

مدلسازی دینامیک غیرخطی و تحلیل ارتعاشات تنسگریتی منشوری با مقطع مربعی با لحاظ سفتی گرانشی: مطالعه مقایسه‌ای

مرتضی جهان دانشجوی دکتری، پژوهشگاه هوافضا، تهران، ایران، jahan@sun.ari.ac.ir
میلاذ عظیمی* استادیار، گروه طراحی وسایل فضایی، پژوهشگاه هوافضا، تهران، ایران، azimi.m@ari.ac.ir

چکیده

سیستم‌های تنسگریتی، ساختارهای شبکه‌ای فضایی سبک متشکل از المان‌های فشاری و کششی بوده که قابلیت استفاده در سازه‌های تنظیم‌پذیر را دارا می‌باشند. پایداری اولیه این سازه‌ها، با ایجاد شرایط پیش-تنش میان المان‌ها ایجاد می‌شود. این سیستم‌ها دارای میرایی ساختاری پایینی بوده که در حضور بارهای دینامیکی دچار چالش می‌شوند. بنابراین، پیش‌بینی رفتار و استخراج مشخصه‌های دینامیکی این سازه‌ها برای دستیابی به یک طراحی ایمن ضروری است. در این مقاله، به تحلیل ارتعاشات سازه تنسگریتی یک تا چهار طبقه با مقطع مربعی پرداخته شده است. معادلات دینامیک غیرخطی سیستم بر مبنای مختصات گره‌ها، با استفاده از رویکرد لاگرانژ و روش المان محدود استخراج شده است. فرمیابی اولیه سازه تنسگریتی با روش چگالی نیرو برای سازه‌های یک تا چهار طبقه با مقطع و ارتفاع ثابت صورت پذیرفته است. طراحی مقطع المان‌ها بر مبنای حداقل جرم صورت پذیرفته و مدلسازی دینامیکی قابلیت رصد تغییر شکل‌های الاستیک/پلاستیک با انواع شرایط مرزی و بارگذاری‌های استاتیکی-دینامیکی در راستاهای مختلف هر گره با لحاظ سفتی گرانشی را دارا می‌باشد. شبیه‌سازی‌های دینامیکی در قالب بررسی فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها، پاسخ‌های زمانی جابجایی گره‌ها، تغییر شکل المان‌های سیستم و نیروهای داخلی در قالب یک مطالعه مقایسه‌ای، عملکرد ساختار تنسگریتی و اثر افزایش طبقات را نمایش می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات، چگالی نیرو، دینامیک غیر خطی، سازه تنسگریتی، سفتی گرانشی، فرمیابی.

Nonlinear Dynamic Modeling and Vibration Analysis of a Quadrilateral Cross-Section Tensegrity Prism Considering Gravitational Stiffness: A Comparative Study

M. Jahan
M. Azimi

Aerospace Research Institute, Tehran, Iran
 Aerospace Research Institute, Tehran, Iran

Abstract

Tensegrity systems are lightweight spatial grid structures that are composed of compression and tension elements that can be used in adjustable structures. The primary stability of these structures is achieved by creating pretension conditions between the elements. These systems have low structural damping, which makes them vulnerable to dynamic loads. As a result, it is essential to predict the behavior and extract the dynamic characteristics of these structures to achieve a safe design. This article presents the vibration analysis of a one to four stage tensegrity structure with a square cross-sectional area. A Lagrangian approach and the finite element method were used to extract the nonlinear dynamic equations of the system based on the coordinates of the nodes. For one to four-stage tensegrity systems with fixed cross-sections and heights, the force density method is used as an initial form finding method. Each element's cross-section is designed to have a minimum mass, and dynamic modeling allows for observing elastic/plastic deformations under various boundary conditions, as well as static and dynamic loading on each node, taking gravity stiffness into account. Dynamic simulations in the form of comparative studies have been conducted to investigate natural frequencies, mode shapes, time responses of nodal displacements, elements deformations, and internal forces for one to four-stage tensegrity structures.

Keywords: Vibration, Force density, Nonlinear dynamics, Tensegrity structure, Gravitational stiffness, Form finding.

۱ - مقدمه

جمع شونده‌گی به واسطه اتصالات پینی در ساختار آن است. این ویژگی سبب می‌شود که حجم سازه کوچک و به سادگی قابل حمل شود. این مزیت در کاربردهای فضایی در کنار سایر زمینه‌های مهندسی مانند مکانیک، بیومکانیک، رباتیک و عمران بسیار مطلوب است [۳، ۴]. مطالعه و تحلیل رفتار سازه تنسگریتی به دو بخش کلی تقسیم می‌شود؛ فرمیابی که در آن هندسه پایدار سازه بر اساس یک توپولوژی مشخص، ایجاد می‌شود [۵، ۶] و تحلیل‌های دینامیکی [۷]. یافتن پیکربندی‌های مناسب سازه‌های تنسگریتی برای پشتیبانی از ماوریت‌های نیازمند پایداری و حفظ تعادل استاتیکی، فرمیابی نامیده

سازه‌های تنسگریتی به عنوان یک مفهوم معماری، در دهه ۱۹۵۰ میلادی ظهور کرده و امروزه کاربردهای بسیاری در علوم و مهندسی دارند. این سازه‌ها را می‌توان به‌عنوان سازه‌های پیش-تنیده با اتصالات پینی طبقه‌بندی کرد، که ماهیت آن مبتنی بر تعادل میان اعضای کششی و فشاری است. وجود پیش-تنش منجر به ایجاد کشش در ریسمان‌ها و فشار در میله‌ها می‌شود که علاوه بر پایداری (خود-تعادلی) با دارا بودن نسبت سفتی به جرم بالا، به عنوان جانشین مناسب برای سازه‌های رایج می‌باشند. به عبارت دیگر این سیستم‌ها به عنوان ساختارهای هیبرید صلب-انعطاف‌پذیر شناخته می‌شوند [۱، ۲]. مزیت اصلی استفاده از سازه تنسگریتی علاوه بر پایین بودن جرم آن، امکان

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: azimi.m@ari.ac.ir

می‌شود. فرمیابی به دو روش سینماتیکی و استاتیکی طبقه‌بندی می‌شود. روش‌های سینماتیکی^۱ هندسه سازه را با حداکثر کردن طول میله (با طول ریسمان ثابت) یا به حداقل رساندن طول ریسمان (با طول میله ثابت) تعیین می‌کنند. روش‌های سینماتیکی رایج عبارتند از روش واهلش دینامیکی^۲، روش المان محدود و روش مونت کارلو [۸-۱۰]. روش المان محدود نیز برای تعیین پیکربندی یک ساختار تنسگریتی خود-متعادل^۳ مناسب است [۱۱-۱۴]. روش‌های استاتیکی رایج عبارتند از: چگالی نیرو^۴، چگالی پیشرفته^۵ و روش‌های جدید خطی [۱۵، ۱۶].

برای تحلیل دینامیکی سازه‌های تنسگریتی، روش‌های متنوعی ارائه شده است. باید به این نکته اشاره داشت که روش‌های تحلیلی، برای بررسی سازه‌های تنسگریتی با هندسه‌های پیچیده و تعداد اعضاء زیاد، موثر نمی‌باشند. این روش‌ها برای سیستم‌های نسبتاً ساده و با ساختار متقارن مناسب بوده، در حالیکه روش‌های عددی برای سیستم‌های بزرگ و نامتقارن نیز کاربردی هستند [۱۷، ۱۸]. مطالعه سازه‌های تنسگریتی مبتنی بر هندسه آنها خصوصاً چندوجهی‌های منظم مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته است [۱۹-۲۳]. ونگ تفکیک سازه تنسگریتی به دو گروه المان‌های میله و ریسمان، به بررسی و تحلیل غیرخطی این سازه پرداخته است [۲۴]. ویلیامز با استفاده از کمینه نمودن تابع انرژی سازه، اثرات سفتی هندسی و همچنین رابطه غیرخطی نیرو و جابجایی، در حالتی که سیستم تحت اثر نیروهای پیش-تنش می‌باشد را بررسی نموده‌اند [۲۵]. ویلیامسون و همکاران شرایط لازم و کافی برای تعادل سیستم‌های تنسگریتی را ارائه نموده‌اند و همچنین نشان داده‌اند که مدل استاتیکی سازه تنسگریتی به یک مساله جبر خطی تبدیل خواهد شد [۲۶]. موراکامی معادلات تعادل تحلیل استاتیکی و دینامیکی سازه تنسگریتی را با رویکرد لاگرانژ ارائه نموده است [۲۷، ۲۸].

در شرایطی که یک سیستم تنسگریتی در معرض ارتعاشات شدید قرار گیرد، می‌تواند دچار ناپایداری یا شکست شود. بنابراین پیش‌بینی رفتار دقیق مشخصه‌های دینامیکی این سیستم‌ها برای دستیابی به یک طراحی ایمن مهم است. اولین بار موترو نشان داد که برای تحلیل غیرخطی رفتار سازه تنسگریتی در نزدیکی نقطه تعادل، مدل دینامیکی خطی شده دارای دقت مناسبی است. بن و همکاران یک مدل غیرخطی برای تحلیل رفتار دینامیک سازه تنسگریتی ارائه دادند [۲۹]. سلطان با استفاده از مدل دینامیک خطی شده نشان داد فرکانس‌های سیستم با افزایش پیش-تنیدگی افزایش می‌یابد [۳۰]. اگرچه تحلیل‌های غیرخطی برای سازه‌های بزرگ هزینه‌بر و مشمول زمان نیز خواهند شد. آنالیز مودال روش مفیدی برای درک مناسب ویژگی‌های ارتعاشی سیستم‌ها است [۳۱]. بل حاج علی و همکاران مدهای سازه‌های تنسگریتی را تحلیل کرده و فرکانس‌های طبیعی سیستم را با اصلاح مرتبه پیش-تنیدگی سیستم از فرکانس‌های تحریک افزایش دادند [۳۲]. ارتباط میان مدهای پایین و مرتبه پیش-تنیدگی سازه

تنسگریتی توسط اشویر نیز مورد بررسی قرار گرفته است [۳۳]. روش‌های مختلف تحلیل‌های استاتیکی، دینامیکی و تعیین فرم سازه‌های تنسگریتی پیشنهاد شده توسط محققان، تشریح شد. استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی نوین و یادگیری ماشین^۶ قابلیت پیاده‌سازی در فرمیابی سازه‌های تنسگریتی را دارا می‌باشد. آنچه در تحلیل‌های دینامیکی به عنوان چالش و مسئله اصلی مطرح است، نحوه مدل‌سازی و انتقال دستگاه معادلات محلی به دستگاه مرجع برای تک تک المان‌های سازه تنسگریتی می‌باشد. از طرف دیگر، نگاه جامع در استخراج معادلات حاکم بر سیستم، با لحاظ سفتی گرانشی، طراحی سازه بر اساس حداقل جرم، همچنین قابلیت بررسی و تغییر خواص ماده در شرایط الاستیک/پلاستیک نیز از نواقص پژوهش مورد بررسی می‌باشد. در این مقاله به آنالیز مودال و تحلیل ارتعاشات سازه تنسگریتی یک تا چهار طبقه منشوری، با ارتفاع یکسان و مقطع مربعی در قالب یک مطالعه مقایسه‌ای پرداخته شده است. از جمله نکات بدیع در نظر گرفته شده در این پژوهش علاوه بر استخراج روابط دینامیک غیرخطی به صورت یکپارچه (کاهش مراحل تبدیل مختصات محلی به مرجع در یک مرحله) بر مبنای مختصات گره‌ها، چگالی نیرو و بردار نیرو، طراحی المان‌های سازه مبتنی بر حداقل جرم میله‌ها، لحاظ سفتی گرانشی در معادلات و ایجاد قابلیت رصد تغییر شکل‌های الاستیک/پلاستیک می‌باشد.

ساختار مقاله به این قرار است که در بخش دوم، مدل دینامیک سازه تنسگریتی و معادلات غیرخطی سیستم بر مبنای مختصات گره‌ها، با استفاده از رویکرد لاگرانژ و روش المان محدود استخراج شده است. در بخش سوم شبیه‌سازی و نتایج آنالیز مودال شامل شکل مدهای ارتعاشی و فرکانس‌های طبیعی مرتبط ارائه شده است. در ادامه این بخش، مطالعه مقایسه‌ای با هدف بررسی اثر افزایش تعداد طبقات، با مطالعه پاسخ‌های زمانی پارامترهای جابجایی و سرعت گره‌های متناظر، همچنین نیروی داخلی و تغییرات طول المان‌های متناظر در سازه‌های یک و چهار طبقه انجام شده است. در انتها مقاله با ارائه نتیجه‌گیری به اتمام رسیده است.

۲ - مدل‌سازی دینامیک و استخراج روابط ریاضی

در این بخش، معادلات دینامیک غیرخطی سازه تنسگریتی منشوری با استفاده از رویکرد لاگرانژ و روش المان محدود استخراج شده است. شکل ۱ مشخصات و مختصات در نظر گرفته شده برای هر المان از سیستم تنسگریتی را نمایش می‌دهد.

¹ Kinematical Methods

² Dynamic Relaxation

³ Self-Equilibrating

⁴ Force Density Method

⁵ Advanced Density Method

⁶ Machine Learning

$$I_1 = \|K_1\| = (n^T (C_1^T C_1) \otimes I_3 n)^{0.5} \quad (12)$$

$$I_0 = [I_0 \quad I_0 \quad \dots \quad I_{0n}]^T \in \mathbb{R}^{3n} \quad (13)$$

که در آن I_0 بیانگر طول هر عضو قبل از اعمال بار خارجی و پیش تنش در سازه می‌باشد. در این حالت، عضوهای سازه فاقد نیروی داخلی کششی یا فشاری می‌باشند. در ادامه بردارهای سطح مقطع A ، جرم m ، مدول الاستیسیته خطی E و مماسی E_t کل اعضای سازه تنسگریتی به ترتیب بصورت زیر تعریف شده‌اند:

$$A = [A_1 \quad A_2 \quad \dots \quad A_{n_e}]^T \quad (14)$$

$$m = [m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_{n_e}]^T = \rho \hat{A} I_0 \quad (15)$$

$$E = [E_1 \quad E_2 \quad \dots \quad E_{n_e}]^T \quad (16)$$

$$E_t = [E_{t_1} \quad E_{t_2} \quad \dots \quad E_{t_{n_e}}]^T \quad (17)$$

که در آن \hat{A} مبین ماتریس قطری بردار مربوطه می‌باشد. بردار نیروی داخلی کل سازه F و بردار نیروی داخلی هر عضو f_i سازه بصورت زیر ارائه می‌شود:

$$F = [f_1 \quad f_2 \quad \dots \quad f_{n_e}]^T = \hat{E} \hat{A} I_0 (I - I_0) \quad (18)$$

$$f_i = A_i \sigma_i = E_i A_i (I_i - I_{0i}) \quad (19)$$

که در آن A_i و E_i به ترتیب بردار سطح مقطع عرضی و مدول الاستیسیته خطی هر عضو می‌باشند. بردار چگالی نیرو H برای کل اعضای سازه و نیروی داخلی هر عضو h_i بصورت زیر تعریف شده است:

$$H = \hat{I}^{-1} F = EA (I_0^{-1} - I^{-1}) \quad (20)$$

$$h_i = f_i / I_i \quad (21)$$

از آنجاکه اعضای سازه تحت بارگذاری محوری هستند، تغییر شکل‌ها در راستای میله‌ها و ریسمان‌ها می‌باشد. نمایش جابجایی نقطه فرضی x_i روی هر عضو سازه تنسگریتی بصورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$x_i = [1 \quad \eta] \otimes I_3 \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix}, \quad w_0, w_1 \in \mathbb{R}^3, \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (22)$$

با جایگذاری ضریب η ، مقادیر مجهول w_0 و w_1 بصورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \otimes I_3 = \begin{bmatrix} n_\alpha \\ n_\beta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes I_3 \begin{bmatrix} n_\alpha \\ n_\beta \end{bmatrix} \quad (23)$$

با جایگذاری معادله (۲۳) در معادله (۲۲)، جابجایی نقطه x_i بصورت ترکیبی از توابع شکل، بصورت زیر استخراج می‌شود:

$$x_i = [1 - \eta \quad \eta] \otimes I_3 \begin{bmatrix} n_\alpha \\ n_\beta \end{bmatrix} = N^e n_i^e \quad (24)$$

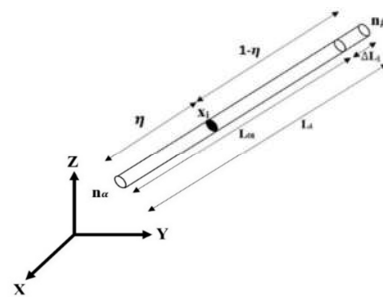
که در آن N^e توابع شکل می‌باشند و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N^e = [1 - \eta \quad \eta] \otimes I_3 \in \mathbb{R}^{3 \times 6} \quad (25)$$

انرژی جنبشی کل سازه T بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{n_e} 0.5 \int_0^1 m_i \|\dot{X}_i\|^2 d\eta \\ &= \sum_{i=1}^{n_e} 0.5 \int_0^1 m_i (N^e \bar{C}_i \otimes I_3 \dot{n})^2 d\eta \\ &= 0.5 \dot{n}^T M \dot{n} \end{aligned} \quad (26)$$

که در آن $M \in \mathbb{R}^{3n_e \times 3n_e}$ ماتریس جرم سازه تنسگریتی می‌باشد:



شکل ۱- مشخصات المان سازه تنسگریتی

بردار مختصات گره‌های سازه تنسگریتی در دستگاه مختصات اینرسی بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$N = [n_1 \quad n_2 \quad \dots \quad n_{n_e}] \in \mathbb{R}^{3 \times n_e} \quad (1)$$

$$n = [n_1^T \quad n_2^T \quad \dots \quad n_{n_e}^T]^T \in \mathbb{R}^{3n_e \times 1} \quad (2)$$

$$n_i = [x_i \quad y_i \quad z_i]^T \in \mathbb{R}^{3 \times 1}, \quad i = 1, 2, \dots, n_e \quad (3)$$

$$n_i^e = \begin{bmatrix} n_\alpha \\ n_\beta \end{bmatrix} = [x_\alpha \quad y_\alpha \quad z_\alpha \quad x_\beta \quad y_\beta \quad z_\beta]^T \quad (4)$$

که در آن N و n بردار مختصات گره‌های سازه، n_e تعداد گره‌های سازه و n_e تعداد المان‌های سازه می‌باشد. مطابق شکل ۱، هر المان از گره‌های α آغاز و به گره β ختم می‌شود. ازینرو بردار عضوهای سازه n_i^e ترکیبی از مختصات نقاط ابتدایی هر المان n_α و نقاط انتهایی آن n_β می‌باشد.

ماتریس اتصال، بیانگر توپولوژی سازه است و نحوه ارتباط گره‌های مختلف توسط میله‌ها $C_b \in \mathbb{R}^{3 \times n_e}$ و ریسمان‌ها $C_s \in \mathbb{R}^{3 \times n_e}$ را نمایش می‌دهد:

$$C = [C_b \quad C_s]^T = [C_1^T \quad C_2^T \quad \dots \quad C_{n_e}^T]^T \in \mathbb{R}^{n_e \times n_e} \quad (5)$$

$$[C_{im}] = \begin{cases} -1 & m = \alpha \\ 1 & m = \beta \\ 0 & m = \text{else} \end{cases} \quad (6)$$

که در آن m بیانگر نقاط ابتدا و انتهای هر المان می‌باشد. با بازنویسی معادله (۴) بر حسب بردار مختصات گره‌های سازه، داریم:

$$n_i^e = \bar{C}_i \otimes I_3 n \quad (7)$$

که در آن \otimes بیانگر ضرب کرونگر و \bar{C} ماتریس تبدیل بوده و بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$[\bar{C}_i]_{(e,x)} = \begin{cases} [1 \quad 0]^T & x = \alpha \\ [0 \quad 1]^T & x = \beta \\ [0 \quad 0]^T & x = \text{else} \end{cases} \quad (8)$$

بردار اعضای کل سازه تنسگریتی S و بردار متناظر با هر عضو S_i بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$S = [S_1 \quad S_2 \quad \dots \quad S_{n_e}] = NC^T \quad (9)$$

$$S_i = n_\alpha - n_\beta = C_i \otimes I_3 n \quad (10)$$

بردار طول کل سازه تنسگریتی L و بردار طول هر عضو l_i بصورت زیر ارائه شده است:

$$L = [L_1 \quad L_2 \quad \dots \quad L_{n_e}]^T \in \mathbb{R}^{n_e} \quad (11)$$

جدول ۱- مشخصات تنسگریتی منشوری یک تا چهار طبقه

نوع سازه	تعداد گره	تعداد عضو	تعداد میله	تعداد ریسمان
سازه ۱ طبقه	۸	۱۲	۴	۸
سازه ۲ طبقه	۱۲	۲۴	۸	۱۶
سازه ۳ طبقه	۱۶	۳۶	۱۲	۲۴
سازه ۴ طبقه	۲۰	۴۸	۱۶	۳۲

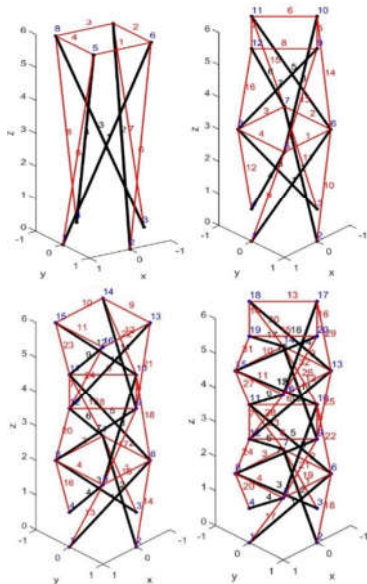
جدول ۲- مشخصات سطح مقطع سازه

مختصات	گره ۱	گره ۲	گره ۳	گره ۴
راستای X	۱	۰	-۱	۰
راستای Y	۰	۱	۰	-۱
راستای Z	۰	۰	۰	۰

متناسب با شرایط مرزی وارد شده بر المان‌های آزاد سازه، کرنش ریسمان‌ها و تنش میله‌ها در محدوده الاستیک می‌باشد، لذا سازه وارد محدوده پلاستیک و تنش‌های پسماند نخواهد شد. به‌منظور کاهش وزن، محاسبه قطر بهینه المان‌های سازه بر اساس ضریب اطمینان و روابط تنش/کرنش برای ریسمان‌های سازه محاسبه شده است. مشخصات عضوهای سازه تنسگریتی مطابق جدول ۳ در نظر گرفته شده است.

جدول ۳- مشخصات عضوهای سازه تنسگریتی

عضو	جنس	ρ (kg/m ³)	E (Gpa)	تنش تسلیم (Mpa)
میله	Steel_Q345	۷۹۳۰	۲۰۶	۳۰۰
ریسمان	Steel String	۷۸۷۰	۷۶	۱۲۲۳



شکل ۲- مدل تنسگریتی یک تا چهار طبقه شماره‌گذاری شده

$$\mathbf{M} = \frac{1}{6} \left(\left[\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{m}} \mathbf{C} \right] + \left[\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{m}} \mathbf{C} \right] \right) \otimes \mathbf{I}_3 \quad (27)$$

انرژی پتانسیل کل سیستم V ، شامل انرژی پتانسیل کرنشی V_e و انرژی پتانسیل گرانشی V_g (نیروی جاذبه زمین در راستای بردار Z) بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$V = V_e + V_g \quad (28)$$

$$V_e = \sum_i^n V_{e_i} = \sum_i^n \int_{I_{0i}}^I f_i du = \sum_i^n \int_{I_{0i}}^I \frac{E_i A_i (u - I_{0i})}{I_{0i}} du \quad (29)$$

$$V_g = \sum_i^n \frac{m_i g}{2} (Z_\alpha^i + Z_\beta^i) = \frac{g}{2} \mathbf{m}^T \mathbf{C} \otimes [0 \ 0 \ 1] \quad (30)$$

لازم به ذکر است، با مشتق‌گیری از رابطه (۲۹)، ماتریس سختی سازه تنسگریتی \mathbf{K} بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial V_e}{\partial \mathbf{n}} = \sum_i^n \frac{\partial V_{e_i}}{\partial I_i} \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{n}} = \sum_i^n f_i \frac{\partial I_i}{\partial \mathbf{n}} = f_i \frac{(\mathbf{C}_i^T \mathbf{C}_i) \otimes \mathbf{I}_3 \mathbf{n}}{I_i} = \mathbf{K} \mathbf{n} \quad (31)$$

$$\mathbf{K} = (\mathbf{C}^T \hat{\mathbf{H}} \mathbf{C}) \otimes \mathbf{I}_3 \quad (32)$$

معادلات دینامیک غیرخطی سیستم در حضور نیروی گرانش به کمک رابطه لاگرانژ استخراج می‌شوند:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{f}_{nc}, \quad \mathbf{L} = \mathbf{T} - V \quad (33)$$

که در آن \mathbf{L} تابع لاگرانژ، \mathbf{f}_{nc} بردار نیروهای غیر پایستار و \mathbf{q} مختصات تعمیم یافته می‌باشند. با جایگذاری معادلات (۲۶)، (۲۹) و (۳۰) در معادله (۳۳)، معادله دینامیک سیستم بصورت زیر استخراج می‌شود:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{n}} + \mathbf{K} \mathbf{n} = \mathbf{f}_{nc} - \mathbf{g} \quad (34)$$

$$\mathbf{f}_{nc} = \mathbf{f}_e + \mathbf{f}_d \quad (35)$$

$$\mathbf{f}_d = -\mathbf{D} \dot{\mathbf{n}} \quad (36)$$

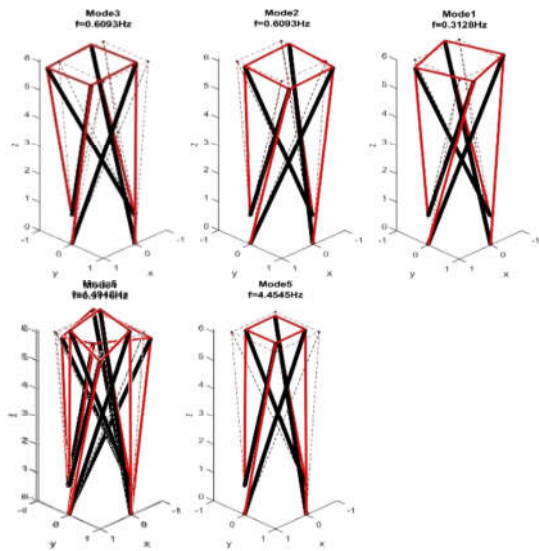
که در آن \mathbf{f}_d نیروی میرایی و \mathbf{D} ماتریس میرایی سازه تنسگریتی می‌باشد. با جایگذاری معادله (۳۵) و (۳۶) در (۳۴) معادله دینامیکی غیرخطی سازه‌های تنسگریتی بصورت زیر استخراج می‌شود:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{n}} - \mathbf{D} \dot{\mathbf{n}} + \mathbf{K} \mathbf{n} = \mathbf{f}_e \quad (37)$$

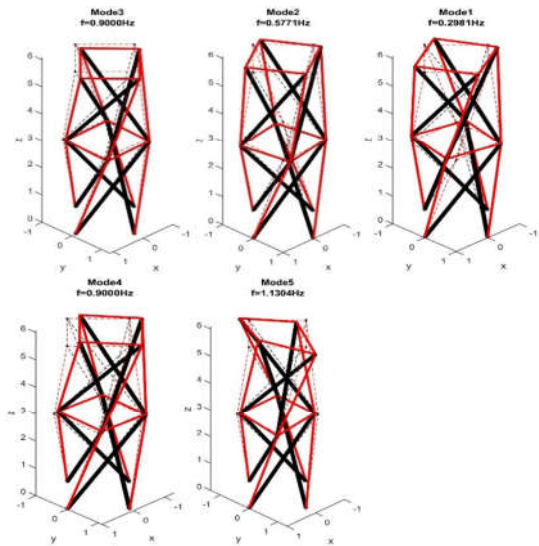
۳- شبیه‌سازی و تحلیل نتایج

به‌منظور بررسی نقش افزایش طبقات در تحلیل ارتعاشات، سازه تنسگریتی منشوری با مقطع مربعی در چهار حالت یک تا چهار طبقه با ارتفاع ثابت ۶ متر مدل شده است. مشخصات هندسی اعضاء و مختصات سطح مقطع سازه در جداول ۱ و ۲ ارائه شده است. مقاطع سازه متناسب با تعداد طبقات و زاویه پیش ۴۵ درجه هر طبقه، مدل‌سازی شده است. شبیه‌سازی‌ها در نرم‌افزار MATLAB و با استفاده از تکنیک عددی نیومارک-بتا^۱ صورت پذیرفته و نتایج حاصل از آنالیز مودال (فرکانس‌های طبیعی) با نتایج نرم‌افزار Ansys مقایسه شده است.

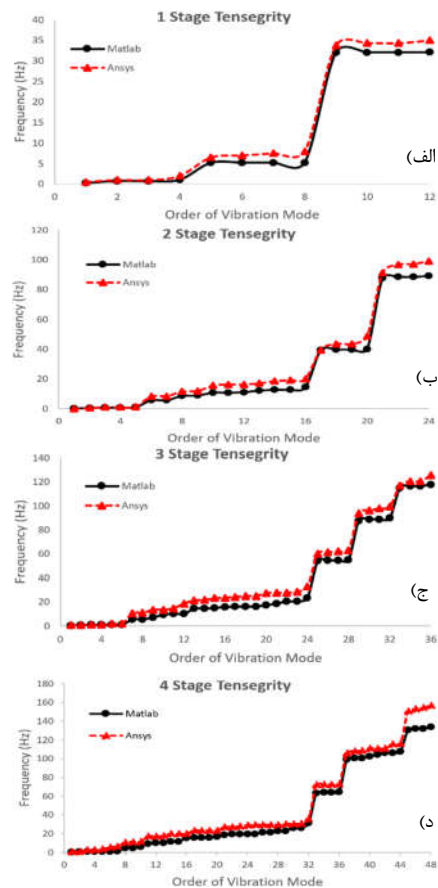
^۱ Newmark- β



شکل ۴- شکل شش مود اول سازه یک طبقه

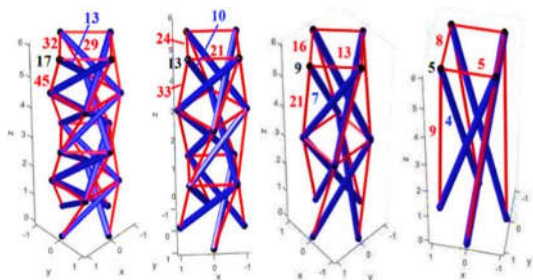


شکل ۵- شکل شش مود اول سازه دو طبقه

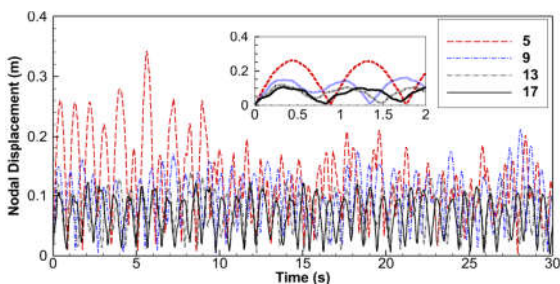


شکل ۳- فرکانس موده‌های ارتعاشی سازه (الف) یک (ب) دو (ج) سه و (د) چهار طبقه

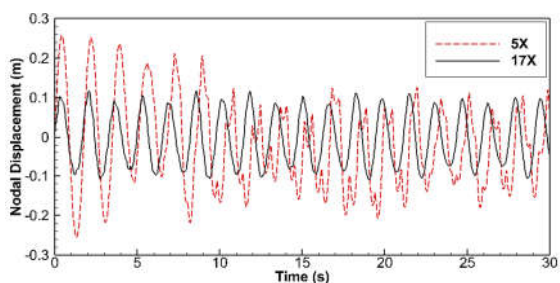
فرکانس‌های طبیعی هر ۴ سازه با تعداد درجات آزادی در نظر گرفته شده در تحلیل‌ها، در شکل ۳ جمع‌بندی شده و نتایج با نرم‌افزار انسیس مقایسه شده است. جایجایی در نظر گرفته شده برای هر گره در هر سه راستای X ، Y و Z منجر به ایجاد ۱۲ درجه آزادی در سازه یک طبقه، ۲۴ درجه آزادی برای سازه دو طبقه، ۳۶ درجه آزادی برای سازه سه طبقه و ۴۸ درجه آزادی برای سازه چهار طبقه شده است. انطباق حداکثری فرکانس‌های سیستم خصوصاً در موده‌های اولیه در هر دو نرم‌افزار مشهود است. همچنین فرکانس‌های طبیعی سازه و شکل موده‌های ارتعاشی مربوطه برای ۶ مود اول در شکل‌های ۴ تا ۷ ارائه شده است. خطوط سیاه و قرمز رنگ به ترتیب فرم تغییر یافته میله‌ها و ریسمان‌های سازه و خط‌چین‌های سیاه و قرمز به ترتیب شکل اولیه میله‌ها و ریسمان‌های سازه می‌باشند. همانطور که می‌توان مشاهده کرد با افزایش تعداد طبقات، فرکانس‌های طبیعی سیستم افزایش یافته است. این مسئله علیرغم افزایش نسبی جرم اضافه شده به واسطه افزایش طبقات رخ داده است. افزایش تعداد طبقات باعث افزایش تعداد ریسمان‌های موجود در سیستم و متناسب با آن افزایش مقدار پیش‌تنیدگی و افزایش انرژی ذخیره شده در کل سیستم شده است (که متناظر با آن سفتی سیستم افزایش یافته است).



شکل ۸- گره‌ها و اعضای متناظر سازه یک تا چهار طبقه

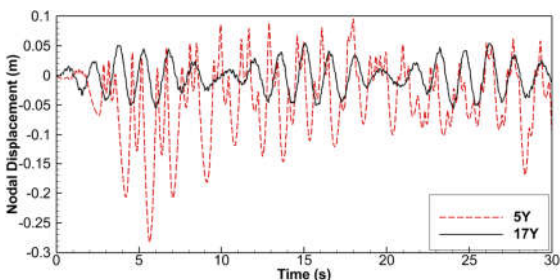


شکل ۹- جابجایی مطلق گره ۵، ۹، ۱۳ و ۱۷ سازه‌های یک تا چهار طبقه

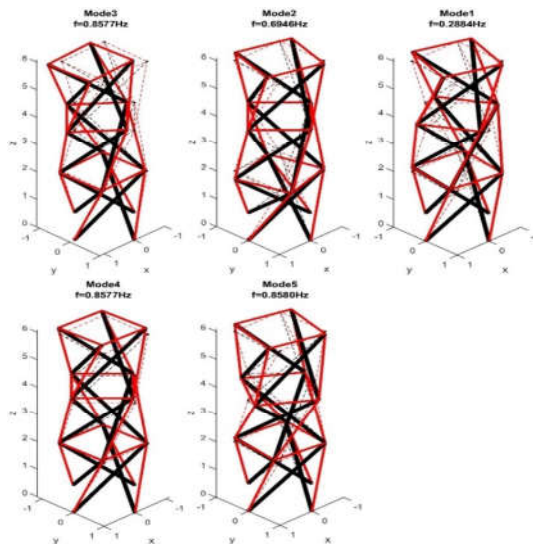


شکل ۱۰- جابجایی در راستای X، گره ۵ و ۱۷ سازه یک و چهار طبقه

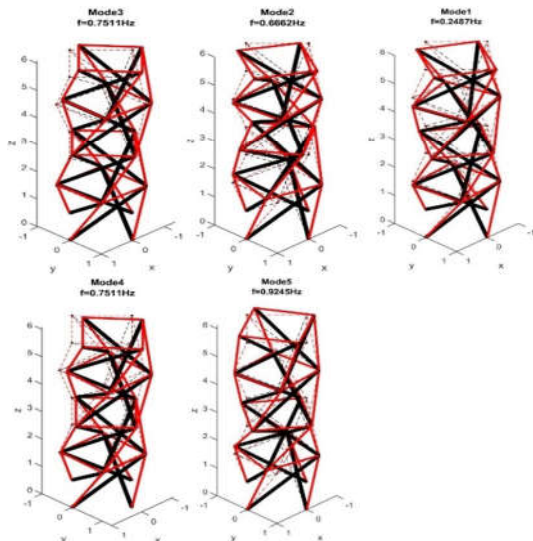
تحلیل ارتعاشات آزاد گره‌ها (برای اعضاء متناظر (شکل ۸) سازه‌های تنسگریتی یک تا چهار طبقه) با اعمال سرعت اولیه در امتداد محور X بر گره‌های آزاد طبقه فوقانی صورت پذیرفته و نتایج در شکل های ۹ تا ۱۹ در قالب جابجایی و سرعت گره‌ها، نیروهای داخلی و تغییر طول ریسمان‌ها مورد بررسی قرار گرفته است.



شکل ۱۱- جابجایی در راستای Y، گره ۵ و ۱۷ سازه یک و چهار طبقه



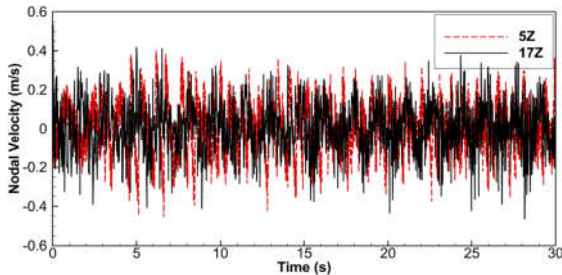
شکل ۶- شکل شش مود اول سازه سه طبقه



شکل ۷- شکل شش مود اول سازه چهار طبقه

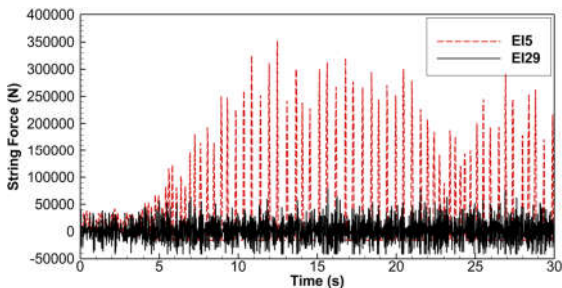
این افزایش پیش‌تندیگی بر افزایش جرم سیستم غالب بوده که منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم شده است. از طرف دیگر تغییر در رفتار شکل مدهای متناظر به واسطه افزایش تعداد طبقات نیز قابل توجه است. بطوریکه با افزایش تعداد طبقات، مدهای اولیه سیستم تغییر شکل‌های مودال خارج صفحه‌ای دارد. نکته قابل توجه افزایش پیچیدگی مکانیزم به واسطه افزایش تعداد طبقات می‌باشد، که طراح می‌بایست میان معیارهای افزایش سفتی، کاهش جرم و کاهش پیچیدگی سیستم، مصالحه‌ای برقرار کند.

در شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ سرعت گره‌های متناظر از سازه یک و چهار طبقه در راستاهای مختلف بررسی شده است. سرعت گره‌ها در هر سه راستا متناسب با جابجایی آنها بوده و با افزایش تعداد طبقات از سرعت جابجایی گره‌ها کاسته می‌شود. بطوریکه تغییرات سرعت در دو امتداد X و Y بیشترین مقدار خود را دارا می‌باشد.

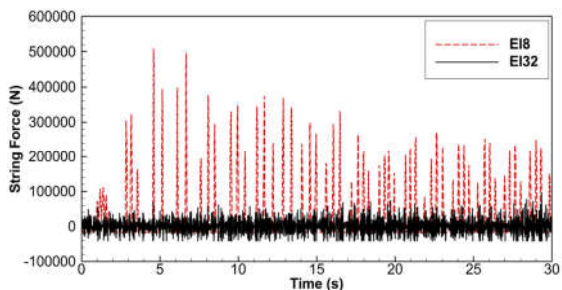


شکل ۱۴- سرعت در راستای Z، گره ۵ و ۱۷ سازه یک و چهار طبقه

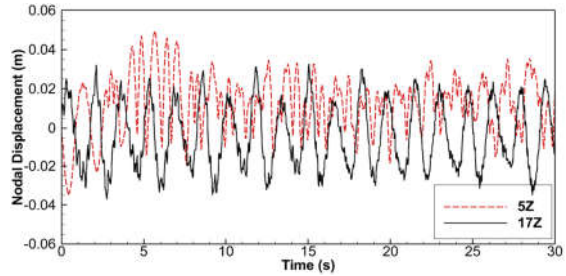
در شکل‌های ۱۶ و ۱۷ نیروی داخلی ریسمان‌های افقی متصل به گره‌های متناظر در سازه یک طبقه و چهار طبقه با هم مقایسه شده‌اند. همانطور که در شکل ۱۶ مشاهده می‌شود نیروی داخلی ریسمان ۵ از سازه یک طبقه با بیشینه دامنه ۳۵۰ KN در حال نوسان می‌باشد. در سازه چهار طبقه، بیشینه دامنه ارتعاشات تا دامنه ۷۵ KN کاهش می‌یابد. در سازه چهار طبقه بواسطه افزایش طبقات، افزایش عضوهای سازه و توزیع بارگذاری میان آنها، نیروهای داخلی اعضاء کاهش می‌یابد. علاوه‌براین به واسطه چرخش ۴۵ درجه‌ای هر طبقه نسبت به طبقه پایینی (الزامات فرم‌یابی) باعث اعمال زاویه ۱۳۵ درجه‌ای عضوهای متناظر سازه چهار طبقه با یک طبقه شده است. این مسئله باعث کاهش اثر شرایط اولیه اعمال شده در راستای عضوهای متناظر سازه چهار طبقه با یک طبقه و کاهش بیشتر نیروهای داخلی اعضاء می‌شود.



شکل ۱۶- نیروی داخلی ریسمان‌های ۵ و ۲۹ سازه یک و چهار طبقه



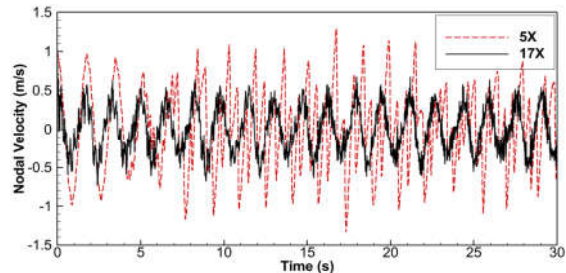
شکل ۱۷- نیروی داخلی ریسمان‌های ۸ و ۳۲ سازه یک و چهار طبقه



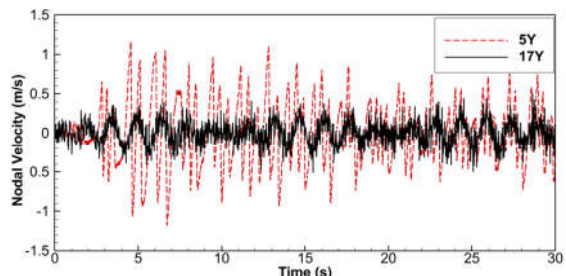
شکل ۱۲- جابجایی در راستای Z، گره ۵ و ۱۷ سازه یک و چهار طبقه

جابجایی کلی (برایند جابجایی در هر سه راستای X، Y و Z) گره‌های فوقانی سازه‌های یک تا چهار طبقه در شکل ۹ نمایش داده شده است. همانطور که می‌توان مشاهده کرد، جابجایی گره‌ها در تمام سازه‌ها با افزایش تعداد طبقات کاهش می‌یابد. افزایش تعداد طبقات و به تبع آن افزایش عضوهای سازه، تاثیر بسزایی در توزیع نیروهای داخلی و کاهش نوسات دارند. برای بررسی دقیقتر، در ادامه نتایج مربوط به جابجایی گره‌ها و عضوهای متناظر سازه یک و چهار طبقه در راستاهای مختلف به طور جداگانه ارائه شده است.

با توجه به اعمال شرایط اولیه روی گره‌های آزاد طبقه فوقانی سازه تنسگریتی در راستای محور X، جابجایی گره‌های متناظر در این راستا بیشتر از سایر راستاها می‌باشد. همانطور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود، بیشینه دامنه جابجایی در سازه یک طبقه، ۰/۵۲ متر و در سازه چهار طبقه ۰/۲ متر می‌باشد. اعمال شرایط اولیه در راستای محور X، باعث جابجایی گره‌های فوقانی در راستای محور Y و Z نیز می‌شود (شکل ۱۱ و ۱۲). همانطور که انتظار می‌رود دامنه جابجایی سازه یک طبقه بیشتر از سازه چهار طبقه در تمام راستاها می‌باشد. در امتداد محور Z، جابجایی برای تمام سازه‌ها کمترین مقدار را داشته و برای سازه یک طبقه با بیشینه دامنه ۰/۰۸۸ متر و سازه چهار طبقه با دامنه ۰/۰۷۵ متر نوسان می‌کند (شکل ۱۲).



شکل ۱۳- سرعت در راستای X، گره ۵ و ۱۷ سازه یک و چهار طبقه



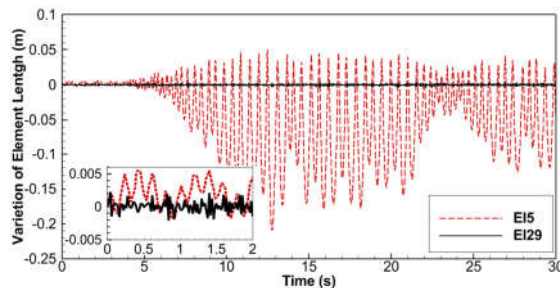
شکل ۱۴- سرعت در راستای Y، گره ۵ و ۱۷ سازه یک و چهار طبقه

افزایش ریسمان‌های سازه، پیش‌تنیدگی افزوده‌ای در سیستم ایجاد شده که منجر به افزایش انرژی ذخیره شده در کل سیستم شده است. این افزایش پیش‌تنیدگی بر افزایش جرم سیستم غالب بوده و منجر به افزایش فرکانس‌های طبیعی سیستم شده است. همچنین جابجایی و سرعت گره‌ها، همچنین نیروهای داخلی ریسمان‌ها و تغییرات طول آنها بر هم منطبق و با افزایش طبقات سازه کاهش می‌یابد. افزایش طبقات و عضوهای سازه منجر به توزیع نیروهای داخلی و کاهش ارتعاشات سیستم می‌شود. آنچه می‌توان دریافت آن است که افزایش تعداد طبقات در یک ارتفاع ثابت علیرغم مزایای بررسی شده، می‌تواند پیچیدگی‌های سیستم را از منظر ملاحظات بازشنودگی، جرم، پایداری و کنترل نیز متاثر سازد که می‌بایست توسط طراحان مورد توجه قرار گیرد.

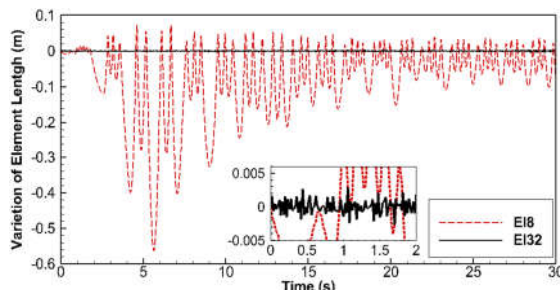
۵- مراجع

- [1] Motro R., *Tensegrity: structural systems for the future*, Elsevier, 2003.
- [2] Furuya H., Concept of deployable tensegrity structures in space application, *International Journal of Space Structures*, Vol. 7, No. 2. pp. 143-151, 1992.
- [3] Wen L., Pan F., and Ding X., Tensegrity metamaterials for soft robotics, *Sci. Robot.*, Vol. 5, No. 45. pp. eabd9158, 2020.
- [4] Kahla N.B., Ouni M.H.E., Ali N.B.H., and Khan R.A., Nonlinear Dynamic Response and Stability Analysis of a Tensegrity Bridge to Selected Cable Rupture, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 17, No. 2, 2020.
- [5] Tibert A. and Pellegrino S., Review of form-finding methods for tensegrity structures, *International Journal of Space Structures*, Vol. 18, No. 4. pp. 209-223, 2003.
- [6] Zhang J. and Ohsaki M., Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures, *International journal of Solids and Structures*, Vol. 43, No. 18-19. pp. 5658-5673, 2006.
- [7] Tur J.M.M. and Juan S.H., Tensegrity frameworks: Dynamic analysis review and open problems, *Mechanism and Machine Theory*, Vol. 44, No. 1. pp. 1-18, 2009.
- [8] Li Y., Feng X.-Q., Cao Y.-P., and Gao H., A Monte Carlo form-finding method for large scale regular and irregular tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, No. 14-15. pp. 1888-1898, 2010.
- [9] Metropolis N. and Ulam S., The monte carlo method, *Journal of the American statistical association*, Vol. 44, No. 247. pp. 335-341, 1949.
- [10] Azimi M. and Joubaneh E.F., Dynamic modeling and vibration control of a coupled rigid-flexible high-order structural system: A comparative study, *Aerospace Science and Technology*, Vol. 102, No. pp. 105875, 2020.
- [11] Zhang J. and Ohsaki M., Form-finding of complex tensegrity structures by dynamic relaxation method, *J Struct Constr Eng*, Vol. 81, No. 719. pp. 71-77, 2016.
- [12] Xu X. and Luo Y., Form-finding of nonregular tensegrities using a genetic algorithm, *Mechanics Research Communications*, Vol. 37, No. 1. pp. 85-91, 2010.
- [13] Szcześniak A. and Stolarski A., Dynamic Relaxation Method with Critical Damping for Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Elements, Vol., No.
- [14] Klinka K., Arcaro V., and Gasparini D., Form finding of tensegrity structures using finite elements and mathematical programming, *Journal of Mechanics of Materials and Structures*, Vol. 7, No. 10. pp. 899-907, 2013.
- [15] Motro R., Tensegrity systems: the state of the art, *International journal of space structures*, Vol. 7, No. 2. pp. 75-83, 1992.
- [16] Harichandran A. and Sreevalli I.Y., Form-finding of tensegrity structures based on force density method, *Indian Journal of Science and Technology*, Vol. 9, No. 24. pp. 1-6, 2016.

جهت بررسی بیشتر، رفتار نیروهای داخلی ریسمان‌های شماره ۸ و ۳۲ سازه یک و چهار طبقه نیز در شکل ۱۷ مقایسه شده‌اند. همانطور که می‌توان مشاهده کرد، تغییرات نیروهای داخلی با افزایش تعداد طبقات به شدت کاهش یافته که منجر به کاهش انرژی سیستم و همچنین تلاش مورد نیاز جهت پایداری آن می‌شود. همچنین قابل ذکر است، افزایش تعداد طبقات منجر به تغییرات یکنواخت در نیروهای داخلی ریسمان‌های سیستم شده است. در ادامه تغییرات طول ریسمان‌های متصل به گره‌های متناظر در سازه یک و چهار طبقه مورد بررسی قرار گرفته‌اند.



شکل ۱۸- تغییرات طول ریسمان‌های ۵ و ۲۹ سازه یک و چهار طبقه



شکل ۱۹- تغییرات طول ریسمان‌های ۸ و ۳۲ سازه یک و چهار طبقه

همانطور که مشاهده می‌شود، تغییرات طول ریسمان‌ها (شکل‌های ۱۸ و ۱۹) متناسب با نیروهای داخلی ریسمان‌ها (شکل‌های ۱۶ و ۱۷) می‌باشد. تغییرات طول ریسمان ۵ سازه یک طبقه در شکل ۱۸، تا ثانیه ۷ ناچیز و بعد از آن متناسب با افزایش نیروهای داخلی (شکل ۱۶) افزایش می‌یابد. بیشینه تغییرات طول ریسمان ۵ در ثانیه ۱۳ می‌باشد که منطبق بر تغییرات نیروی داخلی این عضو می‌باشد. در سازه چهار طبقه تغییرات طول متاثر از نیروهای داخلی بسیار ناچیز می‌باشد. این رفتار در نیروهای داخلی (شکل‌های ۱۶ و ۱۷) و تغییرات طول (شکل‌های ۱۸ و ۱۹) عضوهای شماره ۲۹ و ۳۲ مشاهده می‌شود.

۴- نتیجه‌گیری

تحلیل المان محدود دینامیک غیرخطی سازه تنسگریتی با رویکرد لاگرانژی و بردار مختصات گرهی به عنوان متغیر اصلی صورت پذیرفته است. این رویکرد امکان تحلیل دینامیکی جامعی از هر سیستم تنسگریتی با اعمال هر قید و شرایط بارگذاری را ایجاد می‌کند. در این مقاله مطالعه مقایسه‌ای از تحلیل ارتعاشات آزاد سازه تنسگریتی یک تا چهار طبقه با سطح مقطع مربعی صورت پذیرفته است. نتایج حاصل از شبیه‌سازی‌ها نشان می‌دهد که با افزایش تعداد طبقات و متناسب با آن

- [17] Hooker W.W., The dynamical attitude equations for n-body satellite, *J. Astronautical Sci.*, Vol. 12, No. pp. 123-128, 1965.
- [18] Hooker W.W., A set of r dynamical attitude equations for an arbitrary n-body satellite having r rotational degrees of freedom, *ALAA Journal*, Vol. 8, No. 7. pp. 1205-1207, 1970.
- [19] Pugh A., *An introduction to tensegrity*, University of California Press, 2020.
- [20] Oppenheim I.J. and Williams W.O., Vibration of an elastic tensegrity structure, *European Journal of Mechanics-A/Solids*, Vol. 20, No. 6. pp. 1023-1031, 2001.
- [21] Skelton R.E., et al., An introduction to the mechanics of tensegrity structures, in *Proceedings of the 40th IEEE conference on decision and control (Cat. No. 01CH37228)*. IEEE, 2001.
- [22] Sultan C. and Skelton R., Deployment of tensegrity structures, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 40, No. 18. pp. 4637-4657, 2003.
- [23] Tran H.C. and Lee J., Geometric and material nonlinear analysis of tensegrity structures, *Acta Mechanica Sinica*, Vol. 27, No. 6. pp. 938-949, 2011.
- [24] Wang B.-B., Cable-strut systems: part I—tensegrity, *Journal of Constructional Steel Research*, Vol. 45, No. 3. pp. 281-289, 1998.
- [25] Oppenheim I. and Williams W., Geometric effects in an elastic tensegrity structure, *Journal of elasticity and the physical science of solids*, Vol. 59, No. 1. pp. 51-65, 2000.
- [26] Williamson D., Skelton R.E., and Han J., Equilibrium conditions of a tensegrity structure, *International Journal of Solids and structures*, Vol. 40, No. 23. pp. 6347-6367, 2003.
- [27] Murakami H., Static and dynamic analyses of tensegrity structures. Part I. Nonlinear equations of motion, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 20. pp. 3599-3613, 2001.
- [28] Murakami H., Static and dynamic analyses of tensegrity structures. Part II. Quasi-static analysis, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 38, No. 20. pp. 3615-3629, 2001.
- [29] Kahla N.B. and Kebiche K., Nonlinear elastoplastic analysis of tensegrity systems, *Engineering Structures*, Vol. 22, No. 11. pp. 1552-1566, 2000.
- [30] Sultan C., Corless M., and Skelton R.E., Linear dynamics of tensegrity structures, *Engineering Structures*, Vol. 24, No. 6. pp. 671-685, 2002.
- [۳۱] احمدی ف.، تحلیل فرکانسی کابل خطی تحت نیروی آبرودینامیکی ناشی از تندباد اتفاقی. مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، ج. ۵۲، ش. ۴، ص ۸۹-۹۶، ۱۴۰۱.
- [32] Ali N.B.H. and Smith I., Dynamic behavior and vibration control of a tensegrity structure, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 47, No. 9. pp. 1285-1296, 2010.
- [33] Ashwear N. and Eriksson A., Natural frequencies describe the pre-stress in tensegrity structures, *Computers & Structures*, Vol. 138, No. pp. 162-171, 2014.