نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۱۰۸، جلد ۵۴، شماره ۳، پاییز، ۱۴۰۳، صفحه ۹۳-۱۰۲ – پژوهشی کامل- DOI: 10.22034/jmeut.2024.61231.3403

تحلیل آسایش تنش در لایه‌های چسب ویسکوالاستیک ورق ساندویچی پنج لایه با رویه‌های مدرج تابعی

محمد شیشه‌ساز استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران، mshishehsaz@scu.ac.ir

سیاوش حداد سلیمانی* دکتری تخصصی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران، haddadsoleymani@gmail.com

رضا مسلمانی استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران، mosalmani@scu.ac.ir

چکیده

در این تحقیق، به بررسی آسایش تنش در لایه‌های چسب یک ورق مربعی متقارن پنج‌لایه تحت بار عرضی گسترده یکنواخت با استفاده از روش نظریه لایه‌ای بر پایه نظریه برشی مرتبه اول ورق‌ها پرداخته شده است. رویه‌های مدرج تابعی ورق ساندویچی توسط دو لایه چسب ویسکوالاستیک به هسته همگن متصل شده‌اند. با استفاده از اصل کار مجازی، معادلات حاکم بر مسئله استخراج شده و به فضای لاپلاس تبدیل گشته‌اند. با استفاده از روش حل ناویر، میدان‌های جابجایی تعیین گشته و توسط روش لاپلاس معکوس عددی به حوزه زمان بازگردانده شده‌اند. برای صحت‌سنجی، حل المان‌محدود مسئله نیز انجام شده و مقایسه نتایج دو روش، تطابق خوبی را نشان داده است. نتایج هر دو روش بیانگر آنست که مؤلفه‌های تنش درون‌صفحه و برون‌صفحه در راستای ضخامت چسب تقریباً ثابت بوده ولی مقادیر قابل توجه دارند. به‌علاوه، بیشینه تنش‌های درون صفحه σ_x و τ_{xy} بستگی زیادی به مقادیر مدول الاستیک چسب، شاخص تابع توانی رویه‌ها و خواص ویسکوالاستیک لایه‌های چسب دارد. لذا برای یک طراحی ایمن در ورق‌های ساندویچی نازک، وجود لایه‌های چسب ویسکوالاستیک باید در فرمول‌بندی لحاظ شده و قابل اغماض نیستند.

واژه‌های کلیدی: ورق ساندویچی پنج لایه، نظریه لایه‌ای، مواد مدرج تابعی، چسب ویسکوالاستیک، مدل جامد سه پارامتری، روش المان محدود.

Stress Relaxation Analysis in Viscoelastic Adhesive Layers of the Five-Layer Sandwich Plate with Functionally Graded Face Sheets

M. Shishehsaz Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

S. Haddad Soleymani Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

R. Mosalmani Department of Mechanical Engineering, Shahid Chamran University of Ahvaz, Ahvaz, Iran

Abstract

In this study, the layerwise theory, along with the first-order shear deformation theory, was employed to investigate the relaxation of stresses in the adhesive layers of a symmetric five-layer square sandwich plate subjected to a uniformly distributed load. The functionally graded face sheets were bonded to the homogeneous core using two thin layers of viscoelastic adhesive. Using the principle of virtual work, the governing equations were derived and transformed into the Laplace domain. The displacement fields were then obtained by applying the Navier solution and converted back to the time domain using the numerical inverse Laplace transform. The results were verified through finite element analysis, showing good agreement between the two approaches. Both methods revealed that the in-plane and out-of-plane stress components remain almost constant across the adhesive thickness but have considerable magnitudes. Additionally, the maximum adhesive planar stresses σ_x and τ_{xy} are highly dependent on the magnitude of the adhesive elastic modulus, power index, and viscoelastic properties of the adhesive layer. Therefore, it was concluded that for a safe design in thin sandwich plates, the presence of viscoelastic adhesive layers must be considered in the formulation and their effect should not be ignored.

Keywords: five-layer sandwich plate, layerwise theory, functionally graded materials, viscoelastic adhesive, three-parameter solid model, finite element method.

۱- مقدمه

اهمیت و کاربرد زیاد ورق‌های ساندویچی در صنایع مختلف، به دلیل مقاومت خمشی بالا و وزن پایین آنها بر کسی پوشیده نیست. لذا تحقیقات بسیار زیادی در این زمینه بر پایه‌ی نظریه‌های تک‌لایه‌ی معادل (ESL[1])، نظریه‌های لایه‌ای (LW[2])، نظریه‌های زیگزاگ (ZZ[3])، حل الاستیسیته‌ی دقیق و مدل‌سازی‌های المان محدود انجام شده است که مقالات مروری کاررا و همکاران [۳،۲،۱]، صیاد و همکاران [۵،۴]، تای و کیم [۶]، گور و همکاران [۷]، لی [۸] و گارگ [۹] به طور مفصل به این امر پرداخته‌اند. به بخشی از مطالعات اخیر در این زمینه اشاره می‌گردد.

شعبان و ملاعلی پور [۱۰]، به بررسی خمش پنل ساندویچی با هسته موجدار با استفاده از یک حل تحلیلی مبتنی بر روش سری توانی پرداختند. مزیت روش انتخابی آن‌ها در این بود که امکان حل مسئله با شرایط مرزی مختلف میسر گردید. در این پژوهش، پنل ساندویچی بر روی تکیه‌گاه الاستیک قرار دارد و تأثیر پارامترهای مختلف نظیر ضخامت هسته، ضخامت روکش، طول گام، سختی تکیه‌گاه الاستیک و... بر روی خیز ورق بررسی شده است. دارایی و همکاران [۱۱]، به

[1] Equivalent Single Layer
[2] Layer Wise
[3] Zig-Zag

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: haddadsoleymani@gmail.com

تاریخ دریافت: ۰۳/۰۲/۱۲
تاریخ پذیرش: ۰۳/۰۵/۲۲

مطالعه کمانش پوسته‌های مرکب دو انحنایی با هسته مشبک و رویه‌های تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی پرداختند. در این پژوهش، معادله کمانش با استفاده از روش حداقل انرژی پتانسیل و نظریه مرتبه سوم ردی استخراج شده و بر اساس روش ناویر برای شرایط مرزی مختلف حل شده است. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که با انتخاب مناسب پارامترهای هندسی هسته مشبک می‌توان با حداقل میزان نانو لوله‌های کربنی، تحمل بار کمانشی پوسته را بیشینه کرد. مهندسی و طالبی توتی [۱۲]، ارتعاشات غیرخطی پوسته استوانه‌ای ساندویچی با هسته دارای ضریب پواسون منفی را مورد مطالعه قرار دادند و در نهایت اثرات پارامترهای هندسی هسته و رویه‌ها را بر روی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها بررسی کردند.

در اغلب تحقیقات انجام شده در زمینه ورق‌های ساندویچی، به اتصال چسبی رویه‌ها به هسته توجه نمی‌شود و ورق ساندویچی به صورت سه لایه در نظر گرفته می‌شود. نظر به این‌که تنش‌های بیش از حد در لایه‌های چسب، منجر به جدایش هسته از رویه‌ها می‌گردد، بررسی دقیق‌تر توزیع تنش در این ناحیه، ضروری به نظر می‌رسد. رییسی و همکاران [۱۴،۱۳] در دو تحقیق مجزا، به بررسی توزیع تنش در لایه چسب یک ورق ساندویچی پنج لایه پرداختند. در این تحقیق، دو لایه‌ی نازک چسب با رفتار الاستیک، اتصال هسته را به رویه‌ها برقرار کرده است. ورق تحت بار گسترده یکنواخت قرار دارد و از روش نظریه لایه‌ای بر پایه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه اول و همچنین بر پایه‌ی نظریه‌های تغییرشکل برشی مرتبه بالاتر، برای حل توزیع تنش در لایه‌ها استفاده شده است. در نهایت اثرات خواص رویه‌های تابعی و همچنین خواص مکانیکی و هندسه‌ی هسته و لایه‌های چسب بر روی توزیع تنش در ورق ساندویچی پنج لایه مورد مطالعه قرار گرفته است. نتایج آن‌ها نشان داد که روش پیشنهادی در مقایسه با روش اجزاء محدود، در محاسبه‌ی تنش‌های درون‌صفحه در لایه‌های چسب از دقت بسیار خوبی برخوردار است. شیشه‌ساز و همکاران [۱۵]، از روش تحلیلی نظریه لایه‌ای و روش اجزای محدود برای تعیین تنش‌ها در لایه‌های چسب در یک ورق ساندویچی دایره‌ای پنج‌لایه تحت بار یکنواخت استفاده کردند. دو لایه چسب، هسته را به رویه‌های مدرج تابعی می‌چسبانند. در روش تحلیلی نظریه لایه‌ای، از نظریه‌های تغییرشکل برشی مرتبه سوم و هذلولی استفاده شده و نتایج آنها با یکدیگر مقایسه شده است. نتایج نشان داده است که در مورد تنش‌های صفحه‌ای انطباق خوبی بین نتایج عددی با نتایج تحلیلی از هر دو روش وجود دارد اما تنش‌های برشی خارج از صفحه مستخرج از نظریه هذلولی به یافته های اجزاء محدود نزدیک‌تر است. کردونی و همکاران [۱۷،۱۶] در دو تحقیق جداگانه، به بررسی اثر اتصال چسبی هسته به رویه‌های مدرج تابعی بر روی خمش و ارتعاش آزاد یک ورق ساندویچی مستطیلی که بر روی پایه‌ی الاستیک وینکلر قرار داشته و تحت اثر تغییرات دمایی می‌باشد پرداختند. در این پژوهش‌ها از روش نظریه لایه‌ای بر پایه‌ی تغییرشکل برشی مرتبه اول ورق استفاده شده است. نتایج تحلیلی با حل المان محدود سه‌بعدی با استفاده از نرم‌افزار ABAQUS مقایسه شده است و دقت و کارآمدی روش تحلیلی پیشنهادی مورد تأیید واقع شده است.

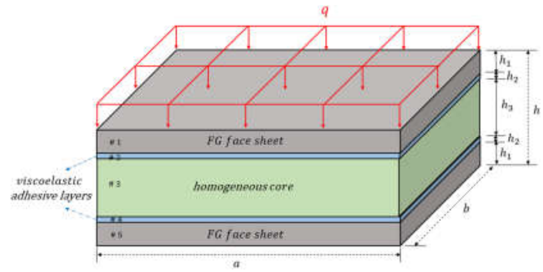
همانگونه که مشاهده می‌شود معدود پژوهش‌های انجام شده در رابطه با ورق ساندویچی پنج لایه، تماما با فرض رفتار الاستیک چسب انجام پذیرفته است از آن‌جایی که اکثر چسب‌های پلیمری رفتار ویسکوالاستیک از خود نشان می‌دهند، نیاز است تا پیگیری تنش‌های ایجاد شده در لایه‌ی چسب در ورق ساندویچی پنج لایه، با در نظر گرفتن رفتار ویسکوالاستیک چسب انجام شده و اثر گذشت زمان بر روی بیشینه‌ی تنش‌ها مورد بررسی قرار گیرد. ویسکوالاستیسیته بیانگر ترکیبی از خاصیت الاستیسیته جامدات و لزجت سیالات است. رفتار مواد ویسکوالاستیک تحت تأثیر آهنگ کرنش یا تنش قرار دارد، لذا تابعی از زمان می‌باشد. برای بیان رفتار خواص مهندسی این مواد در طول زمان، دو آزمایش وجود دارد: تست خزش[۱] و تست آسایش[۲]. خزش به معنی افزایش کرنش‌های ماده تحت تنش ثابت می‌باشد و آسایش به معنی کاهش تنش‌ها در شرایط کرنش ثابت برای ماده ویسکوالاستیک است. از تست خزش، رفتار مدول نرمی مواد ویسکوالاستیک (D(t)) و از تست آسایش، رفتار مدول سختی (E(t)) بر اساس زمان مشخص می‌شود.

در این تحقیق، از اصل تطابق آلفری برای شبیه‌سازی حل مسئله ویسکوالاستیک بر پایه‌ی روش حل الاستیک استفاده شده است. روند حل، بر پایه نظریه لایه‌ای و استفاده از نظریه برشی مرتبه اول برای هر لایه می‌باشد و استخراج معادلات حاکم بر اساس اصل کمینه انرژی پتانسیل صورت پذیرفته و برای حل معادلات از روش ناویر استفاده شده است. نهایتا از روش معکوس لاپلاس‌گیری عددی جهت دست‌یابی به توابع تنش در حوزه‌ی زمان استفاده گردیده است.

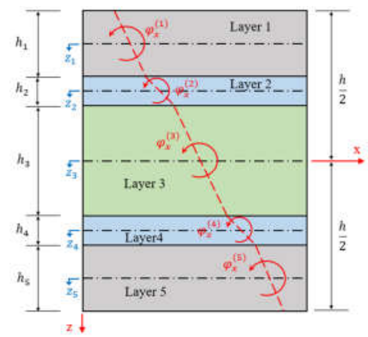
۲- فرضیات مسئله و معادلات حاکم

هدف از این تحقیق، بررسی تغییرات زمانی تنش‌های ایجاد شده در لایه‌های چسب ویسکوالاستیک در یک ورق مربعی ساندویچی متقارن (شکل ۱)، تحت بار گسترده‌ی یکنواخت می‌باشد. این ورق شامل پنج لایه می‌باشد که هسته‌ی همگن آن توسط دو لایه نازک از چسب اپوکسی، به رویه‌های مدرج تابعی (FGM) متصل شده است. لایه‌های چسب رفتار ویسکوالاستیک خطی داشته و سایر لایه‌ها خواص الاستیک خطی دارند. ورق از چهار طرف بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار دارد و بار گسترده‌ی یکنواخت q، به صورت عرضی بر سطح فوقانی ورق وارد شده است. لایه‌های چسب، با ضخامت ثابت در نظرگرفته شده و هیچگونه جدایشی بین چسب و سایر لایه‌ها وجود ندارد. مبدا مختصات بر روی صفحه میانی هسته و در یک گوشه‌ی ورق درنظر گرفته شده است. محور z به سمت پایین ورق می‌باشد و شماره‌گذاری لایه‌ها از بالا به پایین انتخاب شده است. برای هر لایه، مختصه z_i از صفحه میانی همان لایه در جهت پایین اندازه‌گیری میشود. a و b طول و پهنای ورق و h ضخامت آن می‌باشد. ضخامت رویه، چسب و هسته به ترتیب h_1 و h_2 و h_3 می‌باشد.

[1] Creep
[2] Relaxation



شکل ۱- ورق ساندویچی پنج لایه‌ی متقارن



شکل ۲- جابجایی نقاط در لایه‌های مختلف ورق پنج لایه ساندویچی طبق نظریه برشی مرتبه اول

رویه‌های مدرج تابعی از جنس سرامیک و فلز بوده که توزیع مواد در آنها طبق توابع توانی در امتداد ضخامت تغییر می‌کند. لذا مدول الاستیک رویه‌ها تابع مختصه z بوده و به صورت معادلات (۱) و (۲) بیان می‌گردد. در این روابط E_m و E_c به ترتیب مدول یانگ فلز و سرامیک بوده و p شاخص تابع توانی می‌باشد. به دلیل تغییرات اندک ضریب پواسون، این ضریب در راستای ضخامت ثابت در نظر گرفته شده است.

$$E_1(z_1)=\left(\frac{1}{2}-\frac{z_1}{h_1}\right)^p(E_c-E_m)+E_m \qquad (۱)$$

$$E_5(z_5)=\left(\frac{1}{2}+\frac{z_5}{h_1}\right)^p(E_c-E_m)+E_m \qquad (۲)$$

خواص مکانیکی چسب همگن اپوکسی تابع زمان بوده و برای توصیف رفتار ویسکوالاستیک آن، از مدل جامد سه‌پارامتری در بیان رفتار برشی و حجمی به صورت جداگانه استفاده شده است (به پیوست رجوع شود). مطابق با نظریه لایه‌ای برای ورق ساندویچی و بر پایه‌ی نظریه مرتبه اول برشی برای هر لایه (شکل ۲)، میدان‌های جابجایی در لایه‌های اول تا پنجم، بر اساس جابجایی‌های صفحه‌ی میانی ورق ساندویچی و شرط پیوستگی به صورت روابط (۳-الف) الی (۳-ک) به دست می‌آیند.

$$u^{(1)}=u_0-\frac{h_3}{2}\varphi_x^{(3)}-h_2\varphi_x^{(2)}-\frac{h_1}{2}\varphi_x^{(1)}+z_1\varphi_x^{(1)} \qquad (۳-الف)$$

$$v^{(1)}=v_0-\frac{h_3}{2}\varphi_y^{(3)}-h_2\varphi_y^{(2)}-\frac{h_1}{2}\varphi_y^{(1)}+z_1\varphi_y^{(1)} \qquad (۳-ب)$$

$$u^{(2)}=u_0-\frac{h_3}{2}\varphi_x^{(3)}-\frac{h_2}{2}\varphi_x^{(2)}+z_2\varphi_x^{(2)} \qquad (۳-ج)$$

$$v^{(2)}=v_0-\frac{h_3}{2}\varphi_y^{(3)}-\frac{h_2}{2}\varphi_y^{(2)}+z_2\varphi_y^{(2)} \qquad (۳-د)$$

$$u^{(3)}=u_0+z_3\varphi_x^{(3)} \qquad (۳-ه)$$

$$v^{(3)}=v_0+z_3\varphi_y^{(3)} \qquad (۳-و)$$

$$u^{(4)}=u_0+\frac{h_3}{2}\varphi_x^{(3)}+\frac{h_2}{2}\varphi_x^{(4)}+z_4\varphi_x^{(4)} \qquad (۳-ز)$$

$$v^{(4)}=v_0+\frac{h_3}{2}\varphi_y^{(3)}+\frac{h_2}{2}\varphi_y^{(4)}+z_4\varphi_y^{(4)} \qquad (۳-ح)$$

$$u^{(5)}=u_0+\frac{h_3}{2}\varphi_x^{(3)}+h_2\varphi_x^{(4)}+\frac{h_1}{2}\varphi_x^{(5)}+z_5\varphi_x^{(5)} \qquad (۳-ط)$$

$$v^{(5)}=v_0+\frac{h_3}{2}\varphi_y^{(3)}+h_2\varphi_y^{(4)}+\frac{h_1}{2}\varphi_y^{(5)}+z_5\varphi_y^{(5)} \qquad (۳-ی)$$

$$w^{(1)}=w^{(2)}=w^{(3)}=w^{(4)}=w^{(5)}=w_0 \qquad (۳-ک)$$

طبق اصل آلفری برای تحلیل ویسکوالاستیک، کافیست ابتدا حل الاستیک آن را انجام داده سپس همه توابع (نظیر تنش، کرنش، جابجایی و ...) با تبدیل لاپلاس آن‌ها در همان روابط جایگزین گردند [۱۹]. همچنین ثابت‌های الاستیک، با ثابت‌های معادل خود که s برابر تبدیل یافته‌ی (لاپلاسین) آن ضریب می‌باشد جایگزین شوند [۱۹]. (شایان ذکر است بالانویس (¯) بر روی توابع، نشان‌دهنده تبدیل یافته آنها در حوزه لاپلاس و علامت *( ) بیانگر ضریب معادل می‌باشد). لذا مولفه‌های کرنش در لایه‌های مختلف را بر اساس میدان‌های جابجایی به صورت زیر می‌توان نوشت [۲۰]:

$$\begin{Bmatrix}\bar\varepsilon_x\\ \bar\varepsilon_y\\ \bar\gamma_{xy}\\ \bar\gamma_{yz}\\ \bar\gamma_{xz}\end{Bmatrix}^{(k)}=\begin{bmatrix}\partial/\partial x & 0 & 0\\ 0 & \partial/\partial y & 0\\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0\\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y\\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar u\\ \bar v\\ \bar w\end{Bmatrix}^{(k)}\quad , \; k=1,\ldots,5 \qquad (۴)$$

ارتباط تنش-کرنش برای هر لایه بر اساس ماتریس سختی آن لایه به صورت معادلات (۵) و (۶) نوشته می‌شود [۲۰].

$$\begin{Bmatrix}\bar\sigma_x^{(k)}\\ \bar\sigma_y^{(k)}\\ \bar\tau_{xy}^{(k)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar Q_{11}^{*(k)} & \bar Q_{12}^{*(k)} & 0\\ \bar Q_{12}^{*(k)} & \bar Q_{22}^{*(k)} & 0\\ 0 & 0 & \bar Q_{66}^{*(k)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar\varepsilon_x^{(k)}\\ \bar\varepsilon_y^{(k)}\\ \bar\gamma_{xy}^{(k)}\end{Bmatrix}\qquad k=1,\ldots,5 \qquad (۵)$$

$$\begin{Bmatrix}\bar\tau_{yz}^{(k)}\\ \bar\tau_{xz}^{(k)}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar Q_{44}^{*(k)} & 0\\ 0 & \bar Q_{55}^{*(k)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\bar\gamma_{yz}^{(k)}\\ \bar\gamma_{xz}^{(k)}\end{Bmatrix}\qquad k=1,\ldots,5 \qquad (۶)$$

مؤلفه‌های معادل‌شده‌ی ماتریس سختی هر لایه $\bar Q_{ij}^{*(k)}$، به صورت روابط (۷) الی (۹) تعریف می‌گردند [۲۰].

$$\bar Q_{11}^{*(k)}=\bar Q_{22}^{*(k)}=\frac{\bar E_k^*}{1-\left(\bar v_k^*\right)^2}\qquad k=1,\ldots,5 \qquad (۷)$$

$$\bar Q_{12}^{*(k)}=\bar v_k^*\bar Q_{11}^{*(k)}\qquad k=1,\ldots,5 \qquad (۸)$$

$$\bar Q_{44}^{*(k)}=\bar Q_{55}^{*(k)}=\bar Q_{66}^{*(k)}=\bar G_k^*\qquad k=1,\ldots,5 \qquad (۹)$$

ضرایب مهندسی معادل برای رویه‌ها و هسته که رفتار ویسکوالاستیک ندارند دقیقا برابر با همان مقادیر وضعیت الاستیک می‌باشد. اما برای لایه‌های چسب در وضعیت ویسکوالاستیک، مؤلفه‌های

معادل با ضرب s در لاپلاس مدول مربوطه نتیجه خواهد شد [۱۹].

$$\bar{E}_k^*(s)=s\bar{E}_k(s)=\frac{9\bar{K}_k^*\bar{G}_k^*}{3\bar{K}_k^*+\bar{G}_k^*}\qquad k=2,4 \tag{۱۰}$$

$$\bar{v}_k^*(s)=s\bar{v}_k(s)=\frac{3\bar{K}_k^*-2\bar{G}_k^*}{6\bar{K}_k^*+2\bar{G}_k^*}\qquad k=2,4 \tag{۱۱}$$

$\bar{G}^*$ و $\bar{K}^*$ در پیوست معرفی شده‌اند.

با استفاده از روابط (۴) الی (۶)، نیروها و گشتاورهای منتجه بر حسب کرنش‌ها به فرم روابط (۱۲) و (۱۳) نوشته می‌شود [۲۰].

$$\begin{pmatrix}\bar{N}_x^{(k)}\\ \bar{N}_y^{(k)}\\ \bar{N}_{xy}^{(k)}\\ \bar{M}_x^{(k)}\\ \bar{M}_y^{(k)}\\ \bar{M}_{xy}^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\left[\bar{A}^*\right]^{(k)} & \left[\bar{B}^*\right]^{(k)}\\ \left[\bar{B}^*\right]^{(k)} & \left[\bar{D}^*\right]^{(k)}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\varepsilon}_x^{0(k)}\\ \bar{\varepsilon}_y^{0(k)}\\ \bar{\gamma}_{xy}^{0(k)}\\ \bar{\varepsilon}_x^{1(k)}\\ \bar{\varepsilon}_y^{1(k)}\\ \bar{\gamma}_{xy}^{1(k)}\end{pmatrix},\quad k=1,\ldots,5 \tag{۱۲}$$

$$\begin{pmatrix}\bar{Q}_y{}^{(k)}\\ \bar{Q}_x{}^{(k)}\end{pmatrix}=k_s\begin{bmatrix}\bar{A}_{44}^{*(k)} & 0\\ 0 & \bar{A}_{55}^{*(k)}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\bar{\gamma}_{yz}^{0(k)}\\ \bar{\gamma}_{xz}^{0(k)}\end{pmatrix},\quad k=1,\ldots,5 \tag{۱۳}$$

درجایی‌که هریک از مؤلفه‌های ماتریس‌های A و B و D از روابط زیر به‌دست می‌آید [۲۰]:

$$\left(\bar{A}_{ij}^{*(k)},\bar{B}_{ij}^{*(k)},\bar{D}_{ij}^{*(k)}\right)=\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}\bar{Q}_{ij}^{*(k)}\left(1,z_k,z^2{}_k\right)dz^{(k)} \tag{۱۴}$$

$$,\quad i,j=1,2,6$$

$$\bar{A}_{ij}^{*(k)}=\int_{-\frac{h_i}{2}}^{\frac{h_i}{2}}\bar{Q}_{ij}^{*(k)}dz^{(k)}\qquad ,\qquad i,j=4,5 \tag{۱۵}$$

برای یافتن معادلات حاکم، مطابق اصل کمینه انرژی پتانسیل می‌توان نوشت [۲۰]:

$$\int_0^a\int_0^b\left\{\sum_{k=1}^{5}\begin{bmatrix}\left(\bar{N}_x{}^{(k)}\delta\bar{\varepsilon}_x^{0(k)}+\bar{M}_x{}^{(k)}\delta\bar{\varepsilon}_x^{1(k)}\right)+\\ \left(\bar{N}_y{}^{(k)}\delta\bar{\varepsilon}_y^{0(k)}+\bar{M}_y{}^{(k)}\delta\bar{\varepsilon}_y^{1(k)}\right)+\\ \left(\bar{N}_{xy}{}^{(k)}\delta\bar{\gamma}_{xy}^{0(k)}+\bar{M}_{xy}{}^{(k)}\delta\bar{\gamma}_{xy}^{1(k)}\right)+\\ \left(\bar{Q}_y{}^{(k)}\delta\bar{\gamma}_{yz}^{0(k)}\right)+\left(\bar{Q}_x{}^{(k)}\delta\bar{\gamma}_{xz}^{0(k)}\right)\end{bmatrix}-\bar{q}\delta\bar{w}\right\}dxdy=0 \tag{۱۶}$$

نهایتا با جایگزینی کرنش‌ها بر حسب جابجایی‌ها، معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله، به صورت روابط (۱۷) الی (۲۹) نتیجه می‌شود.

$$\delta\bar{\mathbf{u}}:\sum_{k=1}^{5}(\bar{N}_{x,x}^{(k)}+\bar{N}_{xy,y}^{(k)})=0 \tag{۱۷}$$

$$\delta\bar{\mathbf{v}}:\sum_{k=1}^{5}(\bar{N}_{y,y}^{(k)}+\bar{N}_{xy,x}^{(k)})=0 \tag{۱۸}$$

$$\delta\bar{\mathbf{w}}:\sum_{k=1}^{5}(\bar{Q}_{x,x}^{(k)}+\bar{Q}_{y,y}^{(k)})=\bar{q} \tag{۱۹}$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{x}}^{(1)}:&-\frac{h_1}{2}(\bar{N}_{x,x}^{(1)}+\bar{N}_{xy,y}^{(1)})\\&+(\bar{M}_{x,x}^{(1)}+\bar{M}_{xy,y}^{(1)})-\bar{Q}_x^{(1)}=0\end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{y}}^{(1)}:&-\frac{h_1}{2}(\bar{N}_{y,y}^{(1)}+\bar{N}_{xy,x}^{(1)})\\&+(\bar{M}_{y,y}^{(1)}+\bar{M}_{xy,x}^{(1)})-\bar{Q}_y^{(1)}=0\end{aligned} \tag{۲۱}$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{x}}^{(2)}:&-h_2(\bar{N}_{x,x}^{(1)}+\bar{N}_{xy,y}^{(1)})-\frac{h_2}{2}(\bar{N}_{x,x}^{(2)}+\bar{N}_{xy,y}^{(2)})\\&+(\bar{M}_{x,x}^{(2)}+\bar{M}_{xy,y}^{(2)})-\bar{Q}_x^{(2)}=0\end{aligned} \tag{۲۲}$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{y}}^{(2)}:&-h_2(\bar{N}_{y,y}^{(1)}+\bar{N}_{xy,x}^{(1)})-\frac{h_2}{2}(\bar{N}_{y,y}^{(2)}+\bar{N}_{xy,x}^{(2)})\\&+(\bar{M}_{y,y}^{(2)}+\bar{M}_{xy,x}^{(2)})-\bar{Q}_y^{(2)}=0\end{aligned} \tag{۲۳}$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{x}}^{(3)}:&\ \frac{h_3}{2}[(\bar{N}_{x,x}^{(5)}+\bar{N}_{xy,y}^{(5)})+(\bar{N}_{x,x}^{(4)}+\bar{N}_{xy,y}^{(4)})\\&-(\bar{N}_{x,x}^{(2)}+\bar{N}_{xy,y}^{(2)})-(\bar{N}_{x,x}^{(1)}+\bar{N}_{xy,y}^{(1)})]\\&+(\bar{M}_{x,x}^{(3)}+\bar{M}_{xy,y}^{(3)})-\bar{Q}_x^{(3)}=0\end{aligned} \tag{۲۴}$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{y}}^{(3)}:&\ \frac{h_3}{2}[(\bar{N}_{y,y}^{(5)}+\bar{N}_{xy,x}^{(5)})+(\bar{N}_{y,y}^{(4)}+\bar{N}_{xy,x}^{(4)})\\&-(\bar{N}_{y,y}^{(2)}+\bar{N}_{xy,x}^{(2)})-(\bar{N}_{y,y}^{(1)}+\bar{N}_{xy,x}^{(1)})]\\&+(\bar{M}_{y,y}^{(3)}+\bar{M}_{xy,x}^{(3)})-\bar{Q}_y^{(3)}=0\end{aligned} \tag{۲۵}$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{x}}^{(4)}:&\ h_2(\bar{N}_{x,x}^{(5)}+\bar{N}_{xy,y}^{(5)})+\frac{h_2}{2}(\bar{N}_{x,x}^{(4)}+\bar{N}_{xy,y}^{(4)})\\&+(\bar{M}_{x,x}^{(4)}+\bar{M}_{xy,y}^{(4)})-\bar{Q}_x^{(4)}=0\end{aligned} \tag{۲۶}$$

$$\begin{aligned}\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{y}}^{(4)}:&\ h_2(\bar{N}_{y,y}^{(5)}+\bar{N}_{xy,x}^{(5)})+\frac{h_2}{2}(\bar{N}_{y,y}^{(4)}+\bar{N}_{xy,x}^{(4)})\\&+(\bar{M}_{y,y}^{(4)}+\bar{M}_{xy,x}^{(4)})-\bar{Q}_y^{(4)}=0\end{aligned} \tag{۲۷}$$

$$\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{x}}^{(5)}:\frac{h_1}{2}(\bar{N}_{x,x}^{(5)}+\bar{N}_{xy,y}^{(5)})+(\bar{M}_{x,x}^{(5)}+\bar{M}_{xy,y}^{(5)})-\bar{Q}_x^{(5)}=0 \tag{۲۸}$$

$$\delta\bar{\boldsymbol{\varphi}}_{\mathbf{y}}^{(5)}:\frac{h_1}{2}(\bar{N}_{y,y}^{(5)}+\bar{N}_{xy,x}^{(5)})+(\bar{M}_{y,y}^{(5)}+\bar{M}_{xy,x}^{(5)})-\bar{Q}_y^{(5)}=0 \tag{۲۹}$$

برای حل معادلات فوق از روش ناویر[1] استفاده خواهد شد. شرایط مرزی ورق مستطیل شکل به صورت تکیه‌گاه های ساده[2] در چهار لبه ورق می‌باشد که به فرم زیر تعریف می‌گردد [۲۰]:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0 \quad \text{و} \quad w=0 \qquad @\ x=0,x=a\\[2mm] \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad \text{و} \quad w=0 \qquad @\ y=0,y=b\end{cases} \tag{۳۰}$$

لذا بر این اساس میدان‌های جابجایی و چرخش در حوزه‌ی تبدیل-یافته، به صورت روابط (۳۱) الی (۳۵) بیان می‌گردد [۲۰].

$$\bar{u}(x,y,s)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{U}_{mn}(s)\cos(\lambda_m x)\sin(\mu_n y) \tag{۳۱}$$

[1] Navier Solution
[2] Simply Supported

$$\bar{v}(x,y,s)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{V}_{mn}(s)\sin(\lambda_m x)\cos(\mu_n y) \tag{۳۲}$$

$$\bar{w}(x,y,s)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{W}_{mn}(s)\sin(\lambda_m x)\sin(\mu_n y) \tag{۳۳}$$

$$\bar{\varphi}_x^{(k)}(x,y,s)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\Phi}_{x_{mn}}^{(k)}(s)\cos(\lambda_m x)\sin(\mu_n y) \quad ,k=1,\ldots,5 \tag{۳۴}$$

$$\bar{\varphi}_y^{(k)}(x,y,s)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\Phi}_{y_{mn}}^{(k)}(s)\sin(\lambda_m x)\cos(\mu_n y) \quad ,k=1,\ldots,5 \tag{۳۵}$$

در این روابط، ضرایب λ_m و μ_n به صورت زیر تعریف می‌شود [۲۰]:

$$\lambda_m=\frac{m\pi}{a}\ ,\ \ \mu_n=\frac{n\pi}{b} \tag{۳۶}$$

همچنین فرم سری فوریه‌ی بار گسترده یکنواخت، در حوزه لاپلاس به شکل زیر نوشته می‌شود [۲۰]:

$$\bar{q}(x,y,s)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\bar{\Gamma}_{mn}(s)\sin(\lambda_m x)\sin(\mu_n y) \tag{۳۷}$$

که در آن:

$$\bar{\Gamma}_{mn}(s)=\begin{cases}\dfrac{16(q/s)}{mn\pi^2} & \text{اگر } m \text{ و } n \text{ فرد باشد.}\\ 0 & \text{اگر } m \text{ یا } n \text{ زوج باشد.}\end{cases} \tag{۳۸}$$

با استفاده از روابط (۳۱) الی (۳۵) و قرار دادن توابع نظیر در معادلات حاکم، یک سری دستگاه معادلات در فضای لاپلاس به فرم رابطه (۳۹) ایجاد خواهد شد که با حل آن‌ها، ضرایب مجهول به صورت توابعی در حوزه لاپلاس به ازاء هر مقدار از n و m به دست خواهد آمد.

$$\left[\bar{R}\right]_{mn}\left\{\bar{X}\right\}_{mn}=\left\{\bar{Y}\right\}_{mn} \qquad m,n=1,\ldots,\infty \tag{۳۹}$$

درجایی‌که:

$$\left\{\bar{X}\right\}_{mn}^{T}=\begin{Bmatrix}\bar{U}_{mn},\bar{V}_{mn},\bar{W}_{mn},\bar{\Phi}_{x_{mn}}^{(1)},\bar{\Phi}_{y_{mn}}^{(1)},\bar{\Phi}_{x_{mn}}^{(2)},\bar{\Phi}_{y_{mn}}^{(2)},\\ \bar{\Phi}_{x_{mn}}^{(3)},\bar{\Phi}_{y_{mn}}^{(3)},\bar{\Phi}_{x_{mn}}^{(4)},\bar{\Phi}_{y_{mn}}^{(4)},\bar{\Phi}_{x_{mn}}^{(5)},\bar{\Phi}_{y_{mn}}^{(5)}\end{Bmatrix} \tag{۴۰}$$

$$\left\{\bar{Y}\right\}_{mn}^{T}=\left\{0,0,\bar{\Gamma}_{mn},0,0,0,0,0,0,0,0,0,0\right\} \tag{۴۱}$$

بالانویس $(\ )^{T}$ در روابط فوق دلالت بر ترانسپوز ماتریس دارد.

بر اساس روابط بین کرنش و جابجایی می‌توان مؤلفه‌های کرنش را در لایه‌های مختلف در فضای لاپلاس به دست آورد. همچنین روابط هوک در فضای لاپلاس (با احتساب ضرایب مهندسی معادل)، تنش‌ها را در هر لایه در فضای لاپلاس نتیجه خواهد داد. برای محاسبه جابجایی‌ها و تنش‌ها در یک زمان خاص، از نرم‌افزار MATLAB برای تبدیل معکوس لاپلاس استفاده گردیده است.

۳- صحت‌سنجی نتایج

صحت‌سنجی نتایج روش تحلیلی پیشنهادی به دو صورت انجام پذیرفته است. ابتدا با ادغام لایه‌های چسب و رویه و میل دادن زمان به سمت صفر، نتایج حل الاستیک ورق ساندویچی سه‌لایه با پاسخ‌های مرجع [۱۸] مقایسه شده است. ورق ساندویچی تحلیل شده در مرجع [۱۸]، یک سه لایه ارتوتروپیک با آرایش [۰/۹۰/۰] می‌باشد که بر روی تکیه‌گاه‌های ساده قرار دارد و یک بار گسترده یکنواخت بر سطح فوقانی آن وارد آمده است. ماتریس سختی هسته مطابق با رابطه (۴۲) بوده و ماتریس سختی رویه‌ها به صورت ضریبی (R) از آن تعریف شده است. سه لایه مورد نظر مربع شکل بوده و ضخامت رویه آن ۰/۱ ضخامت کل ورق می‌باشد. جدول (۱) نتایج خیز و تنش بدون بعد را در این مقایسه، به ازای مقادیر مختلف ضریب R نشان می‌دهد. درصد بسیار کم اختلاف نتایج در جدول ۱ حاکی از اعتبار روش نیمه تحلیلی پیشنهادی در حل مسئله مذکور دارد.

$$[Q]_{core}=\begin{bmatrix}0.999781 & 0.231192 & 0 & 0 & 0\\ 0.231192 & 0.524886 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.62931 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.266810 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.159914\end{bmatrix} \tag{۴۲}$$

$$[Q]_{face\ sheet}=R\,[Q]_{core} \tag{۴۳}$$

همچنین صحت‌سنجی نتایج تحلیلی، بر اساس مقایسه با نتایج حل عددی از روش المان محدود سه‌بعدی در نرم‌افزار انسیس APDL نیز صورت گرفته است. برای مدل‌سازی ورق ساندویچی پنج‌لایه در این نرم‌افزار، از المان سه بعدی 20node186 استفاده شده است. در این مدل‌سازی، هر یک از رویه‌های مدرج تابعی به ۴۰ قسمت تقسیم بندی شده است. همچنین برای کاهش تعداد المان‌ها، از مدل ربع ورق استفاده شده است. طول و عرض ربع ورق به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شده است. هسته به ۴۰ قسمت و هر لایه چسب به ۲۰ قسمت تقسیم‌بندی شده است. شبکه‌بندی چسب و هسته به صورت درجه‌بندی با نسبت ۰/۱ به تحلیل مبتنی بر زمان برای حل ویسکوالاستیک بر پایه سری پرونی انجام پذیرفته است.

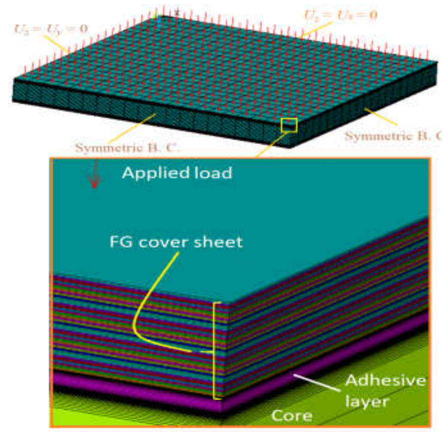
جدول ۱- نتایج خیز و تنش بی بعد در نقاط خاص از ورق ساندویچی مربعی سه‌لایه با رفتار الاستیک

R	تنش بی‌بعد	$\frac{wQ_{core}(1,1)}{hq}$	σ_x/q			σ_y/q			τ_{xz}/q	
	نقطه	a	b	c	d	b	c	d	e	f
۱	سریناواس [۱۸]	۶۸۸/۵۸	۳۶/۰۲	۲۸/۵۴	۲۸/۵۴	۲۲/۲۱	۱۷/۶۷	۱۷/۶۷	۵/۳۴۱	۱/۹۸۳
	حل حاضر	۶۸۸/۶۵	۳۵/۹۳	۲۸/۴۴	۲۸/۴۴	۲۲/۰۶	۱۷/۵۲	۱۷/۵۲	۵/۴۰۳	۲/۰۰۶
	درصد اختلاف	۰/۲۸	۰/۲۵	۰/۳۵	۰/۳۵	۰/۶۷	۰/۸۵	۰/۸۵	۱/۱۶	۱/۱۶
۵	سریناواس [۱۸]	۲۵۸/۹۷	۶۰/۳۵	۴۶/۶۲	۹/۳۴	۳۸/۴۹	۳۰/۱۰	۶/۱۶	۴/۳۶۴	۳/۲۶۸
	حل حاضر	۲۵۸/۸۹	۶۰/۳۰	۴۶/۵۰	۹/۳۰	۳۸/۵۳	۳۰/۱۱	۶/۰۲	۴/۳۷۶	۳/۳۸۰
	درصد اختلاف	۰/۰۳	۰/۰۸	۰/۲۶	۰/۴۳	۰/۱۰	۰/۰۳	۲/۲۷	۰/۲۷	۳/۴۳

۱۰	سریناواس [۱۸]	۱۵۹/۳۸	۶۳/۳۲	۴۸/۸۶	۴/۹۰	۴۳/۵۷	۳۳/۴۱	۳/۵۰	۴/۰۹۶	۳/۵۱۵
	حل حاضر	۱۵۹/۴۴	۶۳/۳۱	۴۸/۷۰	۴/۸۷	۴۳/۷۰	۳۳/۴۸	۳/۳۵	۴/۰۹۶	۳/۶۵۲
	درصد اختلاف	۰/۰۴	۰/۰۲	۰/۳۳	۰/۶۱	۰/۳۰	۰/۲۱	۴/۲۸	۰/۰۰	۳/۹۰
۱۵	سریناواس [۱۸]	۱۲۱/۷۲	۶۶/۷۹	۴۸/۳۰	۳/۲۴	۴۶/۴۲	۳۴/۹۶	۲/۴۹	۳/۹۶۴	۳/۵۷۷
	حل حاضر	۱۲۱/۸۰	۶۶/۷۷	۴۸/۱۱	۳/۲۱	۴۶/۶۱	۳۵/۰۵	۲/۳۴	۳/۹۶۱	۳/۷۲۰
	درصد اختلاف	۰/۰۷	۰/۰۳	۰/۳۹	۰/۹۲	۰/۴۱	۰/۲۶	۶/۰۲	۰/۰۷	۴/۰۰

f: سطح اشتراک رویه و هسته   e: صفحه میانی ورق   d: سطح بالای هسته   c: سطح پایین رویه فوقانی   b: سطح بالای رویه فوقانی   a: صفحه میانی ورق ساندویچی

سمت نواحی مرز چسب با رویه و هسته، ریزتر انجام شده است. نهایتاً شکل ۳ نحوه شبکه‌بندی، بارگذاری و شرایط مرزی مسئله را نمایش می‌دهد.



شکل ۳- نحوه المان‌بندی لایه‌های مختلف ورق ساندویچی در مدل ربع ورق در نرم‌افزار ANSYS

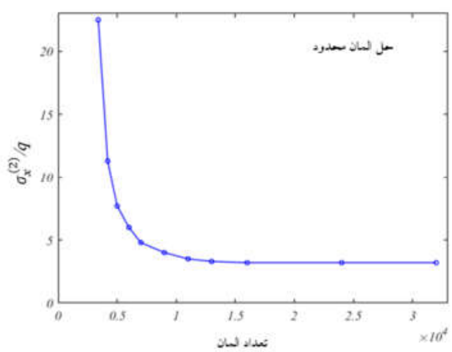
در این مقایسه، یک ورق ساندویچی مربعی متقارن با پهنای ۰/۲۴ متر تحت بار یکنواخت خارجی به میزان ۱۰۰ kPa که بر روی تکیه-گاه‌های ساده در چهار طرف قرار دارد در نظر گرفته شده است. ضخامت کل

ورق ساندویچی برابر با ۰/۰۱ متر و ضخامت رویه، چسب و هسته به ترتیب ۰/۱ و ۰/۰۲ و ۰/۷۶ ضخامت کل ورق ساندویچی در نظر گرفته شده است. هسته و لایه‌های چسب، همگن و ایزوتروپ بوده و رویه‌ها ساختار FGM (در راستای ضخامت) دارند. رفتار رویه‌ها و هسته، الاستیک خطی و رفتار لایه‌های چسب به صورت ویسکوالاستیک خطی بیان می‌گردد. خواص مهندسی لایه‌های مختلف در جدول ۲ آمده است. ضرایب ویسکوالاستیک چسب، بر اساس مدل جامد سه‌پارامتری مطابق با شکل ۱۳ (در پیوست) بیان شده‌اند. در شکل ۴ همگرایی پاسخ به ازای تعداد المان‌های شبکه‌بندی مدل ربع ورق نشان داده شده است.

برای بررسی تنش‌ها در لایه‌ی چسب فوقانی، نقاط مرجعی از ورق ساندویچی، انتخاب شده است. جدول ۳ مختصات این نقاط را معرفی می‌کند.

جدول ۲- خصوصیات مهندسی مواد و هندسه‌ی لایه‌های مختلف

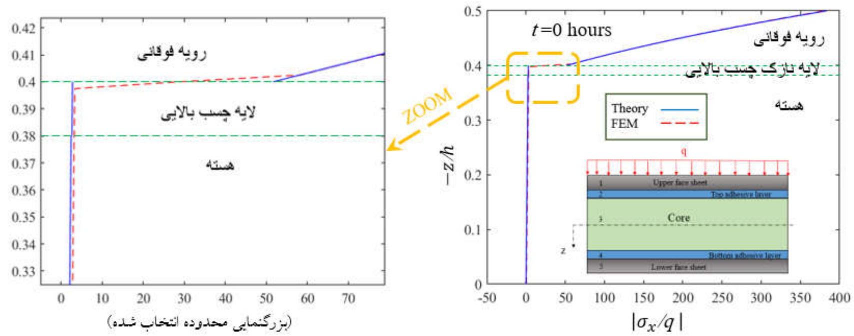
لایه	خواص الاستیک	خواص ویسکوالاستیک	ضخامت (mm)
رویه‌های مدرج تابعی	$E_c = 380GPa$ $E_m = 70GPa$ $p = 1, \nu_1 = 0.3$	-	$h_1 = 1$
لایه‌های چسب	$E_2 = 3.4GPa$ $\nu_2 = 0.375$	$G_0 = 1.236GPa$ $G_1 = 0.309GPa$ $\eta = 7.73GPa.hour$ $K_0 = 4.533GPa$ $K_1 = 6.8GPa$ $\lambda = 113.33GPa.hour$	$h_2 = 0.2$
هسته	$E_3 = 2.8GPa$ $\nu_3 = 0.45$	-	$h_3 = 7.6$



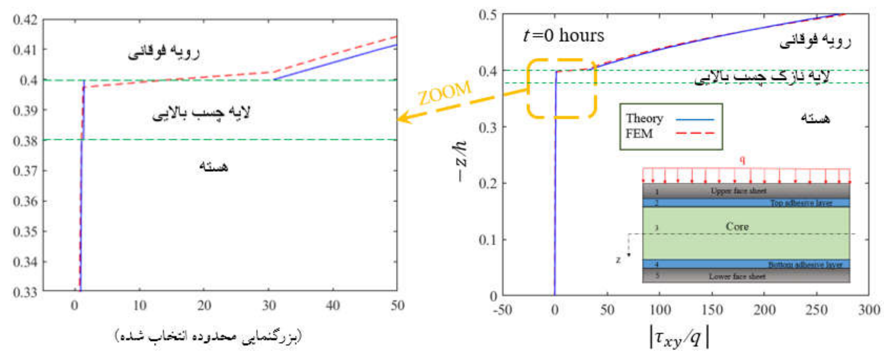
شکل ۴- نمودار همگرایی حل المان محدود در تعیین بیشینه تنش لایه چسب فوقانی، بر حسب تعداد المان‌های مدل ربع ورق ساندویچی در نرم‌افزار ANSYS

جدول ۳- موقعیت نقاط انتخاب شده بر روی لایه‌ی چسب فوقانی

موقعیت	$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}$		$x = a, y = 0$	
شماره	۱	۲	۳	۴
z_2	$-\frac{h_2}{2}$	$\frac{h_2}{2}$	$-\frac{h_2}{2}$	$\frac{h_2}{2}$



شکل ۵- نتایج حل نظری و عددی در تغییرات تنش عمودی درون‌صفحه σ_x در وسط ورق $(x = a, y = b)$ در امتداد ضخامت ورق ساندویچی در زمان $t=0$ ساعت.



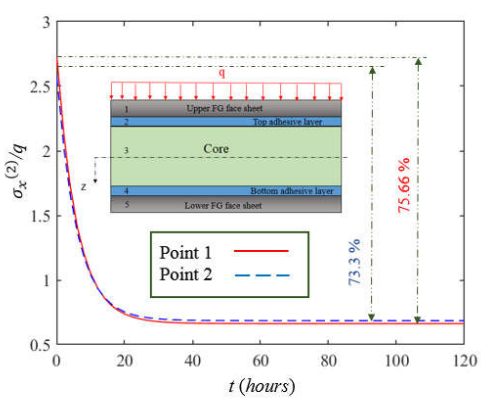
شکل ۶- نتایج حل نظری و عددی در تغییرات تنش برشی درون‌صفحه τ_{xy} در گوشه‌ی ورق $(x = a, y = 0)$ در امتداد ضخامت ورق ساندویچی در زمان $t=0$ ساعت.

با توجه به تقارن مسئله، فقط لایه‌ی چسب فوقانی مد نظر قرار گرفته است. به منظور مقایسه نتایج حل المان محدود و حل تحلیلی حاضر، نمودارهای توزیع تنش در راستای ضخامت نیمه فوقانی ورق ساندویچی در زمان $t = 0$ ساعت در شکل‌های ۵ و ۶ آورده شده است. انطباق بسیار خوب نتایج نظری و عددی، نشان از مناسب بودن روش پیشنهادی تحلیلی در حل ویسکوالاستیک ورق ساندویچی پنج‌لایه دارد.

۴- نتایج

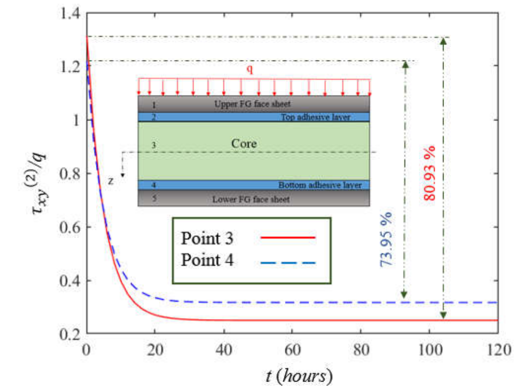
۴-۱- بررسی تغییرات زمانی تنش‌ها

در این بخش، با استفاده از روش نیمه‌تحلیلی ارائه شده به بررسی تغییرات تنش در لایه‌های چسب ورق ساندویچی پنج‌لایه در گذر زمان پرداخته می‌شود. مشخصات مهندسی لایه‌ها و هندسه مسئله مطابق با جدول ۲ در نظر گرفته شده است. مقادیر تنش به صورت قدرمطلق و بدون بعد ارائه می‌شوند. در شکل‌های ۷ و ۸ به ترتیب تأثیر آسایش چسب بر روی تنش عمودی σ_x در نقاط ۱ و ۲ و تنش برشی τ_{xy} در نقاط ۳ و ۴، در لایه‌ی چسب فوقانی نمایش داده شده است.



شکل ۷- تغییرات تنش عمودی درون‌صفحه σ_x در سطوح بالا و پایین لایه چسب فوقانی در وسط ورق (در نقطه ۱ و ۲) با گذشت زمان

مطابق این نمودارها، افت تنش‌های درون‌صفحه‌ای در لایه‌ی چسب در اثر خاصیت ویسکوالاستیک بسیار زیاد و قابل ملاحظه است. سطح بیرونی لایه‌ی چسب مقدار افت تنش بیشتری را در مقایسه با سطح داخلی تجربه می‌کند. بر اثر آسایش مدول برشی چسب به میزان ٪۸۰ و آسایش مدول بالک چسب به میزان ٪۴۰ (مطابق با خواص ویسکوالاستیک در جدول ۲)، افت بیشینه تنش‌های عمودی σ_x و برشی τ_{xy} در چسب، به ترتیب حدود ٪۷۵/۶۶ و ٪۸۰/۹۳ نتیجه شده است.



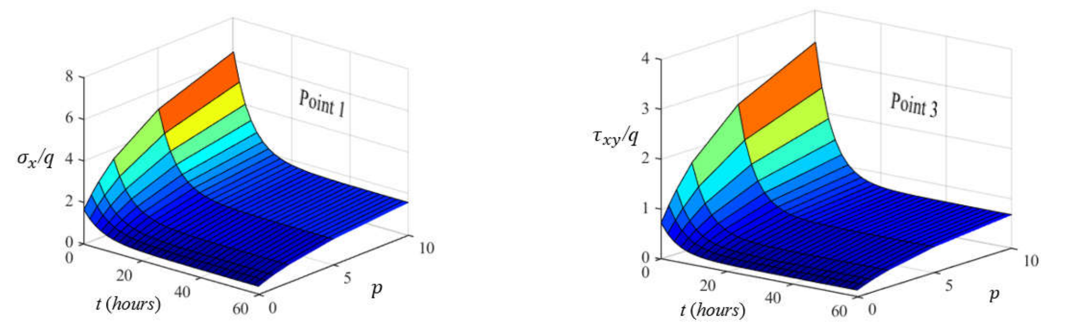
شکل ۸- تغییرات تنش برشی درون‌صفحه τ_{xy} در سطوح بالا و پایین لایه چسب فوقانی در گوشه ورق (در نقطه ۳ و ۴) با گذشت زمان.

نتایج به دست آمده از تحلیل ورق پنج لایه در مورد تنش‌های برون‌صفحه نشان داد که اگرچه میزان این تنش‌ها قابل ملاحظه است اما خاصیت ویسکوالاستیک چسب بر روی این تنش‌ها، اثر قابل ملاحظه‌ای نداشته و تنش‌های برون‌صفحه در لایه‌های چسب با زمان، تغییر نکرده و تقریبا ثابت باقی می‌مانند. به همین جهت از ارائه نمودارهای مربوطه چشم پوشی شده است.

۲-۴- تحلیل پارامتری

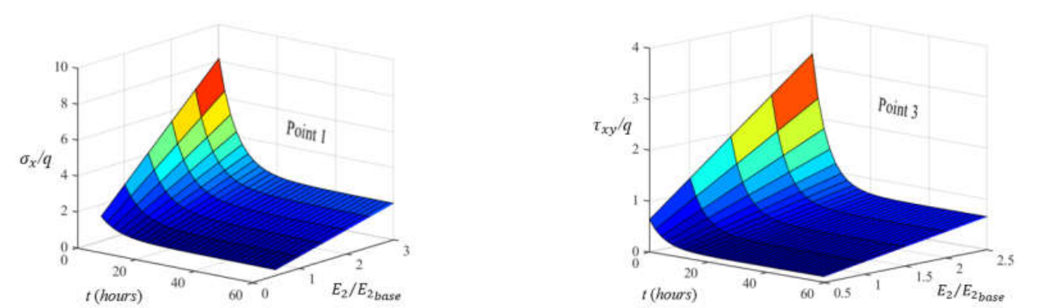
در این بخش، اثر پارامترهای مختلف در مدت زمان آسایش، بر روی تنش‌های درون‌صفحه‌ی لایه‌ی چسب بررسی می‌شود. با توجه به اینکه تنش‌های برون‌صفحه در چسب، تغییرات بسیار ناچیز و قابل اغماضی با زمان دارند در این بررسی لحاظ نشده‌اند. نتایج تنش، برای سطح بالایی لایه‌ی چسب فوقانی استخراج شده و به صورت قدرمطلق و بدون بعد ارائه گردیده است. در هر نمودار بجز پارامتری که به عنوان متغیر در نظر گرفته شده است، سایر خواص مکانیکی مواد و همچنین هندسه مسئله، مطابق با جدول ۲ می‌باشد.

شکل ۹ تاثیر توان تابع رویه‌های مدرج تابعی (p) را بر روی بیشینه‌ی تنش‌ها در سطح فوقانی لایه چسب بالایی با گذشت زمان نشان می‌دهد. با افزایش میزان p، میزان تنش‌های درون صفحه در لایه چسب به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. علت این امر افزایش سهم فلز (با میزان سختی کمتر نسبت به سرامیک) در رویه‌ها می‌باشد که از تحمل تنش رویه‌ها کاسته و بر میزان تنش در لایه‌های دیگر می‌افزاید. اما در عین حال نکته قابل توجه در این نمودارها این است که افت تنش‌های درون صفحه با گذشت زمان، برای مقادیر بالاتر p بیشتر می‌باشد. به عبارت دیگر کاربرد چسب ویسکوالاستیک در کاهش میزان تنش‌های درون صفحه‌ی چسب، در شرایط بحرانی مؤثرتر است.



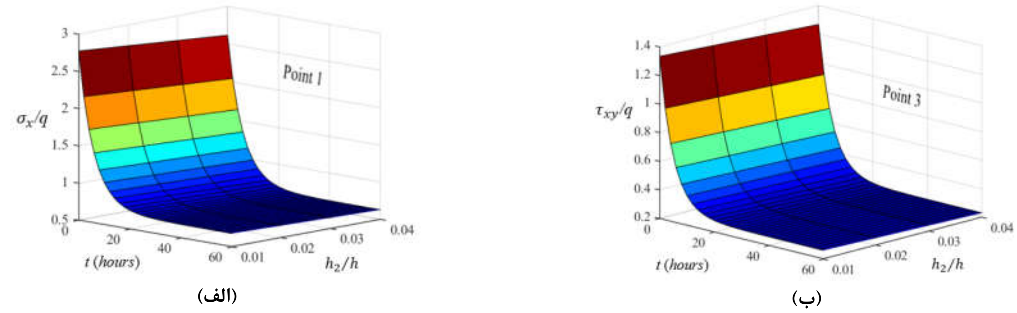
(ب) (الف)

شکل ۹- تاثیر توان تابع توزیع مواد در رویه‌های مدرج تابعی ورق ساندویچی بر روی تنش‌های ایجاد شده در سطح بالایی لایه‌ی چسب فوقانی با گذشت زمان. الف-تنش σ_x در وسط ورق (نقطه ۱) ب-تنش τ_{xy} در گوشه‌ی ورق (نقطه ۳)

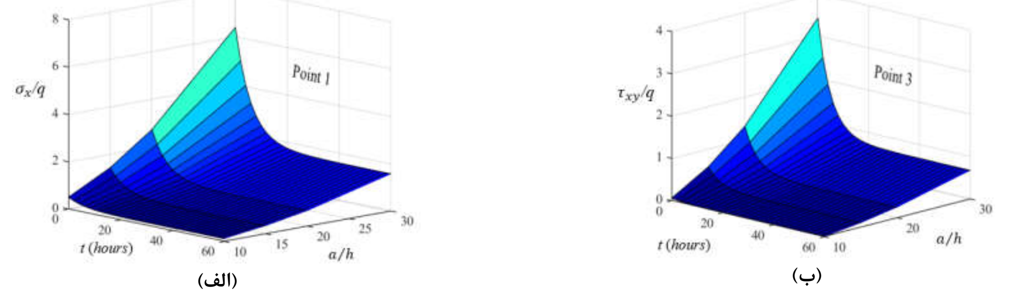


(ب) (الف)

شکل ۱۰- تاثیر مدول الاستیسیته اولیه (زمان صفر) چسب بر روی تنش‌های ایجاد شده در سطح بالایی لایه‌ی چسب فوقانی با گذشت زمان. الف-تنش σ_x در وسط ورق (نقطه ۱) ب-تنش τ_{xy} در گوشه‌ی ورق (نقطه ۳)



شکل ۱۱- تاثیر ضخامت لایه‌ی چسب بر روی تنش‌های ایجاد شده در سطح بالایی لایه‌ی چسب فوقانی با گذشت زمان. الف-تنش σ_x در وسط ورق (نقطه ۱) ب-تنش τ_{xy} در گوشه‌ی ورق (نقطه ۳)



شکل ۱۲- تاثیر ضخامت کل ورق ساندویچی بر روی تنش‌های ایجاد شده در سطح بالایی لایه‌ی چسب فوقانی با گذشت زمان. الف-تنش σ_x در وسط ورق (نقطه ۱) ب-تنش τ_{xy} در گوشه‌ی ورق (نقطه ۳)

در شکل ۱۰ تغییرات تنش در سطح بالایی لایه چسب فوقانی با گذشت زمان و تحت تاثیرات تغییر مدول الاستیسیته زمان صفر چسب ترسیم شده است. از این نمودارها مشخص است که تنش‌های درون صفحه در لایه چسب از تغییر مدول الاستیک چسب بسیار تاثیر پذیرفته‌اند و با افزایش سختی چسب، میزان تحمل تنش در این لایه بالا رفته و بر مقدار تنش‌های درون صفحه‌ی آن می‌افزاید. با گذشت زمان افت تنش در تنش‌های درون صفحه بسیار محسوس است و اثر ویسکوالاستیک چسب برای حالتی که چسب جنس سخت‌تری در زمان پیش از بارگذاری دارد، نمود بیشتری خواهد داشت.

در شکل ۱۱ تاثیر تغییر ضخامت لایه‌های چسب بر روی تنش‌های ایجاد شده در سطح فوقانی لایه چسب بالایی در گذر زمان آسایش نشان داده شده است. افزایش ضخامت لایه چسب در این مسئله، تاثیر کمی بر روی تنش‌های درون صفحه دارد. زیرا ضخامت چسب به نسبت ضخامت لایه‌های دیگر کوچک بوده و افزایش آن، باعث افزایش اندک در ضخامت کل ورق می‌شود که سختی ورق ساندویچی را به میزان کم افزایش داده و باعث افت اندک تنش‌های درون صفحه می‌گردد. در این شکل، ضخامت لایه‌ی چسب تا چهار برابر افزایش داده شده است اما میزان درصد کاهش تنش برشی حدود ۵/۲۶ درصد و تنش عمودی حدود ۵/۶۲ درصد بوده است. این درحالی است که افت تنش ناشی از اثر ویسکوالاستیک چسب به میزان بسیار قابل توجهی مشهود است.

شکل ۱۲ تغییرات تنش در سطح فوقانی لایه چسب بالایی را بر اثر تغییر ضخامت کل ورق ساندویچی و در گذر زمان نشان می‌دهد. کاهش ضخامت ورق تاثیر بسیار بالایی بر روی افزایش قابل ملاحظه تنش‌های درون صفحه دارد، به دلیل این‌که از سختی خمشی سازه در مقابل تنش‌های ایجاد شده کاسته می‌شود. مجددا سهم کاهش تنش-های درون صفحه در اثر خاصیت ویسکوالاستیک در لایه‌ی چسب در این وضعیت‌های بحرانی (ضخامت‌های پایین ورق) بسیار مورد توجه می‌باشد.

۵- نتیجه‌گیری

در این تحقیق، به بررسی زمانی تغییرات تنش‌ها در لایه‌های چسب یک ورق ساندویچی پنج‌لایه متقارن تحت بار گسترده عرضی پرداخته شد. رویه‌های ورق ساندویچی به صورت مدرج تابعی هستند و توسط دو لایه‌ی نازک چسب ویسکوالاستیک به هسته‌ی همگن متصل شده‌اند. از اصل تطابق آلفری برای شبیه‌سازی حل مسئله ویسکوالاستیک بر پایه‌ی روش حل الاستیک استفاده شده است. روند حل، بر پایه نظریه لایه‌ای و استفاده از نظریه برشی مرتبه اول برای هر لایه و استخراج معادلات حاکم بر اساس اصل کمینه انرژی پتانسیل صورت گرفت که برای حل معادلات از روش ناویر استفاده گردید. برای برگرداندن توابع به حوزه زمان، از روش معکوس لاپلاس‌گیری عددی استفاده شده است. تغییرات تنش‌های ایجاد شده در چسب، با گذشت زمان مورد بررسی قرار گرفت و اثر پارامترهای مختلف مواد و هندسه‌ی ورق بر روی آن ارزیابی شد.

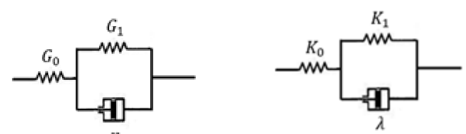
نتایج کلی این تحقیق در زیر اشاره شده است:

- تنش‌های برون صفحه σ_z و τ_{xz} (یا τ_{yz}) در لایه‌های چسب در گذر زمان تقریباً ثابت می‌مانند.
- تحت تأثیر خواص ویسکوالاستیک، بیشینه تنش‌های درون‌صفحه σ_x (یا σ_y) و τ_{xy} در لایه‌های چسب، به ترتیب به میزان ۷۵/۶۶٪ و ۸۰/۹۳٪ در گذر زمان کاهش داشته است.

- افزایش شاخص تابع رویه‌های مدرج تابعی (p) و مدول الاستیسیته زمان صفر چسب (E_2) و همچنین کاهش ضخامت کل ورق ساندویچی (h) سبب افزایش زیاد تنش‌های درون‌صفحه در لایه‌های چسب می‌گردد، درحالی‌که میزان ضخامت لایه‌های چسب (h_2) در تغییرات این تنش‌ها تأثیر ناچیز دارد.
- مقادیر تنش‌های درون صفحه و برون صفحه در لایه‌های چسب قابل ملاحظه بوده و باید در تحلیل ورق ساندویچی مد نظر قرار گیرد.
- روش پیشنهادی در تحلیل ویسکوالاستیک تنش در ورق‌های ساندویچی با احتساب لایه‌های چسب واسط رویه‌ها و هسته، مناسب و کارآمد ارزیابی شد.

۶- پیوست

در این تحقیق رفتار ویسکوالاستیک خطی لایه‌های چسب اپوکسی، بر اساس مدل جامد سه پارامتری برای تغییرات مدول برشی و مدول حجمی چسب (شکل ۱۳) مشخص شده است. G_0 و G_1 و η ثابت‌های مدل جامد سه‌پارامتری در تغییرشکل برشی و K_0 و K_1 و λ ثابت‌های نظیر در مدل تغییرحجم می‌باشند. G_0 و K_0 در این مدل، معادل مدول برشی و مدول بالک چسب در زمان صفر (یا وضعیت الاستیک) می‌باشند.



(الف) (ب)

شکل ۱۳- مدل ویسکوالاستیک جامد خطی استاندارد. الف- برای رفتار برشی چسب. ب- برای تغییر حجم چسب.

مطابق با این مدل، مدول برشی و مدول حجمی در حوزه لاپلاس به فرم زیر نتیجه می‌شوند [۱۹]:

$$\bar{G}(s)=\frac{(q_0+q_1 s)}{s(1+p_1 s)} \quad (پ-۱)$$

$$\bar{K}(s)=\frac{(\tilde{q}_0+\tilde{q}_1 s)}{s(1+\tilde{p}_1 s)} \quad (پ-۲)$$

که در آن [۱۹]:

$$p_1=\frac{\eta}{G_0+G_1}\ ,\ q_0=\frac{G_0G_1}{G_0+G_1}\ ,\ q_1=\frac{\eta G_0}{G_0+G_1} \quad (پ-۳)$$

$$\tilde{p}_1=\frac{\lambda}{K_0+K_1}\ ,\ \tilde{q}_0=\frac{K_0K_1}{K_0+K_1}\ ,\ \tilde{q}_1=\frac{\lambda K_0}{K_0+K_1} \quad (پ-۴)$$

با توجه به روابط (پ-۱) و (پ-۲)، مدول‌های برشی و حجمی معادل‌یافته را به شیوه زیر می‌توان نمایش داد:

$$\bar{G}^*(s)=s\bar{G}(s)=\frac{(q_0+q_1 s)}{(1+p_1 s)} \quad (پ-۵)$$

$$\bar{K}^*(s)=s\bar{K}(s)=\frac{(\tilde{q}_0+\tilde{q}_1 s)}{(1+\tilde{p}_1 s)} \quad (پ-۶)$$

۷- مراجع

[1] Carrera E. Theories and Finite Elements for Multilayered, Anisotropic, Composite Plates and Shells. Archives of Computational Methods in Engineering. 2002 Jun; 9:87-140.

[2] Carrera E. Historical Review of Zig-Zag Theories for Multilayered Plates and Shells. Applied Mechanics Reviews. 2003 May 1;56(3):287-308.

[3] Carrera E, Brischetto S. A Survey with Numerical Assessment of Classical and Refined Theories for The Analysis of Sandwich Plates. Applied Mechanics Reviews. 2009 010803.

[4] Sayyad AS, Ghugal YM. On The Free Vibration Analysis of Laminated Composite and Sandwich Plates: A Review of Recent Literature with Some Numerical Results. Composite Structures. 2015 Oct 1; 129:177-201

[5] Sayyad AS, Ghugal YM. Bending, Buckling and Free Vibration of Laminated Composite and Sandwich Beams: A Critical Review of Literature. Composite Structures. 2017 Jul 1; 171:486-504.

[6] Thai HT, Kim SE. A Review of Theories for The Modeling and Analysis of Functionally Graded Plates and Shells. Composite Structures. 2015 Sep 15; 128:70-86.

[7] Gür AK, Taşkaya S, Katı N, Yıldız T. Investigation of stress analysis in sandwich composite plates by ANSYS method. In 8th International Advanced Technologies Symposium (IATS'17), Turkey 2017.

[8] Li D, Layerwise Theories of Laminated Composite Structures and Their Applications: A Review." Archives of Computational Methods in Engineering. 2021 Mar; 28:577-600.

[9] Garg A, Belarbi MO, Chalak HD, Chakrabarti A. A Review of the Analysis of Sandwich FGM Structures. Composite Structures. 2021 Feb 15;258: 113427.

[۱۰] شعبان م, ملاعلی پور م. بررسی تحلیلی اثرپارامترهای هندسی هسته های موجدار بر روی خیز پانل های ساندویچی. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*. ۱۳۹۹، د. ۵۰، ش. ۲، ص. ۱۲۳-۱۳۱.

[۱۱] دارابی ا, ملک‌زاده فرد ک. نبوی س م, تحلیل کمانش پوسته مرکب دوانحنایی ساندویچی نسبتاً ضخیم با هسته مشبک و رویه‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*. ۱۴۰۱، د. ۵۲، ش. ۳، ص. ۶۷-۷۶.

[۱۲] مهندسی ن, طالبی توتی م. بررسی تحلیلی ارتعاشات غیرخطی پوسته‌ی استوانه‌ای ساندویچی دارای هسته با ضریب پواسون منفی. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*. ۱۴۰۲، د. ۵۳، ش. ۲، ص. ۱۷۵-۱۸۳.

[13] Raissi H, Shishehsaz M, Moradi S. Stress Distribution in A Five-Layer Sandwich Plate with FG Face Sheets Using Layerwise Method. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2019 Jul 18;26(14):1234-44.

[14] Raissi H, Shishehsaz M, Moradi S. Applications of Higher Order Shear Deformation Theories on Stress Distribution in A Five-Layer Sandwich Plate. Journal of Computational Applied Mechanics. 2017 Dec 1;48(2):233-52.

[15] Shishehsaz M, Raissi H, Moradi S. Stress Distribution in A Five-Layer Circular Sandwich Composite Plate based on The Third and Hyperbolic Shear Deformation Theories. Mechanics of Advanced Materials and Structures. 2020 Jun 1;27(11):927-40.

[16] Kardooni MR, Shishehsaz M, Mosalmani R. Three-Dimensional Thermo-Mechanical Elastic Analysis of Functionally Graded Five Layers Composite Sandwich Plate on Winkler Foundations. Journal of Composites Science. 2022 Dec 5;6(12):372.

[17] Kardooni MR, Shishehsaz M, Moradi S, Mosalmani R. Free Vibrational Analysis of a Functionally Graded Five-Layer Sandwich Plate Resting on a Winkler Elastic Foundation in a Thermal Environment. Journal of Composites Science. 2022 Oct 31;6(11):325.

[18] Srinivas S, Rao AK. Bending, Vibration and Buckling of Simply Supported Thick Orthotropic Rectangular Plates and Laminates. International Journal of Solids and Structures. 1970 Nov 1;6(11):1463-81.

[19] Brinson HF, Brinson LC. Polymer engineering science and viscoelasticity. An introduction. Springer 2008 Jan 99:157.

[20] Reddy JN. Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. CRC press; 2003 Nov 24.