

# مقایسه رهیافتهای اصلاح اتلاف عددی در گستره وسیعی از خانواده AUSM برای جریان های پایای ماخ پایین

دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران،  
 adnan.mohammadi89@gmail.com  
 استاد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی، مشهد، ایران، javareskian@um.ac.ir

عدنان محمدی

محمد حسن جوارشکیان\*

## چکیده

در این تحقیق گستره وسیعی از خانواده آسم مشتمل بر AUSM+، AUSM+UP، SLAU و AUSM+M، در یک چهارچوب عددی، بر مبنای روش حجم محدود، جهت حل معادلات اولبری دوبعدی پیش شرطی شده، در یک شبکه بی سازمان توسعه داده شده و عملکرد این طرحها در جریان غیر قابل تراکم مورد بررسی قرار گرفته است. در میدان هایی که سرعت سیال پایین است، حل گرهای چگالی مینا نرخ همگراییشان کاهش پیدا می کند. جهت حل این مشکل در سرعت های کم از روش پیش شرطی ترکل بر مبنای ماتریس بقایی استفاده شده است. مضاعف بر این در سرعت های کم نامیزانی بین المان های موجود در شارهای جابجایی و فشاری این خانواده منتج به کاهش دقت می شود. بنابراین، استخراج دقیق روابط لازم جهت حل مشکل نامیزانی مطرح شده در سرعت های پایین خانواده آسم توسعه داده شده است. علاوه، جهت تسریع بیشتر نرخ همگرایی و کاهش سختی معادلات در سرعت های پایین، بخش زمانی معادلات به کمک روش دوگامی اصلاح شده بشفور-مولتون گسسته شده است. جهت بررسی دقت و کارایی خانواده آسم توسعه داده شده، آزمایش های غیر لزج دو بعدی پایا حول ایرفویل NACA0012، ایرفویل سه المانه 30P-30N و نیم-استوانه و برای گستره وسیعی از اعداد ماخ کم و بسیار کم تدوین شده است. نتایج حاصله نشان می دهد، در خانواده آسم بررسی شده، توازن مناسبی میان المان های سرعت همگرایی و بهبود دقت وجود ندارد و در سرعت های پایین افزایش دقت لزوماً توانان با کاهش زمان همگرایی نیست.

**واژه های کلیدی:** خانواده آسم، ماخ پایین، پیش شرطی، نرخ همگرایی پایین، مخدوش شدن دقت، نامیزانی.

## An investigation of the healing strategies of the numerical dissipation of spectrum AUSM-family toward steady low Mach flows

**A. Mohammadi**  
**M. H. Djavareskian**

Department of Mechanical Engineering, University of Ferdowsi, Mashhad, Iran  
 Department of Mechanical Engineering, University of Ferdowsi, Mashhad, Iran

### Abstract

In this research, a spectrum variety of AUSM-family, including AUSM+, AUSM+UP, SLAU, and AUSM+M, in a numerical framework, based on the finite volume method to solve preconditioned two-dimensional Eulerian equations, was developed in an unstructured grid and the performance of this family has been investigated in incompressible flow. Where fluid velocity is low, convergence rate of density base solvers is distorted. Turkle's preconditioning method based on the conservation variable has been utilized to remedy the poor convergence at low speeds flows. In addition, at low speeds, the imbalance between the elements in this family's convective and pressure fluxes results in a deterioration of accuracy. Therefore, the necessary mathematical literature has been developed to solve the imbalance problem raised at the low speeds of the AUSM family. In addition, to further accelerate the convergence rate and reduce the stiffness of the equations at low speeds, the time part of the equations has been discretized utilizing the modified second-order Bashforth-Moulton method. To investigate the accuracy and efficiency of the developed AUSM family, steady two-dimensional inviscid tests around the NACA0012 airfoil, three-element 30P-30N airfoil, and half-cylindrical have been constructed for a wide range of low and highly- low Mach numbers. The results show no optimal trade-off between convergence rate and accuracy improvement within AUSM family. The accuracy improvement is not accompanied by reduced convergence time necessarily in low velocity flow field.

**Keywords:** AUSM family, Low Mach, precondition, poor rate of convergence, accuracy deterioration, imbalance.

روش های بالادستی که مشتمل بر روش های تجزیه بردار شار<sup>۱</sup>، روش های تجزیه اختلاف شار<sup>۲</sup> و خانواده آسم<sup>۳</sup> به طور گسترده ای مورد استفاده قرار گرفته اند. روش های تجزیه اختلاف شار به عنوان یک نتیجه طبیعی از این ایده که سیال را توده ای از ذرات است قلمداد می شوند<sup>۳</sup>. در سطح سلول گروهی از ذرات به صورت جلو رونده<sup>۴</sup>

### ۱- مقدمه

در سال های ۱۹۶۰-۱۹۷۰ روش های مرکزی به طور معمول مورد استفاده قرار می گرفتند<sup>(۱)</sup>، اما این روش ها دارای معایبی نظیر پیش بینی غیر صحیح در مشخصه های میانی و همچنین المان های کنترلی آزاد وابسته به مسئله هستند<sup>(۲)</sup>. در اواخر ۱۹۷۰ روش های بالادستی مطرح شدند.

این روش ها دارای مزیت های متعددی نظیر انعطاف پذیری بالا و همخوانی با مشخصه های فیزیک حاکم بر میدان هستند. امروزه

<sup>1</sup> Flux Vector Splitting (FVS)

<sup>2</sup> Flux Difference Splitting (FDS)

<sup>3</sup> Advection Upstream Splitting Method (AUSM)

<sup>4</sup> Forward

حرکت می‌کنند و گروهی به صورت عقب<sup>۱</sup> رونده حرکت می‌کنند. شارهای غیر لزج در هر سطح به صورت خودکار به صورت جلو رونده و عقب رونده تجزیه می‌شوند. به طور دقیق تر خواستگاه این نوع از جداسازی شار، تفکیک مقادیر ویژه‌ی ماتریس ژاکوبی است. در گروه روش‌های تفکیک شار، روش‌های مختلفی بر مبنای اعمال انواع جداسازی معرفی شده‌اند که از میان آن‌ها می‌توان به ون لیر و استیگر-وارمینگ اشاره کرد. در حل معادله اویلر خانواده روش‌های تفکیک بردار شار به جهت پیش‌بینی دقیق و عدم رخداد جواب غیر فیزیکی در آن‌ها مورد استقبال خاص پژوهشگران قرار گرفته‌اند (۳). اما این دسته از روش‌ها به سبب ذات بیش‌ازاندازه هموار کننده‌ای<sup>۲</sup> که دارند دارای ضعف عملکردی شدیدی در پیش‌بینی مشخصات لایه مرزی هستند. بنابراین این دسته از روش‌های عددی مناسب حل معادلات ناویراستوکس نیستند. بر اساس ایده‌ی گودونو مبنی بر در نظر گرفتن جریان تراکم پذیر بین دو سلول به عنوان یک مسئله ریمان (۴)، روش‌های تجزیه اختلاف بردار شار نظیر Roe (۵) و HLL (۶) معرفی شدند. در این روش‌ها برای محاسبه شار در وجوه از حل تقریبی یا دقیق مسئله ریمان استفاده می‌شود. روش‌های تجزیه اختلاف بردار شار می‌توانند حل دقیقی در پیش‌بینی ناپیوستگی‌ها ارائه دهند، بعلاوه اینکه این دسته از روش‌ها به سبب پخش اندکی که دارند در حل معادلات ناویراستوکس و پیش‌بینی مشخصات لایه مرزی دقیق هستند. اما این دسته نسبت به روش‌های تجزیه بردار شار برتری کارآمدی ندارند. در سال ۱۹۹۱ برای اولین بار لیو خانواده آسم را بر مبنای ترکیب دقت مناسب روش تجزیه اختلاف شار در لایه مرزی و کارآمدی روش‌های تجزیه بردار شار معرفی کرد (۷). در این روش جهت تشخیص کمیت‌های همرفتی<sup>۳</sup> از عدد ماخ همرفتی وجه-سلول<sup>۴</sup> استفاده می‌شود. در این روش شار فشاری از جمع دو المان فشاری محاسبه می‌شود. مضاعف بر این موارد مشکلات کم این روش عددی نیز در پژوهش‌های پیشین گزارش شده است (۸). به دلیل محبوبیت گسترده این روش عددی، در راستای ارتقای عملکردی روش عددی پایه مطرح شده (AUSM)، گسترش روش‌های مشابه نظیر AUSM+ (۹) و AUSMPW+ (۱۰) و AUSM+UP (۱۱) و AUSM+M (۱۲) و SLAU (۱۳) توسط محققین حوزه عددی انجام شد. همان‌طور که ابتدا ذکر شد نداشتن بخش اتلافی مناسب در دامنه حل می‌تواند منتج به کاهش دقت حل عددی شود، لذا در این پژوهش و بنا به مرور بیان شده خانواده عددی آسم به عنوان روش عددی‌ای که مزایای هر دودسته تجزیه بردار شار و تجزیه اختلاف شار را دارد، به عنوان روش محاسبه شارهای غیر لزج مورد استفاده قرار خواهد گرفت. مادامی‌که جهت حل عددی جریان با عدد ماخ پایین از روش پیمایش زمانی<sup>۵</sup> استفاده می‌شود نرخ همگرایی با کاهش عدد ماخ کاهش می‌یابد و لازمه رسیدن به یک حل پایا اختصاص زمان بسیار زیادی جهت حل میدان است، رخداد این مشکل به عدد شرطی (نسبت بزرگترین مقدار ویژه به کوچکترین مقدار

ویژه) برمی‌گردد. مشتق زمانی نتایج حل پایا را تحت الشعاع قرار نمی‌دهد و تغییر در این بخش تنها دقت زمانی را کاهش می‌دهد. در راستای شتاب‌بخشی به روند همگرایی حل پایا، پیش‌شرطی کردن بخش زمانی ارائه گردید. با ضرب بخش زمانی در یک ماتریس می‌توان مقادیر ویژه سیستم را کنترل کرد. مقدس و همکاران (۱۴) نشان دادند ماتریس پیش‌شرطی ترکل، در طیف گسترده‌ای از اعداد ماخ جریان خارجی و داخلی، قابلیت افزایش نرخ همگرایی را دارا است. در ارتباط با افزایش نرخ همگرایی پژوهش‌های دیگری نیز انجام شده است. مایا و همکاران (۱۵-۱۷) به کمک محدودکننده معرفی شده توسط دارموفال (۱۸) برای ماتریس پیش‌شرطی ترکل به بررسی عملکرد این ماتریس در جریان پایای لزج و آشفتنه پرداختند. آن‌ها نشان دادند که با استفاده از این محدودکننده، پایداری و نرخ همگرایی حل افزایش می‌یابد. اکبرزاده و همکاران (۱۹) با ارائه یک روش هموارسازی باقیمانده جدید همراه و با ترکیب آن با روش پیش‌شرطی، موفق شدند نرخ همگرایی را در جریان‌های پایا و ناپایا به طور محسوس افزایش دهند. بنابراین در این پژوهش مقایسه خانواده پیش‌شرطی شده‌ی آسم مورد بررسی قرار می‌گیرد که در آن مهم‌ترین نکات نوآوری که در تحقیقات پیشین به آن پرداخته نشده یا کمتر مورد توجه بوده است را می‌توان به صورت ذیل عنوان نمود:

الف- توسعه‌ی روش عددی آسم به عنوان روش مبنای محاسبه شارهای غیر لزج در یک الگوریتم چگانی مبنا و شبکه با آدرس دهی بی سازمان و معرفی نحوه‌ی دقیق استخراج روابط لازمه در راستای اصلاحات لازم در بخش‌های اتلافات عددی این خانواده عددی جهت ایجاد اتلافات متناسب در سرعت‌های پایین.

ب- توسعه‌ی نحوه‌ی پیش‌شرطی کردن این خانواده عددی بر اساس ماتریس پیش‌شرطی ترکل و مقایسه عملکرد این خانواده‌ی پیش‌شرطی شده در راستای شناخت بهترین روش مناسب برای سرعت‌های پایین ج- توسعه‌ی روش بشفورت-مولتون اصلاح شده جهت افزایش بیشتر سرعت همگرایی که در قیاس با روش‌های رایج مانند رانگ-کوتا زمان کمتری را در فرآیند حل لازم دارد.

لذا در این پژوهش و بر مبنای نکات بدیع (کمتر بررسی شده‌ی بیان شده معادلات تراکم پذیر پایا و دوبعدی غیر لزج در ماخ‌های پایین و به کمک خانواده حل گر غیر لزج آسم حل می‌شوند. لازم به ذکر است که برای انتگرال‌گیری زمانی از روش بشفورت-آدامز اصلاح شده‌ی دومرحله‌ای با دقت زمانی مرتبه دوم استفاده شده است.

## ۲- معادلات حاکم

فرم بقایی معادلات حاکم در فضای غیر لزج و دوبعدی و پایا عبارت است از:

$$\frac{\partial \bar{Q}_c}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

در معادله فوق  $\bar{Q}_c$ ، بردار بقایی،  $\bar{F}$ ،  $\bar{E}$  به عنوان بردارهای شار غیر لزج به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\bar{Q}_c = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + P \\ \rho uv \\ (\rho E + P)u \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + P \\ (\rho E + P)v \end{bmatrix} \quad (2)$$

<sup>1</sup> Backward

<sup>2</sup> Dissipative

<sup>3</sup> Convective

<sup>4</sup> Cell-face

<sup>5</sup> Time-Marching

#### ۴- معرفی اصلاحات لازم در بخش‌های پخشی خانواده آسم در سرعت‌های پایین

هدف این بخش تبیین استخراج روابط لازم جهت اصلاح خانواده آسم در سرعت‌های پایین به جهت شاره‌های غیر لزج فشاری و جابجایی است. کل شار غیر لزج عبارت است از تجمع شاره‌های فشاری و همرفتی. برای محاسبه شار فشاری داریم:

$$p_{1/2} = \bar{p} - d_p \quad (9)$$

که در آن  $\bar{p}$  میانگین فشار در دو طرف هر وجه دلخواه مورد بررسی است و  $d_p$  به‌عنوان اتلافات شار فشاری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$d_p = \frac{1}{2} (P_L^+ - P_R^-) \Delta p + \{ (1 - P_L^+ - P_R^-) \bar{p} \} \quad (10)$$

در معادله فوق  $\Delta p$  اختلاف فشار در دو طرف هر وجه دلخواه بوده و به‌صورت  $\Delta p = p_R - p_L$  تعریف می‌شود. همچنین  $P_L^+$  و  $P_R^-$  چندجمله‌ای‌های معین برحسب عدد ماخ اند که عبارت‌اند از:

$$P_{(L/R)}^\pm = \begin{cases} \left\{ \frac{\pm (M_{(L/R)} \pm 1)^2}{4} (2 \mp M_{(L/R)}) \right\} & |M| \leq 1 \\ \pm \alpha M_{(L/R)} \left( (M_{(L/R)})^2 \mp 1 \right)^2 & |M| \geq 1 \\ \frac{M_{(L/R)} \pm |M_{(L/R)}|}{2} & |M| \geq 1 \end{cases} \quad (11)$$

در معادله فوق داریم:

$$M_{(L/R)} = (V_{(L/R)}) / C_{1/2} \quad (11)$$

$$V_{(L/R)} = u_{(L/R)} \cdot n_x + v_{(L/R)} \cdot n_y \quad (12)$$

$$C_{1/2} = \begin{cases} \frac{c^{*2}}{\max(|V_L|, c^*)} & \frac{V_L + V_R}{2} \geq 0 \\ \frac{c^{*2}}{\max(|V_R|, c^*)} & \frac{V_L + V_R}{2} < 0 \end{cases} \quad (13)$$

$$c^{*2} = \frac{2(\gamma - 1)\bar{H}}{(\gamma + 1)} \quad (14)$$

$$\bar{H} = \frac{\gamma RT}{(\gamma - 1)} + \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (15)$$

در معادلات فوق علامات “+” و “-” یا “L” و “R” مبین طرف راست یا چپ وجه دلخواه مورد بررسی هستند. آنگاه که عدد ماخ به صفر نزدیک می‌شود رابطه (۱۱) به‌صورت زیر تقلیل پیدا می‌کند:

$$P^\pm = \frac{1}{2} \pm \frac{15}{16} M \quad (16)$$

بنابراین شار فشاری (معادله (۹)) عبارت است از:

$$p_{1/2} = \bar{p} - \left( \frac{15}{32} \right) \left( \frac{p_L + p_R}{C_{1/2}} \Delta V + \frac{V_L + V_R}{C_{1/2}} \Delta P \right) \quad (17)$$

در رابطه (۱۷) بخش‌های اول و دوم، بخش‌هایی هستند که پخش عددی شار فشاری قلمداد می‌شوند. بخش اول به‌طور تقریبی عبارت است از  $c_{1/2} p_{1/2}$ . بنابراین بخش اول مستقیماً با سرعت صوت رابطه دارد از سویی دیگر بخش دوم رابطه معکوسی با سرعت صوت دارد. به علت اختلاف فاحش سرعت سیال و سرعت صوت در سرعت‌های پایین و بزرگ‌تر بودن سرعت صوت در میدانی با ماخ کم، نیاز است تا این اختلاف مرتفع شود. در راستای حل این اختلاف، استراتژی‌های منتخبی از خانواده آسم مشتمل بر SLAU، AUSM+UP، AUSM+ و AUSM+M مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

در معادله فوق،  $\rho$  و  $P$ ، عبارت است از، چگالی و فشار، بعلاوه  $(u, v)$  مؤلفه‌های سرعت دکارتی و  $E$ ، انرژی کل است.

#### ۳- فرم پیش‌شرطی شده‌ی معادلات بقا

در حل پایای معادلات اوایل به روش پیمایش زمانی، عبارات زمانی درنهایت به سمت صفر میل کرده و بنابراین تغییر عبارت‌های زمانی هیچ تغییری در نتایج حل پایا ایجاد نمی‌کند. معادلات اوایل پیش‌شرطی طبق رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\Gamma^{-1} \frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial t} + \frac{\partial \bar{E}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{F}}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial t} + \Gamma \frac{\partial \bar{E}}{\partial Q_C} \frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial x} + \Gamma \frac{\partial \bar{F}}{\partial Q_C} \frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial x} = 0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial t} + A_\Gamma \frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial x} + A_\Gamma \frac{\partial \bar{Q}_C}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

در معادلات بالا  $\Gamma$  و  $A_\Gamma$  به ترتیب ماتریس پیش‌شرطی و ماتریس جاکوبی پیش‌شرطی است.

#### ۳-۱- ماتریس پیش‌شرطی ترکل

ماتریس پیش‌شرطی ترکل بر مبنای متغیرهای بقایی عبارت است از (20):

$$\Gamma_T = \begin{bmatrix} 1 - \Psi V_t & 2u\Psi & 2v\Psi & -2\Psi \\ -u\xi V_t & 1 + 2\xi u^2 & 2\xi uv & -2u\xi \\ -v\xi V_t & 2\xi uv & 1 + 2\xi v^2 & -2v\xi \\ -\omega V_t & 2u\omega & 2v\omega & 1 - 2\omega \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\Psi = \frac{(1 - \beta)(\gamma - 1)}{2C^2} \quad (7)$$

$$V_t = u^2 + v^2$$

$$\xi = \frac{(\alpha + (1 - \beta))(\gamma - 1)}{2C^2}$$

$$\omega = \frac{(\alpha V_t + (1 - \beta)H_0)(\gamma - 1)}{2C^2}$$

#### ۳-۲- معرفی پارامتر قطع در ماتریس پیش‌شرطی

برای محاسبه پارامتر قطع پیش‌شرطی  $\beta$ ، در ماتریس پیشنهادی ترکل، معمولاً از یک رابطه قطع برای نواحی‌ای مانند نقطه سکون که ممکن است عدد ماخ به سمت صفر میل کند، استفاده می‌شود. ترکل (۲۰) برای رفع مشکل تکینگی رابطه زیر را پیشنهاد داد:

$$\beta = \min \left[ 1, \max \left( K_2 M_0^2, K_1 \left( 1 + \frac{1 - M_0^2}{M_0^4} M^2 \right) \right) \right] \quad (8)$$

که در آن  $M_0$  عدد ماخ مرجع و به‌عنوان مقدار قطع به شمار می‌رود. ترکل (۲۱) نشان داد که مقدار  $K_1$  می‌تواند بین ۱ و ۱/۱۰ و مقدار  $K_2$  بین ۱/۴ و ۱ انتخاب شود. این پارامترها وابسته به شرایط مسئله، هندسه و شبکه مورد تحلیل است. در این تحقیق  $K_1 = 1.05$  و  $K_2 = 0.7$ ،  $M_0 = 0.1$  انتخاب می‌شود.

#### ۴-۱- استراتژی اصلاح شار فشاری در روش AUSM+

در این روش سرعت صوت به واسطه رابطه زیر تصحیح می‌شود:

$$\check{C}_{1/2} = C_{1/2} f_{1/2} \quad (18)$$

$$f_{1/2} = \sqrt{\frac{(1 + \beta^2) \left( \frac{M_1}{2} \right)^2 + \left( 4\beta^2 \left( 1 - \left( \frac{M_1}{2} \right)^2 \right) \right)}{(1 + \beta^2)}} \quad (19)$$

تصحیح انجام شده امکان گذرش هموار را برای سرعت صوت بین دو ناحیه‌ی تراکم ناپذیر و تراکم پذیر فراهم می‌آورد. در معادله فوق  $\beta$  همان پارامتر قطع است که در رابطه (۸) تعریف شد. همچنین  $M_{1/2}$  میانگین اعداد ماخ در طرفین راست و چپ وجه مورد بررسی است. با توجه به تعریف جدید سرعت صوت، لازم است تا عدد ماخ راست و چپ هر وجه به صورت زیر بازآرایی گردد:

$$M_{(L/R),new} = M_{(L/R)} / f_{1/2} \quad (20)$$

$$M_L = \frac{M_{L,new} + M_{R,new}}{2} + \beta^2 \frac{M_{L,new} - M_{R,new}}{2} \quad (21)$$

$$M_R = \frac{M_{L,new} + M_{R,new}}{2} - \beta^2 \frac{M_{L,new} - M_{R,new}}{2} \quad (22)$$

با جای گذاری روابط (۲۱) و (۲۲) در رابطه (۱۱) و بعد از آن بازآرایی رابطه (۱۰) آنگاه ماخ به صفر میل می‌کند داریم:

$$p_{1/2} = \bar{p} - \frac{15}{32} (\beta^2 \frac{p_L + p_R}{2 \check{C}_{1/2}} \Delta V + \frac{V_L + V_R}{2 \check{C}_{1/2}} \Delta P) \quad (23)$$

بدین ترتیب و از آنجاکه  $\check{C}_{1/2}$  با میل عدد ماخ به سمت صفر از مقیاس سرعت سیال است، مقیاس بخش اول تصحیح شده و از مرتبه سرعت سیال خواهد بود و اختلاف فاحش مطرح شده تصحیح می‌شود.

#### ۴-۲- استراتژی اصلاح شار فشاری در روش AUSM+UP

در این روش برخلاف روش AUSM+، اصلاح اختلاف فاحش المان‌های پخشی شار فشاری با المان  $P_u$  صورت می‌گیرد و این المان به معادله (۱۰) اضافه می‌شود:

$$P_u = 2K_u P_L^+ P_R^- (f_{1/2} \bar{C}_{1/2}^2) \Delta M, \quad K_u = 0.75 \quad (24)$$

$$\Delta M = (M_L - M_R) \quad (25)$$

$$f_{1/2} = \beta(2 - \beta) \quad (26)$$

بعلاوه اینکه المان  $\alpha$  در رابطه (۱۱)، که در روش AUSM+ برابر  $\frac{3}{16}$  است به صورت زیر تبیین می‌شود:

$$\alpha = \left( \frac{3}{16} \right) (-4 + (f_{1/2})^2) \quad (27)$$

با توجه به رابطه (۲۶) بخش‌های اول و دوم معادله (۱۰) عبارت است از:

$$\left( \frac{3}{4} + \alpha \right) (M_L + M_R) (p_L - p_R) \quad (28)$$

$$\left( \frac{3}{4} + \alpha \right) (M_L - M_R) (p_L + p_R) \quad (29)$$

ضریب  $\frac{3}{4} + \alpha$  در سرعت‌های پایین عبارت است از:

$$\left( \frac{3}{4} + \alpha \right) = \frac{3}{4} + \frac{3}{16} (-4 + 5(f_{1/2})^2) \rightarrow [4\beta^2] \cdot \frac{15}{16} \quad (30)$$

بنابراین بخش پخشی شار فشاری روش AUSM+UP به صورت زیر خواهد بود:

$$dp = [4\beta^2] \left( \frac{15}{16} \right) (M_L p_L - M_R p_R) + [2\beta] \cdot \left( \frac{3}{8} \right) \left( \frac{\gamma}{2} \right) (M_L - M_R) \cdot (p_L + p_R) \quad (31)$$

در رابطه فوق  $\gamma$ ، نسبت گرمایی ویژه است. بخش اول در رابطه (۳۰)، تجمیعی است از بخش‌های اول و دوم در رابطه (۱۰) و از آنجاکه دارای

ضریب  $\beta^2$  اند، در سرعت‌های پایین حذف خواهند شد، بنابراین مشکل اختلاف فاحش مطرح شده با معرفی رابطه (۲۶) از بین می‌رود، شایان ذکر است که در سرعت‌های پایین  $P_u$  نقشی حیاتی در این طرح عددی دارد.

#### ۴-۳- استراتژی اصلاح شار فشاری در روش SLAU

در این طرح عددی، بخش دوم پخشی فشاری در رابطه (۱۰) با تابعی مناسب اصلاح مقیاس می‌شود.

$$dp = \frac{1}{2} (P_L^+ - P_R^-) \Delta p - \{ (1 - \chi) (1 - P_L^+ - P_R^-) \bar{p} \} \quad (32)$$

$$\chi = (1 - \bar{M})^2 \quad (33)$$

$$\bar{M} = \text{Min} \left( 1.0, \frac{1}{\bar{C}} \sqrt{\frac{(u_L)^2 + (u_R)^2 + (v_L)^2 + (v_R)^2}{2}} \right) \quad (34)$$

در طرح SLAU، مقدار  $\alpha$  در رابطه (۱۱) برابر صفر است. در سرعت‌های پایین  $(1 - \chi)$  برابر  $2M$  خواهد بود لذا داریم:

$$dp = \frac{3}{8} (M_L + M_R) \Delta p + \{ [2M] \frac{3}{8} (M_L - M_R) \bar{p} \} \quad (35)$$

بخش دوم در رابطه فوق که در ارتباط مستقیم با سرعت صوت است با عدد ماخ محلی مقیاس می‌شود. لازم به ذکر است که بخش اول  $(\Delta p)$ ، از مرتبه یکم است.

#### ۴-۴- استراتژی اصلاح شار فشاری در روش AUSM+M

در این طرح عددی، مشابه رابطه (۳۱)، بخش مخدوش گر دقت به صورت زیر مقیاس می‌شود:

$$dp = \frac{1}{2} (P_L^+ - P_R^-) \Delta p - \{ f_0 \frac{(1 - P_L^+ - P_R^-) \bar{p}}{\text{Error source}} \} \quad (36)$$

$$f_0 = \min(1.0, \max(f, M^2_{\infty}))$$

$$f = 0.5(1 - \cos(\pi M))$$

$$M = \min(1.0, \max(|M_L|, |M_R|))$$

#### ۴-۵- استراتژی اصلاح شار جرمی در خانواده AUSM

برای محاسبه شار جرمی در خانواده آسم به‌طور کلی داریم:

$$\dot{m} = C_{1/2} M_{1/2} \begin{cases} \rho_L & M_{1/2} > 0 \\ \rho_R & M_{1/2} < 0 \end{cases} \quad (37)$$

$$M_{1/2} = M_L^+ + M_R^- \quad (38)$$

$$M_{(L/R)}^\pm \quad (39)$$

$$= \begin{cases} \pm \frac{(M_{(L/R)}^\pm \pm 1)^2}{4} \left( 1 \mp \frac{1}{16} \beta \frac{(M_{(L/R)}^\mp \mp 1)^2}{4} \right) & |M_{(L/R)}| < 1 \\ \frac{M_{(L/R)}^\pm \pm |M_{(L/R)}|}{2} & |M_{(L/R)}| \geq 1 \end{cases}$$

در راستای کنترل پدیده چکربرد، اختلاف فشار مرتبه اول در معادله پیوستگی نقشی اساسی را ایفا می‌کند. در این راستا در روش AUSM+ مقدار زیر به شار جرمی معرفی شده در رابطه (۳۶) اضافه می‌شود:

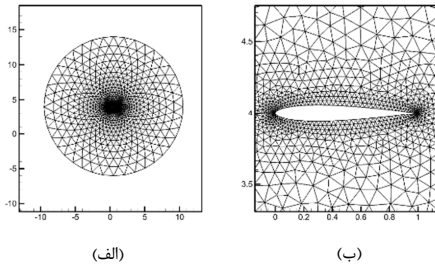
$$\Delta M (P_L - P_R) \frac{\check{C}_{1/2} (1 - \beta^2)}{\beta^2 \left( \frac{P_L}{\rho_L} + \frac{P_R}{\rho_R} \right)} \quad (40)$$

برای روش AUSM+UP داریم:

$$\frac{0.25(P_R - P_L) \text{Max}(1 - \bar{M}^2, 0.0)}{f_a \cdot \rho_{1/2} (C_{1/2})^2} \quad (41)$$

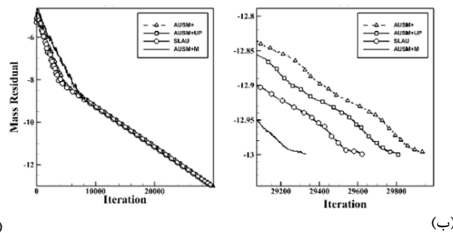
برای روش SLAU داریم:

$$\frac{\chi}{2C_{1/2}} (P_R - P_L) \quad (42)$$



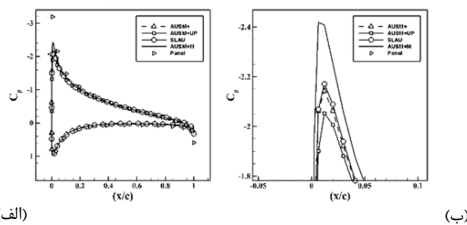
شکل ۱- (الف) شبکه مورد استفاده در بررسی جریان حول ایرفویل NACA0012 (ب) نمای نزدیک

با توجه به شکل ۲ در بررسی جریان با عدد ماخ ۰/۲۵ و زاویه حمله ۷ درجه به لحاظ نرخ همگرایی بیشترین سرعت همگرایی در روش AUSM+M و کمترین نرخ همگرایی در روش AUSM+ قابل مشاهده است.



شکل ۲- (الف) نرخ همگرایی خانواده آسم در بررسی جریان حول ایرفویل NACA0012 (عدد ماخ ۰/۲۵ و زاویه حمله ۷ درجه) (ب) نمای نزدیک

در ادامه و در شکل ۳ مقایسه دقت نتایج در المان ضریب فشار آورده شده است. همچنین با توجه به شکل ۳ معین است که روش AUSM+M و بعداز آن SLAU بهترین عملکرد را در نقطه سکون ایرفویل دارد. بعلاوه اینکه روش AUSM+UP هرچند دارای سرعت همگرایی بهتری نسبت به روش AUSM+ است اما در نقطه سکون ضریب فشار عملکرد ضعیفتری نسبت به این روش دارد، در مجموع و بنابر معیارهای سرعت همگرایی و پیش‌بینی دقیق‌تر در نقطه سکون طرح AUSM+M در این میدان بهترین عملکرد را دارد.



شکل ۳- (الف) توزیع ضریب فشار روی ایرفویل NACA0012 (عدد ماخ ۰/۲۵ و زاویه حمله ۷ درجه) در خانواده عددی آسم (ب) نمای نزدیک

در ادامه و جهت بررسی در میدان‌هایی با شدت تراکم‌پذیری بیشتر عدد ماخ به ۰/۰۰۱ تقلیل داده شده است. با توجه به شکل ۴ معین

و در نهایت برای روش AUSM+M داریم:

$$-0.5(P_R - P_L)(1-g)(1-f) \quad (42)$$

$$\rho_{1/2}(C_{1/2})^2$$

جزئیات بیشتر روابط (۳۹) تا (۴۲) در (۱۱-۱۳، ۲۲) آورده شده است.

#### ۴-۶- روش پیمایش زمان

شکل نیمه گسسته معادلات غیر پیش‌شرطی و کلاسیک اولر به صورت زیر است.

$$\frac{\Omega_j(Q_j)}{\Delta t} = R_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (43)$$

و مقدار مانده‌ها به صورت پیش‌شرطی به فرم زیر اصلاح می‌گردد.

$$R_j = \Gamma_i \sum_{n=k(j)}^3 \bar{H}_{j,n} \cdot \Delta \ell_{j,n} \quad (44)$$

در روابط فوق زیرنویس  $j$  نشان‌دهنده شماره سلول مورد محاسبه و  $n=k(j)$  به معنای سلول شماره  $n$  در وجه  $k$  است. علامت‌های  $\Omega$  و  $d\ell$  به ترتیب معرف اندازه وجه و مساحت سلول و  $R$  نشان‌دهنده بردار مانده‌ها،  $H$  بردار شار عمود بر وجه و  $Q$  متغیرهای بقایی است. برای محاسبه تغییرات بردار متغیرهای بقایی  $\Delta Q$ ، احتیاج به داشتن مقدار گام زمانی  $\Delta t$  است. مقدار گام زمانی برای هر سلول از رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$\Delta t_j \leq \frac{CFL \times \Omega_j}{\sum_{k=1}^3 (\lambda_{max})_k d\ell_k} \quad (45)$$

$\lambda_{max}$  بزرگ‌ترین مقدار ویژه برای معادلات پیش‌شرطی ترکل است. برای انتگرال‌گیری زمانی رابطه از روش بشفورت-مولتون تصحیح شده با دقت زمانی مرتبه دو استفاده شده است. (۲۳)

#### ۵- نتایج

با توجه به بخش چهارم، در مدیریت بخش‌های پخشی شارهای فشاری و همرفتی، طرح‌های عددی مختلف دارای راهبردهای متفاوتی هستند. به جهت تفاوت در این راهبردها، شناخت طرح عددی کارآمدتر ضرورت دارد. در این بخش سه آزمایش ایرفویل NACA0012، ایرفویل سه المانه مکدونالد داگلاس 30P-30N و جریان روی یک نیم-استوانه در جریان‌هایی با عدد ماخ کم و بسیار کم در راستای سنجش طرح‌های عددی مطرح شده به لحاظ دقت و سرعت همگرایی تدوین شده است.

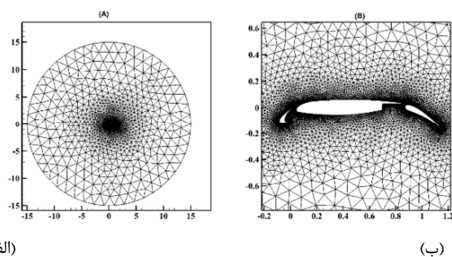
#### ۵-۱- آزمایش ایرفویل متقارن NACA0012

در آزمایش اول جریان حول ایرفویل متقارن NACA0012 در دو عدد ماخ ۰/۰۰۱ و ۰/۰۲۵ و در زاویه حمله ۷ درجه مورد بررسی قرار می‌گیرد. شبکه مورد استفاده در این آزمایش که در

شکل ۱ نشان داده شده است پس از انجام بررسی‌های لازم به جهت استقلال از شبکه دارای ۳۲۱۸ سلول محاسباتی است. لازم به ذکر است، جهت بررسی عمیق‌تر طرح‌های توسعه داده شده در فیزیک‌های مورد بررسی از ذکر جزئیات مربوط به استقلال از شبکه اجتناب شده است.

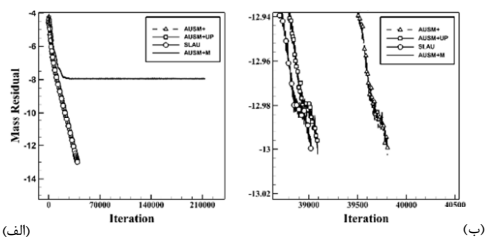
### ۵-۲- آزمایش ایرفویل سه المانه 30P-30N

جهت ارزیابی طرح‌های عددی در هندسه‌های پیچیده‌تر، جریان دوبعدی حول ایرفویل سه‌تکه 30P-30N در اعداد ماخ مختلف  $0.3$  و  $0.3$  با زاویه حمله  $8/5$  درجه مورد بررسی قرار گرفته و با نتایج تجربی (۲۴) مقایسه شده‌اند. همانند قبل برای بررسی استقلال از شبکه و دامنه حل، شبکه بهینه‌شده‌ای که از آزمایش‌های متعدد عددی به دست آمده است مطابق شکل ۶ این شبکه با  $19372$  المان و  $10159$  گره انتخاب می‌شود.



شکل ۶- (الف) شبکه مورد استفاده در بررسی جریان حول ایرفویل سه المانه (ب) نمای نزدیک

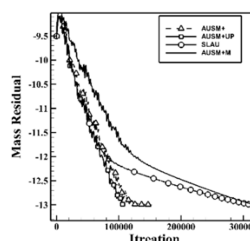
با توجه به شکل ۷ در این آزمایش با عدد ماخ  $0.3$  و زاویه حمله  $8/5$  درجه، روش SLAU بالاترین نرخ همگرایی را دارد و با اختلاف ناچیزی روش AUSM+UP بیشینه‌ی نرخ همگرایی را دارد. همچنین نرخ همگرایی روش AUSM+M دچار اختلال شده است و همگرایی بعد از مقدار معینی دچار توقف می‌شود.



شکل ۷- (الف) نرخ همگرایی خانواده آسم در بررسی جریان حول ایرفویل سه المانه (عدد ماخ  $0.3$  و زاویه حمله  $8.5$  درجه) (ب) نمای نزدیک

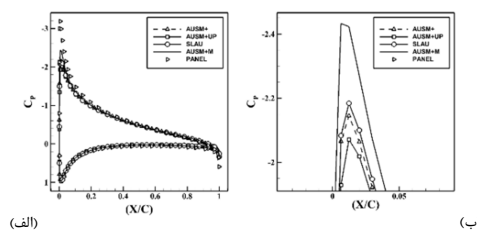
است که در میدان مورد بررسی به لحاظ نرخ همگرایی بیشترین سرعت همگرایی در روش AUSM+UP و کمترین نرخ همگرایی در روش SLAU و AUSM+M قابل مشاهده است. همچنین با کاهش عدد ماخ و تسلط یافتن عمده‌ی میدان جریان تراکم ناپذیر نرخ همگرایی دو روش SLAU و AUSM+M به شدت کاهش یافته است، بعلاوه روش AUSM+UP برخلاف حالت قبل سریع‌ترین نرخ همگرایی را نشان می‌دهد.

این بررسی نشان می‌دهد تجمیع اتلافات عددی حاصله از معادلات (۳۲) و (۴۱) در محاسبه شار فشاری و جرمی در طرح عددی SLAU هر چند در اعداد ماخ پایین منتج به نرخ همگرایی مناسبی می‌شود اما با کاهش عدد ماخ و رسیدن به ماخ‌های خیلی کم نرخ همگرایی تضعیف می‌شود؛ همچنین این روند در روش AUSM+M نیز وجود دارد. در نقطه مقابل روش‌های AUSM+ که اتلافات عددی آن در روابط (۲۳) و (۳۹) تجمیع شده است، توأمان با کاهش عدد ماخ نرخ همگرایی بهتری را دارد.



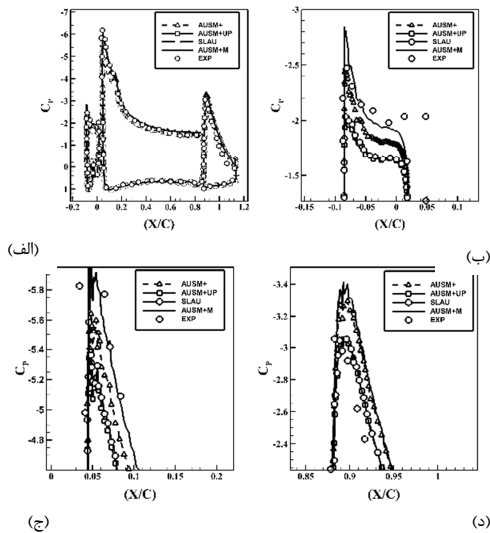
شکل ۸- نرخ همگرایی خانواده آسم در بررسی جریان حول ایرفویل NACA0012 (عدد ماخ  $0.01$  و زاویه حمله  $7$  درجه)

با توجه به شکل ۵، روش AUSM+M و بعد از آن SLAU بالاترین دقت را در نقطه سکون دارد. نکته قابل تأمل این است که روش AUSM+UP هرچند سرعت همگرایی بسیار خوبی را نسبت به سه روش دیگر در این آزمایش دارد اما دقت آن در نقطه سکون کاهش می‌یابد و در این ناحیه ضعیف‌ترین روش است. از این آزمایش می‌توان استنباط کرد که مجموع روابط (۲۴) و (۴۰) که تجمیع بخش‌های پخش در روش AUSM+UP هستند، هرچند در افزایش سرعت همگرایی کارآمد هستند اما نمی‌توانند توأمان منجر به دقت قابل قبولی نیز بشوند به عبارتی توازن منطقی‌ای بین کاهش سرعت همگرایی و افزایش میزان دقت به واسطه روابط مطرح شده ایجاد نمی‌شود و این مسئله به‌عنوان یک نقطه ضعف عملکردی تلقی می‌گردد.



شکل ۹- (الف) توزیع ضریب فشار روی ایرفویل NACA0012 (عدد ماخ  $0.01$  و زاویه حمله  $7$  درجه) در خانواده عددی آسم (ب) نمای نزدیک

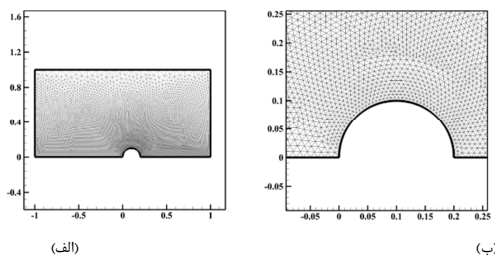
که تشدید نقاط پیچیده جریان که همراه با تکینگی هستند (مانند نقاط سکون) می‌تواند عملکرد نقاط سکون را متأثر کند. مضاعف بر این المان<sub>a</sub> نقش حیاتی‌ای را در ایجاد تعادل بین میزان افزایش سرعت همگرایی و بهبود دقت در سرعت‌های بسیار پایین دارد. مشهود است که در روش AUSM+M با حذف این المان هر چند دقت بهبود داشته است اما سرعت همگرایی دچار توقف در مقداری معین شده است.



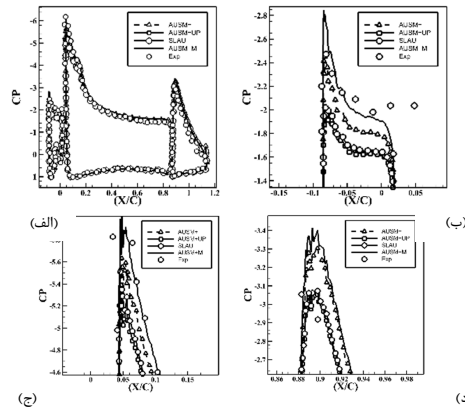
شکل ۱۰- (الف) توزیع ضریب فشار حول ایرفویل سه المانه (عدد ماخ ۰/۰۰۳ و زاویه حمله ۸٫۵ درجه) در خانواده عددی آسم (ب) و (ج) و (د) نمای نزدیک

### ۵-۳- جریان داخل کانال نیم-استوانه

جهت ارزیابی بیشتر طرح‌های بیان شده در جریان داخلی، جریان درون یک کانال با هندسه نیم-استوانه و قطر ۰/۲ و در اعداد ماخ ۰/۰۱ مورد بررسی قرار گرفته است. برای این آزمایش، برای جریان ورودی مادون صوت، فشار سکون  $P_0$  و دمای سکون مشخص  $T_0$  می‌گردد. در خروجی، فشار استاتیک خروجی معین گردیده و مابقی متغیرها از داخل میدان مشخص می‌گردد. شبکه محاسباتی بهینه شده که در نزدیکی برآمدگی تراکم بیشتری دارد با ۵۹۱۳ سلول و ۳۰۸۲ گره در شکل ۱۱ آورده شده است.

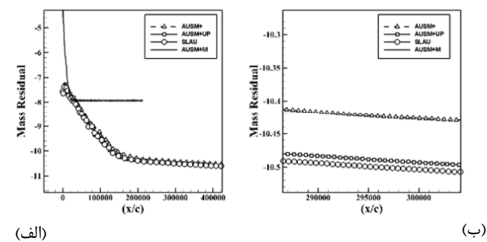


شکل ۱۱- (الف) شبکه محاسباتی برای کانال با برآمدگی نیم-استوانه (ب) نمای نزدیک



شکل ۸- (الف) توزیع ضریب فشار حول ایرفویل سه المانه (عدد ماخ ۰/۰۰۱ و زاویه حمله ۷ درجه) در خانواده عددی آسم (ب) و (ج) و (د) نمای نزدیک

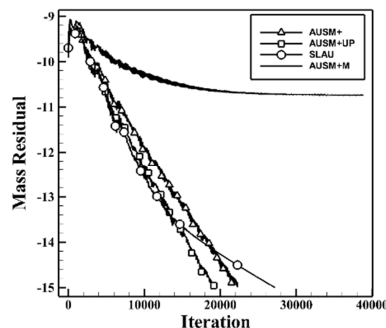
با توجه به شکل ۸ روش AUSM+M و بعداز آن AUSM+ بهترین دقت را در نواحی مختلف میدان در پیش‌بینی مشخصه‌های جریان ارائه می‌دهد. مضاعف بر این دقت روش‌های AUSM+UP و SLAU در این میدان در پیش‌بینی مشخصه‌های جریان تقریباً یکسان است. لازم به ذکر است که علی‌رغم نرخ همگرایی ضعیف روش AUSM+M، این روش در پیش‌بینی ضریب فشار این میدان بهترین دقت را دارد. با توجه به شکل ۹ در این آزمایش با کاهش عدد ماخ به ۰/۰۰۳ روش SLAU بالاترین نرخ همگرایی را همانند بخش قبل این آزمایش دارد، با اختلاف ناچیزی روش AUSM+UP بیشینه‌ی نرخ همگرایی را دارد. همچنین نرخ همگرایی روش AUSM+M بعد از مقدار معینی دچار توقف می‌شود. هیچ‌کدام از طرح‌های عددی سرعت همگرایی مناسبی مانند آزمایش قبل ندارند و نرخ همگرایی‌شان دچار توقف شده است.



شکل ۹- (الف) مقایسه نرخ همگرایی خانواده آسم در بررسی جریان حول ایرفویل سه المانه (عدد ماخ ۰/۰۰۳ و زاویه حمله ۸٫۵ درجه) (ب) نمای نزدیک

همچنین با توجه به شکل ۱۰ می‌توان اذعان داشت که طرح AUSM+M دارای بیشینه دقت در نواحی مختلف این میدان است، همان‌طور که قبلاً نیز معین شد این روش علی‌رغم نرخ همگرایی نامناسب دارای دقت مناسبی در محاسبه ضریب فشار و در محل نقاط سکون است. لازم به ذکر است که روش AUSM+ نیز همین الگوی رفتاری بیان شده در طرح عددی AUSM+M را در این میدان دارد همچنین روش‌های SLAU و AUSM+UP دقت مشابهی را در این میدان دارند. لازم به ذکر است که بنابراین آزمایش می‌توان نتیجه گرفت

مقایسه سرعت همگرایی طرح‌های عددی در عدد ماخ ۰/۰۱ در شکل ۱۲ آورده شده است. با توجه به این شکل اولاً میزان همگرایی روش AUSM+M و SLAU در این میدان مخدوش شده است و دوماً این‌که بیشینه سرعت همگرایی در طرح عددی AUSM+UP رخ می‌دهد.



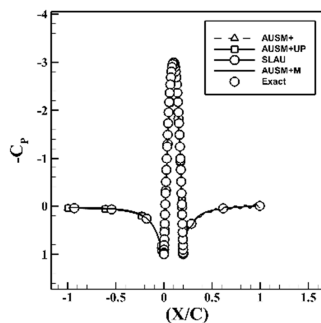
شکل ۱۲- الف) نرخ همگرایی خانواده آسم در بررسی جریان حول کانال نیم-استوانه‌ای (عدد ماخ ۰/۰۱)

می‌تواند بطور متوسط ۱۵ درصد بهبود را در پاسخ‌ها ایجاد نماید. علی-رغم دقت مناسب روش AUSM+M، این روش در سرعت‌های پایین نرخ همگرایی مناسبی را ندارد لازم به ذکر است، نرخ همگرایی این روش در سرعت‌های کم در مقاداری معین متوقف می‌شود.

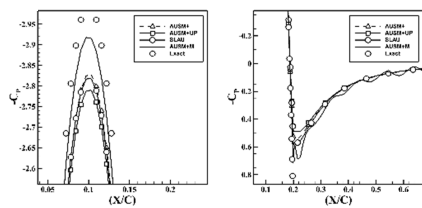
ب- با افزایش پیچیدگی جریان و ظهور گرادیان‌های شدیدتر در میدان حل، عملکرد این خانواده عددی تحت الشعاع قرار می‌گیرد و در آزمایش ایرفویل سه المانه، به علت پیچیدگی بیشتر فیزیک جریان و تشدید نقاط سکون در میدان حل، نرخ همگرایی طرح‌های عددی خانواده آسم کاهش می‌یابد و در این بین روش AUSM+M کمترین نرخ همگرایی و روش SLAU بهترین نرخ همگرایی را دارد. اما دقت بهتری از نتایج با روش AUSM+M نسبت به سایر طرح‌های این خانواده عددی حاصل می‌شود.

پ- روش AUSM+UP در سرعت‌های پایین، رفتاری معکوس با روش AUSM+M دارد، به عبارت دقیق‌تر این روش علی‌رغم سرعت همگرایی مناسب، دقت را بشدت متأثر و مخدوش می‌نماید. روش AUSM+ دارای رفتاری مشابه با روش AUSM+M است، هرچند در میزان نرخ همگرایی نسبت به این روش عملکرد ضعیف‌تری دارد.

پ- در نهایت، در جریان‌های با سرعت کم یا خیلی کم، روش AUSM+M و بعد از آن روش SLAU می‌تواند با صرف زمان بیشتر منتج به دقت بهتری در نتایج شود؛ در نقطه مقابل روش‌های AUSM+ و AUSM+UP اتلافات عددی بیشتر، هزینه کمتر و دقت ضعیف‌تری در جریان‌های سرعت پایین غیرلرزش دارند.



الف)



ب)

ج)

شکل ۱۳- الف) م توزیع ضریب فشار روی کانال نیم-استوانه‌ای (عدد ماخ ۰/۰۱) در خانواده عددی آسم (ب) و (ج) نمای نزدیک

## ۷- مراجع

[1]. Liou M-S, editor Open issues in numerical fluxes: proposed resolutions. 20th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference; 2011.

همچنین با توجه به شکل ۱۳ دقت طرح‌های عددی در پیش‌بینی ضریب فشار در مقایسه با ضریب فشار تحلیلی ارائه شده است  $(C_p = 1 - 4\sin^2(\theta))$ . نکته قابل تأمل این است که علی‌رغم مخدوش شدن سرعت همگرایی در طرح‌های AUSM+M و SLAU دقت محاسبه ضریب فشار این روش عددی در میدان حل نسبت به طرح‌های دیگر بهبود داشته است. همان‌طور که قبلاً نیز بیان شد حذف المان  $f_4$  باعث بهبود دقت می‌شود اما اثری معکوس بر روی سرعت همگرایی دارد. این مسئله در این آزمایش و با توجه به شکل ۱۲ و شکل ۱۳ در روش AUSM+M دیده می‌شود. از سویی دیگر جهت از بین بردن رخداد غیر فیزیکی چکربرد لازم است تا ضریب  $\Delta p$  در بخش‌های پخشی شار جرمی و همرفتی از مرتبه صفر باشد (۲۵) و این مسئله در شار جرمی روش AUSM+UP (رابطه (۴۰)) که در آن  $\Delta p$  از مرتبه صفر است نسبت به شار جرمی روش AUSM+M (رابطه (۴۲)) که به فرم منفی یک است، خواستگاه اختلاف این دو روش در میزان همگرایی استنتاج می‌شود.

## ۶- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، گستره‌ی وسیعی از خانواده آسم با رویکرد بررسی دقت و سرعت همگرایی در سرعت‌های کم و خیلی کم مورد بررسی قرار گرفتند. با توجه به آزمایش‌های انجام شده می‌توان به صورت خلاصه به نتایج ذیل اشاره کرد:

الف- المان‌های اتلاف عددی موجود در شار جرمی و شار فشاری این خانواده تأثیر بسزایی در میزان نرخ همگرایی و دقت روش‌های مورد بررسی دارند. لازم است برای رسیدن به یک توازن مناسب میان المان‌های سرعت همگرایی و بهبود دقت، مقیاس دهی مناسبی در المان‌های معرفی شده ایجاد گردد.

ب- روش AUSM+M به لحاظ دقت در پیش‌بینی محل‌های بحرانی با سرعت خیلی کم، بهترین عملکرد را بین روش‌های مورد بررسی دارد و



- [2].Qu F, Yan C, Yu J, Sun D. A new flux splitting scheme for the Euler equations. *Comput Fluids*. 2014;102:203-14.
- [3].Vanleer B, editor Flux-vector splitting for the 1990s. NASA, Lewis Research Center, Computational Fluid Dynamics Symposium on Aeropropulsion; 1991.
- [4].Toro EF. Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction: Springer Science & Business Media; 2013.
- [5].Roe PL. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J Comput Phys*. 1981;43(2):357-72.
- [6].Yeom G-S, Chang K-S. Numerical simulation of two-fluid two-phase flows by HLL scheme using an approximate Jacobian matrix. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*. 2006;49(2):155-77.
- [7].Liou M-S, Steffen Jr CJ. Development of a new flux splitting scheme. Center for Modeling of Turbulence and Transition (CMOTT) Research Briefs: 1990. 1991.
- [8].Liou M-S, Steffen Jr CJ. A new flux splitting scheme. *Journal of Computational physics*. 1993;107(1):23-39.
- [9].Liou M-S. A sequel to AUSM. *Journal of Computational Physics*. 1996;129(2):364-82.
- [10].Kim KH, Kim C, Rho O-H. Methods for the accurate computations of hypersonic flows: I. AUSMPW+ scheme. *J Comput Phys*. 2001;174(1):38-80.
- [11].Liou M-S. A sequel to AUSM, Part II: AUSM+ up for all speeds. *Journal of computational physics*. 2006;214(1):137-70.
- [12].Chen S-s, Cai F-j, Xue H-c, Wang N, Yan C. An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows. *Applied Mathematical Modelling*. 2020;77:1065-81.
- [13].Shima E, Kitamura K. Parameter-free simple low-dissipation AUSM-family scheme for all speeds. *AIAA J*. 2011;49(8):1693-709.
- [14].Djavarshkian m, moghadaskhorasani M, mohammadi A. Comparing the performance of preconditioning matrixes in wide range of internal and external flows. *Fluid mechanics and aerodynamics*. 2020;10(2).
- [15].Maia AAG, Kapat JS, Tomita JT, Silva JF, Bringham C, Cavalca DF. Preconditioning methods for compressible flow CFD codes: Revisited. *Int J Mech Sci*. 2020;186:105898.
- [16].Maia A, Ferreira da Silva J, Tomita J, Bringham C. Implementing a Preconditioning Technique in A RANS Compressible Code to Accelerate the Convergence Rate for Low-Speed Flows. The 5th World Congress on Mechanical, Chemical, and Material Engineering; Canada2019.
- [17].Maia AA, Silva JF, Tomita JT, Bringham C. Applying a Preconditioning Technique to the Euler Equations to Accelerate the Convergence Rate for Low-Speed Flows. the 5th World Congress on Mechanical, Chemical, and Material Engineering; Lisbon, Portugal2019.
- [18].Darmofal DL, Siu K. A Robust Multigrid Algorithm for the Euler Equations with Local Preconditioning and Semi-coarsening. *J Comput Phys*. 1999;151(2):728-56.
- [19].Akbarzadeh P, Askari Lehdarbonei A, Derazgisoo SM. A new smoothing approach for accelerating the convergence of power-law preconditioning method in steady and unsteady flows simulation. *Int J Mech Sci*. 2018;141:316-29.
- [20].Tukel E. Preconditioned methods for solving the incompressible and low speed compressible equations. *J Comput Phys*. 1987;72(2):277-98.
- [21].Tukel E. Preconditioning methods for low-speed flows. 14th Appl Aerodyn Conference; New Orleans,LA,U.S.A.: American Institute of Aeronautics and Astronautics; 1996.
- [22].Edwards JR, Liou M-S. Low-diffusion flux-splitting methods for flows at all speeds. *AIAA J*. 1998;36(9):1610-7.
- [23].Rodabaugh D, Thompson S. Adams-type methods with increased ranges of stability. *Computers & Mathematics with Applications*. 1978;4(4):349-57.
- [24].Murayama M, Nakakita K, Yamamoto K, Ura H, Ito Y, Choudhari MM. Experimental Study on Slat Noise from 30P30N Three-Element High-Lift Airfoil at JAXA Hard-Wall Low-speed Wind Tunnel. 20th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference; Atlanta, USA: American Institute of Aeronautics and Astronautics; 2014.
- [25].Li X-s, Gu C-w. Mechanism of Roe-type schemes for all-speed flows and its application. *Comput Fluids*. 2013;86:56-70.