایج مربوط به نازل مور B آورده می شود و باید توجه داشت که نتایج دو نازل دیگر بصورتی مشابه با نتایج حاصل برای نازل مور B هستند.



شکل ۵- حل عددی برای شعاع متوسط قطرات و مقایسه آن با مقدار تجربی برای نازل مور B



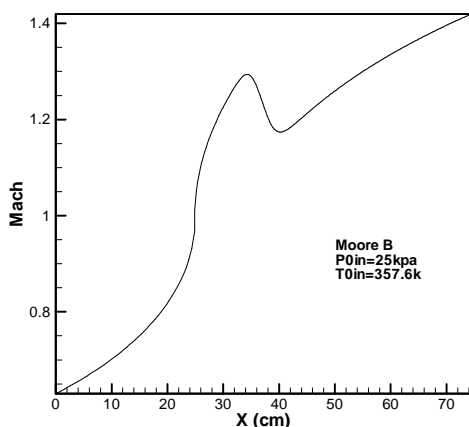
شکل ۶- حل عددی برای شعاع متوسط قطرات و مقایسه آن با مقدار تجربی برای نازل مور A

۵-۴- درجه مافوق سردی و نسبت فوق اشباع

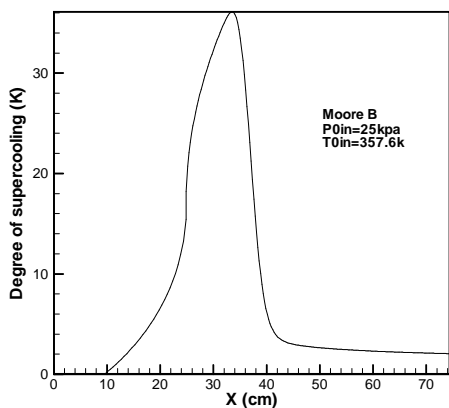
درجه مافوق سردی به صورت $\Delta T = T_S(P) - T_G$ و نسبت فوق اشباع به صورت نسبت فشار به فشار اشباع تعریف می‌گردد. شکل ۱۲ درجه مافوق سردی و شکل ۱۳ نسبت فوق اشباع را برای نازل مور B نشان می‌دهند. در حالت لغزشی مقادیر درجه مافوق سردی و نسبت فوق اشباع نسبت به حالت بدون لغزش کاهش پیدا کرده اند (جدول ۲). کاهش نسبت فوق اشباع به دلیل کاهش فشار بخار و کاهش درجه مافوق سردی به دلیل کاهش دمای اشباع بخار در فشار متناظر نسبت به فرض عدم لغزش اتفاق می‌افتد.

۵-۵- نرخ جوانه زایی

دو عامل اثر گذار بر میزان نرخ جوانه‌زایی، درجه مافوق سردی و نسبت فوق اشباع هستند. چون با در نظر گرفتن لغزش، درجه مافوق سردی و نسبت فوق اشباع نسبت به حالت بدون لغزش کاهش می‌یابند، بنابراین مطابق شکل ۱۴ و جدول ۲، نرخ جوانه‌زایی نیز در حالت لغزشی کمتر از حالت بدون لغزش می‌شود.

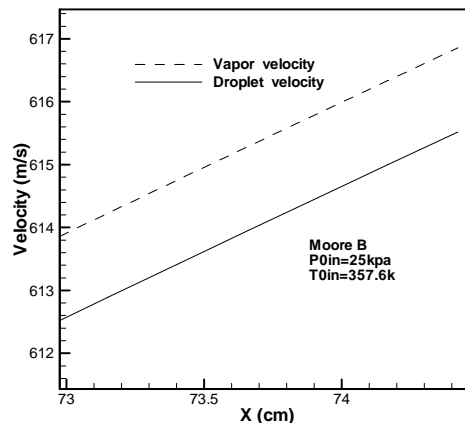


شکل ۱۱- عدد ماخ جریان در حالت لغزشی برای نازل مور B



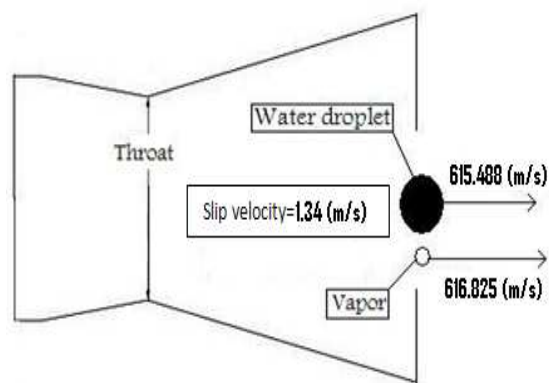
شکل ۱۲- درجه مافوق سردی با در نظر گرفتن لغزش برای نازل مور

B



شکل ۹- مقایسه سرعت دو فاز مایع و بخار برای نازل مور B

میزان لغزش در آغاز ایجاد قطره صفر فرض شده و در طول نازل افزایش می‌یابد. بیشترین میزان لغزش در خروجی نازل اتفاق می‌افتد که برای نازل مور B برابر ۱٫۳۴ متر بر ثانیه است و در شکل ۱۰ ارائه شده است.



شکل ۱۰- سرعت دو فاز و میزان لغزش در انتهای نازل مور B

۵-۳- عدد ماخ و فشار بخار

شکل ۱۱ تغییرات عدد ماخ را برای نازل مور B نشان می‌دهد که با ایجاد شوک چگالش میزان عدد ماخ کاهش یافته است. در نظر گرفتن لغزش باعث افزایش عدد ماخ نسبت به حالت بدون لغزش می‌شود (جدول ۲). این امر به این دلیل اتفاق می‌افتد که علامت نیروی پسا در معادله اندازه حرکت بخار مخالف علامت این نیرو در معادله اندازه حرکت مایع می‌باشد و این دو به صورت نیروهای عمل و عکس العمل بوده و با هم برابری ولی جهت آنها مخالف یکدیگر است. به این ترتیب لغزش باعث کاهش سرعت فاز مایع و افزایش سرعت بخار شده می‌شود. افزایش سرعت بخار متناظر با این است که فشار بخار و نسبت فشار با در نظر گرفتن لغزش نسبت به حالت بدون لغزش کاهش یابند.

همچنین در جدول ۲ برای وضوح بیشتر اثر لغزش، نتایج نازل مور B به صورت مقایسه با حالت بدون لغزش آورده شده اند:

جدول ۲- بررسی اثر لغزش برای نازل مور B

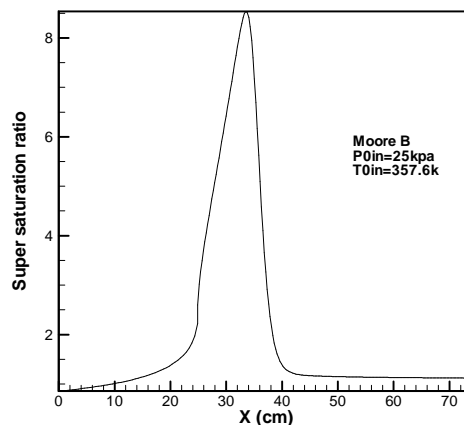
متغیرها	اثر لغزش (%)
درجه مافوق سردی	-۰٫۰۳
نسبت فوق اشباع	-۰٫۰۶
نرخ جوانه زایی	-۰٫۷۱
کسر رطوبت	-۰٫۸۲
سرعت فاز مایع	-۰٫۱۵
عدد ماخ جریان	+۰٫۰۷
شعاع قطرات	+۰٫۴۸
محل وقوع اثر لغزش	$X = 25,65 \text{ cm}$

۷-۵- مقایسه نتایج بکارگیری مدل لغزشی از ابتدای شروع جوانه زایی با اعمال مدل لغزشی پس از اتمام جوانه زایی

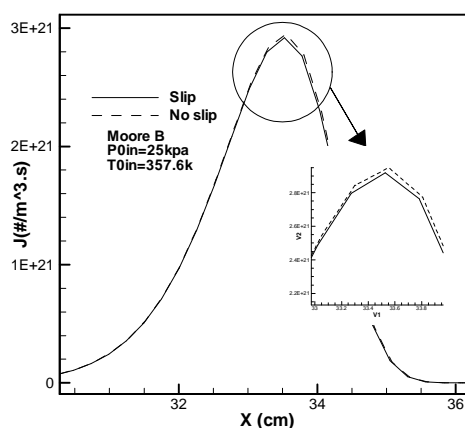
در این قسمت مدل لغزشی یکبار در شروع جوانه زایی و بار دیگر پس از اتمام جوانه زایی برای نازل مور B اعمال شده و نتایج (شعاع قطره و کسر رطوبت) در انتهای نازل برای این دو حالت به صورت زیر بدست آمدند. همانطور که در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ مشاهده می شود، با اعمال مدل لغزشی پس از اتمام جوانه زایی چون قطرات فرصت کمتری برای رشد دارند، بنابراین شعاع آنها (نسبت به اعمال مدل لغزشی در شروع جوانه زایی) کاهش یافته و بنابراین کسر رطوبت نیز کاهش می‌یابد. همانطور که ملاحظه می شود، تفاوت قابل ملاحظه ای بین این دو حالت دیده نمی شود و اختلاف بسیار ناچیز است.

۸-۵- نیروی پسا

در شکل ۱۸ نیروی پسا بر حسب شعاع قطره برای نازل مور B رسم شده است، همانطور که مشاهده می شود با افزایش شعاع قطره، نیروی پسا افزایش می یابد که از رابطه (۸) نیز قابل اثبات است.



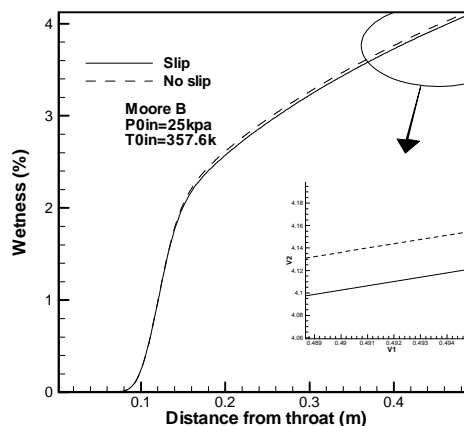
شکل ۱۳- نسبت فوق اشباع با در نظر گرفتن لغزش برای نازل مور B



شکل ۱۴- نرخ جوانه‌زایی با در نظر گرفتن لغزش و عدم لغزش برای نازل مور B

۶-۵- کسر رطوبت

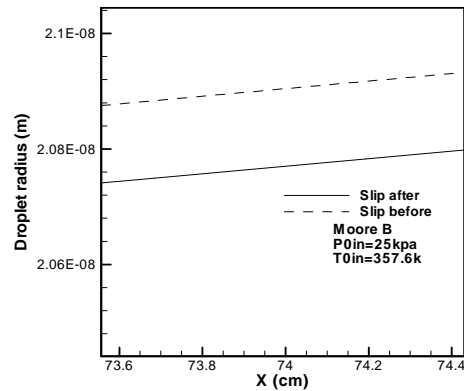
میزان رطوبت مطابق شکل ۱۵ برای نازل مور B با در نظر گرفتن لغزش کاهش می یابد. این مطلب به دلیل کاهش نرخ جوانه‌زایی در حالت لغزشی اتفاق افتاده است.



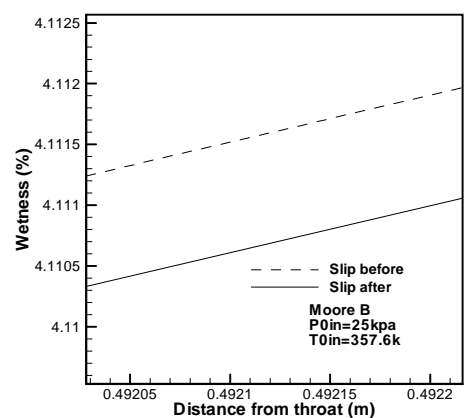
شکل ۱۵- درصد رطوبت در حالت لغزشی و بدون لغزش برای نازل مور B

و همچنین این مدل برای سه نازل همگرا- واگرا به صورت یک بعدی بررسی گردید. اعتبارسنجی نتایج نشان می‌دهد که توافق مطلوبی بین نتایج محاسباتی با داده‌های تجربی توزیع فشار و شعاع قطرات حاصل شده است.

سرعت فاز مایع با در نظر گرفتن لغزش کاهش یافته و اختلاف سرعت مایع و بخار با حرکت در طول نازل افزایش می‌یابد و در انتهای نازل به بیشترین مقدار می‌رسد. با کمتر شدن سرعت قطرات نسبت به حالت بدون لغزش، زمان طی کردن مسیر توسط قطرات افزایش پیدا کرده و قطرات فرصت بیشتری برای رشد می‌یابند. بنابراین با در نظر گرفتن لغزش، شعاع قطرات به مقادیر تجربی نزدیکتر شده و نسبت به حالت بدون لغزش افزایش می‌یابد. سرعت بخار و عدد ماخ جریان با در نظر گرفتن لغزش افزایش می‌یابد، زیرا نیروی پسا برای بخار به صورت نیروی عکس العمل پسای وارده به مایع عمل می‌کند و سرعت بخار را بر خلاف سرعت مایع افزایش می‌دهد. افزایش سرعت بخار متناظر با این است که فشار بخار و نسبت فشار با در نظر گرفتن لغزش نسبت به حالت بدون لغزش کاهش یابند. درجه مافوق سردی و نسبت فوق اشباع با لغزش کمتر می‌شوند و نرخ جوانه‌زایی را کاهش می‌دهند. با در نظر گرفتن لغزش، کسر رطوبت نسبت به حالت بدون لغزش کاهش یافته است که به دلیل کاهش نرخ جوانه‌زایی می‌باشد. در مواردی که دقت بیشتری برای محاسبه متغیرها لازم است، در نظر گرفتن لغزش خواص حاصل از حل عددی را به واقعیت نزدیکتر می‌کند و اهمیت آن برای قطرات درشت تر بیشتر است.



شکل ۱۶- شعاع قطره در حالت بکارگیری مدل لغزشی از ابتدای شروع جوانه‌زایی و مدل لغزشی پس از اتمام جوانه‌زایی

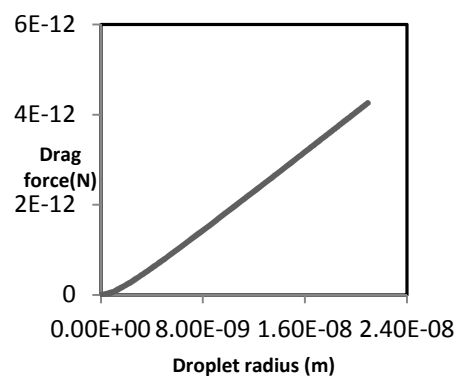


شکل ۱۷- کسر رطوبت در حالت بکارگیری مدل لغزشی از ابتدای شروع جوانه‌زایی و مدل لغزشی پس از اتمام جوانه‌زایی

نمادها

A	سطح المان
C_p	گرمای ویژه در فشار ثابت
D_e	قطر هیدرولیکی کانال
F	نیروی پسا بین دو فاز
f	ضریب اصطکاک کانال
h	آنتالپی
J	نرخ جوانه‌زایی
Kn	عدد ندسن
L	گرمای نهان
m_r	جرم یک قطره
Ma	عدد ماخ
N	تعداد مولکولها بر واحد جرم
P	فشار
P_r	نسبت فشار
$P_S(T_G)$	فشار اشباع در دمای T_G
q	ضریب چگالش

Drag force



شکل ۱۸- نیروی پسا برحسب شعاع قطره برای نازل مور B

۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش معادله مومنتم قطره به معادلات حاکم اضافه و لغزش بین فازها در جریان فراصوت چگالشی با رویکرد اولری-لاگرانژی برای اولین بار به صورت تحلیلی مدلسازی شد

ثابت گاز	R
شعاع قطره	r
دمای اشباع در فشار P	$T_S(P)$
دما	T
درجه مافوق سردی $[-Ts(P)-TG]$	ΔT
زمان	t
سرعت در امتداد محور x	U
آهنگ جریان جرمی	W
مجذور عدد ماخ	Z

حروف یونانی

ضریب انتقال گرما	α_r
نسبت گرماهای ویژه	γ
رسانایی گرمایی بخار	λ
لزجت بخار	μ_G
کسر خشکی	ξ
چگالی	ρ
کشش سطحی	σ

زیرنویس و بالا نویس

فاز بخار	G
ورودی	in
فاز مایع	L
اشباع	S
پایا	st
نماد مقادیر بحرانی	$*$
سکون	0

ضمیمه (1)

معادلات دینامیک گاز جریان با در نظر گرفتن لغزش

بین فازهای مایع و بخار

فرض کنید جریان یکنواخت و یک بعدی بخار-مایع از میان المان جزئی به طول Δx در امتداد محور کانال عبور می‌کند. چنانچه در طول فاصله جزئی Δx سطح مقطع جریان، فشار، چگالی بخار، درجه حرارت فاز بخار و مایع، آهنگ جریان جرمی بخار و مایع و سرعت فازهای بخار و مایع به ترتیب از: $\rho_G, P, A, \rho_L, P, A, dP, A + dA$ به $U_L, U_G, W_L, W_G, T_L, T_G, U_L + dU_L, U_G + dU_G, W_L + dW_L, W_G + dW_G, T_L + dT_L, T_G + dT_G$

dU_L تغییر نمایند، معادلات جریان بصورت زیر نوشته می‌شوند [۹].

الف-معادله بقای جرم

فرض کنید حجم اشغال شده توسط فاز مایع در مقایسه با فاز بخار قابل صرفنظر کردن باشد. در این صورت معادله پیوستگی بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$W = W_L + A \rho_G U_G = const. \quad (1-1)$$

که در آن W آهنگ جریان جرم کل و W_L آهنگ جریان جرم فاز مایع می‌باشد. زیرنویس‌های G و L به ترتیب مربوط به فاز بخار و مایع بوده و متغیرهای بدون زیرنویس به کل جریان برمی‌گردند مگر اینکه طور دیگری بیان شوند. با دیفرانسیل‌گیری و مرتب کردن معادله خواهیم داشت:

$$\frac{d\rho_G}{d\rho_G} + \frac{dA}{A} + \frac{dU_G}{U_G} + \frac{dW_L}{W - W_L} = 0 \quad (2-1)$$

ب- معادله حالت برای بخار

معادله حالت گاز واقعی برای فاز بخار برحسب چگالی بصورت زیر می‌باشد [۱۵ و ۱۴].

$$\frac{P}{\rho_G R T_G} = 1 + B_1 \rho_G + B_2 \rho_G^2 + B_3 \rho_G^3 \quad (3-1)$$

ضرایب B_1, B_2, B_3 در رابطه فوق به ضرایب ویریال چگالی معروف هستند. با دیفرانسیل‌گیری از این رابطه نتیجه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{dP}{P} - X \frac{d\rho_G}{\rho_G} - Y \frac{dT_G}{T_G} = 0 \quad (4-1)$$

که در آن ضرایب X و Y به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$X = \frac{\rho_G}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial \rho_G} \right)_{T_G} = \frac{1 + 2B_1 \rho_G + 3B_2 \rho_G^2 + 4B_3 \rho_G^3}{1 + B_1 \rho_G + B_2 \rho_G^2 + B_3 \rho_G^3} \quad (5-1)$$

$$Y = \frac{T_G}{P} \left(\frac{\partial P}{\partial T_G} \right)_{\rho_G} = 1 + \frac{\rho_G T_G}{1 + B_1 \rho_G + B_2 \rho_G^2 + B_3 \rho_G^3} \times \left[\frac{dB_1}{dT_G} + \rho_G \frac{dB_2}{dT_G} + \rho_G^2 \frac{dB_3}{dT_G} \right] \quad (6-1)$$

ج- عدد ماخ فاز بخار

سرعت صوت در یک گاز تک فاز بصورت زیر تعریف می‌شود.

$$C = \left(\frac{\gamma P}{\rho_G} \right)^{0.5} \quad (7-1)$$

اگر فرض کنیم که هیچگونه تداخلی بین دو فاز مایع و بخار ایجاد نشده و فاز مایع دخالتی در انتشار فاز بخار نداشته باشد،

$$\frac{dh_G}{C_p T_G} - \frac{d(W_L L)}{W C_p T_G} + \left(1 - \frac{W_L}{W}\right) \frac{U_G^2}{C_p T_G} \frac{dU_G}{U_G} + \frac{W_L}{W} \frac{U_L^2}{C_p T_G} \frac{dU_L}{U_L} = 0 \quad (15-1)$$

یک عبارت برای dh_G به صورت زیر بیان می شود.

$$dh_G = C_p dT_G + \left[V_G - T_G \left(\frac{\partial V_G}{\partial T_G} \right)_P \right] dP \quad (16-1)$$

با استفاده از معادله حالت می توان نشان داد که:

$$C_p = \frac{\gamma Y^2 P}{(\gamma - X) X \rho_G T_G} \quad (17-1)$$

$$\left[V_G - T_G \left(\frac{\partial V_G}{\partial T_G} \right)_P \right] = \frac{1}{\rho_G} \left(1 - \frac{Y}{X} \right) \quad (18-1)$$

با صرف نظر کردن از عبارت $\frac{W_L}{W} dL$ (به خاطر کوچک بودن نسبت به بقیه عبارات) معادله منتهی به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{dT_G}{T_G} + \frac{P}{\rho_G C_p T_G} \left(1 - \frac{Y}{X} \right) \frac{dP}{P} + \left(1 - \frac{Y}{X} \right) \frac{dP}{P} + \left(1 - \frac{W_L}{W} \right) \frac{U_G^2}{C_p T_G} \frac{dU_G}{U_G} + \frac{W_L}{W} \frac{U_L^2}{C_p T_G} \frac{dU_L}{U_L} - \frac{L}{C_p T_G} \frac{dW_L}{W} = 0 \quad (19-1)$$

مراجع

- [1] Gyarmathy, G., "Basis for a theory for wet steam turbines", Inst. Thermal Turbo-machines in Fed Tech Univ. Zurich Bull, Vol.6, pp.125-141., 1962.
- [2] Young, J.B., "The Spontaneous Condensation of Steam in Supersonic Nozzles", PCH Physo-Chem. Hydrodyn, Vol.3, pp.57-82, 1982.
- [3] White, A.J., Young, J.B., "Loss Measurements and Interpretation of Pitot Pressures in Two-Phase Vapor-Droplet Flow", International Journal of Experimental Thermal and Fluid Science, Vol.15, pp.279-287, 1997.
- [4] Dykas, S., Włodzimierz Wroblewski, W., "Single- and Two-Fluid Models for Steam Condensing Flow Modeling", International Journal of Multiphase Flow, Vol.37, pp. 1245-1253, 2011.
- [5] Kermani, M.J., Gerber, A.G., "A General Formula for The Evaluation of Thermodynamic and Aerodynamic Losses in Nucleating Steam Flow", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.46, pp.3265-3278, 2003.
- [6] Gerber, A.G., "Two-Phase Eulerian/Lagrangian Model for Nucleating Steam Flow", ASME J. fluids Eng., Vol.124, pp.465-475, 2002.

می توان مجذور عدد ماخ برای یک جریان دوفازی را بصورت زیر نوشت.

$$Z = Ma^2 = \frac{U_G^2}{\left(\frac{\gamma P}{\rho_G} \right)} \quad (8-1)$$

که در آن γ نمای آیزنتروپیک فاز بخار است. در اکثر شرایط جریان، تغییرات γ نسبت به دیگر جملات کوچک می باشد. بنابراین با فرض γ ثابت و مشتق گیری معادله بالا نتیجه زیر حاصل می شود.

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{2dMa}{Ma} = 2 \frac{du}{u} + \frac{d\rho_G}{\rho_G} - \frac{dP}{P} \quad (9-1)$$

د- معادله مومنتم

تغییرات ممنتوم یک سیال برای حجم کنترل مورد نظر برابر است با:

$$AdP + \frac{Af \rho_G u^2}{2D_e} dx = -d(W_G U_G + W_L U_L) \quad (10-1)$$

که در آن D_e و f به ترتیب قطر هیدرولیکی و ضریب اصطکاک کانال بوده و بصورت زیر تعریف می شوند.

$$D_e = \frac{4A}{S_p} \quad (11-1)$$

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho U_G^2} = \frac{2D_e}{U_G^2} \frac{dP}{dx} \quad (12-1)$$

در روابط فوق S_p محیط تر شده کانال و τ_w تنش برشی در دیواره می باشد. با بسط معادله (10-1) و توجه به اینکه $(U_G - U_L)dW_L$ در مقایسه با دیگر جملات کوچک است نتیجه زیر حاصل می شود.

$$\frac{dP}{P} = \frac{f \rho_G U_G^2}{2PD_e} dx - \frac{(W - W_L)U_G}{AP} \frac{dU_G}{U_G} - \frac{W_L U_L}{AP} \frac{dU_L}{U_L} \quad (13-1)$$

ه- معادله انرژی

معادله انرژی برای جریان یکنواخت آدیاباتیک عبوری از حجم کنترل مورد نظر بصورت زیر نوشته می شود:

$$d \left[(W - W_L) \left(h_G + \frac{u^2}{2} \right) + W_L \left(h_L + \frac{u^2}{2} \right) \right] = 0 \quad (14-1)$$

در اکثر مواقع سرعت لغزشی بین فازها کوچک بوده و با تقریب خوبی می توان از عبارت $\frac{U_G^2 - U_L^2}{2}$ در مقایسه با $(h_G - h_L)$ صرف نظر کرد. با این ساده سازی و نوشتن $W - W_L$ به جای W_G و L به جای $(h_G - h_L)$ و تقسیم طرفین رابطه فوق بر $WC_p T_G$ می توان نشان داد که:

- [7] Lakzian, E., Masjedi, A., "Slip effects on the exergy loss due to irreversible heat transfer in a condensing flow", International Journal of Exergy, Interscience publication, Article in press.
- [8] Yousif, H., Al-Dabagh, M., Al-Zuhairy, Ch., "Non-equilibrium spontaneous condensation in transonic steam flow", International Journal of Thermal Sciences, Vol.68, pp.32-41, 2013.
- [9] Mahpeykar, M.R., Lakzian, E., Amirrad, E., "Reduction of Thermodynamic Losses in a Supersonic Nucleating Steam Nozzle by Spraying Water Droplets", International Journal of ScientiaIranica, Vol.16, pp.253-262, 2009.
- [10] Bakhtar, F., Young, J.B., White, A.J., Simpson, D.A., "Classical Nucleation Theory and Its Application to Condensing Steam Flow Calculations", Journal of the mechanical engineering science, Vol.219, pp.1315-1333, 2005.
- [11] Wolk, J., Stery, R., "Empirical Function for Homogeneous Water Nucleation Rates", Journal of Chemical Physics, Vol.117, pp. 4954-4960, 2002.
- [12] Bakhtar, F., Zidi, K., "On The Self-Diffusion of Water- Vapor", Proc. Instn. Mech. Engrs, Vol.199, pp.64-159, 1985.
- [13] Hasril, H., Mohd. Zamri, Y., Norhazwani, A. M., " Numerical Modeling of Wet Steam Flow in Steam Turbine Channel", Centre for Advanced Computational Engineering, College of Engineering, University Tenaga Nasional, Malaysia, pp.443-463, 2012.
- [14] Dykas, S., Wlodzimierz Wroblewski, W., "Numerical Modeling of Steam Condensing Flow in Low and High-pressure Nozzles", International Journal of Heat and Mass Transfer, Vol.55, pp.6191-6199, 2012.
- [15] Young, J.B., "An Equation of State for Steam for Turbo-machinery and Other Flow Calculations", ASME, J. Engng Gas Turbines and Power, vol. 110, pp. 1-7, 1988.