

Research Article

Introducing a Method to Reduce the Mass Balance Error in the Numerical Solution of the Richards Equation

MR Hami Kouchebaghi^{1*}, T Sohrabi², A Nazi Ghameshlou³

Received: June 13, 2023

Accepted: October 19, 2023

Revised: October 13, 2023

Published online: September 22, 2024

1- Ph.D, Dept. of Irrigation and Reclamation Engineering, Univ. College of Agriculture and Natural Resources, Univ. of Tehran, Karaj, Iran.

2- Prof., Dept. of Irrigation and Reclamation Engineering, Univ. College of Agriculture and Natural Resources, Univ. of Tehran, Karaj, Iran.

3- Assist. Prof., Dept. of Irrigation and Reclamation Engineering, Univ. College of Agriculture and Natural Resources, Univ. of Tehran, Karaj, Iran.

* Corresponding Author, Email: abc.m.hami@gmail.com

Abstract

Background and Objectives

In many fields of water sciences, the moisture movement in the soil profile is very important. Due to the non-linearity of the governing equation in moisture movement in the soil profile, the comprehensive analytical solution of this equation is impossible, and there is a need to solve it numerically. The abundance of data and simulation steps reduces the flexibility in using existing software to solve the Richards equation and using this data as initial conditions. Therefore, having a numerical solution plan for the Richards equation will be very useful. Among the existing methods, the fully implicit finite difference method can continue the simulation unceasingly due to its unconditional stability in providing a non-iteration solution. However, using the finite difference method to solve the Richards equation leads to significant mass balance error. Some usual methods to reduce the mass balance error could not be applied to the non-reverse solution. By creating the Richards equation numerical solution in MATLAB software, this research introduces a method to reduce mass balance error, which is a simple method to apply to all kinds of numerical solutions.

Methodology

In this research, a non-iteration implicit solution for the Richards equation was developed. After creating the Richards equation numerical solution, the difference between the entering flux to the soil column and the added water to the same soil column, is added to each node to reduce the mass balance error. This amount is added to the nodes that their matrix pressure head difference (PD) compared to the initial state, is more than a threshold value. This amount applies as a coefficient, proportional to the humidity of each node. To investigate the effect of various factors on the performance of the created numerical solution, a series of 11 experiments were designed with different characteristics in terms of infiltration rate, infiltration duration, duration of moisture redistribution in the soil profile, and initial volumetric water content. The optimal value for PD in each experiment was determined in such a way as to minimize the mass balance error. For the integrity of the results, the average PD values equal to 10 cm were used to simulate all cases. These series of experiments were simulated by two-dimensional HYDRUS software, and the results were used to verification of the created numerical solution.

Findings

The results showed that the most mass balance error is forced in the infiltration phase. Using the proposed method to preserve the mass balance caused a significant reduction in the mass balance error. The absolute value of the mass balance error varied in a narrow range and was always less than 3.5 percent. It is expected that time and space steps have a considerable effect on the mass balance error. The absolute mass balance error decreased linearly from 3.36 to 3.33, with the infiltration duration increasing from 10 to 30 minutes at a



constant infiltration rate of 1 mm min^{-1} . The absolute mass balance error increased linearly from 3.36 to 3.37% by the initial volumetric water content increasing from 13 to 17% and decreased from 3.40 to 3.35 percent by the increase in the duration of the moisture redistribution in the soil profile from 300 to 900 minutes. Also, the Mean Absolute Relative error (MAE) increased from 1.17 to 9.53% by the infiltration time increasing from 10 to 30 minutes; the MAE increased from 1.17 to 8.89% by the infiltration rate increasing from 1 to 3 mm min^{-1} ; and the MAE increased from 1.17 to 6.89% by the volumetric water content increasing from 13 to 17%.

Conclusion

The results showed that this method leads off the simulation to a significant reduction in the mass balance error; so that, in all experiment cases, the mass balance error ever fluctuated in a small range, less than 3.5%. The results comparison of the created simulation and the HYDRUS software showed that this method provided acceptable results, in cases such as summer rains where the infiltration duration is much less than the water redistribution time in the soil profile. Also, the highest value of the MAE in comparing the created simulations with the obtained results from the HYDRUS software is less than 10%. It proves a good agreement between the created simulation and the HYDRUS software.

Keywords: Finite difference, HYDRUS software, implicitly solution, non-iteration solution, Simulation.

مقاله پژوهشی

معرفی روشی برای کاهش خطای موازنه جرم در حل عددی معادله ریچاردز

محمد رضا حامی کوچه باغی^{۱*}، تیمور سهرابی^۲، آرزو نازی قمشلو^۳

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۷/۲۷

تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۰۳/۲۳

تاریخ انتشار آنلاین: ۱۴۰۳/۰۷/۰۱

تاریخ ویرایش: ۱۴۰۲/۰۷/۲۱

۱- دانش آموخته دکتری آبیاری و زهکشی، دانشکده‌گان کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.

۲- استاد، گروه مهندسی آب، دانشکده‌گان کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.

۳- استادیار، گروه مهندسی آب، دانشکده‌گان کشاورزی و منابع طبیعی، دانشگاه تهران، کرج، ایران.

*مسئول مکاتبات، پست الکترونیکی: abc.m.hami@gmail.com

چکیده

بررسی حرکت رطوبت در پروفیل خاک در بسیاری از شاخه‌های مربوط به علوم و مهندسی آب حائز اهمیت است. تعدد داده‌ها و مراحل شبیه‌سازی، باعث کاهش انعطاف‌پذیری در استفاده از نرم‌افزارهای موجود برای حل معادله ریچاردز و استفاده از آنها به‌عنوان شرایط اولیه می‌شود. لذا، داشتن یک طرح حل عددی جهت حل معادله ریچاردز بسیار مفید است. در بین روش‌های موجود، استفاده از روش تفاضلات محدود کاملاً ضمنی به دلیل پایداری بی‌قید و شرط در ارائه حل غیربازگشتی، می‌تواند شبیه‌سازی را بدون توقف ادامه دهد. با این وجود استفاده از روش تفاضلات محدود برای حل معادله ریچاردز منجر به خطای موازنه جرم می‌گردد. برخی روش‌های مرسوم برای کاهش خطای موازنه جرم برای حل غیربازگشتی قابل اجرا نیستند. در این تحقیق پس از ایجاد حل عددی معادله دو بعدی ریچاردز در محیط نرم‌افزار متلب، برای کاهش خطای موازنه جرم، اختلاف بین شار ورودی به ستون خاک و رطوبت افزایش‌یافته در آن ستون، به‌صورت ضریب متناسب با رطوبت هر گره، به گره‌هایی که تغییرات فشار ماتریک (PD) آنها نسبت به حالت اولیه بیش از یک مقدار آستانه است، اضافه گردید. مقدار بهینه برای PD در هر آزمایش به‌گونه‌ای تعیین شد که خطای موازنه جرم کمینه گردد. برای یکپارچگی نتایج، از میانگین مقادیر PD برابر با ۱۰ سانتی‌متر، برای شبیه‌سازی تمامی موارد استفاده شد. نتایج نشان داد استفاده از این روش می‌تواند منجر به کاهش چشمگیر خطای موازنه جرم در شبیه‌سازی گردد؛ به‌طوری که در تمامی موارد آزمایش‌های مورد بررسی، خطای موازنه جرم همواره در بازه کوچک، کمتر از ۳/۵ درصد نوسان داشت. مقایسه نتایج حاصل از شبیه‌سازی ایجادشده و نرم‌افزار هایدروس نشان داد استفاده از روش پیشنهادی در مواردی نظیر بارش‌های تابستانه که مدت نفوذ بسیار کمتر از مدت بازتوزیع رطوبت در پروفیل خاک است، نتایج قابل قبولی حاصل می‌گردد. همچنین، بیشترین مقدار میانگین قدرمطلق خطای نسبی (MAE) در مقایسه شبیه‌سازی ایجادشده با نتایج حاصل از نرم‌افزار هایدروس کمتر از ۱۰ درصد است. این بیانگر تطابق خوبی بین نتایج حاصل از شبیه‌سازی ایجادشده با نرم‌افزار هایدروس است.

واژه‌های کلیدی: تفاضلات محدود، حل ضمنی، حل غیربازگشتی، شبیه‌سازی، نرم‌افزار هایدروس.

مقدمه

رطوبت خاک یک متغیر حیاتی برای تعیین تبخیر و تعرق واقعی است؛ بنابراین، مدل‌سازی جریان غیراشباع یک ابزار اساسی برای مدیریت آب کشاورزی است که در دهه‌های اخیر به صورت فزاینده‌ای مورد توجه قرار گرفته (ژا و همکاران ۲۰۱۹، جیانگ و همکاران ۲۰۲۲). به طور کلی فرآیندهای جریان غیراشباع از نظر توصیف کمی بسیار پیچیده هستند. دلیل این پیچیدگی تغییر مستمر ویژگی‌های خاک غیراشباع است. چنین تغییراتی شامل روابط پیچیده بین رطوبت متغیر خاک، مکش و هدایت هیدرولیکی غیراشباع است که می‌تواند توسط پدیده پسماند رطوبتی پیچیده‌تر نیز گردد (کومار و همکاران ۲۰۱۹، اینی و همکاران ۲۰۲۰). معادله معروف به ریچاردز، جریان اشباع و غیراشباع را در محیط‌های متخلخل تحت فشار مویینگی و گرانش توصیف می‌کند. معادله ریچاردز یک معادله غیرخطی با مشتقات جزئی است که با ترکیب قانون دارسی و معادله بقای جرم به دست می‌آید (اگیدی و همکاران ۲۰۱۸). این معادله نخستین بار توسط ریاضیدان و فیزیکدان انگلیسی لوئیس فری ریچاردسون منتشر شد (ریچاردسون ۱۹۲۲) و به شکل‌های مختلفی بر حسب رطوبت، فشار مویینگی و یا ترکیبی از آنها بازنویسی می‌شود. فرم مبتنی بر فشار معادله ریچاردز در دو بعد به صورت زیر است:

$$C \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K \frac{\partial h}{\partial z} \right) + \frac{\partial K}{\partial z} \quad [1]$$

که در آن Z محور عمودی با جهت مثبت رو به پایین، x محور افقی، t زمان (min)، $\theta(z, t)$ رطوبت حجمی خاک ($cm^3 \cdot cm^{-3}$)، $h(\theta)$ تابع فشار هیدرولیکی پروفیل خاک یا همان فشار مویینگی (cm)، K تابع هدایت هیدرولیکی غیراشباع ($cm \cdot min^{-1}$) و $C = \frac{\partial \theta}{\partial h}$ ظرفیت رطوبت ویژه ($1/cm$) است (فارثینگ و اوگدن ۲۰۱۷). در رابطه ۱ از تغییرات هدایت هیدرولیکی خاک در راستای محور افقی صرف‌نظر شده است. جملات اول و دوم در سمت

راست رابطه ۱ به دلیل وجود خاصیت مویینگی، با انتشار پخشیدگی آب در محیط خاک همراه هستند؛ این در حالی است که جمله سوم انتقال آب ناشی از گرانش را توصیف می‌کند (گا سیرووسکی و کولیرسکی ۲۰۲۰).

به طور کلی حل معادله ریچاردز به دو کمیت اصلی تجربی و به شدت غیرخطی هدایت هیدرولیکی غیراشباع (K) و تابع فشار مویینگی (h) وابسته است و این امر حل تحلیلی را به جز در شرایط خاص عملاً ناممکن می‌کند (ژا و همکاران ۲۰۱۹). از جمله موارد مورد نیاز برای حل معادله ریچاردز، دانستن هدایت هیدرولیکی خاک در نقاط و زمان‌های مختلف $K(z, t)$ و نحوه وابستگی فشار مویینگی به رطوبت $\theta(z, t)$ است که با منحنی‌های نگهداشت آب در خاک توصیف می‌شوند. چندین رابطه ریاضی برای منحنی‌های نگهداشت آب در خاک وجود دارد که معروف‌ترین این معادلات معادله ون‌گنوختن-معلم است. یک فرم معمول از این مدل را می‌توان به صورت زیر نوشت (اگیدی و همکاران ۲۰۱۸، گا سیرووسکی و کولیرسکی ۲۰۲۰، اینی و همکاران ۲۰۲۰):

$$\theta(h) = \begin{cases} \theta_r + \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + |\alpha h|^n)^m} & h < 0 \\ \theta_s & h \geq 0 \end{cases} \quad [2]$$

$$K(h) = \begin{cases} K_s [1 - (\alpha h)^n]^{-m/2} \left(1 - \left(\frac{|\alpha h|^n}{1 + |\alpha h|^n} \right)^m \right)^2 & h < 0 \\ K_s & h \geq 0 \end{cases} \quad [3]$$

$$\theta_e = \frac{\theta(h) - \theta_r}{\theta_s - \theta_r}, \quad m = 1 - \frac{1}{n}, \quad n > 1 \quad [4]$$

که در آن α مقدار معکوس آستانه ورود هوا به خاک (cm^{-1})، θ_r رطوبت باقی‌مانده ($cm^3 \cdot cm^{-3}$)، θ_s رطوبت اشباع ($cm^3 \cdot cm^{-3}$)، n پارامتر تجربی مربوط به خاک (بدون بعد)، K_s هدایت هیدرولیکی اشباع ($cm \cdot min^{-1}$) و $m = 1 - \frac{1}{n}$ است. این پارامترها به توزیع اندازه و هندسه منافذ و در نتیجه به نوع خاک وابسته هستند و برای تعیین

آنها نیاز به انجام آزمایش‌های ویژه‌ای است (ون‌گونختن ۱۹۸۰).

حل عددی معادله ریچاردز

با توجه به عدم وجود یک راه‌حل کلی و جامع از معادله ریچاردز، حل عددی برای شبیه‌سازی جریان غیراشباع مورد نیاز است (فارثینگ و اوگدن ۲۰۱۷، ژا و همکاران ۲۰۱۹، اینی و همکاران ۲۰۲۰). برای حل معادله تک‌بعدی ریچاردز طرح‌های مختلف تفاضلات محدود مورد استفاده و مقایسه قرار گرفته است. سیمونک و همکاران (۲۰۰۹) از روش اجزای محدود برای حل عددی معادله ریچاردز استفاده کردند و نرم افزار تجاری Hydrus-ID را توسعه داد. زامبرا و همکاران (۲۰۱۱) یک روش حجم محدود با دقت بالا در تخمین مکان و زمان برای حل معادله غیرخطی ریچاردز ایجاد کردند. کو و همکاران (۲۰۱۸) معادله ریچاردز را خطی کردند و با استفاده از روش ترفتن ترکیبی، یک حل عددی برای تحلیل نفوذ آب‌های زیرزمینی در حالت ناپایا ایجاد کردند. زنگ (۲۰۱۸) یک فورم اصلاح‌شده از معادله ریچاردز را پیشنهاد کرد و از روش اجزای محدود برای حل موثرتر مسئله نفوذ غیراشباع در خاک‌های ناهمگن استفاده کرد. چاوز-نگرته و همکاران (۲۰۱۸) یک روش تفاضل محدود بهبودیافته همراه با روش کرانک نیکلسون با اندازه گام تطبیقی، برای حل معادله ریچاردز پیشنهاد کردند. لی و همکاران (۲۰۲۲) معیارهای انتخاب همگرایی برای اندازه شبکه و گام‌های زمانی را در شبیه‌سازی نفوذ غیراشباع با روش اجزای محدود ایجاد کردند که می‌تواند دقت حل عددی را افزایش دهد. نتایج حاکی از توافق نزدیک بین نتایج حل عددی و آزمایش است. این موضوع نشان می‌دهد روش‌های عددی ابزار قدرتمند و مطمئنی برای پیش‌بینی حرکت آب در خاک هستند.

در این تحقیق تمرکز بر معادله ریچاردز مبتنی بر فشار است؛ چرا که فشار موینگی همواره یک پارامتر پیوسته در خاک است. به این ترتیب، می‌توان از مشکلات شبیه-

سازی در حالت‌های نزدیک به اشباع، بسیار خشک و وجود جبهه رطوبتی تیز در خاک‌های خشک و یا شنی اجتناب نمود. با این وجود، حل عددی معادله ریچاردز مبتنی بر فشار، به‌طور کلی نمایش بسیار ضعیفی از تعادل جرم نشان می‌دهد (ژا و همکاران ۲۰۱۹).

انواع مدل‌های عددی بر اساس تفاضلات محدود، اجزای محدود، حجم محدود و غیره برای شبیه‌سازی جریان در محیط اشباع و غیراشباع ارائه شده است (ژا و همکاران ۲۰۱۹، سلیا و همکاران ۱۹۹۰). یکی از روش‌های پرکاربرد برای حل معادله ریچاردز طرح تفاضلات محدود برای گسسته‌سازی مکانی است (اگیدی و همکاران ۲۰۱۸). علت محبوبیت این روش آن است که گسسته‌سازی مکانی به‌راحتی به‌صورت بلوک‌های مستطیلی قابل انجام است (کومار و همکاران ۲۰۱۹). از سویی دیگر، معادله ریچاردز یک معادله وابسته به زمان است و نیاز به گسسته‌سازی زمانی دارد. در این میان، می‌توان روش‌های عددی صریح، کاملاً ضمنی، کرونیک نیکلسون، رانگ-کوتا و سایر روش‌ها را هم در نظر گرفت. روش‌های صریح، کرونیک-نیکلسون و رانگ-کوتا دارای پایداری کمتر نسبت به روش کاملاً ضمنی هستند (ژا و همکاران ۲۰۱۹). در این بین تحقیقات طاهری شهرآیینی و عطایی آشتیانی (۲۰۰۸) نشان داد که روش عددی تفاضلات محدود کاملاً ضمنی بهتر از سایر طرح‌های تفاضلات محدود اعم از صریح، کرونیک-نیکلسون و رانگ-کوتا، حرکت آب در محیط غیراشباع را شبیه‌سازی می‌کند. از سویی، روش کاملاً ضمنی برای گسسته‌سازی زمانی معادله ریچاردز مبتنی بر فشار به-صورت بی‌قید و شرط پایدار است و اجازه می‌دهد تا شرایط کاملاً اشباع را که ممکن است در حین نفوذ رخ دهد، شبیه‌سازی کرد (سلیا و همکاران ۱۹۹۰). برای حل عددی معادلات وابسته به زمان، انتخاب گام زمانی به-طور ذاتی بر عملکرد حل‌کننده غیرخطی تاثیر می‌گذارد و دقت حل، تابعی از اندازه گام‌های زمانی است. برای

غیربازگشتی کاملاً ضمنی دارای مزایای بیشتری در مقایسه با روش کرونیك نیکلسون با استفاده از تکرار نیوتن است (پانیکونی و همکاران ۱۹۹۱)؛ با این حال روش‌های غیربازگشتی حل معادله ریچاردز مبتنی بر فشار، دارای مشکل موازنه جرم هستند (ژا و همکاران ۲۰۱۹). به طوری که در سال ۲۰۰۴، کاواتسکی و همکاران روش اصلاح‌شده غیربازگشتی توماس-گلاودل^۴ را برای حل معادله ریچاردز بر مبنای رطوبت ارائه دادند و اظهار داشتند باتوجه به مشکلات ذاتی فرم مبتنی بر معادله ریچاردز، این مدل نتوانست به خوبی جریان غیراشباع را در خاک ناهمگن توصیف کند.

خطای موازنه جرم

یکی از راه‌های ارزیابی حل عددی معادله ریچاردز بررسی توانایی آن برای حفظ موازنه جرم در طول انجام حل است. خطای موازنه جرم برای محاسبه توانایی یک روش حل عددی در حفظ موازنه جرم را می‌توان با رابطه زیر به دست آورد (طاهری شهرآیینی و عطایی آشتیانی ۲۰۰۸):

$$MB_{=1} = \frac{\text{total additional mass in the domain}}{\text{total net flux into the domain}} \quad [5]$$

که در آن جرم اضافه‌شده به سامانه با توجه به جرم اولیه موجود در آن اندازه‌گیری می‌شود.

عامل اصلی خطای موازنه جرم، تخمین در تعیین ظرفیت ویژه رطوبتی (C) است. ظرفیت ویژه رطوبتی را می‌توان با دو روش مختلف تقریب زد. روش اول، تخمین مقدار C با استفاده از تحلیل تغییرات رطوبت ($\theta(h)$) در پروفیل خاک است که تقریب تانژانت نام دارد. برای این منظور، کافی است از رابطه ۲ نسبت به فشار مشتق گرفته شود. روش دوم، روش شیب وتر استاندارد (SCS)^۵ است که به صورت رابطه زیر بیان می‌گردد (کومار و همکاران ۲۰۱۹):

$$C_i^t = \frac{\theta_i^{t+1} - \theta_i^t}{h_i^{t+1} - h_i^t} \quad [6]$$

اطمینان از یک حل پایدار، اندازه گام‌های زمانی به اندازه گام‌های مکانی وابسته است. همچنین، دقت حل در معادلات غیرخطی، به فرم گسسته‌سازی در حل عددی نیز وابسته است (فارثینگ و اوگدن ۲۰۱۷). برای حل عددی، می‌توان گام زمانی را از پیش تعریف کرد و ثابت در نظر گرفت که به آن روش گام زمانی ثابت گفته می‌شود. با این حال این گام‌بندی زمانی کارآمد نیست؛ زیرا تغییرات پویای متغیرهای حالت را در نظر نمی‌گیرد (ژا و همکاران ۲۰۱۹). رویکرد دیگر، گام زمانی متغیر یا گام‌های زمانی تعدیل‌یافته است. برای افزایش دقت شبیه‌سازی، می‌توان از گام‌های زمانی و مکانی تعدیل‌یافته استفاده کرد؛ اما جداسازی گام زمان تعدیل‌یافته برای معادله ریچاردز بسیار متداول‌تر از جداسازی گام مکانی تعدیل‌یافته است (فارثینگ و اوگدن ۲۰۱۷).

مدل‌های بازگشتی^۲ و غیربازگشتی^۳

روش‌های تکرار پیکارد و نیوتن راه‌حل‌های عددی متداول بازگشتی برای سیستم‌های غیرخطی برپایه بهینه‌یابی هستند. در این روش‌ها با انجام تکرارهای متوالی می‌توان مقدار مناسب کمیت‌های مورد نظر شامل رطوبت، فشار، هدایت هیدرولیکی و غیره، را در گام زمان ($t+1$) با استفاده از مقادیر موجود در گام زمان (t) به دست آورد (ژا و همکاران ۲۰۱۹). در روش‌های غیربازگشتی حل معادله دیفرانسیل جزئی، با استفاده از مقادیر موجود برای کمیت‌ها در گام زمان (t)، مقادیر برای کمیت‌های مورد نظر در گام زمان ($t+1$) فقط با یک مرحله محاسبات تعیین می‌گردد. آزمایش‌های عددی حل معادله ریچاردز نشان می‌دهند که خطی‌سازی‌های غیربازگشتی که با دقت انجام شده باشند، به راه‌حل‌های مقرون به صرفه از نظر زمان برای حل مسائلی که در آنها توابع مشخصه خاک غیرخطی هستند می‌رسند (ژا و همکاران ۲۰۱۹). روش‌های غیربازگشتی مزایای بالقوه‌ای را نسبت به فرم بازگشتی ارائه می‌دهند؛ به عنوان مثال، روش

4 Thomas-Gladwell
5 Standard Chord Slope (SCS)

2 Iteration
3 Non-Iteration

مرز می‌باشد. شار تجویز شده می‌تواند ثابت یا برابر صفر باشد و یا اینکه دارای وابستگی زمانی و مکانی باشد (کومار و همکاران ۲۰۱۹). می‌توان از مرز با شرایط شار تجویز شده با دبی برابر صفر به‌عنوان مرز با دیواره ثابت بهره برد.

صحت‌سنجی

برای اطمینان از عملکرد صحیح حل عددی ایجاد شده، حفظ پایستگی جرم ضروری است؛ اما برای پذیرش یک شبیه‌سازی عددی کافی نیست و نیازمند صحت‌سنجی نتایج است (سلیا و همکاران ۱۹۹۰). در این تحقیق صحت‌سنجی نتایج از طریق مقایسه نتایج با نرم‌افزار هایدروس^۱، با گام‌های مکانی و زمانی بسیار کوچک انجام شد.

کمیت‌های مورد استفاده

چهار کمیت عمده که در این تحقیق برای بررسی روش ارائه شده به‌منظور کاهش خطای موازنه جرم مورد استفاده قرار گرفته‌اند عبارت است از: رطوبت اولیه خاک، شدت و مدت نفوذ و مدت زمان بازتوزیع رطوبت در پروفیل خاک. بدین منظور از بارش‌های معمول در ایران به‌عنوان معیار برای شدت و مدت نفوذ استفاده گردید. زارع خورمیزی (۲۰۱۲) شدت بارش منطقه آبخیز چهل-چای استان گلستان را برای دوره ۱۰۰ ساله مطالعه نمودند و شدت بارش ۱۲ سانتی‌متر بر ساعت با طول مدت بارش ۱۵ دقیقه را به‌عنوان بارش غالب منطقه به-دست آوردند. آذرتاج و همکاران (۲۰۱۷) در تحقیق مشابه که بر روی داده‌های ایستگاه هواشناسی شهر اردبیل انجام شده بود، با تحلیل دوره ۱۰۰ ساله بارش، شدت بارش منطقه را معادل نه سانتی‌متر بر ساعت و با طول مدت بارش ۱۵ دقیقه تعیین نمودند. چنین شدت بارش و طول مدت بارش در تحقیقات دیگری نظیر پژوهش‌های بیات و همکاران (۲۰۱۷) و محمودآبادی و عربخدری (۲۰۱۱) نیز استفاده گردیده و بیانگر این نکته است که شدت بارش ۱۲ سانتی‌متر بر ساعت در اغلب

که در آن، θ_i^t و θ_i^{t+1} رطوبت گره i به‌ترتیب در زمان‌های t و $t+1$ ، عبارت‌های h_i^t و h_i^{t+1} فشار گره i به‌ترتیب در زمان‌های t و $t+1$ و عبارت C_i^t ظرفیت ویژه رطوبتی در گره i و زمان t می‌باشد.

نتایج طاهری شهرآیینی و عطایی آشتیانی (۲۰۰۸) حاکی از موازنه ضعیف جرم در استفاده از تقریب تانژانت برای حل معادله ریچاردز با روش ضمنی و طرح بازگشتی است. در تحقیق دیگری که در سال ۱۹۹۰ انجام شده است، سلیا و همکاران نیز یافته‌های مشابهی را گزارش کرده‌اند. برای استفاده از تقریب SCS می‌بایست رطوبت در زمان آینده پیش‌بینی گردد. از آنجایی که پیاده‌سازی حل با روش SCS توام با روش غیربازگشتی بسیار دشوار است، در حل غیربازگشتی، معمولاً از روش تانژانت استفاده می‌گردد (ژا و همکاران ۲۰۱۹).

شرایط اولیه و مرزی

انواع شرایط اولیه در طبیعت وجود دارد. اما ساده‌ترین آنها فرض رطوبت ثابت (پتانسیل ثابت) در کل پروفیل خاک است. همچنین، می‌توان دو نوع شرط مرزی را در-نظر گرفت. اولین حالت شرط مرزی دیریکله -نوع یک- است. این حالت در صورتی وجود فشار ثابت در مرز کاربرد دارد. به‌عنوان مثال اگر مرز با فشار ثابت h_0 مورد نظر باشد در آن‌صورت فشار در تمام نقاط آن مرز $(h_{i,z})$ برابر h_0 خواهد بود.

$$h_{i,z} = h_0 \quad [V]$$

شرط مرزی دیگر نویمن -نوع دو- نام دارد و زمانی که یک شار در مرز وجود داشته باشد، می‌توان از آن استفاده کرد. در رابطه زیر این شرط ارائه شده است.

$$-K \left(\frac{h_{i,z+1} - h_{i,z-1}}{2\Delta z} \right) = q_{in} \quad [A]$$

که در آن، K هدایت هیدرولیکی، $h_{i,z+1}$ و $h_{i,z-1}$ فشار به-ترتیب در گره‌های $i, z+1$ و $i, z-1$ طول گام مکانی در راستای عمودی و q_{in} شار ورودی (یا خروجی) به

مشکل موازنه جرم هستند و وجود روشی برای حفظ موازنه جرم در کنار صحت‌سنجی حل عددی معادله ریچاردز از ملزومات یک حل عددی قابل اتکاء است (عطایی آشتیانی ۲۰۰۸، ژا و همکاران ۲۰۱۹). لذا در این تحقیق پس از حل عددی معادله ریچاردز در دو بعد که با استفاده از روش تفاضلات محدود غیربازگشتی کاملاً ضمنی، روشی ابداعی و ساده برای حفظ موازنه جرم ارائه خواهد شد که اعمال آن بر حل‌های غیربازگشتی معادله ریچاردز میسر است. در نهایت از طریق مقایسه نتایج شبیه‌سازی با نتایج حاصل از نرم‌افزار هایدروس، صحت شبیه‌سازی ایجاد شده، بررسی و تایید خواهد شد.

مواد و روش‌ها

به‌منظور بررسی تاثیر عوامل مختلف بر عملکرد حل عددی ایجادشده شامل روش حفظ موازنه جرم برای معادله ریچاردز، مجموعه‌ای از آزمایش‌های نظری طراحی شد. این تحقیق در سال‌های ۱۳۹۹ و ۱۴۰۰ در دانشکده‌گان کشاورزی و منابع طبیعی دانشگاه تهران انجام پذیرفت. مجموعه آزمایش‌های طراحی‌شده، ابتدا توسط نرم‌افزار هایدروس دوبعدی و سه‌بعدی که با استفاده از روش اجزای محدود به حل معادله ریچاردز می‌پردازد (سیمونک و همکاران ۲۰۰۶)، شبیه‌سازی شدند؛ در ادامه از نتایج حاصل برای بررسی درستی عملکرد حل عددی ایجادشده استفاده گردید.

مجموعه‌ای از ۱۱ آزمایش با مشخصات متفاوت از نظر شدت نفوذ، طول مدت نفوذ، طول مدت بازتوزیع رطوبت در پروفیل خاک و رطوبت اولیه پروفیل خاک طراحی شد. شدت و طول مدت نفوذ براساس بارش‌های معمول در ایران انتخاب گردید. مشخصات آزمایش‌ها در جدول ۱ موجود است. از آنجایی که رطوبت اولیه در مقایسه با حالت اشباع که برابر $0/41$ درصد حجمی است بسیار کمتر می‌باشد (به ترتیب $0/13$ ، $0/15$ و $0/17$ درصد

نقاط ایران به‌صورت معمول رخ می‌دهد. از طرفی، چنین شدت بارشی در تحقیقات مو و همکاران (۲۰۱۵) نیز به‌عنوان بارش غالب استفاده شده است. همچنین، مایر و هارمون (۱۹۷۹) بارش‌هایی با شدت شش الی ۱۲ سانتی-متر بر ساعت را بارندگی‌های معمول در طبیعت و در اکثر نقاط جهان می‌شناسند.

در این تحقیق حل عددی معادله ریچاردز در دو بعد به‌صورت تفاضلات محدود کاملاً ضمنی با استفاده از روش غیربازگشتی ارائه می‌گردد. از آنجایی که بیشتر روش‌های معمول برای حفظ موازنه جرم در حالت غیربازگشتی حل عددی معادله ریچاردز قابل اعمال نیستند (کواتسکی و همکاران ۲۰۰۴، کونت و ترونکون، ۲۰۰۸)، لذا روشی ابداعی و ساده برای حفظ موازنه جرم ارائه خواهد شد که اعمال آن بر حل‌های غیربازگشتی معادله ریچاردز میسر است.

فرایند نفوذ غیراشباع در بسیاری از بخش‌های مهندسی دخیل است (جیانگ و همکاران ۲۰۲۲). در تحقیقاتی نظیر بررسی نفوذ در خاک غیراشباع، بررسی همزمان نفوذ و بازتوزیع رطوبت در پروفیل خاک نتایج بهتری نسبت به تحلیل نفوذ به‌تنهایی در پی دارد (ژا و همکاران ۲۰۱۹). نرم‌افزارهایی نظیر هایدروس و سوپ^۷ برای حل عددی معادله ریچاردز مورد توجه کاربران واقع شده است (اینی و همکاران ۲۰۲۰). با وجود جامع بودن این نرم-افزارها، اگر تعداد داده‌ها و مراحل شبیه‌سازی زیاد باشند، امکان انتقال داده‌ها به نرم‌افزارهای موجود و استفاده از آنها به‌عنوان شرایط اولیه فراهم نخواهد بود (کواتسکی و همکاران ۲۰۰۴). در چنین مواردی در اختیار داشتن روشی برای حل عددی معادله ریچاردز بسیار مفید خواهد بود (وو و ژو ۲۰۲۳)؛ هرچند این حل عددی نتایج ضعیف‌تری در مقایسه با خروجی نرم‌افزار-های تجاری موجود نظیر هایدروس و سوپ داشته باشد. طبق تحقیقات انجام‌شده، روش‌های غیربازگشتی برای حل عددی معادله ریچاردز مبتنی بر فشار دارای

مرز بالادست به سه بخش مساوی با شدت نفوذ متفاوت در هر بخش (به ترتیب، ۱، ۳ و ۲ $mm\ min^{-1}$) تقسیم شد که به طور همزمان بر مرز بالادست اعمال می‌شوند. در آزمایش ۱۱، شدت نفوذ متفاوت در زمان‌های مختلف بر مرز بالادست اعمال شد؛ به طوری که در پنج دقیقه اول شدت نفوذ یک، در دو دقیقه بعد شدت نفوذ سه و در سه دقیقه انتهایی شدت نفوذ دو میلی‌متر بر دقیقه بر کل مرز بالادست است. محدوده شبیه‌سازی به شکل مربع با طول ضلع ۳۰ سانتی‌متر است.

حجمی در آزمایش‌های مختلف، اعمال نرخ نفوذ بیشتر از هدایت هیدرولیکی اشباع، در کوتاه‌مدت ممکن می‌باشد. چهار دسته‌بندی مختلف در نظر گرفته شده است که شامل مدت نفوذ متفاوت (آزمایش‌های ۱، ۲ و ۳)، شدت نفوذ متفاوت (آزمایش‌های ۱، ۶ و ۷)، رطوبت اولیه متفاوت (آزمایش‌های ۱، ۴ و ۵) و زمان بازتوزیع متفاوت رطوبت در پروفیل خاک (آزمایش‌های ۱، ۸ و ۹) هستند. برای تایید نهایی شبیه‌سازی ایجاد شده، دو آزمایش با شرایط مرزی متفاوت در نظر گرفته شد. در آزمایش ۱۰،

جدول ۱- مشخصات آزمایش‌های انجام شده.

شماره آزمایش	رطوبت اولیه ($cm^3\ cm^{-3}$)	شدت نفوذ ($mm\ min^{-1}$)	مدت نفوذ (min)	زمان بازتوزیع (min)
۱	۰/۱۳	۱	۱۰	۶۰۰
۲	۰/۱۳	۱	۲۰	۶۰۰
۳	۰/۱۳	۱	۳۰	۶۰۰
۴	۰/۱۵	۱	۱۰	۶۰۰
۵	۰/۱۷	۱	۱۰	۶۰۰
۶	۰/۱۳	۲	۱۰	۶۰۰
۷	۰/۱۳	۳	۱۰	۶۰۰
۸	۰/۱۳	۱	۱۰	۳۰۰
۹	۰/۱۳	۱	۱۰	۹۰۰
۱۰	۰/۱۳	۱ ۳ ۲	۱۰	۶۰۰
۱۱	۰/۱۳	۱ ۳ ۲	۵ ۲ ۳	۶۰۰

به کار بسته شد. این شاخص‌ها به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$ME = \frac{1}{op} \sum_{i,z} \frac{T_{i,z} - S_{i,z}}{T_{i,z}} \quad [9]$$

$$MAE = \frac{1}{op} \sum_{i,z} \left| \frac{T_{i,z} - S_{i,z}}{T_{i,z}} \right| \quad [10]$$

در این رابطه‌ها op تعداد نقاط اندازه‌گیری، $T_{i,z}$ مقادیر عمق جبهه هم‌رطوبت به دست آمده برای یک رطوبت مشخص از نرم‌افزار هایدروس، $S_{i,z}$ مقادیر عمق جبهه هم‌رطوبت به دست آمده برای یک رطوبت مشخص از شبیه‌سازی ایجاد شده و i و z به ترتیب، معرف طول و عمق نقاط مورد بررسی بر روی خطوط هم‌رطوبت در فضای دوبعدی شبیه‌سازی هستند. اگر خطوط هم-

از آنجایی که هیچ‌گونه واسنجی برای بافت خاک و سایر عوامل مورد بررسی صورت نگرفته است، بررسی‌ها تنها در خاک با بافت شن- لوم انجام شده است. مشخصات خاک هیدرولیکی مورد استفاده در جدول ۲ نشان داده شده است. مقادیر موجود در این جدول، مقادیر استاندارد پیشفرض موجود برای بافت خاک در نرم‌افزار هایدروس می‌باشد.

برای مقایسه نتایج، از خطوط هم‌رطوبت به دست آمده از نرم‌افزار هایدروس و شبیه‌سازی ایجاد شده استفاده گردید. برای این کار شاخص‌های آماری میانگین خطای نسبی ME^A و میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE^9

مخالف علامت هم و در غیر این صورت، هم علامت هستند. رطوبت به دست آمده از نرم افزار هایروس و شبیه سازی ایجاد شده همدیگر را قطع نمایند، این دو شاخص آماری جدول ۲- مشخصات هیدرولیکی خاک مورد آزمایش.

هدایت هیدرولیکی اشباع K_s $\square (cm \cdot min^{-1})$	$n (cm^{-1}) \square$	$\alpha (cm^{-1}) \square$	رطوبت اشباع θ_s $\square (cm^3 \cdot cm^{-3})$	رطوبت باقی مانده θ_r $\square (cm^3 \cdot cm^{-3})$	بافت خاک \square
$\square 0.073681$	$\square 1/89$	$\square 0.075$	$\square 0.41$	$\square 0.065$	لوم شنی \square

حل عددی معادله ریچاردز در دوبعد

از محیط نرم افزار متلب برای کدنویسی به منظور حل عددی معادله ریچاردز با روش تفاضلات محدود کاملاً ضمنی غیربازگشتی استفاده شد. با شروع از فرم کلی معادله ریچاردز مبتنی بر فشار با استفاده از رابطه ۱، بدون در نظر گرفتن چاهک، با این فرض که از مقادیر C و K در گام زمانی t و از مقادیر سایر کمیت ها در گام زمان $t+1$ استفاده شود، می توان معادله ریچاردز را به صورت زیر نوشت:

$$C^t \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial K^t}{\partial x} \frac{\partial h^{t+1}}{\partial x} + K^t \frac{\partial^2 h^{t+1}}{\partial x^2} + \frac{\partial K^t}{\partial z} \frac{\partial h^{t+1}}{\partial z} + K^t \frac{\partial^2 h^{t+1}}{\partial z^2} - \frac{\partial K^t}{\partial z} \quad [11]$$

با انجام گسسته سازی و ساده سازی های ریاضی می توان رابطه زیر را به دست آورد:

$$h_{i,z}^t = ah_{i,z-1}^{t+1} + bh_{i-1,z}^{t+1} + ch_{i,z}^{t+1} + dh_{i+1,z}^{t+1} + eh_{i,z+1}^{t+1} + f \quad [12]$$

برای این کار از روابط موجود برای گسسته سازی روابط دیفرانسیلی با استفاده از روش تفاضلات محدود ضمنی مرکزی استفاده شد. در این روابط h معرف فشار ماتریک، ∂x (یا معادل گسسته آن Δx) معرف گام های مکانی در راستای افقی ∂z ، (یا معادل گسسته آن Δz) معرف گام های مکانی در راستای عمودی و ∂t (یا معادل گسسته آن Δt) معرف گام های زمانی است. بالانویس هر کمیت بیانگر مرحله زمانی و اندیس هر کمیت معرف موقعیت مکانی گره های شبیه سازی است. با فرض اینکه $\Delta x = \mu \Delta z$ ، ضرایب رابطه ۱۲ به صورت زیر به دست می آیند:

$$b = a = - \frac{\Delta t}{C_{i,z}^t} \frac{K_{i,z+1}^t + 3K_{i,z-1}^t}{4(\Delta z)^2}$$

$$c = 1 + \frac{\Delta t}{C_{i,z}^t} \frac{K_{i+1,z}^t + K_{i-1,z}^t + \mu^2 K_{i,z+1}^t + \mu^2 K_{i,z-1}^t}{\mu^2 (\Delta z)^2} \quad [13]$$

$$e = d = - \frac{\Delta t}{C_{i,z}^t} \frac{3K_{i+1,z}^t + K_{i-1,z}^t}{4\mu^2 (\Delta z)^2}$$

$$f = - \frac{\Delta t}{C_{i,z}^t} \frac{K_{i,z+1}^t + 3K_{i,z-1}^t}{2\Delta z}$$

گره های متناظر با ضرایب a ، b ، c ، d و e و موقعیت مکانی آنها (i و z های معرف هر گره) در شکل ۱ مشخص شده است. در روش ضمنی یک نقطه در زمان حال با چند نقطه در زمان آینده مرتبط می شود. با اعمال رابطه ۱۲ بر تمام گره ها، مجموعه معادلات شامل تمام گره ها به فرم رابطه زیر حاصل خواهد شد.

$$A \times h^{(t+1)} = h^{(t)} \quad [14]$$

که در آن، A ماتریس ضرایب و h^t و h^{t+1} ماتریس ستونی فشار در زمان های t و $t+1$ می باشند. با حل این دستگاه مربعی چند معادله چند مجهولی (مرتبه ماتریس مربعی ضرایب A)، برابر با تعداد کل گره ها می باشد، رطوبت در تمام گره ها در گام زمانی جدید ($t+1$) به صورت همزمان و در یک مرحله در قالب یک ماتریس ستونی ($h^{(t+1)}$) به دست می آید.

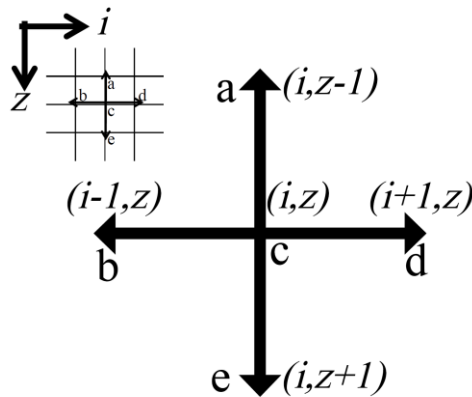
در این تحقیق شرط مرزی نوع دوم (نویمن) در نظر گرفته شد. برای اعمال شار تجویز شده در مرز بالادست، از معادله دارسی استفاده شده است.

$$q = Kj = K \frac{h_{i,z+1} - h_{i,z-1}}{2\Delta z} \quad [15]$$

$$= \frac{2q\Delta z}{K} + h_{i,z+1} \Rightarrow h_{i,z-1}$$

بازنویسی آن، روابط جدیدی برای مرزهای سمت راست، چپ و پایین به دست می‌آید.

در این رابطه نیز از مقدار K در گام زمانی t استفاده می‌گردد. سایر مرزها به صورت مرز با دیوارهای غیرقابل نفوذ در نظر گرفته شد و با اعمال $q = 0$ در رابطه ۱۵ و



شکل ۱- جهت محورها برای کدنویسی.

مقدار Δt_1 به صورت تصاعد هندسی افزایش یافته و بعد از سپری شدن مدت زمان مشخص و از پیش تعیین شده T به مقدار ثابت و از پیش تعیین شده Δt_2 رسید. طول گام-های زمانی Δt_1 و Δt_2 و مدت زمان T وابسته به شرایط شبیه‌سازی است و به صورت تجربی تعیین می‌گردد. در صورت استفاده از تصاعد هندسی، با شروع از روابط مربوط به مجموع جملات تصاعد هندسی، می‌توان معادله زیر به دست آورد:

$$\Delta t_{nt+1} = \Delta t_1 \cdot r^{nt} \quad [16]$$

که در آن،

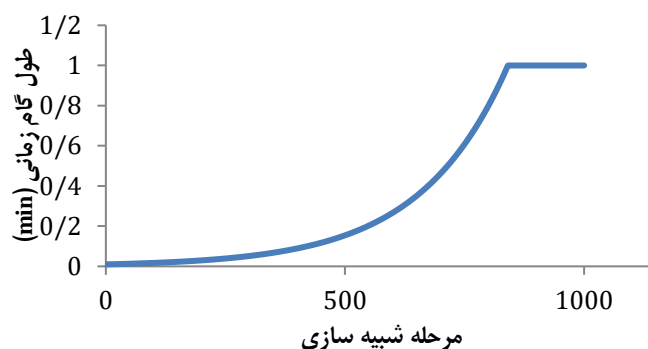
$$r = \left(\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \right)^{1/\gamma} \quad [17]$$

$$\gamma = \frac{\ln(\Delta t_2) - \ln(\Delta t_1)}{\ln \left(1 + \frac{\Delta t_2 - \Delta t_1}{T} \right)}$$

در این روابط، nt معرف مرحله گام زمانی است. نحوه افزایش طول گام‌های زمانی در مراحل مختلف شبیه‌سازی با استفاده از رابطه ۱۶ در شکل ۲ نشان داده شده است. در شکل ۲، گام‌های زمانی با مقدار اولیه $\Delta t_1 = 0.01$ دقیقه شروع شده و با افزایش تصاعدی طی $T = 180$ دقیقه ($nt = 840$ مرحله) به گام زمانی $\Delta t_2 = 1$ دقیقه رسیده است؛ در ادامه، طول گام‌های زمانی ثابت و برابر یک دقیقه باقی می‌ماند.

گام‌های مکانی و زمانی

به علت متحرک بودن جبهه رطوبت، برای حل معادله ریچاردز گام‌های مکانی تعدیل یافته متداول نیست. لذا، یک گام مکانی به اندازه کافی کوچک که هم‌زمان با حفظ دقت شبیه‌سازی، زمان محاسبات را پایین نگه دارد، کارآمد خواهد بود. برخلاف جداسازی گام‌های مکانی تعدیل یافته برای معادله ریچاردز، جداسازی گام‌های زمانی تعدیل یافته بسیار متداول است (فارثینگ و اوگدن ۲۰۱۷). با این وجود، برخی روش‌های معمول برپایه گام‌های زمانی تعدیل یافته در حل غیربازگشتی امکان‌پذیر نیست. یک روش معمول براساس گام‌های زمانی تعدیل یافته در حل غیربازگشتی، افزایش تدریجی طول گام زمانی در هر مرحله از شبیه‌سازی است. برای این کار طول گام زمانی در هر مرحله شبیه‌سازی، به صورت تصاعد عددی یا هندسی افزایش می‌یابد. طول گام زمانی در بخشی از مراحل شبیه‌سازی می‌تواند ثابت و در بخش دیگر به صورت تصاعدی افزایشی باشد. در این تحقیق، طول گام‌های زمانی در مرحله‌ای که شار ورودی از مرز بالادست وجود دارد، کوچک و ثابت برابر Δt_1 در نظر گرفته شد. پس از اتمام این مرحله، طول گام زمانی از



شکل ۲- نحوه تغییرات طول گام‌های زمانی در مراحل مختلف حل پس از اتمام نفوذ.

رطوبت اضافه‌شده به تمام گره‌های هر ستون، ضریب اصلاحی رطوبت گره‌ها را در هر ستون، به‌دست آورد، این ضریب بدون بعد است. برای نتیجه‌گیری بهتر می‌توان ضریب اصلاحی رطوبت به‌دست آمده را تنها بر روی گره‌هایی که تغییرات فشار ماتریک ($PD^{(i)}$) آنها نسبت به حالت اولیه بیشتر از یک مقدار آستانه است، اعمال کرد. مقدار آستانه تغییرات فشار ماتریک نسبت به حالت اولیه (PD)، به‌صورت تجربی به‌دست می‌آید. در عمل، آب اضافه‌شده به هر ستون برای کل گره‌های آن ستون محاسبه می‌شود ولی ضریب اصلاح رطوبت تنها بر گره‌هایی که اختلاف فشار ماتریک آنها نسبت به فشار اولیه در شروع شبیه‌سازی بیشتر از مقدار آستانه (PD) است اعمال می‌شود.

نتایج و بحث

انتخاب طول گام‌های زمانی و مکانی شامل یک فرآیند آزمون و خطا است و روش مشخصی برای آن وجود ندارد (ژا و همکاران ۲۰۱۹). مقادیر مختلف از گام‌های مکانی و زمانی متفاوت، در شبیه‌سازی مورد استفاده قرار گرفت. نتایج تلاش‌های متعدد نشان داد که در این تحقیق، گام‌های مکانی به طول نیم سانتی‌متر در راستای عمودی و یک سانتی‌متر در راستای افقی دارای نتایج مطلوب و قابل قبولی است.

جدول ۳- خطای موازنه جرم و شاخص‌های آماری ME و MAE برای آزمایش‌های مختلف.

شماره آزمایش	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱
--------------	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----

دو مرحله برای شبیه‌سازی در نظر گرفته شده است. مرحله اول، شبیه‌سازی مرز بالادست به‌صورت مرز با شار تجویز شده است که در آن نفوذ از مرز بالادست در نظر گرفته شده است. مرحله دوم، شبیه‌سازی مرز بالادست به‌صورت مرز غیرقابل نفوذ است و با آن بازتوزیع رطوبت در خاک شبیه‌سازی می‌شود.

روش حفظ موازنه جرم MCA^{10}

طی بررسی موارد مختلف شبیه‌سازی شده (حامی کوچه باغی و همکاران، ۱۴۰۰)، مشخص شد که عمده خطای موازنه جرم در مرحله‌ای که شار ورودی یا خروجی در مرزها وجود دارد، به شبیه‌سازی تحمیل می‌گردد. اگر این مرحله در شبیه‌سازی از نظر زمانی کوتاه و شرایط اولیه خاک خشک و همگن باشد، می‌توان فرض کرد شار ورودی در هر گام زمانی در یک ستون و به‌صورت عمودی در خاک توزیع می‌گردد. با این فرض، در هر گام زمانی می‌توان اختلاف بین شار ورودی به ستون خاک و میزان حجمی رطوبت افزایش یافته در همان ستون خاک را به‌صورت ضریبی متناسب با رطوبت هر گره به گره‌ها اضافه کرد. برای این منظور، در هر گام زمانی، رطوبت اضافه‌شده به تمامی گره‌های متعلق به هر ستون عمودی خاک و شار ورودی کل به هر ستون خاک از زمان شروع شبیه‌سازی محاسبه شده و با تقسیم شار ورودی کل به

۰/۰۴	۰/۰۵	۰/۲۱	۰/۱۰	۰/۰۶	۰/۱۳	۰/۰۲	۰/۳۳	۰/۱۸	۰/۱۷	۰/۲۱	MB_{HYD} (%)
۷۷/۵۸	۵۰/۹۵	-۹۰/۸۱	-۸۷/۶۵	۴۹/۷۵	۷۰/۴۷	-۳۷۸/۴۶	-۳۹۱/۵۶	۵۷/۸۹	-۵۰/۰۶	-۸۸/۰۲	MB (%)
-۳/۳۵	-۳/۴۰	-۳/۳۵	-۳/۴۰	-۳/۳۳	-۳/۳۴	-۳/۳۷	-۳/۳۷	-۳/۳۳	-۳/۳۵	-۳/۳۶	MB_{MCA} (%)
۹۵/۶۸	۹۳/۳۳	۹۶/۳۱	۹۶/۱۲	۹۳/۳۱	۹۵/۲۶	۹۹/۱۱	۹۹/۱۴	۹۴/۲۵	۹۳/۳۱	۹۶/۱۸	$MB_{reduction}$ (%)
۳/۳۴	۴/۱۶	۰/۶۴	-۳/۸۴	۸/۸۹	-۰/۷۰	۶/۹۰	۲/۴۷	۹/۵۳	-۰/۵۶	-۰/۵۱	ME (-)
۳/۳۵	۴/۱۶	۱/۸۲	۳/۸۴	۸/۸۹	۷/۵۳	۶/۹	۲/۵۱	۹/۵۳	۷/۹۷	۱/۱۷	MAE (-)

متفاوت خواهد بود. باتوجه به شکل ۳- الف، با افزایش مدت نفوذ، قدرمطلق خطای موازنه جرم به صورت خطی کاهش یافت و از ۳/۳۶ به ۳/۳۳ درصد رسید؛ هرچند این تغییر چشمگیر نیست. قرارگرفتن خطای موازنه جرم در یک بازه محدود، به علت استفاده از روش موازنه جرم پیشنهادی با PD یکسان در تمام آزمایشها است. با افزایش مدت زمان نفوذ، میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE به صورت چندجمله‌ای درجه دو افزایش یافت و از ۱/۱۷ به ۹/۵۳ درصد رسید. این افزایش به دلیل ثابت ماندن تقریبی خطای موازنه جرم، بیانگر ایجاد اختلال در شبیه‌سازی با افزایش حجم نفوذ است. به این ترتیب، عمق محدود شبیه‌سازی و استفاده از مرز غیرقابل نفوذ برای سایر مرزها بدون انجام ملاحظات خاص، باعث ایجاد اختلال در شبیه‌سازی می‌گردد؛ به طوری که با افزایش بیشتر حجم نفوذ و اشباع شدن خاک، درعمل، نتایج غیرقابل قبولی حاصل می‌شود.

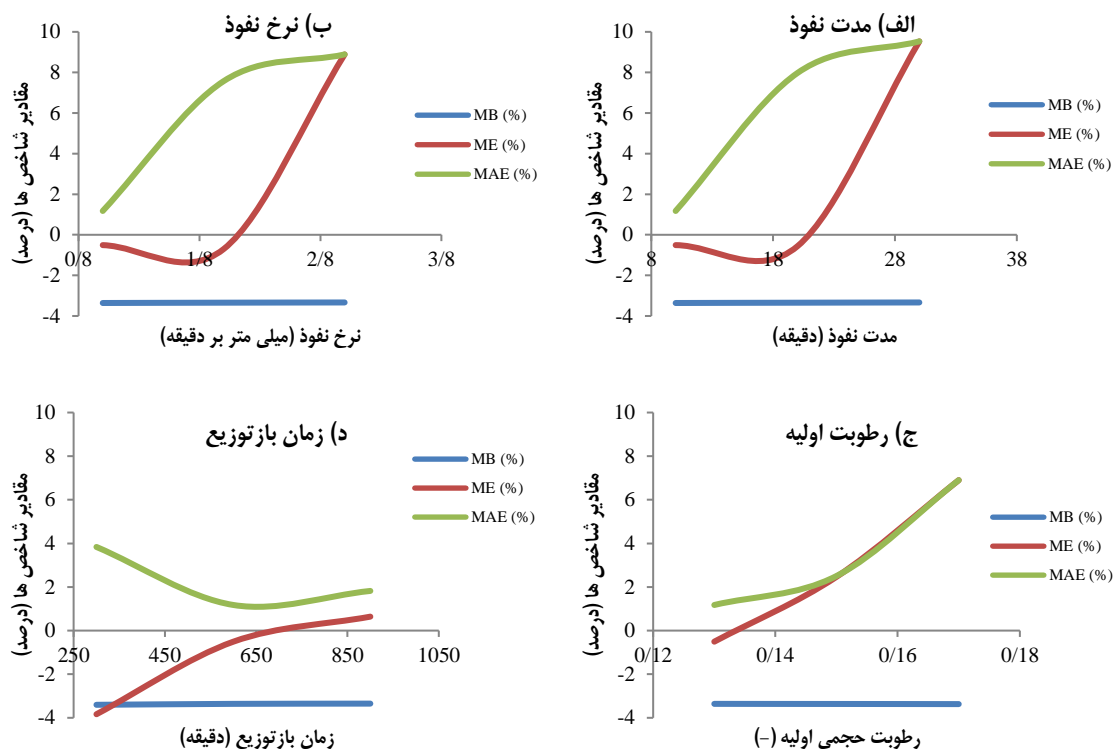
میانگین خطای نسبی ME با افزایش مدت زمان نفوذ، ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. کاهش میانگین خطای نسبی ME با وجود افزایش میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE به علت متقاطع بودن خطوط هم-پتانسیل به دست آمده از شبیه‌سازی و نرم‌افزار هایدروس است که در میانگین‌گیری باعث حذف برخی خطاها می‌گردد. با افزایش مدت نفوذ به ۳۰ دقیقه، این دو شاخص آماری یکسان می‌شوند. یکسان بودن مقادیر MAE و ME بیانگر آن است که نتایج حاصل از شبیه‌سازی در تمام نقاط مورد بررسی کمتر از مقادیر به دست آمده از نرم‌افزار هایدروس است. انتظار می‌رود با

همچنین در مرحله نفوذ، گام‌های زمانی به طول ۰/۰۲ دقیقه در نظر گرفته شد. بعد از اتمام مرحله نفوذ، طول گام‌های زمانی طی ۲۴۰ دقیقه به صورت تصاعدی افزایش یافت و از ۰/۰۲ دقیقه به دو دقیقه رسید. سپس در بقیه مدت شبیه‌سازی، طول گام‌های زمانی برابر مقدار ثابت دو دقیقه باقی ماند. برای ایجاد شبیه‌سازی مشابه، در نرم‌افزار هایدروس، گام‌های مکانی مشابه شبیه‌سازی ایجاد شده و گام‌های زمانی به صورت خودکار با بیشینه دو دقیقه اعمال شد. جدول ۳، نتایج خطای موازنه جرم را در دو شبیه‌سازی ایجاد شده در حالت استفاده از روش حفظ موازنه جرم (MB_{MCA})، عدم استفاده از روش حفظ موازنه جرم (MB) و شبیه‌سازی را با استفاده از نرم‌افزار هایدروس (MB_{HYD})، به همراه مقادیر شاخص‌های آماری نشان می‌دهد. با بررسی مقادیر متفاوت برای میزان آستانه اختلاف فشار ماتریک گره‌ها نسبت به حالت اولیه (PD)، این مقدار برابر ۱۰ سانتی‌متر در تمام آزمایشها در نظر گرفته شد. با بررسی جدول ۳، تاثیر استفاده از روش حفظ موازنه جرم در نتایج کاملاً مشهود است؛ به طوری که میزان کاهش قدرمطلق خطای موازنه جرم در صورت استفاده از روش ارائه شده در این تحقیق (MCA) نسبت به حالت عدم استفاده از آن ($MB_{reduction}$) در تمامی موارد بیش از ۹۰ درصد بود. لذا تمرکز تنها بر نتایج حاصل از شبیه‌سازی با استفاده از روش حفظ موازنه جرم خواهد بود.

مدت نفوذ

با تغییر زمان نفوذ و ثابت ماندن مدت بازتوزیع رطوبت در خاک، نسبت زمان نفوذ به زمان باز توزیع رطوبت در خاک و همچنین میزان نفوذ تجمعی در هر آزمایش

افزایش عمق محدوده شبیه‌سازی نتایج بهتری حاصل گردد.



شکل ۳- نتایج آزمایش‌های مختلف بر حسب الف) مدت نفوذ، ب) شدت نفوذ، ج) رطوبت اولیه و د) زمان باز توزیع مختلف.

شدت نفوذ

باتوجه به شکل ۳- ب با افزایش شدت نفوذ و به تبع آن افزایش حجم نفوذ، قدرمطلق خطای موازنه جرم به- صورت خطی از ۳/۳۶ به ۳/۳۳ درصد می‌رسد. این نتایج مشابه سری آزمایش‌های مربوط به مدت زمان نفوذ است (شکل ۳- الف و ب). در هر دو مجموعه آزمایش، حجم نفوذ یافته مشابه است. تغییرات میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE مشابه بحث مربوط به مدت نفوذ است و با افزایش شدت و حجم نفوذ به صورت چندجمله‌ای درجه دو از ۱/۱۷ تا ۸/۸۹ درصد افزایش می‌یابد. علاوه بر موارد ذکر شده، استفاده از گام‌های زمانی یکسان در تمام آزمایش‌ها می‌تواند مزید بر علت این افزایش باشد. با وجود اینکه استفاده از روش ضمنی باعث پایداری بی‌قید و شرط شبیه‌سازی می‌شود، با افزایش حجم نفوذ، نیاز به گام‌های زمانی کوتاه‌تر برای حصول نتایج بهتر وجود دارد (کواتسکس و همکاران ۲۰۰۴).

رطوبت اولیه

تاثیر رطوبت اولیه از طریق معادلات و ن‌گن‌وختن - معلم بر شبیه‌سازی اعمال می‌گردد. تغییر اندک در میزان رطوبت اولیه می‌تواند تاثیر چشمگیری بر نتایج داشته باشد. باتوجه به شکل ۳- ج، با افزایش رطوبت اولیه از ۱۳ تا ۱۷ درصد حجمی، قدرمطلق خطای موازنه جرم به صورت خطی از ۳/۳۶ به ۳/۳۷ درصد افزایش می‌یابد. همچنین میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE با افزایش رطوبت به صورت چندجمله‌ای درجه دو از ۱/۱۷ به ۶/۸۹ درصد افزایش می‌یابد. این روند مشابه موارد فوق ولی با شیب کمتر رخ می‌دهد. با توجه با شاخص آماری میانگین خطای نسبی ME، با افزایش رطوبت اولیه، مقادیر به دست آمده از طریق شبیه‌سازی ایجاد شده اختلاف بیشتری با نتایج حاصل از نرم‌افزار هایدروس دارند و در دو مورد با رطوبت اولیه ۱۵ و ۱۷ درصد، عمق نفوذ

ME برابر با ۳/۳۴، تاییدکننده تطابق عالی شبیه‌سازی ایجادشده با نرم‌افزار هایدروس در آزمایش شماره ۱۰ است.

تاثیر PD

شکل ۵، نتایج حاصل برای خطای موازنه جرم و شاخص‌های آماری ME و MAE برحسب تغییرات PD در بازه یک تا ۵۸ سانتی‌متر، برای آزمایش ۱۰ را نشان می‌دهد. با افزایش PD، قدرمطلق خطای موازنه جرم افزایش می‌یابد. این افزایش در ابتدا با شیب کم و پس از رسیدن PD به ۵۸ سانتی‌متر با شیب بیشتر ادامه می‌یابد. برای مقادیر بسیار کم PD (نظیر ۰/۰۱ سانتی‌متر) نتایج چشمگیری حاصل نشد و خطای موازنه جرم در یک محدوده کوچک تغییر نمود. در این فرآیند، تاثیر PD بر شاخص‌های آماری ME و MAE بیشتر بود؛ به طوری که با افزایش PD، شاخص آماری میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE با یک کمینه مواجه شد. همچنین، با افزایش PD بیشتر، این شاخص دوباره افزایش یافت. با اینکه این افزایش با نوساناتی همراه است، اما روند صعودی خود را حفظ می‌کند. وضع برای شاخص آماری میانگین خطای نسبی ME کمی متفاوت است. با افزایش PD، شاخص ME کاهش می‌یابد و بدون مشاهده کمینه یا بیشینه، روند متفاوتی در مقایسه با شاخص MAE قابل مشاهده است. از آنجایی که در شاخص ME برخی خطاها همدیگر را حذف می‌کنند، شاخص MAE می‌تواند معیار بهتری برای انتخاب PD باشد. با در نظر گرفتن شاخص MAE، مقدار PD برابر با ۵۳ سانتی‌متر بهترین تطابق بین شبیه‌سازی ایجادشده و نرم‌افزار هایدروس را برای آزمایش ۱۰ ارائه می‌کند. مقدار بهینه PD با توجه به شرایط انجام هر آزمایش متفاوت است.

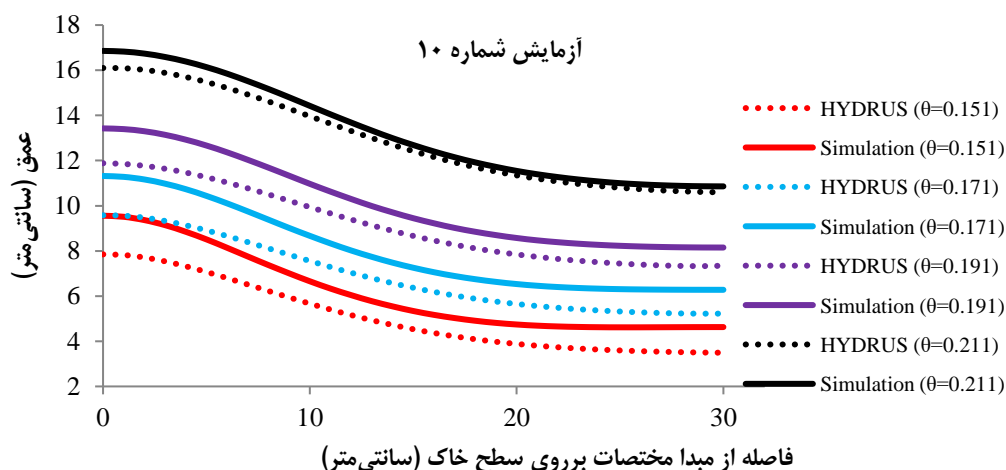
کمتر در مقایسه با شبیه‌سازی ایجادشده به دست آمده است.

زمان بازتوزیع

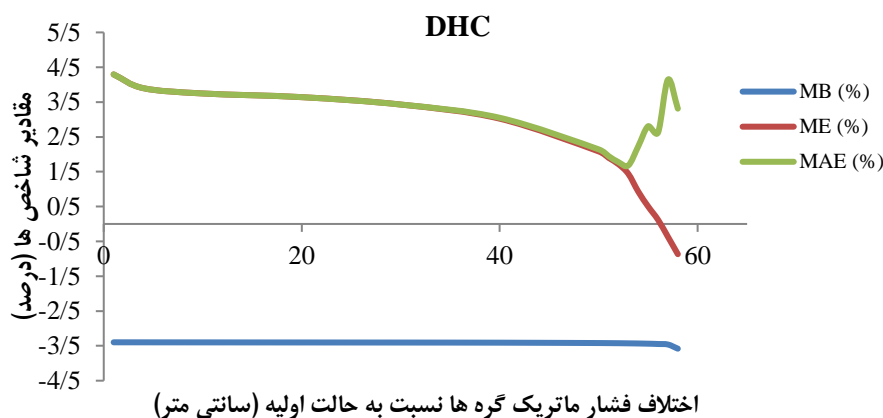
باتوجه به شکل ۳-د، با افزایش زمان بازتوزیع رطوبت در پروفیل خاک، قدرمطلق خطای موازنه جرم کاهش غیرخطی دارد و از ۳/۴۰ به ۳/۳۵ درصد می‌رسد. با توجه به شاخص آماری میانگین خطای نسبی ME، در تمامی موارد شبیه‌سازی، خطوط هم‌پتانسیل حاصل از شبیه‌سازی ایجادشده و نرم‌افزار هایدروس همدیگر را قطع نموده‌اند. همچنین، با توجه به مقادیر کمتر از چهار درصدی برای شاخص آماری میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE، تطبیق عالی با نتایج نرم‌افزار هایدروس حاصل شده است.

تایید نهایی

به منظور تایید نهایی تطابق شبیه‌سازی ایجادشده با نرم‌افزار هایدروس، دو آزمایش با شرایط مرزی پیچیده‌تر انجام شد. این موارد، آزمایش‌های شماره ۱۰ و ۱۱ در جدول ۳ هستند. در شکل ۴ خطوط هم‌رطوبت حاصل از شبیه‌سازی ایجادشده و نرم‌افزار هایدروس نشان داده شده است. از آنجایی که این خطوط همدیگر را قطع نکرده‌اند، مقادیر شاخص آماری میانگین خطای نسبی ME و شاخص آماری میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE یکسان هستند. به علاوه، عمق نفوذ کمتری نسبت به نرم‌افزار هایدروس به دست آمده است. با این وجود مقدار ۴/۱۶ درصد برای میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE، بیانگر تطابق عالی شبیه‌سازی ایجادشده و استفاده از روش پیشنهادی حفظ موازنه جرم با نرم‌افزار هایدروس است. همچنین با توجه به جدول ۳، میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE برابر با ۳/۳۵ و میانگین خطای نسبی



شکل ۴- خطوط هم‌رطوبت حاصل از شبیه‌سازی ایجادشده و نرم‌افزار هایدروس (جدول ۳، آزمایش ۱۰).



شکل ۵- خطای موازنه جرم و شاخص‌های آماری ME و MAE بر حسب تغییرات PD.

در شبیه‌سازی نفوذ آب در خاک خشک، مدل تمایل به ایجاد عدم تعادل جرم قابل توجهی دارد (تیان و همکاران ۲۰۱۱، کونت و ترونکون، ۲۰۰۸)؛ به طوری که قدم‌مطلق خطای موازنه جرم بیشتر از یک درصد در تحقیقات متعدد گزارش شده است. در تحقیق انجام شده توسط تیان و همکاران (۲۰۱۱)، آنها از مدل TIVS¹² به منظور بررسی حرکت آب در پروفیل خاک استفاده کردند و شاهد خطای موازنه جرم ۳۲۰- درصدی در خاک شنی و خطای موازنه جرم ۱۳ و ۲/۸- درصدی به ترتیب در خاک‌های لوم و رس در مرحله شروع نفوذ بودند. در تحقیق دیگر، از الگوریتم تقسیم ابعاد و چندین روش خطی‌سازی مکانی برای حل معادله ریچاردز دو بعدی

شبیه‌سازی حرکت آب با استفاده از حل عددی معادله ریچاردز، یک ابزار اساسی برای مدیریت آب کشاورزی است (جیانگ و همکاران ۲۰۲۲). اگر تعداد داده‌ها و مراحل شبیه‌سازی زیاد باشند، امکان استفاده از نرم-افزارهای موجود برای شبیه‌سازی حرکت آب در خاک فراهم نخواهد بود. در چنین مواردی لازم است یک طرح حل عددی از معادله ریچاردز ایجاد گردد (اینی و همکاران ۲۰۲۰). خطای موازنه جرم یکی از اصلی‌ترین عوامل مختل‌کننده شبیه‌سازی‌های ایجادشده برای تحلیل حرکت آب و املاح در خاک است. حفظ موازنه جرم شرط لازم ولی ناکافی برای تایید شبیه‌سازی است (ژا و همکاران ۲۰۱۹). بسیاری از تحقیقات موید آن است که

و همکاران (۲۰۱۱) که در مراحل اولیه شبیه‌سازی، خطای موازنه جرم بالایی را شاهد بود، با ادامه شبیه‌سازی، نشان داد خطای موازنه جرم تجمعی کوچکتر و در حدود یک درصد برای تمام خاک‌های مورد مطالعه است. همچنین، طاهری شهرآیینی و عطایی آشتیانی (۲۰۰۸) در تحقیق خود به‌منظور مقایسه روش‌های مختلف حل عددی معادله ریچاردز، خطای موازنه جرم در حدود یک درصد برای هر دو روش تقریب تانژانت و روش شیب وتر استاندارد SCS به‌دست آوردند. این نشان می‌دهد، بیشترین خطای موازنه جرم در مرحله نفوذ به شبیه‌سازی تحمیل می‌گردد و انتظار می‌رود در مواردی که نفوذ یا زهکشی وجود نداشته باشد، خطای موازنه جرم به خودی خود و بدون نیاز به الگوریتم حفظ موازنه جرم کوچک باشد؛ تحقیقات سوک و پارک (۲۰۱۹) و کاواتسکی و همکاران (۲۰۰۴) که در آنها خطای موازنه جرم بسیار کوچک گزارش شده است، شاهد این مطلب هستند.

نتیجه‌گیری کلی

در صورت عدم استفاده از روش پیشنهادی حفظ موازنه جرم، خطای موازنه جرم برای هر سه آزمایش نزدیک به هم و به ترتیب، برابر با $۸۷/۶۵$ ، $۸۸/۰۲$ و $۹۰/۸۱$ درصد است. با توجه به اینکه تنها اختلاف این سه آزمایش در زمان بازتوزیع رطوبت است، می‌توان نتیجه گرفت، بیشترین میزان خطای موازنه جرم نه در مرحله بازتوزیع رطوبت در پروفیل خاک، بلکه در مرحله نفوذ به شبیه‌سازی تحمیل می‌گردد. با استفاده از روش پیشنهادی نتایج نشان داد، به‌کارگیری این روش می‌تواند منجر به کاهش چشمگیر خطای موازنه جرم گردد. لذا، در مواردی که نتوان از نرم‌افزارهای موجود استفاده کرد و نیاز به ایجاد حل عددی معادله ریچاردز باشد، استفاده از این روش راه‌گشا خواهد بود. صحت‌سنجی شبیه‌سازی ایجادشده و مقایسه نتایج با نرم‌افزار هایدروس نشان داد بیشترین مقدار میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE کمتر از ۱۰ درصد است. این موضوع بیانگر تطابق

استفاده شده و خطای موازنه جرم تا $۵/۰۱$ و $۶/۰۲$ درصد به ترتیب، در خاک‌های شن و لوم مشاهده شده است (گا سیرووسکی و کولیرسکی ۲۰۲۰). بیشتر روش‌های معمول برای حفظ موازنه جرم در حالت غیربازگشتی حل عددی معادله ریچاردز قابل اعمال نیستند (کاواتسکی و همکاران ۲۰۰۴، کونت و ترونکون، ۲۰۰۸)، لذا روشی ابداعی و ساده برای حفظ موازنه جرم ارائه شد. استفاده از روش پیشنهادی برای حفظ موازنه جرم، که در شرایط نفوذ کوتاه‌مدت (متناسب با شرایط بارش در ایران) اعمال شد، باعث کاهش چشم‌گیری در خطای موازنه جرم گردید؛ به‌طوری که در تمامی موارد بررسی‌شده، مقدار مطلق خطای موازنه جرم در بازه بسیار کوچک نوسان داشت و همواره کمتر از $۳/۵$ درصد بود. نتایج نشان داد هیچ‌یک از موارد بررسی‌شده شامل شدت نفوذ، طول مدت نفوذ، طول مدت بازتوزیع رطوبت در پروفیل خاک، رطوبت اولیه پروفیل خاک و مقدار PD، تاثیر چشم‌گیری بر خطای موازنه جرم تحمیل‌شده به شبیه‌سازی ندارند و انتظار می‌رود طول گام‌های زمانی و مکانی تاثیر بیشتری بر مقدار عددی خطای موازنه جرم داشته باشند. با وجود تاثیر اندک عوامل یادشده بر مقدار عددی خطای موازنه جرم، با افزایش مدت نفوذ از ۱۰ به ۳۰ دقیقه در شدت ثابت نفوذ یک میلی‌متر بر دقیقه، قدرمطلق خطای موازنه جرم به‌صورت خطی از $۳/۳۶$ به $۳/۳۳$ کاهش یافت؛ با افزایش شدت نفوذ از یک به سه میلی‌متر بر دقیقه در زمان ثابت ۱۰ دقیقه، قدرمطلق خطای موازنه جرم به‌صورت خطی و به‌صورت مشابه از $۳/۳۶$ به $۳/۳۳$ درصد کاهش یافت. با افزایش رطوبت اولیه از ۱۳ تا ۱۷ درصد حجمی، قدرمطلق خطای موازنه جرم به‌صورت خطی از $۳/۳۶$ به $۳/۳۷$ درصد افزایش یافت و با افزایش زمان بازتوزیع رطوبت در پروفیل خاک از ۳۰۰ به ۹۰۰ دقیقه، قدرمطلق خطای موازنه جرم کاهش غیرخطی از $۳/۴۰$ به $۳/۳۵$ درصد نشان داد.

مقادیر خطای موازنه جرم تحمیل‌شده به شبیه‌سازی قابل مقایسه با برخی تحقیقات مشابه است. از جمله تیان

آن افزایش حجم نفوذ منجر به افزایش میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE از ۱/۱۷ به ۸/۸۹ درصد شد. همچنین، افزایش رطوبت حجمی از ۱۳ تا ۱۷ درصد، باعث افزایش میانگین قدرمطلق خطای نسبی از ۱/۱۷ به ۶/۸۹ درصد شد.

عالی بین نتایج حاصل از شبیه‌سازی ایجادشده با استفاده از نرم‌افزار هایدروس است. در این میان افزایش مدت زمان نفوذ از ۱۰ به ۳۰ دقیقه، میانگین قدرمطلق خطای نسبی MAE از ۱/۱۷ به ۹/۵۳ درصد افزایش یافت. افزایش شدت نفوذ از ۱ به ۳ میلی‌متر در دقیقه و به‌تبع منابع مورد استفاده

- Azartaj E, Rasoulzadeh A, Asghari A and Esmali A, 2017. Investigation of gravel fragment effect on runoff yield and soil erosion using rainfall simulation (Case study: Watershed of Almas Bridge, Ardabil). *Iranian Journal of Soil and Water Research* 48(1):105-111. (in Persian with English abstract).
- Bayat R, Arab Khodri M, Garami Z, Issai H and Ali Ramaei R, 2017. Investigating the quality of runoff from rainfed lands using a desert rain simulator (Case study: Kalaleh, Golestan province). *The 5th Conference of Rain Catchment Surface Systems*. 22- 23 April, Gilan-Rasht, Iran. (in Persian with English abstract)
- Celia MA, Bouloutas ET and Zarba RL, 1990. A General mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water Resource Research* 26 (7): 1483-1496.
- Chavez-Negrete C, Dominguez-Mota FJ and Santana-Quinteros D, 2018. Numerical solution of Richards' equation of water flow by generalized finite differences. *Computers and Geotechniques* 101:168– 175.
- Conte E and Troncone A, 2008. Soil layer response to pore pressure variations at the boundary. *Geotechnique* 58 (1): 37–44.
- Egidi N, Gioia E, Maponi P and Spadoni L, 2018. A numerical solution of Richards equation: a simple method adaptable in parallel computing. *International Journal of Computer Mathematics* 95: 2-17.
- Eini N, Afshar MH and Faraji Gargari S, 2020. A fully Lagrangian mixed discrete least squares meshfree method for simulating the free surface flow problems. *Engineering with Computer* 38:331-351.
- Farthing MW and Ogden FL, 2017. Numerical Solution of Richards' Equation: A Review of Advances and Challenges. *Soil Science Society of America Journal* 81(6): 1257-1269.
- Ga, siorowski D and Kolerski T, 2020. Numerical solution of the two-dimensional Richards equation using alternate splitting methods for dimensional decomposition. *Water* 12: 1780-1798.
- Hami Kouchebaghi MR, Sohrabi T and Ghameshlou A, 2022. Experimental and numerical modeling of water harvesting by Kajaveh method. Ph.D. thesis on irrigation and drainage. College of Agriculture and Natural Resources, Univ. of Tehran, Karaj, Iran. (in Persian with English abstract)
- Jiang SH, Liu X and Huang J, 2022. Non-intrusive reliability analysis of unsaturated embankment slopes accounting for spatial variabilities of soil hydraulic and shear strength parameters. *Engineering with Computer* 38:1–14.
- Kavetski D, Binning P and Sloan SW, 2004. Truncation error and stability analysis of iterative and non-iterative Thomas–Gladwell methods for first-order non-linear differential equations. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 60(12): 2031-2043.
- Ku CY, Liu CY and Su Y, 2018. Modeling of transient flow in unsaturated geomaterials for rainfall-induced landslides using a novel spacetime collocation method. *Geofluids* 2018:7892789.
- Kumar R, Rasool S and Raazia S, 2019. Simulation of soil moisture dynamics at different depth of soil profile. *Journal of Soil and Water Conservation* 18(1): 35-42.
- Li X, Li XK and Wu YK, 2022. Selection criteria of mesh size and time step in FEM analysis of highly nonlinear unsaturated seepage process. *Computer Geotechnical* 146:104712.
- Mahmoodabadi M and Arabkhedri M, 2011. Rainfall and Erosion Simulation. Characteristics, Capabilities and Applications. *Irrigation and Water Engineering* 1(3): 1-11. (in Persian with English abstract)
- Meyer LD Harmon WC, 1979. Multiple intensity rainfall simulator for erosion research on row sideslopes. *Transactions of the American Society of Agricultural Engineers* 22: 100-103.
- Mu W, Yu F, Li C, Xie Y, Tian J, Liu J and Zhao N, 2015. Effects of rainfall intensity and slope gradient on runoff and soil moisture content on different growing stages of spring maize. *Water* 7(6): 2990-3008.
- Paniconi C, Aldama AA and Wood EF, 1991. Numerical evaluation of iterative and noniterative methods for the solution of the nonlinear Richards equation. *Water Resource Research* 27(6): 1147-1163.
- Richardson LF, 1922. *Weather Prediction by Numerical Process*. University Press, Cambridge.

- Simunek J, Sejna M and van Genuchten MT, 2006. The HYDRUS Software Package for Simulating Two-and Three-Dimensional Movement of Water, Heat, and Multiple Solutes in Variably-Saturated Media. Technical Manual (Version 1.0), PC-progress, Prague, Czech Republic.
- Simounek J, Šejna M and Saito H, 2009. The HYDRUS-1D software package for simulating the one-dimensional movement of water, heat, and multiple solutes in variably-saturated media. Department of Environmental Sciences, University of California Riverside, Riverside, CA.
- Suk H and Park E, 2019. Numerical solution of the Kirchhoff-transformed Richards equation for simulating variably saturated flow in heterogeneous layered porous media. *Journal of Hydrology* 579:124213.
- Taheri Shahraiyini H and Ataie Ashtiani B, 2008. Comparison of finite difference schemes for water flow in unsaturated soils. *International Journal of Physical and Mathematical Sciences* 2(4): 226-230.
- Tian F, Gao L and Hu H, 2011. A two-dimensional Richards equation solver based on CVODE for variably saturated soil water movement. *Science China Technological Sciences* 54(12): 3251-3264.
- Van Genuchten MT, 1980. A closed-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Science Society of America Journal* 44: 892-898.
- Wu L and Zhou J, 2023. Rainfall Infiltration in Unsaturated Soil Slope Failure. *Springer Briefs in Applied Sciences and Technology*.
- Zambra CE, Dumbser M and Toro EF, 2011. A novel numerical method of high-order accuracy for flow in unsaturated porous media. *International Journal of Numerical Methods Engineering* 89(2): 227–240.
- Zare Khormizi M, Najafinejad A, Noura N and Kavian A, 2012. Effects of slope and soil properties on runoff and soil loss using rainfall simulator, Chehel-chai watershed, Golestan province. *Journal of Water and Soil Conservation*. 19(2): 165-178. (in Persian with English abstract)
- Zeng JC, Zha YY and Yang JZ, 2018. Switching the Richards' equation for modeling soil water movement under unfavorable conditions. *Journal of Hydrology* 563:942–949.
- Zha Y, Yang J, Zeng J, Tso CM, Zeng W and Shi L, 2019. Review of numerical solution of Richardson-Richards equation for variably saturated flow in soils. *WIREs Water* 6(6): 1-23.