نشریه مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، شماره پیاپی ۱۰۵، جلد ۵۳، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۲، صفحه ۱۳۳-۱۴۲ – پژوهشی کامل– DOI: 10.22034/jmeut.2024.51196.3089

مطالعه رفتار ارتعاشات اجباری غیرخطی میکروورق نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی واقع در محیط سیال ساکن تحت تأثیر نیروی مکانیکی

محمد حسین‌زاده دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، بندر انزلی، دانشگاه آزاد اسلامی، بندر انزلی، ایران، m.hiseinzadeh@gmail.com

رضا پیل‌افکن* دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران، rezapilafkan@uma.ac.ir

علی علیجانی استادیار، گروه مهندسی مکانیک، بندر انزلی، دانشگاه آزاد اسلامی، بندر انزلی، ایران، alijani@iaubanz.ac.ir

وحید عرب‌ملکی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، بندر انزلی، دانشگاه آزاد اسلامی، بندر انزلی، ایران، vahid_maleki@tabrizu.ac.ir

چکیده

در این مقاله، رفتار ارتعاشات غیرخطی میکروورق نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در تماس با سیال ساکن بررسی شده است. معادلات حرکت با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول صفحات و در نظر گرفتن اثر اندازه‌های کوچک و تغییر شکل‌های بزرگ به دست آمده است. خواص مکانیکی معادل با استفاده از قانون مخلوط‌ها تعیین شده است. معادلات غیرخطی حاکم با استفاده از روش گالرکین گسسته‌سازی شده و پاسخ معادله به صورت عددی به دست آمده است. پس از صحت‌سنجی نتایج، تأثیر مشخصات هندسی میکروورق، پارامتر اندازه‌های کوچک، ارتفاع سیال و کسر وزنی نانولوله‌های کربنی بر فرکانس‌های طبیعی و پاسخ دینامیکی مطالعه شده است. نتایج نشان می‌دهد با افزایش ارتفاع سیال فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. همچنین، تقویت میکروورق با استفاده از نانولوله‌های کربنی باعث رفتار سخت‌شوندگی فنر نرم‌شونده شده و منحنی پاسخ را به طور قابل ملاحظه‌ای به سمت راست خم می‌کند. این خمش با تغییرات جزئی در فرکانس تحریک می‌تواند باعث بروز ناپایداری جهش شود. نمودارهای پاسخ زمانی، منحنی فاز و پوانکاره نشان می‌دهد که رفتار ارتعاشی متناوب، شبه‌متناوب و آشوبناک در سیستم اتفاق می‌افتد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل ارتعاشی، میکروورق، نانوکامپوزیت، نانولوله‌های کربنی، سیال ساکن، فرکانس طبیعی.

An investigation of the nonlinear forced vibrations of carbon nanotube reinforced microplates in contact with static liquid and under mechanical force

M. Hoseinzadeh Department of Mechanical Engineering, Bandar Anzali Branch, Islamic Azad University, Bandar Anzali, Iran.

R. Pilafkan Department of Mechanical Engineering , University of Mohaghegh Ardabili, Ardabili, Iran

A. Alijani Department of Mechanical Engineering, Bandar Anzali Branch, Islamic Azad University, Bandar Anzali, Iran.

V. Arab Maleki Department of Mechanical Engineering, Bandar Anzali Branch, Islamic Azad University, Bandar Anzali, Iran.

Abstract

This paper discusses the nonlinear dynamic behavior of nanocomposite microplates reinforced with carbon nanotubes in contact with static fluids. Equations of motion are derived using the first-order shear deformation theory of plates and considering the size effects and large deformations. Effective mechanical properties are determined by applying the law of mixtures. By use of the Galerkin method, the nonlinear equations governing motion are discretized and the numerical solution is obtained. The results have been verified and the effect of micro-plate geometrical characteristics, small size parameter, fluid height and weight fraction of the carbon nanotubes studied on natural linear and nonlinear frequencies and the dynamic response has been evaluated. The results indicate that the natural frequency of the system decreases with increasing fluid height. The reinforcement of microplates by carbon nanotubes also results in a softening of the stiffening behavior of the spring and a substantial bending of the response curve. Depending on the excitation frequency, this bending may result in jump instability. By examining the time response, phase, and Poincaré map of the system, periodic, quasi-periodic, and chaotic vibration behavior can be observed.

Keywords: Vibration analysis, Microplate, Nanocomposie, Carbon nanotube, Static fluid, Natural frequency.

۱- مقدمه

مدل‌سازی ریاضی و بررسی رفتار دینامیکی سازه‌های مختلف در ابعاد میکرو از مباحث روز می‌باشد. در این میان، میکروورق‌ها در بسیاری از سیستم‌ها کاربرد دارند که می‌توان به حسگرهای زیستی یا حسگرهای بیو، حسگرهای شیمیایی، حسگرهای تشخیص دهنده گاز، میکرو پمپ‌ها، میکرو توربین‌ها، میکرورزوناتورها، میکروسوئیچ‌ها و غیره اشاره نمود [۱, ۲]. نتایج مشاهدات تجربی نشان می‌دهند که برای مواد در مقیاس میکرو، اثر اندازه نقش مهمی را در تحلیل رفتار دینامیکی ایفا می‌کند، بنابراین استفاده از نظریه‌های غیرکلاسیک برای تحلیل رفتار دینامیکی میکروورق‌ها ضروری می‌باشد.

بررسی مطالعات نشان می‌دهد که تاکنون تلاش‌های زیادی به منظور ارائه راه حل تقریبی برای پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی میکروورق در تماس با سیال انجام پذیرفته است [۳, ۴]. Meylan و همکاران [۵] به بررسی رفتار ارتعاشات اجباری ورق مستطیلی معلق بر روی سیال پرداختند. Wu و همکاران [۶] ارتعاشات آزاد ورق ایزوتروپیک مستطیلی واقع در داخل سیال را مورد بررسی قرار دادند. آنها بر مبنای روش ریلی- ریتز و تابع گرین فرکانس‌های طبیعی ورق را

---

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: rezapilafkan@uma.ac.ir

تاریخ دریافت: ۰۱/۰۱/۳۰

تاریخ پذیرش: ۰۱/۰۸/۳۰

محاسبه کرده و تأثیر پارامترهای هندسی مختلف را بر روی رفتار ارتعاشی آن مطالعه نمودند. Karimi و همکاران [۷] ارتعاشات وابسته به اندازه یک میکroورق مستطیلی که به طور قائم داخل سیال غوطه‌ور است را با استفاده از نظریه تغییر شکل‌های برشی مرتبه چهارم بررسی کردند. همچنین، آنها اثرات شرایط مرزی و عمق غوطه‌وری را مورد مطالعه قرار دادند. Khorshidi و همکاران [۸] به بررسی ارتعاشات آزاد خطی یک ورق مستطیلی نازک با شرایط مرزی گیردار در تماس با سیال و ارتعاش هیدرواستاتیکی یک ورق مستطیلی کوپل شده با سیال پرداخت. Omiddezyani و همکاران [۹] ارتعاشات آزاد وابسته به اندازه در ورق میندلن غوطه‌ور در سیال محدود را با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده مطالعه کردند. آنها معادلات حرکت را با استفاده از اصل همیلتون استخراج کرده و از روش نیمه‌تحلیلی ریلی-ریتز برای حل معادلات در حالت تکیه‌گاهی لبه‌های ساده استفاده کردند. نتایج مطالعه آنها نشان دهنده کاهش فرکانس‌های طبیعی میکروورق با افزایش عمق سیال می‌باشد. Ajri و همکاران [۱۰] تأثیر مشخصه‌های ویسکوالاستیک بر رفتار دینامیکی میکروورق مستطیلی در تماس با سیال را مورد مطالعه قرار دادند. در مطالعه آنها، روش هارمونیک بالانس و نظریه تنش کوپل اصلاح شده برای بررسی ارتعاشات اجباری مورد استفاده قرار گرفته است. نتایج تحقیق آنها نشان می‌دهد که در نظر گرفتن جرم افزوده ناشی از سیال، باعث کاهش اثرات غیرخطی می‌شود. Bakhsheshy و Mahbadi [۱۱] تأثیر سیال بر رفتار ارتعاشات آزاد میکروصفحات در تماس با سیال را مطالعه کردند. در مطالعه آنها سیال به صورت تراکم‌ناپذیر، غیرچرخشی و غیر لزج در نظر گرفته شده است. Esfahani و همکاران [۱۲] به بررسی ارتعاشات میکروورق‌های پیزوالکتریک در تماس با سیال پرداختند. در مطالعه آنها، نتایج نظریه کلاسیک و نظریه تنش کوپل اصلاح شده بر روی مشخصه‌های ارتعاشی میکروورق دایروی مقایسه شده است. Farsani و همکاران [۱۳] ارتعاشات آزاد صفحات متخلخل واقع در آب را به صورت تحلیلی مطالعه کردند. Shahveh و همکاران [۱۴] رفتار ارتعاش غیرخطی قطاع دایروی در تماس با سیال را بررسی کردند. آنها با در نظر گرفتن انرژی‌های جنبشی و پتانسیل و استفاده از اصل همیلتون معادلات حاکم بر حرکت را استخراج کردند. در یکی از جدیدترین مطالعات، Li و همکاران [۱۵] با استفاده از فرضیات ورق کلاسیک به مدل‌سازی ریاضی ارتعاشات هیدرواستاتیکی ورق مستطیلی مدرج تابعی در تماس با محیط سیال پرداختند. آنها با استفاده از اصل همیلتون معادله دیفرانسیل حاکم بر حرکت و شرایط مرزی مربوطه را استخراج کردند و با استفاده از روش DQ پاسخ معادلات را به دست آوردند.

در سال‌های اخیر، با توسعه علم و فناوری استفاده از نانوذرات و نانوکامپوزیت‌های تقویت شده با نانوذرات توسعه روزافزونی پیدا کرده است [۱۶-۱۸]. در این راستا، استفاده از انواع مختلف نانوذرات مانند نانولوله‌های کربنی [۱۹, ۲۰]، نانوذرات آلومینا، نانوذرات TiO_2 [۲۱] و غیره به منظور تقویت ورق‌ها و تیرها توسعه زیادی پیدا کرده است و محققان از جنبه‌های مختلف رفتار ارتعاشی این سیستم‌ها را مطالعه کرده‌اند. Liew و همکاران [۲۲] در مطالعه مروری خود به بررسی مطالعات انجام شده در زمینه تحلیل مکانیکی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی پرداختند. Khazaei و همکاران [۲۳] ارتعاشات آزاد ورق‌های ویسکوالاستیک نانوکامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را با استفاده از نظریه گرادیان کرنش اصلاح شده مطالعه کردند. Arefi و همکاران [۲۴] با استفاده از نظریه ردی اثرات اندازه‌های کوچک را بر روی تغییر شکل‌های استاتیکی میکروصفحات متخلخل تقویت شده با نانوصفحات گرافن مطالعه کردند. Tao و Dai [۲۵] ارتعاشات غیرخطی میکروورق‌های تقویت شده با نانوصفحات گرافن را با استفاده از روش ایزوژئومتریک مطالعه کردند. آنها با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ و نظریه برشی مرتبه بالا معادلات حاکم را استخراج کردند. Ghalebahman و همکاران [۲۶] ارتعاشات میکروصفحات کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله نیترید بور را با استفاده از نظریه کرنش کوپل اصلاح شده و نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی مطالعه کردند. آنها با در نظر گرفتن توزیع یکنواخت نانوذرات، تأثیرات اثر مقیاس طول، بستر الاستیک و شرایط تکیه‌گاهی را بر مشخصه‌های ارتعاشی این سیستم‌ها بررسی کردند. Bidgoli و Arefi [۲۷] با در نظر گرفتن اثرات اندازه‌های کوچک به بررسی رفتار ارتعاشی میکروصفحات مدرج تابعی تقویت شده با نانوصفحات تحت بارگذاری حرارتی و مکانیکی پرداختند. آنها خواص مکانیکی معادل را با استفاده مدل هالپین-تسای تعیین کردند.

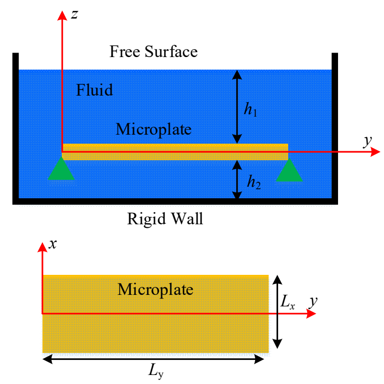
مطالعات نشان می‌دهد که تاکنون تحقیقی درباره‌ی ارتعاشات میکروورق‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در تماس با سیال صورت نگرفته است؛ که در تحقیق حاضر این مسأله مورد مطالعه قرار می‌گیرد. بدین منظور معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت با در نظر گرفتن نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات و نظریه غیرموضعی استخراج شده است. معادلات غیرخطی با استفاده از روش گالرکین و برای شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده گسسته‌سازی شده و با استفاده از روش عددی پاسخ دینامیکی و فرکانس‌های طبیعی سیستم استخراج شده است. پس از صحت‌سنجی نتایج، تأثیر پارامترهای مختلف نظیر مشخصات هندسی میکروورق، کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، پارامتر مقیاس طول و نسبت عمق سیال بررسی شده است.

۲- مدل‌سازی ریاضی

شکل ۱ طرحواره‌ای از یک میکروورق مستطیلی با طول L_x، عرض L_y و ضخامت h که با نانولوله‌های کربنی تقویت شده است را نشان می‌دهد. این میکروورق به صورت کامل داخل مخزن صلب حاوی سیال بوده و تحت تأثیر نیروی هارمونیک قرار دارد. سیال در این مخزن دارای چگالی ρ_f می‌باشند. برای به دست آوردن معادلات حاکم از فرضیات زیر استفاده شده است:

- میکروورق به صورت الاستیک است.
- ضخامت میکروورق یکنواخت و برابر h در نظر گرفته شده که در مقایسه با ابعاد صفحه بسیار کوچک می‌باشد و تمام کرنش‌ها از قانون هوک تبعیت می‌کنند.
- مؤلفه عمودی تنش در راستای عرضی میکروورق بسیار کوچک بوده و در روابط تنش-کرنش صرف‌نظر می‌شود.

- فرض می‌شود که سطح مقطع عمود بر صفحه میانی در حین تغییر شکل و بعد از آن به صورت صفحه‌ای و عمود بر سطح باقی می‌ماند.
- اثرات اینرسی‌های دورانی و تغییر شکل برشی قابل صرف‌نظر کردن است.
- برای استخراج معادلات حرکت از دستگاه مختصات دکارتی استفاده شده می‌شود که مبدأ این دستگاه بر گوشه صفحه میانی میکروورق قرار دارد، به طوری که محورهای x و y آن موازی با لبه‌های ورق و محور z عمود بر صفحه میانی است.
- سیال به صورت غیر قابل تراکم، غیر لزج و غیر چرخشی در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- میکروورق مستطیلی مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی داخل سیال

۲-۱- خواص مکانیکی معادل نانوکامپوزیت‌های

در تحقیق حاضر از نانولوله‌های کربنی تک‌جداره به منظور تقویت میکروورق استفاده می‌شود و توزیع یکنواخت آن داخل ماتریس در نظر گرفته می‌شود. بر این اساس، کسر حجمی نانولوله‌های کربنی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$V_{CNT}=\frac{w_{CNT}}{w_{CNT}+\rho_{CNT}/\rho_m-\left(\rho_{CNT}/\rho_m\right)w_{CNT}} \qquad (۱)$$

که در آن ρ_{CNT} و ρ_m به ترتیب نشان دهنده چگالی نانولوله‌های کربنی و ماتریس بوده و w_{CNT} کسر جرمی نانولوله‌های کربنی است.

بر اساس قانون مخلوط‌ها، خواص مکانیکی مؤثر نانوکامپوزیت به صورت زیر به دست می‌آید [۲۸]:

$$E_{11}=\eta_1 V_{CNT}E_{11}^{CNT}+V_m E^m \qquad (۱)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}}=\frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT}}+\frac{V_m}{E^m} \qquad (۲)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}}=\frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT}}+\frac{V_m}{G^m} \qquad (۳)$$

$$\nu_{12}=V_{CNT}^{*}\nu_{12}^{CNT}+V_m\nu^m \qquad (۴)$$

$$\rho=V_{CNT}^{*}\rho^{CNT}+V_m\rho^m \qquad (۵)$$

که در آن ν، ρ به ترتیب نشان دهنده نسبت پواسون و چگالی بوده و E و G مدول یانگ و مدول برشی را نشان می‌دهند. بالانویس m و CNT به ترتیب نشان دهنده ماتریس و نانولوله‌های کربنی می‌باشد. η_1، η_2 و η_3 ضرایب مشخصه نانولوله‌های کربنی می‌باشند. V_{CNT} و V_m کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و ماتریس می‌باشند که $V_{CNT}+V_m=1$.

۲-۲- نیروهای ناشی از سیال ساکن

مطابق شکل ۱ میکروورق داخل سیال ساکن قرار دارد. با در نظر گرفتن تابع پتانسیل سرعت برحسب معادله لاپلاس و با استفاده از معادله برنولی برای در نظر گرفتن اثرات اندرکنش سیال-ورق فشار دینامیکی سطح بالای ورق (P_u) و سطح پایینی (P_l) را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$P_u=-\frac{\rho_f}{\lambda}\left[\frac{1+Ce^{2\lambda h_1}}{1-Ce^{2\lambda h_1}}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۶)$$

$$P_l=-\frac{\rho_f}{\lambda}\left[\frac{1+e^{-2\lambda h_2}}{1-e^{-2\lambda h_2}}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۷)$$

که در آن C مقدار ثابت بوده که در تحقیق حاضر به منظور در نظر گرفتن اثرات غیرخطی ناشی از اندرکنش ورق و سیال مقدار آن برابر ۱- فرض می‌شود و $\lambda=\pi\sqrt{1/L_x^2+1/L_y^2}$ می‌باشد [۲۹]. h_1 ارتفاع سیال در بالا ورق و h_2 ارتفاع سیال زیر میکروورق می‌باشد.

برای سیال غرق شده در آب، اختلاف فشار دینامیکی برآیند سیال (ΔP) به صورت زیر خواهد بود:

$$\Delta P=P_u-P_l=-\frac{\rho_f}{\lambda}\left[\frac{1+Ce^{2\lambda h_1}}{1-Ce^{2\lambda h_1}}-\frac{1+e^{-2\lambda h_2}}{1-e^{-2\lambda h_2}}\right]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۸)$$

که با تعریف جرم مجازی افزوده m_{add} رابطه فوق به صورت زیر ساده می‌شود:

$$\Delta P=m_{add}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad m_{add}=-\frac{\rho_f}{\lambda}\left[\frac{1+Ce^{2\lambda h_1}}{1-Ce^{2\lambda h_1}}-\frac{1+e^{-2\lambda h_2}}{1-e^{-2\lambda h_2}}\right] \qquad (۹)$$

۲-۳- معادلات حرکت

با توجه به نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی صفحات، مؤلفه‌های میدان جابجایی میکروورق را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۳۰]:

$$\begin{aligned}u_1(x,y,z,t)&=u(x,y,t)+z\phi_x(x,y,t)\\ u_2(x,y,z,t)&=v(x,y,t)+z\phi_y(x,y,t)\\ u_3(x,y,z,t)&=w(x,y,t)\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

که در آن (u_1,u_2,u_3) مؤلفه‌های جابجایی در راستای (x,y,z)، (u,v,w) مؤلفه‌های میدان جابجایی صفحه میانی بوده و ϕ_x و ϕ_y نشان دهنده دوران بردار عمود حول محورهای y و x می‌باشند.

بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی، روابط کرنش-جابجایی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\\ \frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\\ \frac{\partial w}{\partial y}+\phi_y\\ \frac{\partial w}{\partial x}+\phi_x\\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\end{Bmatrix}+z\begin{Bmatrix}\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y}\\ 0\\ 0\\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x}\end{Bmatrix} \qquad (۱۱)$$

با استفاده از قانون هوک، روابط کرنش-تنش را می‌توان به صورت معادلات زیر بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{xz}\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11}&Q_{12}&0&0&0\\ Q_{21}&Q_{22}&0&0&0\\ 0&0&Q_{44}&0&0\\ 0&0&0&Q_{55}&0\\ 0&0&0&0&Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{xz}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix} \qquad (۱۲)$$

که در آن

$$Q_{11}=\frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{12}},\qquad Q_{22}=\frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{12}},\qquad Q_{12}=\frac{\nu_{12}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{12}},\qquad Q_{44}=Q_{55}=Q_{66}=G_{12} \tag{۱۳}$$

در نهایت، با استفاده از اصل همیلتون پنج معادله دیفرانسیل کوپل حرکت را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_x}{\partial x}+\frac{\partial N_{xy}}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial N_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial N_y}{\partial y}=I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
&\qquad+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}+N_y\frac{\partial w}{\partial y}\right)+q=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x=I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}\\
&\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial x}-Q_y=I_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{۱۴}$$

که در آن منتجه‌های نیروهای عرضی $\left(Q_x,Q_y\right)$، منتجه‌های نیروهای درون-صفحه‌ای $\left(N_x,N_y,N_{xy}\right)$ و منتجه‌های گشتاور $\left(M_x,M_y,M_{xy}\right)$ را می‌توان به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}
&\left(N_x,N_y,N_{xy}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}\right)dz,\\
&\left(M_x,M_y,M_{xy}\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_x,\sigma_y,\sigma_{xy}\right)zdz,\\
&\left(Q_x,Q_y\right)=K\int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_{xz},\sigma_{yz}\right)dz
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

$$\left(I_0,\,I_1,\,I_2\right)=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\left(1,z,z^2\right)dz \tag{۱۶}$$

که در آن K ضریب تصحیح برشی می‌باشد.

در نظریه غیرموضعی، تنش در هر نقطه تحت تأثیر تمام نقاط پیرامون قرار می‌گیرد. بر اساس پارامتر غیرموضعی $\mu=(e_0\ell)^2$، رابطه بین تنش‌های کلاسیک، t_{ij}، و تنش غیرموضعی، σ_{ij}، را می‌توان به صورت زیر بیان نمود [۳۱]:

$$\left(1-\mu\nabla^2\right)t_{ij}=\sigma_{ij} \tag{۱۷}$$

بر این اساس، با استفاده از رابطه فوق و جایگذاری روابط (۱۱)-(۱۳) در معادله (۱۶) و سپس جایگذاری در معادله (۱۸) منتجه‌های تنش به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
\left(1-\mu\nabla^2\right)\begin{Bmatrix}N_x\\N_y\\N_{xy}\end{Bmatrix}&=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&0\\A_{12}&A_{22}&0\\0&0&A_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\\\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\\\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\end{Bmatrix}\\
&+\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&0\\B_{12}&B_{22}&0\\0&0&B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\\\frac{\partial \phi_y}{\partial y}\\\frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x}\end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$\begin{aligned}
\left(1-\mu\nabla^2\right)\begin{Bmatrix}M_x\\M_y\\M_{xy}\end{Bmatrix}&=\begin{bmatrix}B_{11}&B_{12}&0\\B_{12}&B_{22}&0\\0&0&B_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\\\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\\\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\end{Bmatrix}\\
&+\begin{bmatrix}D_{11}&D_{12}&0\\D_{12}&D_{22}&0\\0&0&D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\\\frac{\partial \phi_y}{\partial y}\\\frac{\partial \phi_x}{\partial y}+\frac{\partial \phi_y}{\partial x}\end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{۱۹}$$

$$\left(1-\mu\nabla^2\right)\begin{Bmatrix}Q_x\\Q_y\end{Bmatrix}=K\begin{bmatrix}A_{55}&0\\0&A_{44}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\frac{\partial w}{\partial x}+\phi_x\\\frac{\partial w}{\partial y}+\phi_y\end{Bmatrix} \tag{۲۰}$$

که در آن

$$A_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}Q_{ij}dz,\quad B_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}zQ_{ij}dz,\quad D_{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}z^2Q_{ij}dz \tag{۲۱}$$

در نهایت با جایگذاری معادلات (۱۹)-(۲۲) در معادله (۱۵)، معادلات حرکت برحسب مؤلفه‌های میدان‌های جابجایی به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&A_{11}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+A_{12}\left(\frac{\partial v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\\
&+B_{11}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2}+B_{12}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x\partial y}+B_{66}\left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x\partial y}\right)\\
&\quad+A_{66}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
&\qquad=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(I_0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}\right)
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

$$\begin{aligned}
&A_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+A_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
&+B_{12}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x\partial y}+B_{22}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2}+B_{66}\left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2}\right)\\
&\quad+A_{66}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\\
&\qquad=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(I_0\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+I_1\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}\right)
\end{aligned} \tag{۲۳}$$

$$\begin{aligned}
&KA_{55}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial \phi_x}{\partial x}\right)+KA_{44}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial \phi_y}{\partial y}\right)\\
&\quad+\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\frac{\partial w}{\partial x}+N_{xy}\frac{\partial w}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(N_{xy}\frac{\partial w}{\partial x}+N_y\frac{\partial w}{\partial y}\right)\\
&\qquad+\left(1-\mu\nabla^2\right)q=I_0\left(1-\mu\nabla^2\right)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}
\end{aligned} \tag{۲۴}$$

$$\begin{aligned}
&B_{11}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+B_{12}\left(\frac{\partial v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\\
&+D_{11}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2}+D_{12}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x\partial y}+D_{66}\left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x\partial y}\right)\\
&\quad+B_{66}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial v}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
&\quad-KA_{55}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\phi_x\right)=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(I_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}\right)
\end{aligned} \tag{۲۵}$$

$$
\begin{aligned}
&B_{12}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)+B_{22}\left(\frac{\partial v}{\partial y^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\\
&+D_{12}\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x\partial y}+D_{22}\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2}+D_{66}\left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x^2}\right)\\
&+B_{66}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\\
&-KA_{44}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\phi_y\right)=\left(1-\mu\nabla^2\right)\left(I_1\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+I_2\frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}\right)
\end{aligned}
\qquad (۲۶)
$$

۳- حل معادلات

به منظور حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر حرکت از روش گالرکین استفاده می‌شود. بر اساس این روش و با در نظر گرفتن شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده در لبه‌های ورق، پاسخ فرضی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}U_{mn}(t)\cos(\alpha_n x)\sin(\beta_m y) \qquad (۲۷)$$

$$v(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}V_{mn}(t)\sin(\alpha_n x)\cos(\beta_m y) \qquad (۲۸)$$

$$w(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}W_{mn}(t)\sin(\alpha_n x)\sin(\beta_m y) \qquad (۲۹)$$

$$\phi_x(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}X_{mn}(t)\cos(\alpha_n x)\sin(\beta_m y) \qquad (۳۰)$$

$$\phi_y(x,y,t)=\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{M}Y_{mn}(t)\sin(\alpha_n x)\cos(\beta_m y) \qquad (۳۱)$$

که در آن $\alpha_m=n\pi/L_x$ و $\beta_m=m\pi/L_y$. همچنین، توابع U_{mn}، V_{mn}، W_{mn}، X_{mn} و Y_{mn} توابع مجهول برحسب زمان هستند و n و m عدد موج در راستای x و y می‌باشند.

با جایگذاری روابط (۲۸)-(۳۲) در معادلات (۲۳)-(۲۷) و اعمال روش گالرکین، معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی غیرخطی حاکم بر سیستم به فرم ماتریسی زیر خواهد بود:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{W}}+[\mathbf{K}]\mathbf{W}+\mathbf{R}(\mathbf{W})=\mathbf{P} \qquad (۳۲)$$

که در آن $[\mathbf{M}]$ ماتریس جرم، $[\mathbf{K}]$ ماتریس سفتی، $\mathbf{W}$ بردار جابجایی، $\mathbf{P}$ بردار نیروهای خارجی اعمالی بر سیستم و $\mathbf{R(W)}$ نیروهای بازگرداننده غیرخطی هستند که متأثر از توان‌های بالاتر میدان‌های جابجایی می‌باشند.

به عنوان مثال به ازای $N=M=1$، معادلات دیفرانسیل با مشتقات معمولی غیرخطی (۳۳) به صورت زیر ساده می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&k_{11}U_{mn}+k_{12}V_{mn}+k_{13}X_{mn}\\
&\qquad+k_{14}Y_{mn}+k_{15}W_{mn}^2=m_{11}\ddot{U}_{mn}+m_{12}\ddot{X}_{mn}\\
&k_{21}U_{mn}+k_{22}V_{mn}+k_{23}X_{mn}\\
&\qquad+k_{24}Y_{mn}+k_{25}W_{mn}^2=m_{21}\ddot{V}_{mn}+m_{22}\ddot{Y}_{mn}\\
&k_{31}U_{mn}+k_{32}V_{mn}+k_{33}X_{mn}\\
&\qquad+k_{34}Y_{mn}+k_{35}W_{mn}^3=\left(m_{31}+m_{add}\right)\ddot{W}_{mn}+f_{mn}(t)\\
&k_{41}U_{mn}+k_{42}V_{mn}+k_{43}X_{mn}\\
&\qquad+k_{44}Y_{mn}+k_{45}W_{mn}^2=m_{41}\ddot{U}_{mn}+m_{22}\ddot{X}_{mn}\\
&k_{51}U_{mn}+k_{52}V_{mn}+k_{53}X_{mn}+k_{54}Y_{mn}\\
&\qquad+k_{55}W_{mn}^2=m_{51}\ddot{V}_{mn}+m_{52}\ddot{Y}_{mn}
\end{aligned}
\qquad (۳۳)
$$

که در آن $f_{mn}(t)$ نیروی تحریک خارجی بوده و به صورت $f_{mn}(t)=\Lambda_{mn}\sin(\Omega t)$ فرض می‌شود. در این تحقیق با حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی فوق با استفاده از روش رانگ‌کوتای مرتبه ۴ نتایج به ازای پارامترهای مختلف استخراج شده و مورد بحث قرار می‌گیرد.

به منظور بررسی رفتار ارتعاشات خطی میکروورق‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی در تماس با سیال، با صرف‌نظر کردن از جملات غیرخطی معادله (۳۳)، معادله حاکم بر سیستم خطی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{13} & k_{14}\\ k_{21} & k_{22} & & k_{23} & k_{24}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35}\\ k_{41} & k_{42} & & k_{43} & k_{44}\\ k_{51} & k_{52} & & k_{53} & k_{54} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} U_{mn}\\ V_{mn}\\ W_{mn}\\ X_{mn}\\ Y_{mn} \end{Bmatrix}\\
&-\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{12} & 0\\ 0 & m_{21} & 0 & 0 & m_{22}\\ 0 & 0 & \left(m_{31}+m_{add}\right) & 0 & 0\\ m_{41} & 0 & 0 & m_{22} & 0\\ 0 & m_{51} & 0 & 0 & m_{52} \end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \ddot{U}_{mn}\\ \ddot{V}_{mn}\\ \ddot{W}_{mn}\\ \ddot{X}_{mn}\\ \ddot{Y}_{mn} \end{Bmatrix}=0
\end{aligned}
\qquad (۳۴)
$$

برای حل دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی فوق، فرض می‌کنیم که پاسخ متناوب به صورت زیر باشد:

$$
\begin{Bmatrix} U_{mn}\\ V_{mn}\\ W_{mn}\\ X_{mn}\\ Y_{mn} \end{Bmatrix}=
\begin{Bmatrix} U_{mn}^0\\ V_{mn}^0\\ W_{mn}^0\\ X_{mn}^0\\ Y_{mn}^0 \end{Bmatrix}e^{i\omega_l t}
\qquad (۳۶)
$$

که در آن ω_l فرکانس طبیعی خطی سیستم می‌باشد. با جایگذاری پاسخ فرضی فوق در معادله (۳۵) مسأله مقدار ویژه حاکم زیر به دست می‌آید:

$$
\left(
\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & k_{13} & k_{14}\\ k_{21} & k_{22} & & k_{23} & k_{24}\\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35}\\ k_{41} & k_{42} & & k_{43} & k_{44}\\ k_{51} & k_{52} & & k_{53} & k_{54} \end{bmatrix}
-\omega_l^2
\begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 & m_{12} & 0\\ 0 & m_{21} & 0 & 0 & m_{22}\\ 0 & 0 & \left(m_{31}+m_{add}\right) & 0 & 0\\ m_{41} & 0 & 0 & m_{22} & 0\\ 0 & m_{51} & 0 & 0 & m_{52} \end{bmatrix}
\right)
\begin{Bmatrix} U_{mn}^0\\ V_{mn}^0\\ W_{mn}^0\\ X_{mn}^0\\ Y_{mn}^0 \end{Bmatrix}=0
\qquad (۳۷)
$$

برای اینکه دستگاه معادلات جبری فوق دارای جواب‌های غیر بدیهی باشد، باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد. بنابراین، با برابر صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، معادله مقدار ویژه به دست می‌آید که از حل آن می‌توان مقادیر فرکانس‌های طبیعی را به دست آورد.

۴- بررسی نتایج

در این بخش به مطالعه تأثیر پارامترهای مختلف بر ارتعاشات غیرخطی میکروورق تقویت شده با نانولوله‌های کربنی مستغرق شده در آب با چگالی $\rho_f=1000\,\mathrm{kg.m^{-3}}$ پرداخته می‌شود. مشخصات هندسی و مکانیکی میکروورق و نانولوله‌های کربنی مورد استفاده در تحلیل‌های عددی در جدول‌های ۱ و ۲ ارائه شده است.

جدول ۱- مشخصات هندسی و مکانیکی میکروورق

طول	ضخامت	مدول یانگ	نسبت پواسون	چگالی
100 µm	5 µm	$E^m=72\,\mathrm{GPa}$	$\nu^m=0.32$	$\rho^m=2730$

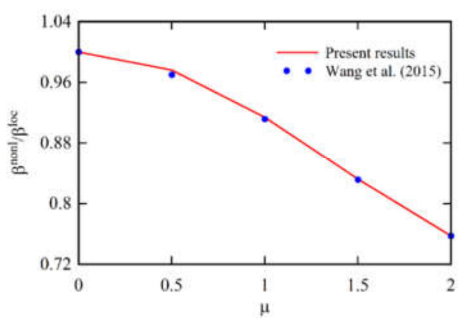
جدول ۲- مشخصات مکانیکی نانولوله‌های کربنی [۳۲]

مدول یانگ (TPa)			نسبت پواسون
$E_{11}^{CNT}=5.64$	$E_{22}^{CNT}=7.08$	$G_{12}^{CNT}=1.94$	$\nu_{12}^{CNT}=0.175$

در ارائه نتایج از پارامترهای بی‌بعد زیر برای فرکانس طبیعی، دامنه نوسانات و زمان استفاده می‌شود:

- فرکانس طبیعی بی‌بعد به صورت $\beta=\omega L_b^2\sqrt{\rho_m h/D_m}$ که در آن $D_m=E_m h^3/12\left(1-(\nu^m)^2\right)$.
- دامنه نوسانات $w=W/h$ و زمان بی‌بعد $\tau=\omega\sqrt{D_m/\rho_m h}\,t$.

با حذف جملات غیرخطی از معادلات حرکت میکروورق می‌توان فرکانس‌های طبیعی خطی سیستم را به دست آورد. در شکل ۲ فرکانس‌های طبیعی به دست آمده با مدل‌های موضعی و غیرموضعی برای ورق مربعی با نتایج مرجع [۳۳] مقایسه گردیده است. در مرجع [۳۳] فرکانس‌های طبیعی نانوورق مربعی شکل با استفاده از نظریه کیرشهف و در نظر گرفتن اثر اندازه‌های کوچک بر مبنای نظریه الاستیسیته غیرموضعی برای ورق با تکیه‌گاه‌های ساده در اطراف استخراج شده است. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که نتایج به دست آمده از این تحقیق کاملاً بر نتایج مرجع [۳۳] منطبق هستند و این نشان دهنده دقت بالای روش حاضر می‌باشد. همچنین، در جدول ۳ فرکانس طبیعی میکروورق با مشخصات E=150 MPa، h=0.34 μm، ρ=2300 kg/m^3، L_x=L_y=10 μm و به ازای شرایط مرزی تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها با نتایج حل دقیق مراجع [۳۴] و [۳۵] مقایسه شده است. مشاهده می‌شود، نتایج عددی به دست آمده از این تحقیق سازگاری قابل قبولی با دو پاسخ به دست آمده از حل دقیق دارند.



شکل ۲- مقایسه نسبت‌های فرکانسی برای نانو ورق مربعی شکل

جدول ۳- مقایسه فرکانس طبیعی میکروورق با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها با نتایج حل دقیق

	μ=0			μ=1	
	Present result	Exact[a]	Exact [35]	Present result	Exact [34]
ω_1 (THz)	10.554	10.558	10.558	9.6715	9.6740
ω_2 (THz)	26.476	26.475	26.473	21.622	21.626
ω_3 (THz)	52.728	52.729	52.729	37.406	37.407

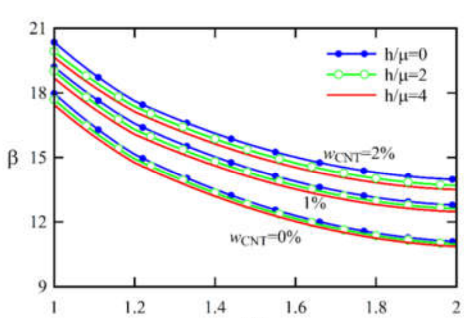
[a] $\omega=\sqrt{\dfrac{D}{\rho h}}\left[\left(\dfrac{m\pi}{L_y}\right)^2+\left(\dfrac{n\pi}{L_x}\right)^2\right]$, taken from Ref. [35]

در ادامه به مطالعه تأثیر پارامترهای هندسی میکروورق، کسر حجمی نانولوله‌های کربنی و ارتفاع سیال بر فرکانس طبیعی اول میکروورق نانوکامپوزیتی پرداخته می‌شود. تأثیر مشخصات هندسی میکروورق بر فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروورق مدرج تابعی واقع در سیال آب و هوا در جدول ۴ نشان داده شده است. با توجه به نتایج جدول ۴ مشاهده می‌شود که در حالت کلی استفاده از نانوذرات باعث افزایش قابل ملاحظه‌ای در فرکانس طبیعی سازه می‌شود. با توجه به اینکه مدول یانگ نانولوله‌های کربنی در مقایسه با میکروورق بسیار زیاد می‌باشد، بنابراین مدول الاستیک و سفتی معادل سازه در حضور نانولوله‌های کربنی بیشتر شده و در نتیجه افزایش فرکانس‌های طبیعی منطقی خواهد بود. علاوه بر این، با مقایسه نتایج فرکانس طبیعی میکروصفحه واقع در سیال (جدول ۴) و هوا نشان می‌دهد که وجود سیال باعث کاهش مقادیر فرکانس میکروورق می‌شود و با افزایش ارتفاع سیال مخزن مقادیر فرکانس کاهش می‌یابد. علت این امر در نتیجه افزایش جرم معادل سیستم در نتیجه افزوده شدن جرم مجازی ناشی از وجود سیال و افزایش انرژی جنبشی سیستم است.

همانطور که در شکل ۳ نشان داده شده است، با افزایش نسبت L_x/L_y و پارامتر اندازه‌های کوچک، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد که این تغییرات با بیشتر شدن طول کمتر می‌شود. با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که به ازای L_x/L_y برابر 1 و 2 افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از 0% به 2%، به ترتیب باعث افزایش 12% و 25% در فرکانس طبیعی اول می‌شود.

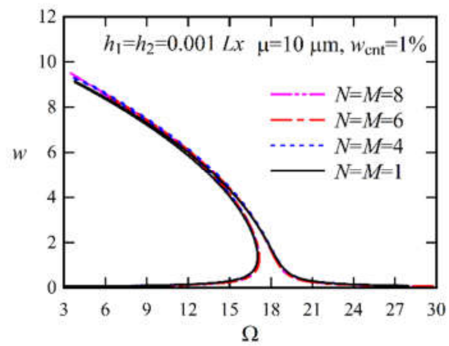
جدول ۴- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد $\beta=\omega L_b^2\sqrt{\rho_m h/D_m}$ میکروورق نانوکامپوزیتی در حضور سیال و در غیاب آن

عمق آب h_1/L_x ، $h_2/L_x=0.05$	کسر حجمی نانولوله‌های کربنی (٪)			
	0	0.5	1	2
0 (در غیاب سیال)	17.98	18.64	19.21	19.65
0.05	16.78	17.24	18.04	18.36
0.1	14.64	12.34	15.80	16.08
0.2	12.54	13.17	13.68	13.92
0.3	11.71	12.29	12.84	13.06



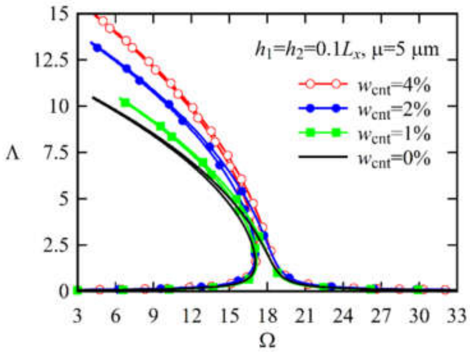
شکل ۳- تأثیر پارامتر اندازه‌های کوچک بر روی فرکانس طبیعی بی‌بعد میکروورق

با توجه به اینکه تعداد جملات روش گالرکین بر دقت نتایج تأثیرگذار می‌باشد، بنابراین در تأثیر تعداد جملات بر منحنی فرکانس-دامنه سیستم بررسی می‌شود. در شکل ۴ منحنی فرکانس-دامنه سیستم به ازای مقادیر مختلف جملات روش گالرکین نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که در حوالی فرکانس طبیعی اول، پاسخ سیستم وابستگی زیادی به تعداد جملات روش گالرکین نداشته و با لحاظ کردن مود اول ارتعاشی در روش گالرکین می‌توان نتایج با دقت مناسبی به دست آورد. بر این اساس، در تحقیق حاضر کلیه نتایج به ازای $N = M = 1$ استخراج شده‌اند.

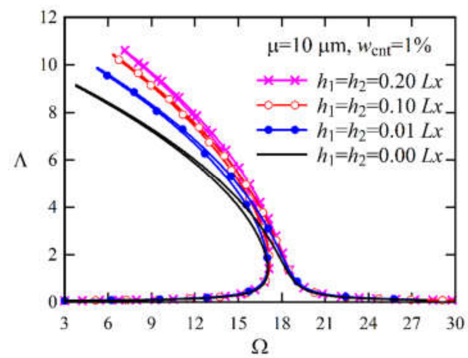


شکل ۴- منحنی فرکانس-دامنه سیستم به ازای مقادیر مختلف جملات روش گالرکین

در ادامه به مطالعه رفتار ارتعاشات غیرخطی میکروورق نانوکامپوزیتی داخل سیال پرداخته می‌شود. به منظور استخراج منحنی فرکانس-دامنه، پاسخ زمانی سیستم به ازای مقادیر مختلف فرکانس تحریک در محدوده فرکانس طبیعی اول استخراج شده و در هر حالت، حداکثر دامنه پاسخ ثبت می‌شود. در نهایت با رسم حداکثر دامنه نوسانات بر حسب فرکانس تحریک متناظر، منحنی فرکانس-دامنه رسم می‌شود. تأثیر ارتفاع سیال و کسر وزنی نانولوله‌های کربنی بر منحنی فرکانس-دامنه سیستم به ترتیب در شکل‌های ۵ و ۶ نشان داده شده است. شکل ۶ نشان می‌دهد که وجود سیال ساکن باعث ایجاد رفتار سخت‌شونده در سیستم شده و با افزایش ارتفاع سیال، سخت‌شوندگی بیشتر شده و حداکثر دامنه رزونانسی سیستم نیز افزایش می‌یابد. با توجه به شکل ۵ مشاهده می‌شود که افزودن نانولوله‌های کربنی نیز باعث تقویت رفتار سخت‌شوندگی فنر نرم‌شونده می‌شود و در نتیجه اعوجاج منحنی به سمت راست تمایل پیدا می‌کند. این نتیجه در اثر افزایش سفتی معادل سیستم در نتیجه تقویت میکروورق با نانولوله‌های کربنی می‌باشد و همانطور که مشاهده می‌شود با افزایش کسر وزنی نانولوله‌های مورد استفاده، رفتار سخت‌شونده سیستم تقویت می‌شود. لازم به ذکر است که به ازای مقادیر بسیار بزرگتر نانولوله‌های کربنی، منحنی فرکانس-دامنه به صورت خطی تبدیل شده و به سمت منحنی مستقیم متمایل می‌شود.

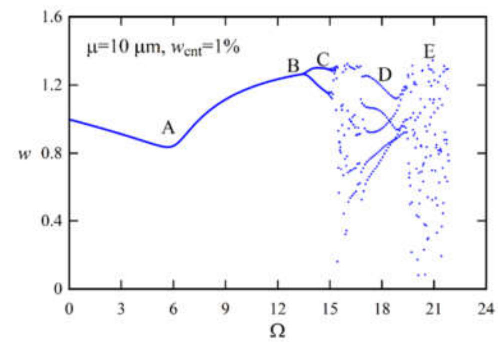


شکل ۵- تأثیر کسر حجمی نانولوله‌های کربنی بر منحنی فرکانس-دامنه میکروورق نانوکامپوزیتی واقع در داخل سیال ساکن



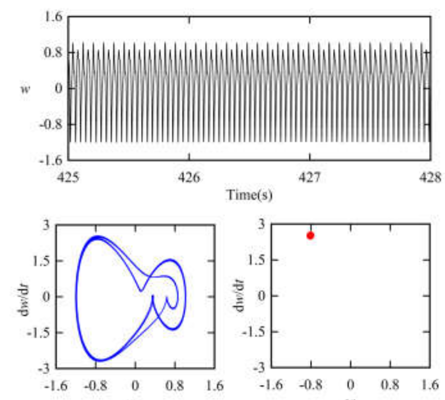
شکل ۶- تأثیر ارتفاع سیال بر منحنی فرکانس-دامنه میکروورق تقویت شده با نانولوله‌های کربنی داخل سیال

به منظور بررسی تأثیر نیروی تحریک بر رفتار غیرخطی میکروورق نانوکامپوزیتی، منحنی دوشاخگی برحسب فرکانس نیروی تحریک خارجی در شکل ۷ نشان داده شده است. به منظور استخراج نمودار دوشاخگی شکل ۷، پارامتر کنترلی فرکانس نیروی تحریک خارجی با گام 0.01 Hz تغییر کرده و به ازای مقادیر ثابت مشخصه‌های سیستم، مقادیر دامنه نوسانات سیستم در دوره‌های تناوب منظم نیروی تحریک استخراج شده و نمایش داده می‌شوند. با توجه به منحنی دوشاخگی می‌توان رفتارهای ارتعاشی مختلف شامل رفتار پریودیک با یک پریود، ارتعاشات پریودیک با n-پریود و رفتار آشوبناک را تحلیل نمود. همانطور که از شکل ۷ مشاهده می‌شود با تغییر فرکانس تحریک نیروی خارجی اعمالی بر میکروورق، تغییر رفتار دینامیکی سیستم از حالت پریودیک به وضعیت‌های شبه پریودیک و آشوب با افزایش تعداد نقاط بیشینه دامنه نوسانات در سری‌های زمانی مشاهده می‌شود. همانطور که مشاهده می‌شود پاسخ‌های سیستم در محدوده فرکانس $14.95\,\text{Hz} < \Omega < 17.05\,\text{Hz}$ و $19.09\,\text{Hz} < \Omega < 21.5\,\text{Hz}$ دارای تعداد زیادی نقطه با دامنه نوسانات مختلف است که مؤید رخداد پدیده آشوب شامل ارتعاشات نویزگونه با دامنه‌های متفاوت است.

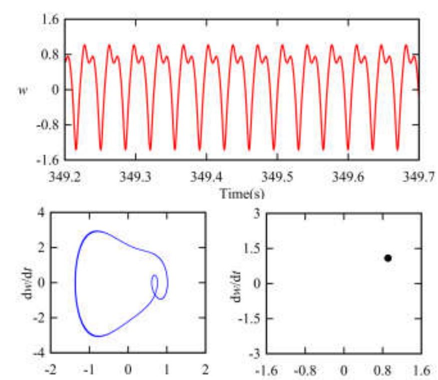


شکل ۷- منحنی دوشاخگی برحسب فرکانس نیروی تحریک خارجی

با توجه به شکل ۷ مشاهده می‌شود که ارتعاشات متناوب-۱ به ازای فرکانس‌های کمتر از 13.6 Hz ایجاد می‌شود. با انتخاب $\Omega_A = 5.8\,\text{Hz}$ و $\Omega_B = 13.4\,\text{Hz}$ (نقاط A و B)، پاسخ زمانی متناظر، منحنی فازی و نگاشت پوانکاره در شکل‌های ۸ و ۹ نشان داده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود در این حالت رفتار سیستم به صورت پریودیک با دامنه ثابت و پایدار می‌باشد به گونه‌ای که نمودار پوانکاره یک نقطه را در صفحه فاز نشان می‌دهد.

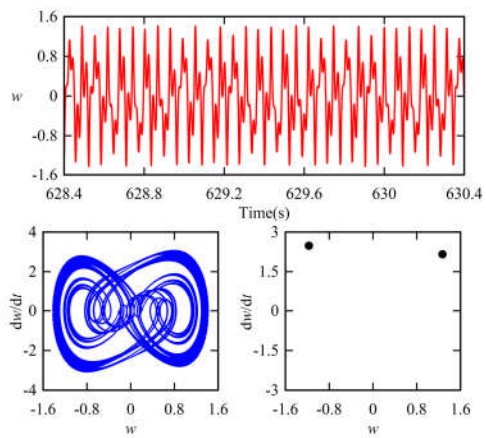


شکل ۸- پاسخ زمانی متناوب، منحنی فازی و نگاشت پوانکاره به ازای $\Omega_A = 5.8\,\text{Hz}$ (نقطه A شکل ۷)

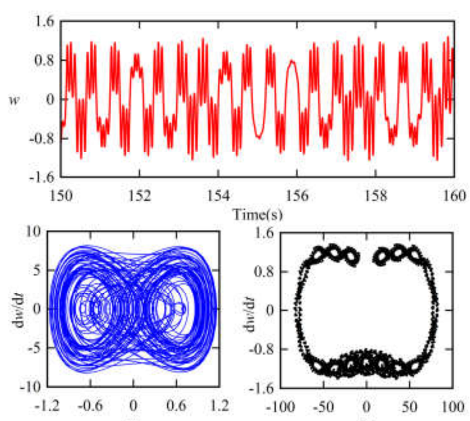


شکل ۹- پاسخ زمانی متناوب، منحنی فازی و نگاشت پوانکاره به ازای $\Omega_B = 13.6\,\text{Hz}$ (نقطه B شکل ۷)

اگر فرکانس تحریک $13.5\,\text{Hz} < \Omega < 15.05\,\text{Hz}$ باشد، در این صورت پاسخ سیستم به صورت متناوب-۲ خواهد بود که در شکل ۱۰ پاسخ زمانی متناظر، منحنی فازی و نگاشت پوانکاره به ازای $\Omega_C = 14.2\,\text{Hz}$ برای این حالت نشان داده شده است. در نواحی اطراف نقطه D پاسخ به صورت متناوب-۵ خواهد بود و در فرکانس‌های تحریک بالاتر، رفتار سیستم به صورت آشوبناک خواهد بود که در شکل ۱۱ پاسخ زمانی متناظر، منحنی فازی و نگاشت پوانکاره به ازای $\Omega_E = 20.2\,\text{Hz}$ نشان داده شده است.



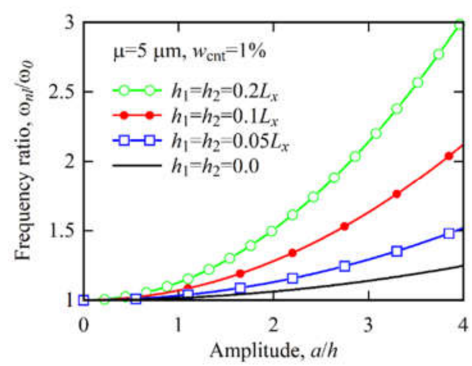
شکل ۱۰- پاسخ زمانی شبه متناوب، منحنی فازی و نگاشت پوانکاره به ازای $\Omega_C = 14.5\,\text{Hz}$ (نقطه C شکل ۷)



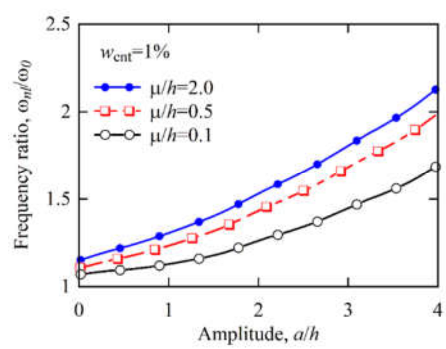
شکل ۱۱- پاسخ زمانی آشوبناک، منحنی فازی و نگاشت پوانکاره به ازای $\Omega_E = 20.5\,\text{Hz}$ (نقطه E شکل ۷)

در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ نسبت فرکانس غیرخطی به خطی میکروورق تقویت شده برحسب دامنه تحریک و به ازای مقادیر مختلف ارتفاع سیال و کسر حجمی نانولوله‌های کربنی نشان داده شده است. نتایج شکل ۱۲ نشان می‌دهد به ازای دامنه نوسانات کمتر نسبت فرکانس غیرخطی به خطی تقریباً برابر ۱ می‌باشد که نشان دهنده تأثیر ناچیز جملات غیرخطی بر رفتار ارتعاشی سیستم می‌باشد. با افزایش دامنه نوسانات، اختلاف فرکانس خطی و غیرخطی بیشتر شده و نسبت فرکانس غیرخطی به خطی همواره بزرگتر از ۱ می‌باشد که نشان

می‌دهد تغییر شکل‌های بزرگ باعث افزایش سفتی معادل سیستم و در نتیجه بیشتر شدن فرکانس نوسانات سیستم می‌شود. علاوه بر این، نتایج نشان می‌دهد که با افزایش ارتفاع سیال اختلاف فرکانس خطی و غیرخطی به شدت بیشتر می‌شود و به ازای دامنه نوسانات $a=4h$ و ارتفاع سیال برابر $0.2L_x$، نسبت فرکانس غیرخطی به خطی در حدود ۳ می‌باشد. بر این اساس، در تحلیل این سازه‌ها، در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های بزرگ باعث دست‌یابی به نتایج دقیق‌تر می‌شود. با توجه به شکل ۱۳ مشاهده می‌شود نظریه غیرموضعی نیز اثر سخت‌شوندگی داشته و باعث می‌شود نسبت فرکانس غیرخطی به خطی همواره بزرگتر از ۱ باشد و مقادیر بزرگتر پارامتر اندازه‌های کوچک باعث بیشتر شدن فرکانس غیرخطی سیستم می‌شود.



شکل ۱۲- اثر ارتفاع سیال و دامنه نوسانات بر نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی میکروورق نانوکامپوزیتی



شکل ۱۳- اثر پارامتر مقیاس کوچک و دامنه نوسانات بر نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی میکروورق نانوکامپوزیتی

۵- نتیجه‌گیری

با توجه به اهمیت و حساسیت تجهیزات میکروالکترومکانیکی، درک درست از رفتار دینامیکی غیرخطی اعضای آنها برای طراحی و بهینه‌سازی آن لازم و ضروری می‌باشد. در مقاله حاضر، رفتار ارتعاشات خطی و غیرخطی میکروورق‌های تقویت شده با نانولوله‌های کربنی واقع در داخل سیال ساکن با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های بزرگ‌تر مطالعه شد. با استفاده نظریه برشی مرتبه اول صفحات و اثرات اندازه‌های کوچک معادله دیفرانسیل غیرخطی حاکم بر سیستم استخراج گردید. سپس معادله غیرخطی حرکت با استفاده از روش گالرکین گسسته‌سازی شده و پاسخ آن با استفاده از روش عددی به دست آمد. در نهایت، تأثیر پارامترهای مختلف مانند ارتفاع سیال، کسر وزنی نانولوله‌های کربنی و مشخصات هندسی میکروصفحه بر روی مشخصه‌های دینامیکی این سیستم‌ها مورد بررسی قرار گرفت. نتایج نشان می‌دهد که فرکانس طبیعی سازه در تماس با آب کمتر از فرکانس طبیعی سازه در تماس با هوا است. در واقع اثر حضور سیال سنگین مانند آب در اطراف سازه، از طریق اضافه شدن جرم افزوده به جرم سازه باعث کاهش فرکانس طبیعی سازه می‌شود. با افزایش کسر وزنی نانولوله‌های کربنی فرکانس طبیعی در نتیجه افزایش سفتی معادل سازه بیشتر می‌شود و افزودن نانولوله‌های کربنی باعث تقویت رفتار سخت‌شوندگی فنر نرم‌شونده می‌شود و در نتیجه اعوجاج منحنی به سمت راست تمایل پیدا می‌کند و با افزایش کسر وزنی نانولوله‌های کربنی مورد استفاده، رفتار سخت‌شونده سیستم تقویت می‌شود. همچنین، رفتار غیرخطی میکروورق نانوکامپوزیتی به ازای تغییر در میزان درصد حجمی نانولوله کربنی به طور کامل، متفاوت بوده و می‌بایست در طراحی و ساخت میکروادوات و به ویژه میکرورزوناتورها مورد توجه قرار گیرد.

۶- مراجع

[1] Rezaee M, Sharafkhani N. Out-of-plane vibration of an electrostatically actuated microbeam immersed in flowing fluid. Nonlinear Dynamics. 2022;102;1-17.

[2] Ajri M, Rastgoo A, Fakhrabadi MMS. Primary and secondary resonance analyses of viscoelastic nanoplates based on strain gradient theory. International Journal of Applied Mechanics. 2018;10;23-45.

[3] Ramian A, Jafari-Talookolaei R-A, Valvo PS, Abedi M, editors. Free vibration analysis of a laminated composite sandwich plate with compressible core placed at the bottom of a tank filled with fluid. Structures.2021;29;32-38.

[4] Li H-C, Ke L-L. Size-dependent vibration and dynamic stability of AFG microbeams immersed in fluid. Thin-Walled Structures.2021;161;107-132.

[5] Meylan MH. The forced vibration of a thin plate floating on an infinite liquid. Journal of sound and vibration.1997;205; 581-91.

[6] Wu Z, Ma X, Brett PN, Xu J. Vibration analysis of submerged rectangular microplates with distributed mass loading. Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences.2014;465;1323-1336.

[7] Karimi M, Khorshidi K, Dimitri R, Tornabene F. Size-dependent hydroelastic vibration of FG microplates partially in contact with a fluid. Composite Structures. 2020;244; 112320.

[8] Khorshid K, Farhadi S. Free vibration analysis of a laminated composite rectangular plate in contact with a bounded fluid. Composite structures. 2013;104;176-187.

[9] Kutlu A, Uğurlu B, Omurtag MH. A combined boundary-finite element procedure for dynamic analysis of plates with fluid and foundation interaction considering free surface effect. Ocean Engineering. 2017;145;34-43.

[10] Ajri M, Seyyed Fakhrabadi MM, Asemani H. Viscoelastic effects on nonlinear dynamics of microplates with fluid interaction based on consistent couple stress theory. Journal of Computational Applied Mechanics. 2021;52;394-407.

[11] Bakhsheshy A, Mahbadi H. The effect of fluid surface waves on free vibration of functionally graded microplates in interaction with bounded fluid. Ocean Engineering. 2019;194; 34-49.

[12] Monemian Esfahani A, Bahrami M, Ghaffarian Anbarani SR. Forced transverse vibration analysis of a circular viscoelastic polymeric piezoelectric microplate with fluid interaction. Australian Journal of Mechanical Engineering. 2018;16;31-42.

[13] Farsani SR, Jafari-Talookolaei R-A, Valvo PS, Goudarzi AM. Free vibration analysis of functionally graded porous plates in contact with bounded fluid. Ocean Engineering. 2021;219;108285.

[14] Shahveh R, Jafari AA, Maghsoudpour A, Mohammadzadeh AR. Free nonlinear vibration analyzing of annular sector plate in contact with fluid. Journal of Solid and Fluid Mechanics. 2021;11;73-86.

[15] Li H-C, Ke L-L, Wu Z-M, Yang J. Free vibration of FGM Mindlin plates submerged in fluid. Engineering Structures. 2022;259;114144.

[16] Alijani A, Darvizeh M, Darvizeh A, Ansari R. Elasto-plastic pre-and post-buckling analysis of functionally graded beams under mechanical loading, Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part L: Journal of Materials: Design and Applications. 2015;229;146-165.

[17] Darvizeh M, Darvizeh A, Ansari R, Alijani A. Pre-and post-buckling analysis of functionally graded beams subjected to statically mechanical and thermal loads. Scientia Iranica. 2015;22;778-791.

[18] Farzaneh A, Mohammadzadeh A, Esrafili MD, Mermer O. Experimental and theoretical study of TiO2 based nanostructured semiconducting humidity sensor. Ceramics International. 2019;45;8362-8369.

[19] Ajri M, Rastgoo A, Fakhrabadi MMS. Primary and Secondary Resonance Analyses of Viscoelastic Nanoplates Based on Strain Gradient Theory. International Journal of Applied Mechanics. 2018;10;78-92.

[20] Ajri M, Seyyed Fakhrabadi MM. Nonlinear free vibration of viscoelastic nanoplates based on modified couple stress theory. Journal of Computational Applied Mechanics. 2018;49;44-53.

[21] Morad I, Ali HE, Wasfy M, Mansour A, El-Desoky M. Effect of the biphase TiO2 nanoparticles on the dielectric and polaronic transport properties of PVA nanocomposite. Structure analysis and conduction mechanism. 2020;181;109-135.

[22] Liew K, Lei Z, Zhang L. Mechanical analysis of functionally graded carbon nanotube reinforced composites. a review. Composite Structures. 2015;120;90-97.

[23] Khazaei P, Mohammadimehr M. Vibration analysis of porous nanocomposite viscoelastic plate reinforced by FG-SWCNTs based on a nonlocal strain gradient theory. Computers and Concrete. 2020;26;31-52.

[24] Arefi M, Firouzeh S, Bidgoli EM-R, Civalek Ö. Analysis of porous micro-plates reinforced with FG-GNPs based on Reddy plate theory. Composite Structures. 2020;247;112-131.

[25] karimiasl M, Ebrahimi F, Mahesh V. On nonlinear vibration of sandwiched polymer- CNT/GPL-fiber nanocomposite nanoshells. Thin-Walled Structures. 2020;146;34-56.

[26] Ghasemi Ghalebahman A, Bigdeli-Yeganeh M, Cheloeian E, Khademi-Kouhi M. Free vibration of piezoelectric boron nitride nanotube-based composite cylindrical micropanel embedded in an elastic medium subjected to electric potential via modified strain gradient theory. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2020;234;2309-2328.

[27] Mohammad-Rezaei Bidgoli E, Arefi M. Free vibration analysis of micro plate reinforced with functionally graded graphene nanoplatelets based on modified strain-gradient formulation. Journal of Sandwich Structures & Materials. 2021;23;436-472.

[28] Rezaiee-Pajand M, Arabi E, Moradi A. Static and dynamic analysis of FG plates using a locking free 3D plate bending element. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2021;43;1-12.

[29] Soni S, Jain N, Joshi P. Vibration analysis of partially cracked plate submerged in fluid. Journal of Sound and Vibration. 2018;412;28-57.

[30] Van Vinh P, Dung NT, Tho NC, Modified single variable shear deformation plate theory for free vibration analysis of rectangular FGM plates. Structures. 2020;29;1435-1444.

[31] Saadatmand M, Shahabodini A, Ahmadi B, Chegini SN. Nonlinear forced vibrations of initially curved rectangular single layer graphene sheets: An analytical approach. Physica E:Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2021;127;114-32.

[32] Shen H-S. Thermal buckling and postbuckling behavior of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical shells. Composites Part B: Engineering. 2012;43;1030-1039.

[33] Wang Y, Li F-M, Wang Y-Z. Nonlinear vibration of double layered viscoelastic nanoplates based on nonlocal theory. Physica E: Low-dimensional Systems and Nanostructures. 2015;67;65-76.

[34] Pradhan S, Phadikar J. Nonlocal elasticity theory for vibration of nanoplates. Journal of Sound and Vibration. 2009;325;206-223.

[35] Kitipornchai S, He X, Liew K. Continuum model for the vibration of multilayered graphene sheets. Physical Review B. 2005;72;075443.