



Investigating the misunderstandings of seventh grade students about their perception of the concepts of negative numbers in mathematics

Corresponding author:
sh.rezaei@iaau.ac.ir

Received:2024/01/28

Accepted:2024/04/02

Published:2024/06/19

Sh.rezaei^{*،1}, H.Fereiduni²

1 Department of Mathematics, Aligudarz Branch, Islamic Azad University, Aligudarz, Iran.

2 Department of Educational Management, Aligudarz Branch, Islamic Azad University, Aligudarz, Iran.

Abstract

Background and Objectives: The purpose of this research is to investigate and describe the types of students' misunderstandings in the concept of negative numbers. This research is applied in terms of purpose and descriptive-survey in terms of method. The statistical population of seventh grade students of rural high schools in Aliguderz city in the academic year of 2022-2023 is 376 people, and 180 people (124 boys and 56 girls) were selected as a sample using cluster random sampling.

Methods The measurement tool is a researcher-made test that includes 8 questions. The test questions were analyzed in three groups, each group corresponding to one of the goals and questions of the research. **For the validity of the researcher-made test according to professors and math teachers and for reliability, the corrector method was used.**

Findings: The results of the research showed that some students do not know the difference between single, double and negative sign symmetry and consider the negative sign as a reduction operator. Some students do not understand the difference between the value and size of two integers. Students often divide numbers into two categories:

The first group considers zero to be the smallest number and the second group considers negative numbers to be smaller than positive numbers and zero, but they are unable to sort negative numbers.

Although some students are aware of the rules governing signs, they are not able to implement their knowledge in solving problems. Some students have problems and misunderstandings in transferring from calculus to algebra due to a misunderstanding in the basic concepts of negative numbers.

Conclusion: Learning the addition and subtraction of integer numbers is an important topic for the students of the first secondary school, because misunderstanding in such problems causes that students will encounter problems in the rest of the topics of the book.

The second chapter of the seventh grade math book is related to addition, subtraction and multiplication of integer numbers. In fact, it is a prerequisite for the next chapters of this book, which includes: algebraic, expressions, exponents, equations, and roots.

According to the results of this research, about three- quarters of the students did not understand the concept of using negative numbers in algebra, exponents, equations, square roots, and finding roots in general, or they have a misunderstanding in understanding them.,

Therefore, because some students do not have a correct understanding of addition, subtraction and multiplication of integer numbers, when faced with addition, subtraction or multiplication of integer numbers, they get confused and it is difficult for them to recognize that they should add or multiply the sign of the numbers together, and in the later topics of the book, which are the same algebraic expressions and ..., they face problems even in higher grades..

Keywords: concept of negative number, misunderstanding, students, seventh grade

فصلنامه برنامه درسی و آموزش یادگیرنده محور

دوره: سوم / شماره: ۱

سامانه نشریات: cipj.tabrizu.ac.ir

مقاله پژوهشی

بررسی بدفهمی های دانش آموزان پایه هفتم در مورد برداشت آنها از مفهوم اعداد منفی در درس ریاضی

نویسنده مسئول: sh.rezaei@iaou.ac.ir دریافت: ۱۴۰۲/۱۱/۰۸ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۱/۱۴ انتشار: ۱۴۰۳/۰۳/۳۰

شایسته رضائی^{۱*}، هوشنگ فریدونی^۲

^{۱*} استادیار گروه ریاضی، واحد الیگودرز، دانشگاه آزاد اسلامی، الیگودرز، ایران

^۲ دانش آموخته گروه مدیریت آموزشی، واحد الیگودرز، دانشگاه آزاد اسلامی، الیگودرز، ایران

چکیده

زمینه و اهداف:

هدف از پژوهش حاضر بررسی و توصیف انواع بدفهمی های دانش آموزان در مفهوم اعداد منفی است. این تحقیق از نظر هدف کاربردی و از نظر روش توصیفی-پیمایشی است. جامعه آماری دانش آموزان پایه هفتم دبیرستان های روستایی شهرستان الیگودرز در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰، به تعداد ۳۷۶ نفر است که با استفاده از روش نمونه گیری تصادفی خوشه ای، تعداد ۱۸۰ نفر (۱۲۴ پسر و ۵۶ دختر) به عنوان نمونه انتخاب شدند.

روش ها: در این پژوهش، ابزار اندازه گیری آزمونی محقق ساخته شامل ۸ سوال بود. ابتدا سوالات آزمون در سه گروه دسته بندی، سپس مورد تحلیل و بررسی قرار گرفتند. جهت روایی آزمون محقق ساخته از نظر اساتید و معلمان ریاضی و جهت پایایی از روش مصححان استفاده شد.

یافته ها: نتایج تحقیق نشان داد که برخی از دانش آموزان تفاوت بین عملگر واحد، دوتایی و تقارن علامت منفی را نمی دانند و علامت منفی را صرفاً یک عملگر کاهشی می دانند. برخی از دانش آموزان، تفاوت بین مقدار و اندازه دو عدد صحیح را درک نمی کنند. دانش آموزان، اغلب اعداد را به دو دسته تقسیم می کنند: دسته اول، صفر را کوچکترین عدد در نظر می گیرند و دسته دوم اعداد منفی را کوچکتر از مثبت ها و صفر در نظر می گیرند، ولی قادر به مرتب کردن اعداد منفی نیستند. برخی از دانش آموزان با اینکه از قوانین حاکم بر علامت ها آگاهی دارند اما در حل مسائل قادر به پیاده سازی دانسته های خود نیستند. برخی از دانش آموزان به دلیل بدفهمی در مفاهیم پایه اعداد منفی، در انتقال از حساب به جبر مشکلات و بدفهمی هایی دارند.

نتیجه گیری: یادگیری جمع و تفریق اعداد صحیح مبحث مهمی برای دانش آموزان دوره متوسطه اول می باشد، زیرا بدفهمی در این گونه مسائل باعث می شود که دانش آموزان در بقیه مباحث کتاب نیز به مشکل برخورد کنند. فصل دوم کتاب ریاضی هفتم مربوط به جمع، تفریق و ضرب اعداد صحیح می باشد که در حقیقت پیش نیاز فصل های بعدی این کتاب است که شامل عبارت های جبری، توان، معادله، جذر و ریشه می باشد. با توجه به نتایج این پژوهش حدود سه چهارم از دانش آموزان مفهوم کاربرد اعداد منفی در جبر، توان، معادله، جذر و ریشه یابی را به طور کلی درک نکرده اند و یا در درک آنها دچار بدفهمی هستند، لذا از آنجا که برخی از دانش آموزان درک درستی از جمع، تفریق و ضرب اعداد صحیح ندارند در هنگام مواجه شدن با جمع و تفریق و یا ضرب اعداد صحیح دچار سردرگمی شده و تشخیص این که باید علامت اعداد را با هم جمع و یا در هم ضرب کنند برایشان مشکل می باشد و در مباحث بعدی کتاب که همان عبارت های جبری و ... می باشد و حتی در پایه های بالاتر نیز با مشکل مواجه می شوند.

کلمات کلیدی: مفهوم عدد منفی، بدفهمی، دانش آموزان، پایه هفتم.

ریاضیات و کاربرد آن، بخشی از زندگی روزانه و در جهت حل مشکلات زندگی در حوزه‌های مختلف به شمار می‌آید که دارای کاربردهای وسیع در فعالیت‌های متفاوت انسانی است. ریاضیات، موجب تربیت افرادی خواهد شد که در برخورد با مسائل بتوانند منطقی استدلال کنند، قدرت تجزیه و انتزاع داشته باشند و درباره پدیده‌ی پیرامون تئوری‌های جامع بسازند (غلام آزاد، ۱۴۰۱). از طرفی بروز خطا ضمن یادگیری امری طبیعی است، اما گاهی این خطاها در ریاضیات به مراتب بیشتر و عمیق‌تر از سایر دروس رخ می‌دهند و علت آن در قابلیت بد فهمیده شدن مفاهیم ریاضی به لحاظ ماهیتی (مجرد بودن مفاهیم در عین کاربردی بودن مسائل، تسلسل مفهومی و پیش نیاز داشتن مطالب) با روش آموزشی و ... می‌باشد. بدفهمی‌ها باعث اشتباهات نظام‌مند و بعضاً مستدلی می‌شوند که عمدتاً ناشی از تفسیرهای ذهنی نادرست دانش‌آموزان ضمن یادگیری می‌باشند و با درک متخصصان متفاوتند (امینی فر، زهره وند و زعیم باشی، ۱۳۹۴). خطاهای نظام‌مند تحت عنوان بدفهمی شناخته می‌شوند. بدفهمی به معنای یک ایده یا نظر اشتباه است که از درک نادرست چیزی نتیجه‌گیری شده باشد (انکارتا، ۲۰۰۹).

به دلیل اثرات منفی بدفهمی در یادگیری ریاضی، این مسأله مهم باید بیشتر مورد عنایت معلمان قرار گیرد تا بتوان به پیامدهای مفیدتری در آموزش این درس پایه دست یافت. آگاهی از مفاهیم درک شده و بدفهمی‌های دانش‌آموزان از عناصر اساسی دانش‌پداگوژیکی^۲ محتواسست. این آگاهی، معلم را در فرایند طراحی آموزشی و اجرای آن یاری می‌دهد و معلمان می‌توانند برای جلوگیری از بروز بدفهمی‌ها، یا اصلاح آنها آمادگی لازم را در خود ایجاد نمایند. از طرف دیگر دانش‌آموزان دانش پیشین خود از مفاهیم ریاضی را با خود به کلاس درس می‌آورند. برخی از روابطی که بین مفاهیم ایجاد می‌شوند ممکن است در بافت و زمینه‌ای خاص نادرست یا نامناسب باشند. با توجه به این که این روابط در شبکه‌ای از مفاهیم مرتبط جای می‌گیرند، بدفهمی‌ها به شکل مستقل وجود ندارند و وابسته به چارچوب و شبکه مفهومی موجود در ذهن می‌باشند. بنابراین، تدریس مجدد به شیوه اطلاع‌رسانی (سخنرانی) در این راستا کارآمد نمی‌باشد و با تغییر و اصلاح این چارچوب، بدفهمی‌ها ممکن است اصلاح شوند. در این حالت، تغییر ساخت شناختی و چارچوب‌های مفهومی برای اصلاح و رفع بدفهمی‌ها از اهداف اصلی محسوب می‌شوند و بدفهمی‌ها باید از درون از طریق سیستم شناختی و سیستم باورهای فرد اصلاح شوند (بخشعلی زاده، ۱۳۹۲).

در دنیای امروز، نسبت به نقش ریاضی در صورت‌بندی نظام عالم، تبیین پدیده‌ها و پرورش قوه استدلال و تفکر آدمی اجماع وجود دارد. همانطور که در اصول و معیارهای برنامه‌درسی شورای

۱. Encarta

۲. Pedagogic

ملی معلمان ریاضی NCTM^۳ (۲۰۰۰) در آمریکا بیان شده است: «نیاز به فهم و درک و استفاده از ریاضی در عصر جدید روز به روز در حال افزایش است. ارتقای توانایی تفکر در انسان، ریاضی و حل مسئله برای کار، ریاضی برای جامعه علمی و صنعتی، همه و همه نقش بی‌بدیل ریاضی را در این عصر روشن‌تر می‌کنند. در چنین شرایطی، داشتن توانایی‌های ریاضی‌وار، درهایی را برای آینده‌ای پربار باز می‌کند که فقدان آن‌ها، این درها را بسته نگه می‌دارد». به دلیل چنین نقشی، در نظام آموزشی ایران نیز، ریاضی در برنامه درسی مدرسه‌های، از جایگاه والایی برخوردار است و هزینه و نیروی شایان توجهی به آن اختصاص داده شده است. با این حال، در تدریس و یادگیری ریاضی مدرسه‌ای موانعی وجود دارد که شناختن و مرتفع کردن آنها، از دغدغه‌های اصلی آموزشگران ریاضی بوده و هست. یکی از این موانع، که در تحقیقات مرتبط با آموزش ریاضی به طور مکرر مورد بررسی قرار گرفته است بدفهمی‌های دانش‌آموزان در خصوص مفاهیم مختلف ریاضی است که نیازمند بررسی و ریشه‌یابی می‌باشد (زینی، ۱۳۹۴).

«بدفهمی، تفاوت بین درک دانش‌آموزان و باورهای متخصصان نسبت به آن مفهوم در همان حوزه یادگیری است. در واقع، درک یک مفهوم به صورت نادرست یا ناقص است که برای دانش‌آموزانی که با آن مواجه هستند، معنادار و کارآمد است، زیرا از لحاظ ادراکی برای آن‌ها منطقی است». می‌توان گفت بدفهمی زمانی اتفاق افتاده است که درک مفهوم در ذهن فرد با حقایق ریاضی مغایر باشد. به بیان دیگر، بدفهمی ایده یا نظر اشتباهی است که از درک نادرست، نتیجه می‌شود و علت آن بی‌دقتی و بی‌توجهی و یا عدم تمرکز بر فعالیت نیست، بلکه دارای ریشه‌های عمیق‌تری است. شناخت و آگاهی از علل و ریشه‌های بروز بدفهمی‌ها کمک می‌کند تا با طراحی فعالیت‌های مناسب از بروز آنها جلوگیری شود و یا بتوان آنها را اصلاح کرد. آگاهی نسبت به این مشکلات همچنین کمک می‌کند تا پی ببریم چرا دانش‌آموزان در درک مفاهیم ریاضی دچار مشکل هستند. به همین دلیل، شناسایی و مستند کردن بدفهمی‌ها، یکی از وظایف مهم تحقیقات در حوزه‌های آموزش ریاضی به شمار می‌آید (یافتیان، مهدوی و مهر آئین، ۱۴۰۰). برای درک مفاهیم ریاضیات و همچنین برای درک بهتر سایر علوم لازم است تا دانش‌آموزان با مفهوم عدد منفی آشنا باشند و آن را به خوبی درک کنند. تقریباً وقتی یک مسئله مطرح می‌شود، استفاده از عملیات اعداد منفی مورد نیاز است. این در حالی است که بسیاری از تحقیقات در آموزش ریاضی نشان می‌دهند که دانش‌آموزان در دوره‌های مختلف تحصیلی مشکلات مفهومی

۳ . National council of teachers of mathematics

زیادی در ارتباط با اعداد منفی دارند. کیلهامن^۴ (2011)، معتقد است که مفهوم اعداد منفی یک مفهوم انتزاعی است که فقط از طریق استدلال نمادین درک می‌شود. او همچنین نشان می‌دهد که تکیه کردن روی استدلال استعاری با استفاده از یک مدل کافی نیست و استدلال استعاری وقتی مفید است که دانش‌آموز از محدودیت‌های مدل آگاه باشد. وی معتقد است علت اینکه دانش‌آموزان اعداد منفی را دشوار می‌یابند به دلیل انتزاعی بودن این اعداد و عدم ارتباط با جهان واقعی است. در واقع اگر دانش‌آموزان در زندگی روزمره خود با این اعداد برخورد کنند به درک بهتر آنها کمک می‌کند. یکی از دلایلی که دانش‌آموزان با اعداد منفی مشکل دارند این است که فرصت کمی برای برخورد با این اعداد در زندگی واقعی خود دارند. بوفر دینگ^۵ (۲۰۰۹)، معتقد است که بعد از اینکه دانش‌آموزان چند بار با مسائل شامل اعداد منفی برخورد می‌کنند، می‌توانند استدلال کنند. او همچنین بیان می‌کند که ما باید بدانیم کی و کجا اعداد صحیح را به دانش‌آموزان معرفی کنیم تا آنها به درک بهتری از این اعداد برسند. او نقش بازنمایی‌ها را در درک اعداد منفی به دو صورت کتبی و شفاهی بررسی کرد و به این نتیجه رسید که گروهی که مسائل را به صورت شفاهی حل می‌کردند به طور قابل توجهی بهتر از کسانی بودند که از بازنمایی‌های نوشتاری استفاده می‌کردند. تحقیقات زیادی انتزاعی بودن مفهوم عدد منفی را دلیل بدفهمی دانش‌آموزان می‌دانند. لینچوسکی^۶ و ویلیامز^۷ (۱۹۹۹)، یک روش آموزشی طراحی کردند که در آن مفاهیم عملیاتی موجب مفاهیم ساختاری می‌شود، مانند زمانی که فرایند تفریق منجر به مفهوم عدد منفی می‌شود و بر رویکرد مدلسازی و رویکرد جبری در آموزش ریاضیات تاکید می‌کنند. آنها مدلسازی را به عنوان انتقال دانش خارج از مدرسه به ریاضیات مدرسه در نظر می‌گیرند و در مورد فرصت‌ها و مشکلاتی که دانش‌آموزان در مورد مفهوم عدد منفی دارند بحث می‌کنند. آن‌ها نتیجه می‌گیرند که مفهوم اعداد منفی تنها زمانی که دانش‌آموزان آماده رویارویی با توجیهات ریاضی هستند باید به آن‌ها آموزش داده شود. جولیک، ولفورد و تمپل^۸ (۲۰۱۲)، معتقدند که استفاده روان از اعداد منفی نیاز به پذیرش مقادیر کمتر از صفر دارد که فاقد معنی ملموس مقادیر مثبت هستند. در حالی که ما می‌توانیم از داشتن «دو کتاب» صحبت کنیم، از لحاظ فیزیکی ما نمی‌توانیم «منفی دو کتاب» داشته باشیم. گالاردو^۹ (۲۰۰۵)، نشان داد که در طول فرایند انتقال از حساب به جبر است که تجزیه و تحلیل دانش‌آموزان از اعداد منفی معنی‌دار می‌شود. در طول این مرحله دانش‌آموزان با مسائلی روبرو می‌شوند که اعداد منفی را به عنوان ضرایب، ثابت‌ها یا پاسخ دارند. در واقع مفهوم اعداد منفی باید زمانی که دانش‌آموزان آمادگی لازم برای درک آن را دارند به آن‌ها تدریس شود.

۴ . Kilhamn

۵ . Bofferding

۶ . Linchevski

۷ . Williams

۸ . Gullick, Wolford, Temple

۹ . Gallardo

بیشاپ^{۱۰} (2014)، یک پژوهش برای شناسایی و دسته‌بندی مفاهیم عدد صحیح و عملیات روی اعداد صحیح انجام داد و به این نتیجه رسید که بسیاری از دانش‌آموزان با مشکلات مختلفی هنگام استدلال در مورد اعداد منفی برخورد می‌کنند. برای نمونه، یکی از دانش‌آموزان توضیح داد، که اعداد منفی واقعا عدد نیستند، آنها درست مانند اعداد دیگر عمل می‌کنند، فقط اینکه یک علامت منفی در مقابل آنها وجود دارد. علی‌رغم تاکید فراوان بر اهمیت نقش اعداد منفی در ریاضیات، تحقیقات بسیاری در زمینه آموزش ریاضی نشان می‌دهند که دانش‌آموزان در درک و فهم این اعداد در همه سطوح تحصیلی با مشکل مواجه می‌شوند. نکته قابل توجه این است که وجود پنداشت‌های غلط ریاضی دارای ریشه‌ای تاریخی است و نه تنها دانش‌آموزان بلکه ریاضی دانان مشهور نیز در طول تلاش‌های علمی خود دچار تناقض‌ها و بدفهمی‌هایی شده‌اند. با معرفی اعداد منفی، برخی از ریاضی دانان از پذیرش آن خودداری می‌ورزیدند، اتفاقا با شروع آموزش اعداد منفی، بسیاری از دانش‌آموزان دچار این قبیل مشکلات می‌شوند.

علامت منفی سه معنی متفاوت دارد. در معنای اول به منزله علامت تفریق و یا عملگر دوتایی (دو عمل‌وندی) استفاده می‌شود؛ یعنی عملیاتی که روی دو عدد انجام می‌گیرد. در معنای دوم به عنوان علامت قرینه مورد استفاده قرار می‌گیرد و در معنای سوم برای علامت عدد منفی یا عملگر یکانی (یک عمل‌وندی) به کار می‌رود. براساس پژوهش بوفردینگ، شماری از دانش‌آموزان تفاوت عملگر منفی و علامت عدد منفی را به درستی درک نمی‌کنند، به طوری که تصور آنان از عدد منفی، یک عبارت تفریق نیمه‌تمام است. مثلا عدد ۵- را به صورت ۵-۵ در نظر گرفته و مقدار آن را صفر در نظر می‌گیرند.

به نظر می‌رسد عوامل متعددی از جمله، نوع آموزش ریاضی دانش‌آموزان، مطالبی که در کتاب‌های درسی‌شان مرتبط با اعداد صحیح بیان شده است، دیدگاه معلمان ریاضی، شرایط و محیط آموزشی، برنامه درسی و ... می‌توانند علت تفاوت عملکرد دانش‌آموزان باشند. در کشور ما دانش‌آموزان در پایه ششم با اعداد منفی آشنا می‌شوند و این آشنایی در پایه هفتم بسط داده می‌شود و علی‌رغم اهمیت زیاد اعداد منفی در آموزش ریاضی، متأسفانه به مقوله اعداد منفی و درک دانش‌آموزان از این اعداد چندان پرداخته نشده و خلأ و نیازمندی عظیمی در این زمینه احساس می‌شود. در مدارس روستایی درس ریاضی در بیشتر مواقع توسط دبیران غیرتخصصی تدریس می‌شود، لذا این نیازمندی، ضرورت انجام این‌گونه پژوهش‌ها را روشن می‌سازد. برای پاسخ به سوال اول و دوم پژوهش حاضر تحقیقاتی توسط محققین داخلی و خارجی انجام شده است و هشت نوع بدفهمی به شرح زیر شناسایی شده است:

بدهمی های دانش آموزان در مورد عدد منفی در پژوهشهای انجام شده

ردیف	نوع بدهمی	تشریح بدهمی در پژوهشها	منبع پژوهش
۱	در نظر گرفتن صفر به عنوان کوچکترین عدد	بسیاری از دانش آموزان بر این باورند که نمی توان هیچ مقداری از صفر برداشت و صفر کوچکترین عدد است.	بال ^{۱۱} (۱۹۹۳)
۲	عدم درک مبدأ محور اعداد و نپذیرفتن صفر به عنوان یک عدد	برخی از دانش آموزان، برای حل مسائل جمع و تفریق با استفاده از محور اعداد، اعداد +۱ و -۱ را به عنوان مبدأ محور اعداد در نظر می گیرند. حتی در میان دانش آموزانی که می پذیرند عدد منفی وجود دارد، برخی صفر را به عنوان یک عدد در نظر نمی گیرند. برخی از دانش آموزان نیز در انتخاب صفر به عنوان نقطه مبدأ دارای بدهمی هستند.	گالاردو و هرناندز ^{۱۲} (۲۰۰۷)
۳	در نظر گرفتن علامت منفی به عنوان یک علامت جداکننده، عدم توانایی در تمایز بین معانی متفاوت علامت منفی	برای اکثر دانش آموزان علامت منفی فقط به عنوان یک عملگر محاسباتی معنادار است و به طور کلی وقتی بین دو عبارت قرار داده می شود، به صورت عمل تفریق در نظر گرفته می شود. برای تعدادی هم علامت منفی به عنوان یک علامت جداکننده است، برای مثال در عبارت $7-8+120-15$ دو محاسبه $20+8$ و $15-15$ توسط برخی از دانش آموزان انجام می شود. برخی از دانش آموزان اعداد منفی را برابر صفر در نظر می گیرند و به طور کلی از علامتها چشم پوشی می کنند.	فاگنانت ^{۱۳} و ولاسیس ^{۱۴} و کراهای ^{۱۵} (۲۰۰۵)، بوفردینگ (۲۰۱۰)
۴	تعمیم خاصیت جابجایی جمع اعداد به تفریق آنها	تعمیم نابجای خاصیت تعویض پذیری جمع اعداد به تفریق اعداد، یکی از اشتباهات رایجی است که گریبانگیر بسیاری از دانش آموزان شده است. به این معنی که دانش آموز، از سال های ابتدایی درک کرده است که تساوی « $9+8=8+9$ » برقرار است. لذا دانش آموز بر اساس تعمیمی که از عملگر «+» به عملگر «-» می دهد، عبارت « $9-8=8-9$ » را هم درست می پندارد. بسیاری از دانش آموزان به دلیل اتکای بیش از حد روی خاصیت جابجایی جمع، حاصل $1-7$ را با حاصل $7-1$ یکی در نظر می گیرند.	نظری (۱۳۹۱)
۵	تعمیم مقایسه اعداد طبیعی به اعداد صحیح	دانش آموزان در ابتدای یادگیری اعداد منفی، ۶- را از ۴- بزرگتر در نظر می گیرند. ماهیت متناقض بزرگی و اندازه اعداد منفی یکی از دلایل بدهمی های دانش آموزان است.	بوفردینگ (۲۰۱۰)
۶	عدم درک تفاوت بین عدد مثبت و عدد منفی	برخی از دانش آموزان بر این باورند که اعداد منفی واقعا اعداد مستقلی نیستند. آنها درست مانند اعداد دیگر عمل می کنند با این تفاوت که یک علامت منفی در مقابل آنها وجود دارد. در تفریق ۵-، سه منهای پنج معنی نمی دهد چون ۳ کمتر از ۵ است. سه منهای پنج، برابر، صفر می شود. صفر به معنی هیچ چیز است، اما منفی بیشتر از هیچ چیز است، پس اگر صفر به معنی هیچ چیز است، برداشتن چیزی از هیچ چیز در دنیای اشیاء شمارش پذیر غیر ممکن است. $5-\square=8$ چالش برانگیز است چون با مفهوم اینکه عمل تفریق کوچکتر می سازد در تناقض است.	راشدی (۱۳۹۲)

11 . Ball

۱۲ . Hernandez

۱۳ . Fagnant

۱۴ . Vlassis

15 . Crahay

۷	عدم درک مفهوم علامت منفی	بسیاری از اشتباهات هنگام حل کردن معادلات بخاطر حضور اعداد منفی رخ می‌دهد. چون دانش‌آموزان بین معانی متفاوت علامت منفی تمایز قائل نمی‌شوند.	فاگنانت و ولاسیس و کراهای (۲۰۰۵)،
۸	نادیده گرفتن علامت منفی در عملیات	وقتی پاسخ عبارت $5+8$ از دانش‌آموزان پرسیده می‌شود، برخی از آنها به سادگی علامت منفی را نادیده گرفته و آن را به صورت $5+8$ در نظر می‌گیرند.	پلد و رزنیک (۱۹۸۹)

اما برای سوال سوم یعنی کاربرد اعداد منفی در حل مسائل جبری، اعداد توان دار، معادله و جذر و ریشه‌یابی تحقیقی انجام نشده است. با توجه به اینکه دانش‌آموزان کشورمان مانند بسیاری از کشورهای دیگر (از جمله ژاپن و سنگاپور) در پایه‌های ششم و هفتم با اعداد منفی آشنا می‌شوند، تمرکز پژوهش حاضر بر پایه هفتم بود. رسیدگی به مفهوم اعداد منفی و اشکالات دانش‌آموزان در این مبحث که سرآغاز مبانی جبر است نیازمند توجه جدی است. چون در کتاب ریاضی هفتم اعداد منفی به عنوان ضرایب، ثابت‌ها و پاسخ‌ها در عبارت‌های جبری، اعداد توان دار، معادلات و ریشه‌یابی به کار رفته‌اند و در گذشته تحقیقی در مورد تجزیه و تحلیل دانش‌آموزان از کاربرد اعداد منفی در عبارت‌های جبری صورت نگرفته بود ضرورت داشت که در پژوهش حاضر در این زمینه کار شود و برخی از سوالات آزمون پژوهش حاضر برای سنجش دانش‌آموزان از کاربرد اعداد منفی در حل عبارت‌های جبری مطرح گردیده است. بنابراین هدف این تحقیق بررسی بدفهمی‌های دانش‌آموزان پایه هفتم متوسطه اول در مورد مفهوم اعداد منفی در درس ریاضی در مدارس روستایی شهرستان الیگودرز بود.

روش پژوهش

جامعه آماری در این پژوهش دانش‌آموزان پایه هفتم در دبیرستانهای روستایی شهرستان الیگودرز به تعداد ۳۷۶ نفر در سال تحصیلی ۱۴۰۱-۱۴۰۰ (۱۱۹ دانش‌آموز دختر و ۲۵۷ دانش‌آموز پسر) بود که با توجه به جدول مورگان ۱۸۱ نفر با روش نمونه‌گیری تصادفی خوشه‌ای به عنوان نمونه انتخاب شدند. برای گردآوری اطلاعات از آزمون محقق‌ساخته ۸ سوالی بر اساس تحقیق ریحانی و همکاران (۱۳۹۴)، استفاده شد. آزمون به صورت حضوری در هر مدرسه برگزار گردید و برگه‌های آزمون هر کلاس توسط دبیر مربوطه و با هماهنگی محقق تصحیح و سپس برگه‌ها جهت تجزیه و تحلیل داده‌ها تحویل محقق گردید. در برگه‌هایی که پاسخ‌های نادرست یا متناقض شرکت‌کنندگان دیده شد، پاسخ‌ها بدون دخل و تصرف ارائه شده‌اند. پاسخ‌های

دانش آموزان بر مبنای بخش نظری تحقیق، بررسی و تحلیل شدند. جهت روایی آزمون محقق ساخته از نظر اساتید و معلمان ریاضی و جهت پایایی از روش پایایی مصححان استفاده شده است. برای این منظور پاسخ ها توسط سه مصحح و تصحیح شد. برای نمره مولفه ها هم در نظر گرفته شد. نتایج به صورت جدول زیر است.

Correlations

	a1	a2	a3	a4	b1	b2	b3	b4	f1	f2	f3	f4
a1	۱	.۸۸۱ ^{**}	.۸۳۰ ^{**}	.۹۶۸ ^{**}	.۹۹۶ ^{**}	.۸۷۹ ^{**}	.۸۲۰ ^{**}	.۹۷۲ ^{**}	.۹۹۷ ^{**}	.۸۸۴ ^{**}	.۸۲۱ ^{**}	.۹۷۵ ^{**}
a2	.۸۸۱ ^{**}	۱	.۵۸۳ ^{**}	.۸۴۵ ^{**}	.۸۷۵ ^{**}	.۹۷۹ ^{**}	.۵۸۰ ^{**}	.۸۴۸ ^{**}	.۸۷۶ ^{**}	.۹۸۶ ^{**}	.۵۸۰ ^{**}	.۸۵۱ ^{**}
a3	.۸۳۰ ^{**}	.۵۸۳ ^{**}	۱	.۶۹۴ ^{**}	.۸۳۶ ^{**}	.۵۸۲ ^{**}	.۹۸۸ ^{**}	.۷۲۰ ^{**}	.۸۳۹ ^{**}	.۵۸۸ ^{**}	.۹۹۳ ^{**}	.۷۲۰ ^{**}
a4	.۹۶۸ ^{**}	.۸۴۵ ^{**}	.۶۹۴ ^{**}	۱	.۹۶۰ ^{**}	.۸۴۹ ^{**}	.۶۸۵ ^{**}	.۹۹۲ ^{**}	.۹۶۰ ^{**}	.۸۵۲ ^{**}	.۶۸۴ ^{**}	.۹۹۵ ^{**}
b1	.۹۹۶ ^{**}	.۸۷۵ ^{**}	.۸۳۶ ^{**}	.۹۶۰ ^{**}	۱	.۸۸۳ ^{**}	.۸۳۳ ^{**}	.۹۷۲ ^{**}	.۹۹۸ ^{**}	.۸۸۴ ^{**}	.۸۳۱ ^{**}	.۹۷۱ ^{**}
b2	.۸۷۹ ^{**}	.۹۷۹ ^{**}	.۵۸۲ ^{**}	.۸۴۹ ^{**}	.۸۸۳ ^{**}	۱	.۵۸۴ ^{**}	.۸۵۳ ^{**}	.۸۸۱ ^{**}	.۹۹۳ ^{**}	.۵۸۴ ^{**}	.۸۵۵ ^{**}
b3	.۸۲۰ ^{**}	.۵۸۰ ^{**}	.۹۸۸ ^{**}	.۶۸۵ ^{**}	.۸۳۳ ^{**}	.۵۸۴ ^{**}	۱	.۷۰۷ ^{**}	.۸۳۴ ^{**}	.۵۸۹ ^{**}	.۹۹۵ ^{**}	.۷۰۸ ^{**}
b4	.۹۷۲ ^{**}	.۸۴۸ ^{**}	.۷۲۰ ^{**}	.۹۹۲ ^{**}	.۹۷۲ ^{**}	.۸۵۳ ^{**}	.۷۰۷ ^{**}	۱	.۹۶۹ ^{**}	.۸۵۴ ^{**}	.۷۰۶ ^{**}	.۹۹۷ ^{**}
f1	.۹۹۷ ^{**}	.۸۷۶ ^{**}	.۸۳۹ ^{**}	.۹۶۰ ^{**}	.۹۹۸ ^{**}	.۸۸۱ ^{**}	.۸۳۴ ^{**}	.۹۶۹ ^{**}	۱	.۸۸۵ ^{**}	.۸۳۵ ^{**}	.۹۷۲ ^{**}
f2	.۸۸۴ ^{**}	.۹۸۶ ^{**}	.۵۸۸ ^{**}	.۸۵۲ ^{**}	.۸۸۴ ^{**}	.۹۹۳ ^{**}	.۵۸۹ ^{**}	.۸۵۴ ^{**}	.۸۸۵ ^{**}	۱	.۵۸۹ ^{**}	.۸۵۷ ^{**}
f3	.۸۲۱ ^{**}	.۵۸۰ ^{**}	.۹۹۳ ^{**}	.۶۸۴ ^{**}	.۸۳۱ ^{**}	.۵۸۴ ^{**}	.۹۹۵ ^{**}	.۷۰۶ ^{**}	.۸۳۵ ^{**}	.۵۸۹ ^{**}	۱	.۷۰۸ ^{**}
f4	.۹۷۵ ^{**}	.۸۵۱ ^{**}	.۷۲۰ ^{**}	.۹۹۵ ^{**}	.۹۷۱ ^{**}	.۸۵۵ ^{**}	.۷۰۸ ^{**}	.۹۹۷ ^{**}	.۹۷۲ ^{**}	.۸۵۷ ^{**}	.۷۰۸ ^{**}	۱

بنابر این آزمون محقق ساخته از پایایی مطلوبی برخوردار است.

یافته ها

۱. تحلیل سوال اول پژوهش: (بررسی درک دانش آموزان پایه هفتم متوسطه اول از مفهوم عدد منفی در مدارس روستایی شهرستان الیگودرز)

برای پاسخ به این سوال پژوهش، سوالات ۱ و ۲ و ۳ آزمون به صورت زیر مورد تحلیل قرار گرفتند.

۱-۱. تحلیل سوال اول آزمون

هدف از طرح سؤال اول این است که آیا دانش‌آموزان، علامت منفی را صرفاً به عنوان یک عملگر کاهشی در نظر می‌گیرند یا خیر؟ همچنین این سؤال توانایی دانش‌آموزان در محاسبات را نیز مورد ارزیابی قرار می‌دهد.

جدول ۱. تحلیل پاسخ دانش‌آموزان به سؤال ۱ آزمون

نوع پاسخ	شماره بدفهمی	تشریح پاسخ یا نوع بدفهمی، تحلیل و تفسیر پاسخ	پاسخ دانش آموز	سوال اول آزمون محقق ساخته
پاسخ درست		درک درست از این که در تفریق اعداد صحیح، عملگر تفاضل همواره باعث کاهش اندازه عدد نمی‌شود. این دانش‌آموزان در جای خالی مربوط به علامتها، علامتهای درست قرار داده اند و جواب نهایی را نیز درست به دست آورده اند. این موضوع بیانگر این است که این دانش‌آموزان نسبت به این موضوع آگاه هستند که علامت «-» گاهی می‌تواند به عنوان یک عملگر افزایشی در محاسبات به کار رود. همچنین پاسخ درست دانش‌آموزان بیانگر این موضوع است که، تفاوت بین اندازه و ارزش (مقدار) را درک کرده اند. البته این دانش‌آموزان از توانایی محاسباتی خوبی هم برخوردار بوده اند، چون ضمن درک هدف سؤال و انتخاب درست علامتها در جای خالی، حاصل نهایی را نیز درست به دست آورده اند.	+۴	در جاهای خالی علامتهای «+» و «-» را طوری قرار دهید که حاصل بیشترین مقدار ممکن شود.
پاسخ های نادرست	بدفهمی شماره ۱	به دست آوردن بیشترین اندازه و برخورداری از توانایی محاسبه. از نحوه پاسخگویی این دانش‌آموزان به این سؤال مشخص می‌شود که آنها مفهوم این سؤال را به درستی درک نکرده اند؛ چرا که برداشت آنها از بیشترین مقدار جواب، بیشترین مقدار از لحاظ اندازه بوده و ارزش علامت جواب نهایی را در نظر نگرفته اند. بدین معنا که درون جاهای خالی علامتهایی را قرار داده که تمامی اعداد، هم علامت (منفی) باشند تا بزرگترین عدد از نظر اندازه که همان (۱۰-) است، به دست آید. در صورتی که هدف سؤال به دست آوردن بیشترین مقدار از نظر ارزش بوده است.	-۱۰	(-۱) □ (+۲) □ (-۴) □ (-۳)
	بدفهمی شماره ۲	این دانش‌آموزان در تمام جاهای خالی علامت مثبت قرار داده اند و حاصل ۶- را به دست آورده اند. این دانش‌آموزان علامت مثبت را به عنوان یک عملگر افزایشی در نظر گرفته اند. به نظر می‌رسد برداشت آنها از علامت مثبت این است که همیشه باعث افزایش مقدار جواب می‌شود.	-۶	
	غیر قابل تحلیل	پاسخ هایی که تحلیل آنها امکان پذیر نیست.		
	اشتباه محاسباتی	این دانش‌آموزان در پاسخ به این سؤال دچار اشتباه محاسباتی شده اند. به این معنا که در جای خالی مربوط به علامتها، علامتهای درست را قرار داده اند، اما در محاسبه جواب آخر، دچار اشتباه شده اند. این موضوع نشان می‌دهد که این افراد مفهوم علامت منفی را به خوبی درک کرده اند ولی چون از توانایی محاسباتی خوبی برخوردار نبوده اند، جواب نهایی را اشتباه به دست آورده اند.	غیره	

جدول ۲. فراوانی و درصد پاسخهای دانش‌آموزان به سؤال اول آزمون

نوع پاسخ ها	فراوانی دختران	درصد فراوانی دختران	فراوانی پسران	درصد فراوانی پسران	فراوانی پسران و دختران	درصد فراوانی پسران و دختران
پاسخ درست	۳	۵/۳۶٪	۱۰	۸/۰۶٪	۱۳	۷/۲۲٪

۳۳/۸۹٪	۶۱	۳۳/۸۷٪	۴۲	۳۳/۹۳٪	۱۹	(بدفهمی شماره ۱)	پاسخ های نادرست
۳۲/۲۲٪	۵۸	۳۳/۰۶٪	۴۱	۳۰/۳۵٪	۱۷	(بدفهمی شماره ۲)	
۶/۱۱٪	۱۱	۵/۶۵٪	۷	۷/۱۴٪	۴	پاسخ هایی که تحلیل آنها امکانپذیر نیست	
۳/۸۹٪	۷	۳/۲۳٪	۴	۵/۳۶٪	۳	اشتباه محاسباتی	
۱۶/۶۷٪	۳۰	۱۶/۱۳٪	۲۰	۱۷/۸۶٪	۱۰	عدم پاسخگویی	
۱۰۰٪	۱۸۰	۱۰۰٪	۱۲۴	۱۰۰٪	۵۶	جمع	

از میان کل دانش آموزان، تنها حدود ۷٪ به پاسخ درست (+۴) اشاره کردند. حدود ۳۴٪ برداشت آنها از بیشترین مقدار جواب، بیشترین مقدار از لحاظ اندازه بوده و ارزش علامتی جواب نهایی را در نظر نگرفته اند و حدود ۳۲٪ از دانش آموزان در جاهای خالی فقط علامت مثبت قرار داده اند و به جواب (-۶) رسیده اند. برداشت آنها از علامت مثبت این است که همیشه باعث افزایش مقدار جواب می شود.

۲-۱. تحلیل سوال دوم آزمون

هدف از طرح سؤال دوم این بود که ابتدا درک دانش آموزان از مفهوم قرینه یک عدد منفی مشخص شود و سپس از طریق مقایسه آن با اعداد داده شده در گزینه ها، درک آنها نسبت به اعداد علامت دار بررسی شود.

جدول ۳: تحلیل پاسخ دانش آموزان به سوال ۲ آزمون

نوع پاسخ	شماره بدفهمی	تشریح پاسخ یا نوع بدفهمی، تحلیل و تفسیر پاسخ	پاسخ دانش آموزان	سوال دوم آزمون محقق ساخته
پاسخ درست		این دانش آموزان درک درستی از مفهوم قرینه اعداد صحیح دارند. (مفهوم عملگر تقارن را به درستی درک کرده اند.)	+۸	کدام یک از اعداد زیر از قرینه «-۵» بزرگ تر است؟
پاسخهای نادرست	بدفهمی ۱	این دانش آموزان اعداد منفی را بزرگ تر از اعداد مثبت می دانند.	-۹	الف) +۵ ب) ۰ ج) -۹ د) +۸
	بدفهمی ۲	اعداد را بدون توجه به علامت آنها از لحاظ اندازه بزرگ تر می دانند نه از لحاظ ارزش عددی آنها.	-۹	
	بدفهمی ۳	بدون درک سوال، فقط قرینه -۵ را به دست آورده و +۵ را به عنوان جواب انتخاب کرده اند.	+۵	

جدول ۴: فراوانی و درصد پاسخ دانش آموزان به سوال دوم آزمون

نوع پاسخها	فراوانی دختران	درصد فراوانی دختران	فراوانی پسران	درصد فراوانی پسران	فراوانی پسر و دختر	درصد فراوانی پسران و دختران
پاسخ درست	۲۲	۳۹/۲۹٪	۵۴	۴۳/۵۵٪	۷۶	۴۲/۲۲٪

پاسخهای نادرست	بدهمی شماره ۱	۲	٪ ۳/۵۷	۳	٪ ۲/۴۲	۵	٪ ۲/۷۸
	بدهمی شماره ۲	۷	٪ ۱۲/۵۰	۸	٪ ۶/۴۵	۱۵	٪ ۸/۳۳
	بدهمی شماره ۳	۱۹	٪ ۳۳/۹۳	۴۷	٪ ۳۷/۹۰	۶۶	٪ ۳۶/۶۷
	عدم پاسخگویی	۶	٪ ۱۰/۷۱	۱۲	٪ ۹/۶۸	۱۸	٪ ۱۰
	جمع	۵۶	٪ ۱۰۰	۱۲۴	٪ ۱۰۰	۱۸۰	٪ ۱۰۰

مطابق جدول، بدهمی شماره ۳ در بین دانش‌آموزان رایج‌تر است. دانش‌آموزانی که دچار این بدهمی بودند به دو گروه تقسیم شدند؛ گروه اول سوال را به درستی درک نکرده و فقط قرینه عدد را پیدا کرده و به عنوان جواب انتخاب کرده بودند، هرچند که این دانش‌آموزان مفهوم عدد منفی و قرینه را به درستی می‌دانستند. گروه دوم درک درستی از شناخت قرینه نداشتند و حتی مفاهیم اعداد منفی را به درستی درک نکرده بودند و فقط با استناد به گفته معلمشان برای پیدا کردن قرینه اعداد منفی، علامت منفی پشت عدد را به علامت مثبت تغییر داده‌اند و +۵ را به عنوان جواب انتخاب کرده بودند.

۳-۱. تحلیل سوال سوم آزمون

این سؤال در دو مرحله قابل حل بود: مرحله اول استفاده از قانون ضرب علامتها و مرحله دوم استفاده از قواعد مربوط به قرینه کردن یک عدد. بنابراین هدف این سوال بررسی درک دانش‌آموزان از مفهوم قرینه، دقت آنها و توانایی آنها در استفاده از قانون ضرب علامتها بود.

جدول ۵. تحلیل پاسخ دانش‌آموزان به سوال ۳ آزمون

نوع پاسخ	شماره بدهمی	تشریح پاسخ یا نوع بدهمی، تحلیل و تفسیر پاسخ	پاسخ دانش‌آموزان	سوال سوم آزمون محقق ساخته
پاسخ درست		مفهوم عملگر تقارن (قرینه) را کاملاً درک کرده‌اند.	-۳	کدام گزینه قرینه عدد $(+۳)$ می‌باشد؟ راه حل را توضیح دهید.
پاسخهای نادرست	بدهمی ۱	دانش‌آموزان راه حل را درست انتخاب کرده‌اند و ضرب علامت‌ها را درست انجام داده‌اند، ولی چون صورت سؤال را با دقت درک نکرده‌اند، واژه قرینه در صورت سؤال را در نظر نگرفته‌اند.	+۳	الف) $+\frac{1}{3}$
	بدهمی ۲	این دانش‌آموزان ضرب علامتها را درست انجام داده‌اند، اما مفهوم قرینه را با معکوس اشتباه گرفته‌اند.	$+\frac{1}{3}$	ب) $-\frac{1}{3}$
	بدهمی ۳	این دانش‌آموزان قانون ضرب علامتها را درست به کار نبرده‌اند و همچنین مفهوم قرینه را با معکوس اشتباه گرفته‌اند.	$-\frac{1}{3}$	ج) +۳ د) -۳

جدول ۶. نمونه‌هایی از توضیحات دانش‌آموزان در ارائه راه حل سوال سوم آزمون

<p>نمونه ۱: تعداد علامت‌های «-» در این عبارت زوج می‌باشد، پس اگر علامتها در هم ضرب شوند حاصل +۳ می‌شود و قرینه +۳ برابر است با -۳.</p> <p>نمونه ۲: اگر «-» در «-» ضرب شود، جواب «+» می‌شود و در نهایت «+» در «+۳» ضرب شده و پاسخ نهایی «+۳» شده است.</p> <p>نمونه ۳: اگر علامتهای پشت عدد را در هم ضرب کنیم حاصل «+۳» می‌شود و چون قرینه هر عدد عکس آن عدد می‌باشد، پاسخ نهایی این سوال + می‌باشد.</p> <p>نمونه ۴: قرینه $(+۳)$ را با اضافه کردن یک منفی در پشت عدد می‌نویسیم، یعنی $(-(-(+۳)))$ که حاصل آن -۳ است.</p>

جدول ۷. فراوانی و درصد پاسخ دانش آموزان به سوال سوم آزمون

نوع پاسخها	فراوانی دختران	درصد فراوانی دختران	فراوانی پسران	درصد فراوانی پسران	فراوانی پسران و دختر	درصد فراوانی پسران و دختران	
پاسخ درست	۷	۱۲/۵۰٪	۱۹	۱۵/۳۲٪	۲۶	۱۴/۴۴٪	
پاسخهای نادرست	بدفهمی شماره ۱	۱۴	۲۵٪	۲۸	۲۲/۵۸٪	۴۲	۲۳/۳۳٪
	بدفهمی شماره ۲	۶	۱۰/۷۱٪	۱۳	۱۰/۴۸٪	۱۹	۱۰/۵۶٪
	بدفهمی شماره ۳	۶	۱۰/۷۱٪	۱۵	۱۲/۱۰٪	۲۱	۱۱/۶۷٪
عدم پاسخگویی	۲۳	۴۱/۰۸٪	۴۹	۳۹/۵۲٪	۷۲	۴۰٪	
جمع	۵۶	۱۰۰٪	۱۲۴	۱۰۰٪	۱۸۰	۱۰۰٪	

۴۰ درصد از کل دانش آموزان به این سوال پاسخی ندادند و بیش از ۲۳ درصد دانش آموزان در قرینه یابی دچار بدفهمی بودند. بدفهمی شماره یک در بین دانش آموزان رایج تر از بقیه بدفهمی ها بود. در پاسخ به این سوال بعضی از دانش آموزان در درک قرینه مشکل داشتند و عده ای نیز قرینه را با معکوس اشتباه گرفته بودند. عده ای نیز در ضرب علامت ها مشکل داشتند.

۲. سوال دوم پژوهش: (بررسی درک دانش آموزان پایه هفتم متوسطه اول در مورد ترتیب اعداد صحیح منفی در مدارس روستایی شهرستان الیگودرز)

از سوال شماره ۴ در آزمون محقق ساخته برای پاسخ به این سوال پژوهش استفاده شد.

۲-۱. تحلیل سوال چهارم آزمون

جدول ۸. تحلیل پاسخ دانش آموزان به سوال ۴ آزمون

نوع پاسخها	تشریح پاسخ یا نوع بدفهمی، تحلیل و تفسیر پاسخ	پاسخ دانش آموز و یا نتیجه بدفهمی	شماره بدفهمی
پاسخ درست	درک درست اعداد صحیح (اعداد مثبت، عدد صفر و اعداد منفی)	۱۱، ۹، ۸، ۴، ۰، ۲، ۴، ۱۶-	
پاسخ های نادرست	صفر به عنوان کوچکترین عدد تصور شده است و اعداد منفی را بزرگتر از صفر و کوچکتر از اعداد مثبت تصور می کنند و در مرتب کردن اعداد منفی درست عمل نکرده اند.	۱۱، ۹، ۸، ۴، ۱۶-، ۲، ۴، ۰	۱
	اعداد منفی را بزرگتر از صفر و کوچکتر از اعداد مثبت تصور می کنند، اما در مرتب کردن اعداد منفی درست عمل کرده اند.	۱۱، ۹، ۸، ۴، ۱۶-، ۲، ۴، ۰	۲
	اعداد منفی را کوچکتر از صفر در نظر گرفته اند، اما با توجه به این که در اعداد مثبت هر چه فاصله عدد از صفر بیشتر شود عدد بزرگتر است؛ پس در اعداد منفی نیز تصور می کنند که هر چه فاصله عدد منفی از صفر بیشتر شود بزرگتر می شود.	۱۱، ۹، ۸، ۴، ۰، ۱۶-، ۲، ۴	۳
	اعداد منفی را بزرگتر از صفر تصور کرده اند، بدون توجه به علامت آنها، اعداد را بر اساس اندازه مرتب کرده اند و ۴- را کوچکتر از ۴ در نظر می گیرند.	۱۱، ۹، ۸، ۴، ۱۶-، ۲، ۴، ۰	۴
	همه اعداد را مثبت تصور کرده اند و علامت مثبت یا منفی آنها را حذف کرده اند.	۱۶، ۱۱، ۹، ۸، ۴، ۰، ۲	۵
	در شناخت اعداد مثبت (که علامت + ندارند)، عدد صفر و اعداد منفی درست عمل کرده اند، اما عدد ۹+ را چون دارای علامت «+» است بزرگتر از بقیه اعداد در نظر گرفته اند. تصور می کنند که اعدادی که علامت «+» دارند از اعداد صحیح مثبتی که علامت مثبت ندارند بزرگتر هستند.	۹، ۱۱، ۸، ۴، ۰، ۲، ۴، ۱۶-	۶
	عدد ۹+ را چون دارای علامت «+» است بزرگترین عدد در نظر گرفته اند و اعداد منفی را کوچکتر از صفر در نظر گرفته اند؛ اما در مرتب کردن اعداد منفی اشتباه کرده اند.	۹، ۱۱، ۸، ۴، ۰، ۱۶-، ۲، ۴	۷

جدول ۹: تعداد و درصد پاسخ های دانش آموزان به سوال چهارم آزمون

نوع پاسخ ها	فراوانی دختران	درصد فراوانی دختران	فراوانی پسران	درصد فراوانی پسران	فراوانی پسر و دختر	درصد فراوانی پسران و دختران
پاسخ درست	۱۷	٪ ۳۰,۳۶	۴۱	٪ ۳۳,۰۶	۵۸	٪ ۳۲/۲۲
پاسخ های نادرست	بدفهمی شماره ۱	۶	٪ ۱۰,۷۱	۱۵	٪ ۱۲,۱۰	٪ ۱۱/۶۷
	بدفهمی شماره ۲	۲	٪ ۳,۵۷	۹	٪ ۷,۲۶	٪ ۶/۱۱
	بدفهمی شماره ۳	۸	٪ ۱۴,۲۸	۲۲	٪ ۱۷,۷۴	٪ ۱۶/۶۷
	بدفهمی شماره ۴	۲	٪ ۳,۵۷	۷	٪ ۵,۶۴۵	٪ ۵
	بدفهمی شماره ۵	۱	٪ ۱,۷۹	۳	٪ ۲,۴۲	٪ ۲/۲۲
	بدفهمی شماره ۶	۳	٪ ۵,۳۶	۷	٪ ۵,۶۴۵	٪ ۵/۵۶
	بدفهمی شماره ۷	۳	٪ ۵,۳۶	۸	٪ ۶,۴۵	٪ ۶/۱۱
عدم پاسخگویی	۱۴	٪ ۲۵	۱۲	٪ ۹,۶۸	۲۶	٪ ۱۴/۴۴
جمع	۵۶	٪ ۱۰۰	۱۲۴	٪ ۱۰۰	۱۸۰	٪ ۱۰۰

دانش آموزان در این سؤال دچار ۷ نوع بدفهمی بودند که بدفهمی شماره ۳ رایج تر از بقیه بدفهمی ها بود. یعنی اکثر دانش آموزان می دانستند که اعداد منفی کوچکتر از اعداد مثبت و صفر هستند، اما در مرتب کردن اعداد منفی مانند اعداد مثبت عمل می کردند.

۳. سوال سوم پژوهش: (بررسی درک دانش آموزان پایه هفتم متوسطه اول در مورد انجام عملیات چهارگانه بر روی اعداد منفی در مدارس روستایی شهرستان الیگودرز) جهت تحلیل سوال سوم پژوهش از سوالات شماره ۵، ۶، ۷، ۸ آزمون محقق ساخته استفاده شد.

۱-۳. تحلیل سوال پنجم آزمون

هدف از طرح این سوال بررسی درک دانش آموزان از جمع و تفریق اعداد علامت دار و ضرب علامت ها بود.

جدول ۱۰. تحلیل پاسخ دانش‌آموزان به سوال ۵ آزمون

نوع پاسخ‌ها	تشریح پاسخ یا نوع بدفهمی، تحلیل و تفسیر پاسخ	پاسخ دانش‌آموز	سوال ۵ آزمون محقق ساخته
پاسخ درست	درک درست مفهوم علامت منفی به عنوان عملگر دوتایی و یا عملگر واحد	+۸	(الف) ۲-(-۶)
پاسخهای نادرست	بدون درک تفاوت بین علامت منفی و عملگر تفاضل و با توجه به گفته معلم، ابتدا عدد کوچکتر از نظر اندازه را از عدد بزرگتر کم و سپس علامت عددی که از نظر اندازه بزرگتر است را برای پاسخ در نظر گرفته‌اند.	-۴	
	بدون توجه به علامت تفریق، دو عدد را با هم جمع کرده‌اند و علامت عدد بزرگتر را برای پاسخ انتخاب کرده‌اند.	-۸	
	با توجه به ضرب علامت‌ها و به گفته معلم، ابتدا علامت تفریق پشت پرانتز را در عدد منفی داخل پرانتز ضرب کرده‌اند و سپس عدد ۲ را که نیز در عبارت اصلی پشت پرانتز قرار داشت در عدد +۶ ضرب کرده‌اند.	+۱۲	
	بدون توجه به عملگر تفاضل، عدد ۲ را که در پشت پرانتز قرار دارد در عدد داخل پرانتز ضرب کرده‌اند.	-۱۲	
پاسخ درست	درک درست مفهوم علامت منفی به عنوان عملگر تفاضل و یا عملگر واحد، درک درست در مورد ضرب علامت‌ها	+۱۰	(ب) ۷-(-۳)
پاسخهای نادرست	به محض دیدن علامت منفی و بدون توجه به نوع آن، عمل تفریق را انجام می‌دهند و حاصل این عبارت را ۴ در نظر می‌گیرند.	۴	
	بدون توجه به عملگر علامت "-", دو بار عدد ۳ را از عدد ۷ کم می‌کنند.	۱	
	با توجه به ضرب علامت‌ها و به گفته معلم، علامت پشت پرانتز را در علامت داخل پرانتز ضرب کرده‌اند و سپس عدد پشت پرانتز را نیز در عدد داخل پرانتز ضرب کرده‌اند.	+۲۱	
	بدون توجه به عملگر تفاضل، عدد ۷ را در عدد داخل پرانتز ضرب کرده‌اند.	-۲۱	
پاسخ درست	درک درست اعداد منفی و درک درست از علامت "-" به عنوان عملگر واحد یا تفاضل	-۱۲	(ج) -۹-۳
پاسخهای نادرست	ابتدا بدون در نظر گرفتن علامت منفی عدد ۹، سه واحد از آن کم کرده و پس از رسیدن به عدد ۶، علامت منفی پشت عدد ۹ را اثر داده‌اند و جواب پایانی را ۶- نوشته‌اند.	-۶	
	ابتدا دو عدد را با هم جمع کرده و سپس علامت‌های دو عدد را در هم ضرب کرده‌اند.	+۱۲	
	از تفاضل ۹ از ۳ استفاده کرده و از ۹، سه واحد کم کرده‌اند و به عدد ۶ رسیده‌اند.	۶	
پاسخ درست	درک درست عملگر دوتایی و عملگر واحد علامت "-"	-۵	(د) ۳-۸
پاسخهای نادرست	دو عدد را با هم جمع کرده و علامت عدد بزرگتر از لحاظ اندازه را برای جواب نوشته‌اند.	-۱۱	
	درک درستی از اعداد منفی ندارند و فکر می‌کنند چون عدد ۸ از لحاظ اندازه از ۳ بیشتر است پس نمی‌توان آن را از ۳ کم کرد و علامت "-" را تبدیل به "+" کرده‌اند و حاصل را ۱۱ نوشته‌اند.	۱۱	
	در عملگر تفریق دچار اشتباه شده‌اند و مانند عملگر جمع آن را دارای خاصیت جابجایی می‌دانند و می‌گویند: $۳-۸ = ۸-۳$.	۵	

ه)	۳۰-	درک صحیح اعداد منفی و شناخت درست علامت "-" به عنوان عملگر واحد یا تفاضل	پاسخ درست
	۳۰	دو عدد را بدون توجه به علامت ها جمع کرده ند و در پایان به خاطر وجود پرانتز، علامت دو عدد را در هم ضرب کرده اند.	پاسخهای نادرست
	۱۶	بدون در نظر گرفتن علامت منفی عدد ۲۳، هفت واحد از آن کم کرده اند و عدد ۱۶ را برای پاسخ نوشته اند.	
	۱۶-	بدون در نظر گرفتن علامت ها، ابتدا ۷ واحد از ۲۳ کم کرده و سپس علامت عدد بزرگتر از لحاظ اندازه را برای پاسخ نهایی نوشته اند.	
و)	۲۴-	درک درست از اعداد منفی و عملگر تفاضل و عملگر واحد	پاسخ درست
	۴-	ابتدا حاصل ۵-۱۰ را به دست آورده و سپس پاسخ نهایی را به صورت $۵-۹ = -۴$ نوشته‌اند.	پاسخهای نادرست
	۱۴	ابتدا بدون توجه به علامتها ۹ را با ۱۰ جمع کرده و پاسخ نهایی را به صورت $۱۹-۵ = ۱۴$ نوشته اند.	
ز)	۳+	درک درست از جمع و تفریق اعداد صحیح و درک عملگر واحد و دو تایی علامت "-"	پاسخ درست
	۱۱	برای اعداد منفی خاصیت شرکت پذیری در نظر گرفته اند در حالی که آن را به درستی درک نکرده‌اند.	پاسخ نادرست
ح)	۱۲	درک درست از جمع اعداد مثبت و منفی و عملگر واحد و دوتایی علامت "-"	پاسخ درست
	۲۲-	تصور می کنند که حاصل جمع و تفریق اعداد منفی همیشه منفی است، دو عدد را بدون در نظر گرفتن علامت منفی جمع می کنند و سپس برای پاسخ نهایی علامت منفی می نویسند.	پاسخهای نادرست
	۱۲-	ابتدا حاصل تفریق ۵-۱۷ را نوشته و به دلیل وجود پرانتز و درک نادرست از تفاوت ضرب و تقسیم با جمع و تفریق، علامت "+" پشت پرانتز را در علامت "-" داخل پرانتز ضرب و یک علامت منفی برای جواب می نویسند.	

جدول ۱۱. تعداد و درصد پاسخهای دانش آموزان به سوال پنجم آزمون

نوع پاسخ ها	فراوانی دختران	درصد فراوانی دختران	فراوانی پسران	درصد فراوانی پسران	فراوانی پسر و دختر	درصد فراوانی پسران و دختران
پاسخ درست	۴	۷/۱۴٪	۱۲	۹/۶۸٪	۱۶	۸/۸۹٪
پاسخ های نادرست	۲۱	۳۷/۵٪	۴۸	۳۸/۷۰٪	۶۹	۳۸/۳۳٪
	۳	۵/۳۶٪	۷	۵/۶۵٪	۱۰	۵/۵۶٪
	۲	۳/۵۷٪	۴	۳/۲۳٪	۶	۳/۳۳٪

اشتباه محاسباتی	۸	٪ ۱۴/۲۹	۱۱	٪ ۸/۸۷	۱۹	٪ ۱۰/۵۶
عدم پاسخگویی	۱۸	٪ ۳۲/۱۴	۴۲	٪ ۳۳/۸۷	۶۰	٪ ۳۳/۳۳
جمع	۵۶	٪ ۱۰۰	۱۲۴	٪ ۱۰۰	۱۸۰	٪ ۱۰۰

بدفهمی‌های دانش‌آموزان در تمام عبارتهای داده شده در سوال ۵ را به ۳ دسته تقسیم و در هر مورد تعداد و درصد دانش‌آموزانی که دچار این نوع بدفهمی‌ها بودند، در جدول ۱۱ بیان شده است. بدفهمی شماره ۱ (عدم درک معانی مختلف علامت «-») به عنوان عملگر واحد یا عملگر دوتایی) در بین دانش‌آموزان رایج‌تر از بقیه بدفهمی‌هاست. طبق این جدول و با توجه به درصد بالایی از دانش‌آموزان که به این سوال پاسخ نداده‌اند، باید گفت ابتدا دانش‌آموزان باید درک درستی از اعداد منفی داشته باشند و سپس در مورد معانی متفاوت علامت منفی آنها را آگاه کرد.

۲-۳. تحلیل سوال ششم آزمون

این سؤال از کتاب (سی. کیلهامن؛ ۲۰۱۱)، برای معرفی و معناسازی اعداد منفی برای ریاضیات مدرسهای، اقتباس شده است. مبنای این سؤال، روش الگویابی است که برای دانش‌آموزان این امکان را فراهم میسازد تا خود به درک درستی از اعداد منفی دست یابند. این سوال برای ورود به مبحث معادلات جبری درجه اول نمونه مناسبی است. برای مثال در حل معادله $4 + X = -1$ ، به جای آنکه دانش‌آموزان را با جملاتی نظیر «معلوم یک طرف - مجهول یک طرف» درگیر کنیم، پیشنهاد میشود این موقعیت را برای دانش‌آموزان فراهم شود تا خود به مفاهیم معادله و متغیر پی ببرند و در نتیجه فرایند حل معادله را با شهود بیشتری طی نمایند.

جدول ۱۲. تحلیل پاسخ دانش‌آموزان به سوال ۶ آزمون

نوع پاسخ	شماره بدفهمی	تشریح پاسخ یا نوع بدفهمی، تحلیل و تفسیر پاسخ	پاسخ دانش آموز	سوال ۶ آزمون محقق ساخته
پاسخ درست		این دانش‌آموزان درک عمیقی از اعداد منفی دارند و الگویابی را به درستی درک کرده اند و به پاسخ درست رسیده اند.	$3 = 4 + (-1)$ $-1 = 4 + (-5)$	الگوی عددی زیر را کامل کنید.
پاسخهای نادرست	۱	این دانش‌آموزان فکر می کنند که هیچ عددی نیست که با ۴ جمع شود و حاصل جمع آنها برابر با ۳ شود؛ بنابراین در جای خالی عدد صفر نوشته اند.	$3 = 4 + 0$	$4 + 2 = 6$
	۲	این دانش‌آموزان پاسخ را به ۳- تغییر داده و در جای خالی عدد ۷- نوشته اند.	$-3 = 4 + (-7)$	$4 + 1 = 5$
	۳	این دانش‌آموزان در جای خالی اول عدد ۱- را به درستی نوشته اند؛ اما برای عبارت بعد در جای خالی عدد ۲- نوشته اند. آن‌ها فکر می کنند که چون عدد دوم هر عبارت به ترتیب ۲ و ۱ و ۰ و ۱- بوده، پس در عبارت آخر نیز بدون توجه به پاسخ عدد ۲- قرار داده اند. این اشتباه آنان به دلیل درک نکردن درست اعداد منفی و جمع و تفریق این اعداد می باشد، نه به علت بی توجهی به سوال.	$3 = 4 + (-1)$ $-1 = 4 + (-2)$	$4 + \square = 3$ $4 + \square = -1$
	۴	برخی از دانش‌آموزان در جای خالی آخر عدد ۳- نوشته اند. آنها بدون توجه به علامت منفی در پاسخ عبارت، عدد ۱- را مساوی با ۱ در نظر گرفته اند.	$-1 = 4 + (-3)$ و $1 = -1$	
غیر قابل تحلیل		پاسخ هایی که تحلیل آن ها امکان پذیر نبود.	غیره	

جدول ۱۳. فراوانی و درصد پاسخ دانش‌آموزان به سوال ششم آزمون

درصد فراوانی پسران و دختران	فراوانی پسر و دختر	درصد فراوانی پسران	فراوانی پسران	درصد فراوانی دختران	فراوانی دختران	نوع پاسخها
% ۱۶/۱۱	۲۹	% ۱۶/۹۳	۲۱	% ۱۴/۲۹	۸	پاسخ درست
% ۲۹/۴۵	۵۳	% ۳۰/۶۴	۳۸	% ۲۶/۷۹	۱۵	بدفهمی شماره ۱
% ۳/۳۳	۶	% ۳/۲۳	۴	% ۳/۵۷	۲	بدفهمی شماره ۲
% ۲۳/۳۳	۴۲	% ۲۵	۳۱	% ۱۹/۶۴	۱۱	بدفهمی شماره ۳
% ۳/۸۹	۷	% ۳/۲۳	۴	% ۵/۳۶	۳	بدفهمی شماره ۴
% ۷/۷۸	۱۴	% ۶/۴۵	۸	% ۱۰/۷۱	۶	پاسخ‌هایی که تحلیل آنها امکان پذیر نیست
% ۱۶/۱۱	۲۹	% ۱۴/۵۲	۱۸	% ۱۹/۶۴	۱۱	عدم پاسخگویی
% ۱۰۰	۱۸۰	% ۱۰۰	۱۲۴	% ۱۰۰	۵۶	جمع

بدفهمی شماره ۱ در میان دانش‌آموزان بیشتر از سایر بدفهمی‌ها وجود داشت. بدفهمی شماره ۳، نیز تقریباً در دانش‌آموزان رایج بود، اما بدفهمی‌های شماره ۲ و ۴ خیلی کم و به طور کلی حدود ۳ درصد بود. بنابراین حدود ۳۰ درصد از دانش‌آموزان مفهوم عدد منفی را به درستی درک نکرده بودند و در حدود ۲۳ درصد از دانش‌آموزانی که مفاهیم عدد منفی را درک کرده بودند در جمع و تفریق این اعداد دچار بدفهمی بودند.

۳-۳. تحلیل سوال هفتم آزمون

هدف از طرح این سوال بررسی درک دانش‌آموزان در انجام عملیات چهارگانه بر روی اعداد منفی و کاربرد اعداد صحیح برای حل عبارات توان‌دار و عبارات‌های جبری بود.

جدول ۱۴. تحلیل پاسخ دانش‌آموزان به سوال ۷ آزمون

سوال پرسشنامه	پاسخ دانش‌آموزان	تشریح پاسخ یا نوع بدفهمی، تحلیل و تفسیر پاسخ	شماره بدفهمی	نوع پاسخها
مقدار عددی عبارت جبری زیر را به ازای مقادیر داده شده حساب کنید. $(b = 2 \text{ و } a = -1)$	۱۲	این دانش‌آموزان درک درستی از ضرب اعداد صحیح و ضرب علامتها ندارند. همچنین آنها درک درستی از محاسبات جبری و اعداد توان‌دار ندارند. تفاوت عملگر تفریق و علامت منفی را به درستی درک کرده‌اند.		پاسخ درست
$-2(a^2 - b^2 - 1) = ?$	۸	در درک اعداد توان‌دار دچار مشکل هستند و فکر می‌کنند که هر عدد صحیحی که به توان برسد پاسخ مثبت است؛ بنابراین را برابر با ۱+ نوشته‌اند.	۱	پاسخهای نادرست
	-۴	به جای b عدد ۲ را نوشته‌اند، اما در محاسبه توان آن علامت تفریق قبل از b را نیز به توان دو رسانده‌اند و حاصل - را برابر ۴ نوشته‌اند.	۲	
	-۱۲	حاصل عبارت داخل پرانتز را درست به دست آورده‌اند، اما علامت - در عدد ۲- را که خارج از پرانتز قرار دارد در حاصل داخل پرانتز ضرب نکرده‌اند.	۳	
	غیره	پاسخ‌هایی که تحلیل آنها امکان پذیر نیست.	غیر قابل تحلیل	

جدول ۱۵. فراوانی و درصد پاسخ دانش‌آموزان به سوال هفتم آزمون

نوع پاسخها	فراوانی دختران	درصد فراوانی دختران	فراوانی پسران	درصد فراوانی پسران	فراوانی پسر و دختر	درصد فراوانی پسران و دختران
پاسخ درست	۳	۵/۳۶٪	۱۰	۸/۰۶٪	۱۳	۷/۲۲٪
پاسخهای نادرست	بدفهمی شماره ۱	۲	۳/۵۷٪	۵	۴/۰۳٪	۷
	بدفهمی شماره ۲	۶	۱۰/۷۲٪	۹	۷/۲۶٪	۱۵
	بدفهمی شماره ۳	۲	۳/۵۷٪	۶	۴/۸۴٪	۸
غیر قابل تحلیل	۱۳	۲۳/۲۱٪	۲۳	۱۸/۵۵٪	۳۶	۲۰٪
عدم پاسخگویی	۳۰	۵۳/۵۷٪	۷۱	۵۷/۲۶٪	۱۰۱	۵۶/۱۱٪
جمع	۵۶	۱۰۰٪	۱۲۴	۱۰۰٪	۱۸۰	۱۰۰٪

بر اساس جدول فوق ۵۶ درصد از کل دانش‌آموزان به این سوال پاسخی ندادند. بیش از ۴ درصد دانش‌آموزان در درک اعداد توان‌دار دچار مشکل بودند و فکر می‌کردند که هر عددی به توان برسد پاسخ مثبت است. بدفهمی شماره ۲، در بین دانش‌آموزان رایج‌تر از بقیه بدفهمی‌ها بود و دانش‌آموزان بدون توجه به پرانتز، علامت منهای پشت عدد را به توان دو رسانده و پاسخ را اشتباه نوشته بودند. بعضی از دانش‌آموزان علامت منفی پشت پرانتز را در عبارت داخل پرانتز ضرب نکرده بودند. در کل بیشتر بدفهمی‌های دانش‌آموزان در این سوال ناشی از مشکل آنها در ضرب علامت‌ها بود. دانش‌آموزان تمایل دارند متغیرها را اعدادی مثبت فرض کنند و لذا به دنبال یافتن جواب‌های مثبت عبارت‌های جبری و معادلات می‌باشند.

۳-۴. تحلیل سوال هشتم آزمون

هدف از طرح این سوال بررسی درک دانش‌آموزان از انجام عملیات ضرب و تقسیم روی اعداد صحیح، شناخت ریشه‌های مثبت و منفی یک عدد طبیعی و درک یک عدد منفی زیر رادیکال به عنوان یک عدد تعریف نشده بود. این سوال که از مبحث جذر و ریشه‌گیری کتاب در صفحه ۹۴، اقتباس شده است.

جدول ۱۶. تحلیل پاسخ دانش‌آموزان به سوال ۸ آزمون

سوال پرسشنامه	پاسخ دانش‌آموزان	تشریح پاسخ یا نوع بدفهمی، تحلیل و تفسیر پاسخ	شماره بدفهمی	نوع پاسخها
کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟ علت نادرستی را توضیح دهید. $\sqrt{16} = -4$ (الف) $-\sqrt{16} = -4$ (ب)	الف نادرست و ب درست است؛ زیرا فرجه این رادیکال ها ۲ می باشد و همیشه مقدار رادیکال با فرجه زوج، مثبت است. و هرگز ریشه دوم عدد زیر رادیکال را با علامت منفی نشان نمی دهیم.			پاسخ درست
	الف درست و ب نادرست است؛ زیرا ۱۶ دارای ریشه دوم ۴- می باشد، پس جذر ۱۶ نیز برابر با ۴- است.	این دانش‌آموزان طبق قانون ضرب اعداد صحیح و بدون دقت به مفهوم رادیکال، حاصل ضرب 4×-4 را برابر با ۱۶ می دانند و پاسخ الف را درست انتخاب کرده اند. به عبارتی ۴- را ریشه دوم عدد ۱۶ می دانند؛ اما توجه ندارند که جذر یک عدد همیشه مثبت است و اعداد منفی جذر ندارند.	۱	پاسخهای نادرست
	هر دو گزینه الف و ب صحیح می باشند. در گزینه الف، ۴- ریشه دوم ۱۶ است؛ پس جذر ۱۶ برابر با ۴- است و در گزینه ب، ۴+ ریشه دوم ۱۶ می باشد و ۴+ حاصل ضرب شده و رادیکال ضرب شده و حاصل برابر با ۴- می شود.	این دانش‌آموزان ۱۶ را ریشه دوم ۴ و ۴- می دانند و جذر ۱۶ را هم برابر با هر دو عدد ۴+ و ۴- می دانند.	۲	
	غیره	پاسخ هایی که تصادفی جواب درست و نادرست را انتخاب کرده اند اما دلیل را نمی دانند و توضیح نداده اند و یا تحلیل دلایل آنها امکان پذیر نیست.		غیر قابل تحلیل

جدول ۱۸. فراوانی و درصد پاسخ دانش‌آموزان به سوال هشتم آزمون

درصد فراوانی پسران و دختران	فراوانی پسر و دختر	درصد فراوانی پسران	فراوانی پسران	درصد فراوانی دختران	فراوانی دختران	نوع پاسخها
۲۴/۴۴٪	۴۴	۲۵٪	۳۱	۲۳/۲۱٪	۱۳	پاسخ درست
۱۲/۲۲٪	۲۲	۱۱/۲۹٪	۱۴	۱۴/۲۹٪	۸	بدفهمی شماره ۱
۷/۲۲٪	۱۳	۷/۲۶٪	۹	۷/۱۴٪	۴	بدفهمی شماره ۲
۳۵/۵۶٪	۶۴	۳۳/۸۷٪	۴۲	۳۹/۲۹٪	۲۲	غیر قابل تحلیل
۲۰/۵۶٪	۳۷	۲۲/۵۸٪	۲۸	۱۶/۰۷٪	۹	عدم پاسخگویی
۱۰۰٪	۱۸۰	۱۰۰٪	۱۲۴	۱۰۰٪	۵۶	جمع

حدود ۲۴٪ از دانش آموزان پاسخ درست و حدود ۷۶٪ از آنها پاسخ اشتباه داده‌اند. علت بروز این مشکل را می‌توان در آشنایی دانش آموزان با مفهوم ریشه منفی دانست. به عبارت دیگر، از آنجایی که دانش آموزان با معادله‌هایی مانند " $x^2 = 9$ " مواجه شده‌اند که دارای دو ریشه $+3$ و -3 است، لذا این بدفهمی در آن‌ها ایجاد می‌شود که با وجود یافته‌ها و نتیجه‌گیری‌های فوق، انتظار می‌رفت که دانش آموزان عملکرد بهتری در حل این سؤال داشته باشند.

بحث و نتیجه‌گیری

برای پاسخ به سوال اول پژوهش، سوالات ۱، ۲ و ۳ آزمون محقق ساخته تحلیل شد. نتایج حاصل از تحلیل این سه سوال آزمون نشان داد که ۷/۲۲٪ از کل دانش‌آموزان مفهوم عملگر واحد و عملگر دوتایی علامت "-" را به درستی درک کرده‌اند که در این میان آمار پسران حدود ۳٪ بیشتر از دختران می‌باشد. ۳۳/۸۹٪ از کل دانش‌آموزان در درک مفهوم عملگر واحد علامت "-" دچار بدفهمی هستند که درصد دختران و پسرانی که این بدفهمی را دارند تقریباً یکسان می‌باشد. ۳۲/۲۲٪ از دانش‌آموزان در درک مفهوم عملگر دوتایی علامت "-" دچار بدفهمی هستند که درصد پسرانی که دچار این بدفهمی هستند حدود ۳٪ بیشتر از دختران می‌باشد. ۴۲/۲۲٪ از دانش‌آموزان مفهوم قرینه را درک کرده‌اند که آمار پسران ۴٪ از دختران بیشتر است. ۴۷/۷۸٪ از دانش‌آموزان در مفهوم تقارن علامت "-" دارای بدفهمی هستند که دختران ۴٪ بیشتر از پسران دارای این بدفهمی هستند. ۱۴/۴۴٪ تفاوت قرینه و معکوس را درک کرده‌اند که در این میان پسران ۳٪ بیشتر از دختران هستند. ۲۲/۲۳٪ از دانش‌آموزان مفهوم قرینه را با معکوس اشتباه گرفته‌اند آمار پسرانی که دارای این بدفهمی هستند ۱٪ بیشتر از دختران می‌باشد.

طبق یافته‌های این پژوهش از پاسخ دانش‌آموزان به سوال اول پژوهش چهار نوع بدفهمی شناسایی شد. دانش‌آموزان در درک مفهوم تقارن علامت منفی بیشترین بدفهمی را داشتند و در نوشتن معکوس به جای قرینه دارای کمترین بدفهمی بودند. همچنین در درک مفهوم عملگر واحد و عملگر دوتایی (تفاضل) علامت منفی درصد زیادی از دانش‌آموزان بدفهمی داشتند و تقریباً بدفهمی آنها در درک عملگر واحد و دوتایی یکسان بود. علت بروز بدفهمی‌های مربوط به این سوال پژوهش به شرح زیر بود:

۱. برداشت برخی از دانش‌آموزان از بیشترین مقدار جواب، بیشترین مقدار از لحاظ اندازه بوده است و ارزش علامت جواب نهایی را در نظر نگرفته‌اند.
۲. برخی از دانش‌آموزان در تمام جاهای خالی علامت "+" قرار داده‌اند و علامت "+" را به عنوان یک عملگر افزایشی در نظر گرفته‌اند و برداشت آنها از علامت "+" این است که همیشه باعث افزایش مقدار جواب می‌شود.

۳. گروهی از دانش‌آموزان اعداد منفی را بزرگتر از اعداد مثبت و صفر می‌دانند.
 ۴. برخی از دانش‌آموزان مفهوم قرینه را درک نکرده‌اند.
 ۵. برخی از دانش‌آموزان مفهوم قرینه را با معکوس اشتباه گرفته‌اند.

نتیجه حاصل از سوال ۱ این پژوهش بر اساس تجزیه و تحلیل نتایج به دست آمده از سوالات ۱، ۲ و ۳ آزمون مربوطه، با نتیجه پژوهش‌های ریحانی، حمیدی و راشدی (۱۳۹۴)، برونو (۱۹۹۹)، بهرنند (۲۰۰۶)، کثکارت، پوثر و وانسه (۲۰۰۳)، فوآدیه و سوروادی (۲۰۱۷ و ۲۰۱۹)، گالاردو (۲۰۰۲)، مولیتوری سو (۲۰۱۱)، پلد و موخوپادهوی و رسنیک (۱۹۹) و بوفردینگ (۲۰۱۰) مطابقت و همسویی دارد و همه بدفهمی‌های مشاهده شده در این تحقیق، در پژوهش‌های ذکر شده نیز مشاهده شده است.

برای پاسخ به سوال دوم پژوهش، سوال چهار آزمون محقق ساخته تحلیل شد. نتایج به دست آمده، نشان می‌دهد که ۳۲/۲۲٪ از کل دانش‌آموزان به این سوال پاسخ درست داده‌اند، که ۳۳٪ از پسران و ۳۰٪ از دختران ترتیب اعداد صحیح را به خوبی درک کرده‌اند. در تحلیل بدفهمی‌های مربوط به این سوال، ۲۵٪ از کل دانش‌آموزان صفر را به عنوان کوچکترین عدد صحیح در نظر گرفته‌اند که ۲۷/۴۲٪ از پسران و ۱۹/۶۴٪ از دختران دارای این بدفهمی بودند. ۲۸/۳۴٪ از کل دانش‌آموزان اعداد منفی را کوچکتر از صفر مرتب کرده بودند اما در ترتیب اعداد منفی و اعداد علامت‌دار مثبت دارای بدفهمی بودند، که ۲۹/۸۴٪ از پسران و ۲۵٪ از دختران دارای این بدفهمی بودند. حدود ۱۴٪ از دانش‌آموزان نیز به این سوال پاسخی نداده بودند.

دانش‌آموزان دختر و پسر به طور مشترک دارای ۷ نوع بدفهمی در دو دسته بودند، که در همه بدفهمی‌های مربوط به این سوال، درصد پسرانی که دچار بدفهمی بودند بیشتر از دختران بود. بدفهمی: در مرتب‌کردن اعداد منفی از کوچک به بزرگ اعداد منفی را مانند اعداد مثبت فرض کرده و تصور کرده‌اند که هر چه فاصله عدد از صفر بیشتر شود عدد بزرگتر است، رایج‌ترین بدفهمی در بین پسران و دختران بود و ۱۸٪ از پسران و ۱۴٪ از دختران دچار این بدفهمی بودند.

در بررسی سوال دوم پژوهش بر اساس پاسخ‌های دانش‌آموزان هفت نوع بدفهمی در دو گروه مشاهده شد. گروه اول: دانش‌آموزانی بودند که اعداد منفی را کوچکتر از صفر فرض می‌کردند، اما در ترتیب اعداد منفی و اعداد مثبت علامت‌دار دچار بدفهمی بودند این گروه بیشترین بدفهمی را داشتند. گروه دوم: دانش‌آموزانی که اعداد منفی را بزرگتر از صفر فرض می‌کردند که این گروه کمترین بدفهمی را داشتند. دلایل بروز بدفهمی‌های دانش‌آموزان در بررسی این سوال به شرح زیر می‌باشد:

الف) برخی از دانش‌آموزان، صفر را به عنوان کوچک‌ترین عدد صحیح در نظر گرفته‌اند؛ زیرا

۱. برخی از دانش‌آموزان همه اعداد را مثبت فرض می‌کنند و بدون توجه به علامتها، همه اعداد را مانند اعداد طبیعی مرتب می‌کنند، این دانش‌آموزان تفاوت بین اعداد مثبت و منفی را

درک نکرده‌اند. به گمان برخی از این گروه دانش‌آموزان، اعداد منفی در حقیقت عدد نیستند و تنها مانند اعداد طبیعی عمل می‌کنند که یک علامت منفی در مقابل آنها وجود دارد.

۲. برخی صفر را کوچکترین عدد، اعداد منفی را کوچکتر از مثبت‌ها و اعداد منفی را به صورت نادرست مرتب می‌کنند. یعنی در مرتب‌سازی اعداد منفی، همان قاعده اعداد مثبت را استفاده کرده‌اند و اعداد منفی را از نظر اندازه و نه از نظر ارزش مرتب کرده‌اند. این دانش‌آموزان بدون درک درست از اعداد منفی، می‌گویند که این اعداد چون علامت "-" دارند از صفر بزرگتر و از بقیه اعداد کوچکترند.

۳. دسته سوم نیز صفر را کوچکترین عدد و اعدادی که علامت "-" دارند را بزرگتر از صفر و کوچکتر از بقیه اعداد می‌دانند. این دانش‌آموزان گرچه اعداد منفی را درست مرتب کرده‌اند اما درک درستی در شناخت مفهوم این اعداد ندارند.

۴. برخی صفر را کوچکترین عدد می‌دانند و اعداد مثبت و منفی را بدون توجه به علامتشان از لحاظ مقدار مرتب می‌کنند.

ب) برخی از دانش‌آموزان، اعداد منفی را کوچکتر از صفر مرتب کرده‌اند؛ اما

۱. دانش‌آموزانی که این نوع بدفهمی را دارند هر چند اعداد منفی را کوچکتر از صفر می‌دانند اما در مرتب‌کردن اعداد منفی مانند اعداد مثبت بر اساس مقدار عدد عمل کرده‌اند. این دانش‌آموزان تصور می‌کنند که در اعداد منفی نیز مانند اعداد مثبت هر چه فاصله عدد بر روی محور اعداد از صفر بیشتر شود عدد بزرگتر است. آنها با این که پذیرفته‌اند که اعداد منفی وجود دارند اما برای توجیه پاسخ‌هایشان دو نوع دلیل ارائه کرده‌اند: گروهی از آنها اعداد ۱ و -۱ را به عنوان مبدا در محور اعداد می‌دانند و صفر را به عنوان یک عدد در نظر نمی‌گیرند. این گروه عدد ۱ را کوچکترین عدد صحیح مثبت و عدد -۱ را کوچکترین عدد صحیح منفی می‌دانند و عدد ۰ را به عنوان یک عدد در نظر نمی‌گیرند و در درک مبدا نیز دچار بدفهمی هستند. گروه دیگری از این دانش‌آموزان که دارای این نوع بدفهمی هستند صفر را به عنوان مبدا در محور اعداد صحیح قبول دارند اما مانند گروه اول تصور می‌کنند که اعداد منفی مانند اعداد مثبت هر چه از مبدا (عدد ۰) دورتر شوند بزرگتر هستند.

۲. برخی در مرتب‌کردن اعداد منفی، عدد صفر و همچنین اعداد طبیعی به جز عدد +۹ درست عمل کرده‌اند. این دانش‌آموزان مبدا اعداد صحیح بر روی محور اعداد را درست درک کرده‌اند، اما در درک این که اعداد صحیح مثبت را می‌توان بدون علامت «+» نیز نوشت و هر عدد طبیعی یک عدد صحیح مثبت است که علامت "+" آن حذف شده، دچار بدفهمی هستند. این دانش‌آموزان می‌دانند که اگر علامت "-" را از اعداد منفی حذف کنیم ارزش عدد تغییر می‌کند، این قانون را به اعداد مثبت نیز تعمیم می‌دهند و تصورشان این است که چون ۹- با ۹ مساوی نیست ($9 \neq -9$)، پس +۹ نیز با ۹ مساوی نیست. این افراد تصور می‌کنند که اعداد صحیح مثبت با اعداد طبیعی متفاوت هستند.

۳. برخی اعداد منفی را کوچکتر از صفر می‌دانند اما در مرتب‌کردن اعداد منفی مانند اعداد مثبت بر اساس مقدار عدد عمل کرده‌اند؛ این دانش‌آموزان تصور می‌کنند که در اعداد منفی نیز

مانند اعداد مثبت هر چه فاصله عدد بر روی محور اعداد از صفر بیشتر شود عدد بزرگتر است. همچنین این گروه از دانش‌آموزان در درک این که اعداد صحیح مثبت را می‌توان بدون علامت "+" نیز نوشت و هر عدد طبیعی یک عدد صحیح مثبت می‌باشد که علامت "+" آن را حذف کرده‌ایم دچار بدفهمی هستند. پس این دانش‌آموزان در پاسخ به این سوال همزمان دارای بدفهمی دسته اول و دسته دوم می‌باشند.

توجه: بدفهمی‌های شماره ۲ و ۳ قسمت ب، در نمونه مورد مطالعه در این پژوهش مشاهده شدند، اما این دو نوع بدفهمی در هیچ یک از پژوهش‌های بیان شده در منابع پایانی مشاهده نشده‌اند. همچنین در نتایج حاصله از پژوهش‌های بیان شده در منابع پایانی محققین چهار نوع دیگر بدفهمی به شرح جدول زیر شناسایی کردند که در این پژوهش مشاهده نشدند.

جدول ۱۸. پاسخهای دانش‌آموزان به سوال دوم در این پژوهش و پژوهش‌های قبل و دلایل بروز بدفهمی‌های آنان

پاسخ‌های نادرست دانش‌آموزان به این سوال	دلایل نادرست ارائه شده توسط دانش‌آموزان در توجیه پاسخی که داده‌اند
۰، ۴، ۸، ۱۱، ۱۶، ۲، ۴، ۸، ۱۶	<p>چون محور اعداد را از سمت راست به چپ می‌خوانیم، پس اعداد منفی بزرگترند.</p>
۰، ۴، ۸، ۱۱، ۱۶، ۲	<p>اعداد منفی بزرگتر از اعداد مثبتند و اعداد منفی را مانند اعداد مثبت، از لحاظ مقدار مرتب می‌کنند نه از لحاظ اندازه.</p>
۰، ۴، ۸، ۱۱، ۱۶، ۲	<p>اعداد منفی طبق محور اعداد به ترتیب از راست به چپ بزرگترند.</p>
۰، ۲، ۴، ۸، ۱۱، ۱۶	<p>اعداد را بر اساس مقدار مرتب می‌کنند و چون عدد ۴- علامت دارد پس از عدد ۴ بزرگتر است.</p>

با مقایسه نتایج بدفهمی‌های مربوط به این سوال و پژوهش‌های ریحانی (۱۳۹۴) و بوفردینگ (۲۰۱۰)، در می‌یابیم که در پژوهش آنها دانش‌آموزان دچار ۸ نوع بدفهمی هستند که ۵ نوع بدفهمی در این پژوهش با پژوهش‌های آنها مشترک و همسو می‌باشند. نتایج با ریحانی، حمیدی و راشدی (۱۳۹۴)، برونو (۱۹۹۹)، بهرنند (۲۰۰۶)، کشکارت، پوثر و وانسه (۲۰۰۳)، فوآدیه و سوروادی (۲۰۱۷ و ۲۰۱۹)، گالاردو (۲۰۰۲)، مولیتوری سو (۲۰۱۱)، پلد و موخوپادهوی و رسنیک (۱۹۹) و بوفردینگ (۲۰۱۰) همسو است.

برای پاسخ به سوال سوم این پژوهش، سوالات ۵، ۶، ۷ و ۸ آزمون محقق ساخته تحلیل شدند. تعداد ۸/۸۹٪ از کل دانش‌آموزان به تمام عبارت‌های مربوط به جمع و تفریق اعداد منفی پاسخ صحیح دادند که از این تعداد ۷٪ دختر و ۱۰٪ پسر بودند. دانش‌آموزان در جمع و تفریق اعداد صحیح دچار سه نوع بدفهمی هستند که در بین این سه بدفهمی، بدفهمی شماره ۱، (عدم درک معانی مختلف علامت "-") به عنوان عملگر واحد یا عملگر دوتایی) که مرتبط با سوال اول پژوهش می‌باشد رایج‌تر از بقیه بدفهمی‌هاست و حدود ۳۸٪ از کل دانش‌آموزان (۳۷/۵٪ دختر و ۳۸/۷٪ پسر) دارای این بدفهمی هستند. ۵/۵۶٪ از دانش‌آموزان دارای بدفهمی شماره ۲، هستند؛ یعنی خاصیت جابجایی را در جمع درک نکرده‌اند و از این خاصیت به طور نادرست در تفریق نیز استفاده کرده‌اند. ۳/۳۳٪ دارای بدفهمی شماره ۳، هستند؛ یعنی از خاصیت شرکت‌پذیری در جمع چند عدد

حسابی، در تفریق اعداد صحیح استفاده کرده‌اند. در این سه نوع بدفهمی تقریباً درصد پسران و دختران نزدیک به هم می‌باشد. $10/56\%$ از دانش‌آموزان نیز سوال را درک کرده اما دچار اشتباه محاسباتی شده‌اند و $33/33\%$ نیز به عبارت‌های این سوال پاسخی نداده‌اند. با بررسی پاسخ‌های دانش‌آموزان به این قسمت از سوال پژوهش و مقایسه آن با نتیجه پژوهش‌های یافتیان (۱۴۰۰) و بوفردینگ (۲۰۱۴)، در می‌یابیم که بدفهمی‌های دانش‌آموزان در این پژوهش با پژوهش‌های منبع مشابه و همسو می‌باشد.

$16/11\%$ از کل دانش‌آموزان به سوال الگویابی پاسخ درست داده‌اند که $16/93\%$ از پسران و $14/29\%$ از دختران بوده‌اند. 60% از کل دانش‌آموزان در الگویابی دارای بدفهمی هستند که $62/1\%$ از پسران و $55/36\%$ از دختران می‌باشد. $7/78\%$ از دانش‌آموزان به این سوال پاسخ غیر قابل تحلیل داده‌اند و $16/11\%$ نیز به این سوال پاسخ نداده‌اند. با مقایسه نتیجه بدفهمی‌های این سوال با نتایج پژوهش‌های منبع (ریحانی ۱۳۹۴ و بوفردینگ ۲۰۱۴) در می‌یابیم که نتایج این پژوهش با پژوهش‌های منبع مطابقت و همسویی دارد. با توجه به این که هدف از این سوال این است که دانش‌آموزان با استفاده از الگویابی به درک درستی از اعداد منفی برسند، اما بدفهمی‌های مشترکی در بین دانش‌آموزان در هر دو پژوهش وجود داشت. نکته جالب در هر دو پژوهش این بود که برخی از دانش‌آموزان که عدد صفر را در جای خالی قرار داده‌اند، این دلیل را ارائه کردند که هیچ عددی را نمی‌توان با ۴ جمع کرد که حاصل جمع آنها ۳ باشد، بنابراین عدد ۰ را در جای خالی قرار داده‌اند.

بر اساس نتایج حاصل از پاسخ دانش‌آموزان به سوال سوم شش نوع بدفهمی مشاهده شد. دانش‌آموزان در الگویابی اعداد منفی بیشترین بدفهمی و در کاربرد اعداد منفی در حل مسائل جبری کمترین بدفهمی را داشتند، اما جالب اینجاست که بیشتر از ۵۶ درصد از دانش‌آموزان به سوال آزمون مربوط به جذر هیچگونه پاسخی نداده‌اند، و حدود ۱۶ درصد از آنها به سوال آزمون که مربوط به الگویابی می‌باشد پاسخ نداده‌اند. همچنین با توجه به درصد بالای پاسخ‌های غیرقابل تحلیل در سوالات آزمون مرتبط با جذر و جبر، در می‌یابیم که دانش‌آموزان در درک مفهوم جبر و جذر بسیار مشکل دارند و درصد بالایی از آنها این مفاهیم را به طور کلی درک نکرده‌اند.

چهار نوع از بدفهمی‌های سوال سوم پژوهش در مبحث عملیات چهارگانه بر روی اعداد منفی قبل از ورود به مبحث جبر شناسایی شده‌اند (عدم درک علامت "-" به عنوان عملگر واحد یا دوتایی، استفاده نادرست از خاصیت جابجایی در جمع و تفریق اعداد منفی، استفاده نادرست از خاصیت شرکت‌پذیری در جمع و تفریق اعداد منفی و عدم درک اعداد منفی در الگویابی) و در ورود به مبحث جبر و توان و معادله، دو نوع دیگر بدفهمی نیز در نتایج حاصله از آزمون مربوط به این پژوهش مشاهده گردید که در ادامه دلایل بروز این بدفهمی‌ها بیان می‌شود. دلایل بروز این بدفهمی‌ها به شرح زیر است:

۱. اکثر آنها با حفظ قوانین علامت‌ها بدون درک درست از آنها، دچار بدفهمی شده‌اند؛ مثلاً از قانون ضرب علامت‌ها برای تشخیص علامت پاسخ نهایی در جمع و تفریق کمک می‌گیرند.

۲. برخی از آنان با ساختن قوانین جدید در ذهن خود و بدون توجه به علامت اعداد، عملیات جمع و تفریق را انجام می دهند و در پایان یکی از علامت‌های مثبت و منفی را برای پاسخ نهایی در نظر می گیرند.

۳. برخی از دانش‌آموزان نیازی به استفاده از اعداد منفی ندارند و مسائل را به طور ساده‌تر و با اعداد مثبت به صورت ذهنی حل کرده و به سوالات پاسخ می دهند.

در نتایج پاسخ‌های برخی از دانش‌آموزان در بخش الگویابی سه نکته جالب وجود دارد: اول اینکه برخی از دانش‌آموزان فکر می کنند که چون هیچ عددی وجود ندارد که با عدد ۴ جمع شود و حاصل جمع آنها برابر ۳ باشد؛ پس در جای خالی عدد ۰ را نوشته‌اند. نکته دوم این که برخی از دانش‌آموزان خودشان عدد ۳ را در صورت سوال به ۳- تغییر داده و در جای خالی عدد ۷- نوشته‌اند. نکته سوم این که برخی از دانش‌آموزان در عبارت $4 + \square = -1$ ، در جای خالی عدد ۳- را نوشته‌اند و بدون توجه به علامت "-" در عدد ۱-، این عدد را با ۱ مساوی می دانند. بدفهمی مربوط به نکته سوم الگویابی در هیچ یک از تحقیقات گذشته وجود نداشت. محققان گذشته که این نمونه سوال را در پرسشنامه‌هایشان مطرح کرده بودند چون فقط یک عبارت مجهول در الگویابی داشتند و عبارت مجهول با اعداد ترتیبی کامل می شد، برخی از دانش‌آموزان بدون درک الگویابی اعداد منفی، فقط با حفظیات خودشان، عدد ترتیبی بعدی را در جای خالی نوشته بودند. اما همان طور که در سوال ششم آزمون ملاحظه می کنید دو عبارت مجهول در این سوال وجود دارد که اولی با اعداد ترتیبی طبق الگوی قبلی کامل می شود و دومی با توجه به الگوی عبارت های قبلی و فقط با درک و شناخت درست از اعداد منفی و استفاده درست از آنها در الگو کامل می شود. از پاسخهای دانش‌آموزانی که دچار این بدفهمی شده‌اند نیز ملاحظه می شود که آنان عبارت اول را با اعداد ترتیبی و درست نوشته‌اند، اما در عبارت دوم که ترتیب به هم می خورد نتوانسته‌اند الگویابی را درست درک کنند و پاسخ اشتباه داده‌اند.

آگاهی نسبت به این مشکلات و بدفهمی‌ها نه تنها برای معلمان پایه های ششم و هفتم، بلکه برای معلمان پایه‌های پایین‌تر نیز از اهمیت بالایی برخوردار است، زیرا یکی از مهمترین مواردی که باید به آن توجه کرد این است که دانش‌آموزانی که بینش بهتری نسبت به اعداد مثبت دارند در درک اعداد منفی با موانع و چالش‌های کمتری مواجه می شوند. معلمان پایه های ششم و هفتم با توجه به بدفهمی‌ها و مشکلات عنوان شده می توانند روش تدریس خود را تغییر دهند و از مدل‌ها و شیوه‌های مختلف برای تدریس این مفهوم استفاده کنند. بعضی از قوانین توسط معلمان به صورت کلیشه‌ای به دانش‌آموزان آموخته می شود بدون آن که معنی و مفهوم آن برای ایشان شفاف گردد. همین امر سبب بروز بدفهمی‌های متفاوت در مبحث اعداد منفی می گردد و بدفهمی‌های به وجود آمده می تواند در یادگیری مباحث بعدی ریاضی نیز باعث بروز مشکل شود. نه تنها آگاهی از مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان برای معلمان مفید است و باعث می شود شیوه مناسب‌تری برای آموزش مفهوم اعداد منفی به کار گیرند، آشنایی دانش‌آموزان در این زمینه نیز کمک می کند که آنان در یادگیری خود تامل بیشتری کنند. امیدوارکننده است که در کتاب‌های تازه تالیف در سیستم آموزشی کشور ما در این زمینه گام‌هایی برداشته شده است. برای مثال می توان به کاردرکلاس صفحه ۳ کتاب ریاضی پایه هشتم اشاره کرد که در ابتدای کتاب برای یادآوری اعمال روی اعداد صحیح آمده است. در این کاردرکلاس مولفان کتاب ذکری از عنوان بدفهمی نمی کنند ولی به طور غیرمستقیم سعی در آگاه کردن دانش‌آموزان در این خصوص دارند.

جای طرح چنین مسائلی در کتاب ریاضی پایه هفتم خالی است، زیرا که در این پایه به بسط و توسعه اعداد منفی پرداخته شده است و دانش‌آموزان با اعداد منفی بیشتر از پایه ششم آشنا می‌شوند. بنابراین آماده‌آشنایی با مواردی از جمله این کاردرکلاس و تأمل درباره آن هستند. از آنجا که در کشور ما دانش‌آموزان در پایه ششم با اعداد منفی آشنا می‌شوند و این آشنایی در پایه هفتم بسط داده می‌شود، زمان بیشتری برای آموزش و یادگیری آن لازم است. در واقع، صرف زمان بیشتر برای تدریس و یادگیری شیوه‌های مختلف آن، از جمله به‌کارگیری الگوهای عددی، محور اعداد و غیره به درک عمیق‌تر دانش‌آموزان کمک می‌کند. شاید به کار بردن قوانین علامت‌ها در این مبحث بتواند برای آموزش این مفهوم مفید باشد، اما ابتدا می‌باید دانش‌آموزان به درک درست و کاملی از آنها برسند تا بتوانند در حل مسائل از این قوانین استفاده کنند و دچار اشتباه نشوند. همچنین شیوه‌های ارزیابی متفاوت برای سنجش میزان درک و فهم دانش‌آموزان و شناسایی بدفهمی‌های احتمالی آنان موثر است. بهتر است در این ارزیابی‌ها مسائلی که به دانش‌آموزان داده می‌شود به گونه‌ای باشد که با مسائل دنیای واقعی نیز روبه‌رو شوند. استفاده کاربردی دانش‌آموزان از این مباحث درک عمیق‌تری را به همراه خواهد داشت و بهتر است از ایشان خواسته شود راه‌حل‌ها و پاسخ‌هایشان را توضیح دهند تا معلمان از استدلال‌هایشان مطلع شوند. با توجه به این که اعداد منفی از جمله مفاهیم انتزاعی هستند که در فرآیند آموزش آنها دانش‌آموزان با مشکلات زیادی روبه‌رو می‌شوند، همچنین آنها مسائل مربوط به اعداد منفی را به صورت شفاهی بهتر از نوشتاری و کتبی حل می‌کنند و نیز برخی از دانش‌آموزان که در درک مفهوم اعداد منفی دچار مشکل و بدفهمی هستند در فرآیند انتقال از حساب به جبر که اعداد منفی را به عنوان ضرایب، ثابت‌ها و یا پاسخ دارند، در تجزیه و تحلیل دچار مشکل و سردرگمی می‌شوند و بدفهمی در اعداد منفی و مباحث مرتبط با آن سبب شکل‌گیری طرحواره‌های ناقص دیگر در ذهن آنها و شکست‌شان در حل مسائل می‌شود. نوع آموزش معلمان ریاضی و دیدگاهشان در آموزش مباحث ریاضی، مخصوصاً در مبحث اعداد منفی و شرایط و محیط آموزشی مدارس روستاها و مناطق محروم، از مهمترین موارد مهم برای محققان بودند تا موضوع «مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان مناطق روستایی الیگودرز» را موضوعی با اهمیت بدانند.

مشارکت نویسندگان

شایسته رضائی - هوشنگ فریدونی

تقدیر و تشکر

مقاله ارسالی حاصل پایان‌نامه دانشجوی هوشنگ فریدونی در مقطع کارشناسی ارشد می‌باشد.

تعارض منافع

«هیچ‌گونه تعارض منافع توسط نویسندگان بیان نشده است»

- امینی فر، ا.؛ زهره وندش؛ زعیم باشی ع. (۱۳۹۴). درک و اشتباهات مفهومی دانش‌آموزان از مفهوم متغیر در جبر مقدماتی. نشریه علمی پژوهشی فصلنامه نوآوریهای آموزشی. ۱۴ (۱). ۹۵-۷۷.
- بخشعلیزاده، ش (۱۳۹۲). شناسایی بدفهمی‌های رایج دانش‌آموزان پایه چهارم ابتدایی در حوزه محتوایی ریاضی. ناظر طرح: غلام‌آزاد، سهیلا. همکار اصلی: بروجردیان، ناصر. طرح پژوهشی مصوب وزارت آموزش و پرورش. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. پژوهشگاه مطالعات آموزش و پرورش.
- راشدی ف، ابراهیم ریحانی ا. و حمیدی ف. (۱۳۹۲)، دانش‌آموزان در مورد اعداد منفی چگونه می‌اندیشند؟ پنجمین همایش ملی آموزش.
- راشدی ف. (۱۳۹۲) بررسی درک و فهم دانش‌آموزان سال دوم راهنمایی از مفهوم اعداد منفی و اشتباهات آنان، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، دانشکده علوم پایه، تهران.
- ریحانی ا.، حمیدی ف.، و راشد ف. (۱۳۹۴) بررسی درک و فهم دانش‌آموزان از اعداد منفی و بدفهمی‌های آنان، نشریه علمی پژوهشی فناوری آموزش، ۱۳۱-۱۱۵.
- زینی وند ف. (۱۳۹۴)، تبیین مفهومی ریاضی: چیستی و چرایی و چگونگی، دوفصلنامه مطالعات برنامه درسی آموزش عالی ۶ (۱۲) ۱۷۲-۱۵۳.
- غلام‌آزاد س. (۱۴۰۱)، اجرای برنامه درسی ریاضی دوره اول ابتدایی: چاش‌ها و راهکارها، نشریه نظریه و عمل در برنامه درسی، ۲۰ صص ۴۲۶-۳۹۵.
- نظری م. ج. (۱۳۹۱)، بررسی ریشه‌های بدفهمی‌های دانش‌آموزان سال اول متوسطه در رابطه با اعداد منفی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد آموزش ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی، دانشکده علوم ریاضی و کامپیوتر، تهران.
- نظری م. ج. (۱۳۹۱)، آموزش اعداد منفی و چالش‌های یادگیری دانش‌آموزان، سیزدهمین کنفرانس آموزش اعداد منفی و چالش‌های یادگیری دانش‌آموزان.
- یافتیان ن.، مهدوی ن. و مهرآئین ب. (۱۴۰۰)، مشکلات و بدفهمی‌های دانش‌آموزان در خصوص مفهوم اعداد منفی، نشریه ریاضی و جامعه، دانشگاه اصفهان ۵ (۱)، ۴۸-۳۷.

Ay. B2019). An Investigation on Seventh Grade Students' understanding of Negative Integers via Mathematics History based Model-eliciting Activities, Doctoral Dissertation, Middle East Technical University, Ankara.

- Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *The Elementary School Journal*, 93(4), 373-397.

Behrend, J. L., and Mohs, L. C., (2006) From simple questions to powerful connections: A two-year conversation about negative numbers. *Teaching Children Mathematics* , 12(5) 260-264.

Bishop, J. P., Lamb, L. L. C., Philipp. R. A., Schappelle, B. P., and Whitacre, I. (2011), An investigation of negative-number reasoning: The case of Violet. Presentation at the meeting of Annual Meeting of the American Educational Research Association, New Orleans, LA.

Bishop J.P., Lamb L.L., Philipp R.A., I. Whitacre and B. P. Schappelle, (2014) Using order to reason about negative numbers: the case of Violet, Ed. *Stu. Math.* (86) 39-59.

Bofferding L., (2010) Addition and subtraction with negatives: Acknowledging the multiple meanings of the minus sign, Proc. 32nd Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 703-710.

Bofferding L. (2014), Negative integer understanding: Characterizing first graders' mental models, *J. Research Math. Ed.*, (45) 94–245.

Bruno A. and Martinon A., (1999) The teaching of numerical extensions: The case of negative numbers, *Internat. J. Math. Ed. Sci. Tech.*, (30) 789–809.

Cathcart, W. G., Pothier, Y. M., Vance, J. H., and Bezuk, N. S., (2003) *Learning mathematics in elementary and middle schools*, (Third Edition.), Upper Saddle River, NJ: Prentice.

Encarta® 1001 [DVD]. Redmond, WA. Microsoft corporation, 1001.

Fagnant A., Vlassis, J., and Crahay, M. (2005). Using mathematical symbols at the beginning of the arithmetical and algebraic learning, *@inbook*, 81-95.

Fuadiah N.F. and Suryadi D. ,(2017) Some difficulties in understanding negative numbers faced by students: A qualitative study applied at secondary schools in Indonesia, *Internat. Ed. Stud.*, (10) 24–3.

Fuadiah N.F and Suryadi D., (2019) Teaching and learning activities in classroom and their impact on student misunderstanding: A case study on negative integers, *Internat. J. Instruction*, (12) 407–424.

Gallardo, A., & Rojano, T. (1994). School algebra. Syntactic difficulties in the operativity. In D. Kirshner (Ed.), *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, North American Chapter, Baton Rouge.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics*.

Gullick, M. M., Wolford, G., and Temple, E., (2012) Understanding less than nothing: Neural distance effects for negative numbers, available at <http://www.science direct.com>. *NeuroImage*, 62 (1) 542-554.

Kilhamn, C. (2011), *Making Sense of Negative Numbers*, Doctoral Thesis, University of Gothenburg.

Linchevski, L., Williams, J., (1999), "Using intuition from everyday life in 'filling' the gap in children's extension of their number concept to include the negative numbers", *Educational Studies in Mathematics*, 39, 131- 147.

Molitorisov L.,(2011) *Use of the History of Negative Numbers in Education*, Faculty of Mathematics, Physics Informatics, Comenius University, Bratislava, 429–435.

Peled, I., Mukhopadhyay, S., and Resnick, L. B.,(1989) Formal and informal sources of mental models for negative numbers, In G. Vergnaud, J. Rogalski & M. Artique (Eds.), *The 13th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Paris, France: PME, 3,108-112.

معرفی نویسندگان

AUTHOR(S) BIOSKETCHES

شایسته رضائی، عضو هیات علمی گروه ریاضی دانشگاه آزاد اسلامی. چاپ و ارائه بیش از ۵۰ مقاله در مجلات معتبر داخلی و خارجی و کنفرانس های ملی و بین المللی. هوشنگ فریدونی، کارشناس ارشد مدیریت آموزشی، دبیر آموزش و پرورش.