

رفع مشکل ایجاد مودهای جعلی کمانشی در بهینه‌سازی سازه‌های الاستیک با هدف بیشینه کردن کوچکترین ضریب بار کمانشی

دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران، hesamabhar@semnan.ac.ir
دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه سمنان، سمنان، ایران، aghoddosian@semnan.ac.ir

حسام ابهر
علی قدوسیان*

چکیده

در بهینه‌سازی توپولوژی و تکیه‌گاه سازه‌های پیوسته، مسائل مرتبط با پایداری و جلوگیری از کمانش اعضای سازه معمولاً به دلیل پیچیدگی‌های محاسباتی در نظر گرفته نمی‌شوند، بنابراین در بعضی موارد منجر به ایجاد اعضای بلند و نازک در پیکربندی بهینه‌شده و باعث ناپایداری سازه می‌گردد. یکی از مشکلات فرایندهای بهینه‌سازی کمانشی رایج که بر پایه تغییر چگالی و یا حذف و جایگزینی ماده می‌باشند، ایجاد مودهای کمانشی جعلی است که منجر به واگرایی مساله بهینه‌سازی، کند شدن فرایند حل و یا تولید توپولوژی‌های غیربهینه به عنوان خروجی فرایند بهینه‌سازی می‌شود. در این مطالعه از روش بهینه‌سازی سطوح هم‌تراز با بکارگیری یک جمله جعلی انرژی استفاده شده است. روش سطوح هم‌تراز، مبتنی بر حرکت مرز سازه بوده و توانایی بالایی در کنترل پیچیدگی‌های توپولوژی را دارا است، بنابراین ایده استفاده از این روش منجر به حذف مودهای جعلی و حل این مشکل گردیده است. استخراج جمله سرعت مورد نیاز در روش سطوح هم‌تراز برای ضریب بار کمانش پیچیده است و استخراج این جمله از دیگر نوآوری‌های این پژوهش است. مثال‌های عددی برای اثبات تاثیر این روش ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: کمانش، مودهای جعلی، سطوح هم‌تراز، بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ای، سطوح پیوسته، پایداری.

Fixing the problem of pseudo buckling modes in optimizing elastic structures with the aim of maximizing the smallest buckling load factor

H. Abhar
A. Ghoddosian

Faculty of Mechanical Engineering, University of Semnan, Semnan, Iran
Faculty of Mechanical Engineering, University of Semnan, Semnan, Iran

Abstract

In the topology and support optimization of continuous structures, stability and buckling issues due to computational complexities are not usually considered, therefore in some cases, long and thin members are obtained in optimized configuration that can lead to the instability of structure. One of the major problems during the implementation of conventional buckling optimization processes that are based on changing the density or removing and replacing the material is the creation of pseudo buckling modes that lead to the divergence of the optimization problem, decreasing the rate of solving process or producing non-optimal shapes. In this article level set method with incorporating a fictitious interface energy is applied to find optimal configuration. The level set method is based on the movement of the structural boundaries and it has a high ability to control the complexity of the topology, so the idea of using this method has led to the elimination of pseudo buckling modes and the solving of this problem. Derivation of the required speed term in the level set method for buckling load factor is complicated and this derivation is another innovation of this research. Numerical examples are illustrated to prove the effectiveness of this method.

Keywords: Level set, Buckling, Topology optimization, Pseudo buckling modes.

۱- مقدمه

بهینه‌سازی شکل و توپولوژی سازه‌ها معمولاً با بررسی استحکام و سفتی سازه و با در نظر گرفتن توابع هدف مرسوم مانند حداقل کردن انرژی کرنشی یا جرم سازه صورت می‌پذیرد. اعضای بلند و نازکی که بار فشاری را تحمل می‌کنند در صورتی که دچار ناپایداری و کمانش شوند معمولاً جابجایی‌های بزرگی را در سازه‌ها ایجاد می‌نمایند که منجر به تخریب کل سازه می‌شود. اخیراً در مورد بهینه‌سازی کمانشی تحقیقات بیشتری صورت گرفته است.

نوس و همکاران پایداری سازه‌های پیوسته را در بحث بهینه‌سازی توپولوژی در نظر گرفتند. آنها موضوع تقویت سازه جهت افزایش کلی پایداری سازه‌ای را مورد پژوهش قرار دادند. نوس و همکاران ابتدا معادله انرژی کرنشی سازه را نوشتند سپس کرنش موجود در سازه را به دو قسمت خطی و غیرخطی تقسیم کردند و با حذف جمله‌های مرتبه بالا و جایگزینی تنش موجود در سازه با حاصل ضرب تنش نرمال ناشی

از بار کمانش ضرب در ضریب بار کمانش، یک مقدار خطی شده برای بار بحرانی سازه به دست آوردند. سپس با استفاده از روش‌های مرتبه اول مبتنی بر گرادیان منفی، سازه را به حالت بیشینه وضعیت تحمل بار بحرانی با یک حجم محدود بهینه کردند [۱]. نوس و همکاران با گسترش دادن کار خود برای بهینه‌سازی کمانشی مواد با ساختار ریز تکرار شونده^۱ که دچار کمانش موضعی در همان ساختار سلولی خود می‌شوند این مواد را نیز مورد بررسی قرار دادند [۲]. ژینگ جون و هایتائو برای بهینه‌سازی کمانشی از الگوریتم‌های مبتنی بر چگالی مواد به عنوان متغیر طراحی استفاده کرده‌اند و برای حذف مودهای جعلی کمانشی ایجاد شده از تکنیکی به نام انتقال مودها^۲ بهره برده شده است [۳]. بر اساس این تکنیک، مودهای جعلی دارای دو ویژگی

¹ Periodic material micro-structures

² Mode shifting

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: aghoddosian@semnan.ac.ir

تاریخ دریافت: ۹۸/۰۷/۲۰

تاریخ پذیرش: ۲۰/۰۴/۱۲

هستند ۱- بعضی از مدهای جعلی دارای مقادیر ویژه نزدیک به صفر و خیلی کوچکتر از مقادیر ویژه حقیقی هستند ۲- تغییر شکل‌ها به طور عمده در یک ناحیه با چگالی کم اتفاق می‌افتند، بنابراین جمع انرژی کرنشی در نواحی کم چگالی سهم زیادتری نسبت به بقیه انرژی کرنشی سازه دارند. با استفاده از ویژگی اول و این خاصیت که طرح اولیه سازه به دلیل نداشتن نواحی کم چگالی، مود جعلی ندارد، در کل فرایند بهینه‌سازی مدهای با مقادیر ویژه کمتر از اولین مقدار ویژه حقیقی مرحله قبلی حذف می‌شوند و با استفاده از ویژگی دوم و سنجش سطح انرژی کرنشی قسمت‌های کم چگالی نسبت به انرژی کرنشی کل برای هر مود و تعریف یک آستانه، جعلی یا حقیقی بودن هر مود بدست می‌آید. لوته و تُنگ با استفاده از یک روش بهینه‌سازی به نام "حدآستانه سطوح استاندارد در حال حرکت" بار کمانش بحرانی سازه‌های پیوسته را به حداکثر خود رساند [۴]. تغییر شکل‌های بزرگ و ایجاد ناپایداری و کمانش در سازه‌های بلند به دلیل نقص‌های کوچک در فرایند ساخت، یک زمینه جذاب برای بهینه‌سازی مقاوم در این سازه‌ها را ایجاد کرده‌است. که یکی از این بهینه‌سازی‌های مقاوم در برابر این نقص‌های ساختی توسط جانسن صورت گرفته است [۵]. جانسن در مدل‌سازی خود از تابع هدف انرژی کرنشی نهایی^۲ که برای مدل‌سازی‌های غیرخطی استفاده می‌شود بهره برده است.

روش سطوح هم‌تراز جهت بهینه‌سازی شکل و توپولوژی سازه‌ها، یک روش کلاسیک برای تغییر شکل مرز سازه به صورت ضمنی است که در سال‌های اخیر پیشرفت‌های زیادی داشته است. روش سطوح هم‌تراز ابتدا توسط آشیر و سیسین برای حرکت مرز سازه تحت یک تابع سرعت ارائه گردید. در روش سطوح هم‌تراز مرز سازه به صورت ضمنی با یک تابع یک مرتبه بالاتر بیان می‌شود و مرز سازه که توسط تابع صفر سطوح هم‌تراز بیان می‌گردد در حقیقت متغیر طراحی می‌باشد. این مرز توسط معادله سطوح هم‌تراز به صورت ضمنی جابه‌جا می‌شود [۶]. سطوح هم‌تراز در زمینه بهینه‌سازی سازه‌ها برای اولین بار توسط سیسین و ویگمن ارائه گردید [۷]. بعداً وانگ و همکاران رابطه بین بردار سرعت مرز و تغییر حساسیت را به عنوان یک لینک با معنی بین بهینه‌سازی سازه‌های کلی و روش قدرتمند سطوح هم‌تراز برقرار کردند [۸]. آلر و همکاران یک اجرای مشابه برای تابع سطوح هم‌تراز را که سرعت مرز در طول فرایند بهینه‌سازی توسط یک آنالیز حساسیت صریح به وسیله روش الحاقی بدست می‌آمد را پیاده نمودند [۹]. جیاوانگ و شی، علاوه بر بهینه‌کردن شکل و توپولوژی سازه، محل تکیه‌گاه‌های سازه را نیز با روش سطوح هم‌تراز بهینه کردند که برای این کار علاوه بر در نظر گرفتن تغییرات در شرایط مرزی نیومن، تغییرات در شرایط مرزی دیریکله (تکیه‌گاهی) را نیز لحاظ کردند. جیاوانگ و شی همچنین با بهره‌گرفتن از یک استراتژی محدود کننده حرکت مرز سازه^۳ باعث افزایش پایداری به دلیل جلوگیری از تغییرات شدید سرعت و افزایش نرخ همگرایی حل مساله بهینه شدند [۱۰] و [۱۱] (از یک جمله نمایی برای بیان سرعت مرز استفاده کردند. این

جمله باعث حفظ سرعت مناسب حرکت مرز مرحله قبل و کاهش شدید این سرعت در صورت فاصله گرفتن زیاد مرز از محل مرحله قبلی بهینه‌سازی می‌شود). یامادا و همکاران با اضافه نمودن یک جمله انرژی جعلی به تابع هدف باعث به وجود آمدن یک جمله اضافی در معادله سطوح هم‌تراز شدند که در پایدار شدن حل و کنترل پیچیدگی‌های شکل بهینه شده بسیار مفید می‌باشند [۱۲]. پینگ وی و همکاران با استفاده از توابع پایه شعاعی^۴ موفق شدند یک روش جدید بهینه‌سازی با استفاده از سطوح هم‌تراز را توسعه دهند به گونه‌ای که تغییرات توپولوژی شکل بهینه حین فرایند بهینه‌سازی بسیار نرم‌تر و پایدارتر صورت پذیرد [۱۳]. پیتز دانینگ و همکاران بهینه‌سازی شکل سازه‌های پیوسته با استفاده از روش سطوح هم‌تراز و با در نظر گرفتن قید کمانش را لحاظ نموده اند [۱۴]. تمرکز اصلی در پژوهش دانینگ بر یافتن راه حل‌های پایدار، سریع و دقیق در استخراج شکل مدها و مقادیر ویژه سازه می‌باشد و توضیحی در مورد نحوه استخراج جمله سرعت که بخش پیچیده و اصلی روش سطوح هم‌تراز است و همچنین مشکل مدهای جعلی، داده نشده است همچنین به دلیل اینکه روش استفاده شده در این پژوهش مبتنی بر تغییر شکل سازه می‌باشد و نه تغییر توپولوژی آن، لذا شکل بهینه استخراج شده وابستگی زیادی به توپولوژی اولیه سازه دارد و به ناچار برای بهینه‌سازی سوراخ‌هایی در سازه اولیه مثال حل شده در نظر گرفته شده است. در مورد تفاوت به وجود آمده در شکل و توپولوژی سازه بهینه شده قبل از اعمال قید کمانش و پس از آن نیز توضیحی ارائه نشده است. در پژوهش حال حاضر با استخراج جمله سرعت مورد نیاز در روش سطوح هم‌تراز جهت تغییر توپولوژی سازه به جای تغییر شکل مرز سازه و استفاده از روش‌های جدیدتر و پایدارتر حل مساله سطوح هم‌تراز، وابستگی به شکل اولیه مساله بهینه‌سازی کاملاً از بین رفته است. استخراج کاملاً پیوسته عبارت سرعت مورد نیاز در روش سطوح هم‌تراز برای به حداکثر رساندن کوچکترین ضرایب بار بحرانی کمانش، نوآوری این پژوهش می‌باشد.

۲- بهینه‌سازی توپولوژی به روش سطوح هم‌تراز

در مساله بهینه‌سازی سطوح هم‌تراز، تابع سطوح هم‌تراز در دامنه‌های متفاوت به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\begin{cases} 0 < \phi(x) \leq 0 & \forall x \in \Omega \setminus \partial\Omega \\ \phi(x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega \\ -1 \leq \phi(x) < 0 & \forall x \in D \setminus \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

در فواصل به اندازه کافی دور از مرز سازه نیز مقدار تابع سطوح هم‌تراز برابر با ۱ و ۱- در نظر گرفته می‌شود. مساله بهینه‌سازی به صورت حداقل نمودن تابع هدف F روی ناحیه ثابت طراحی D تعریف می‌شود که منجر به یک ناحیه حاوی ماده جامد Ω که $\Omega \subset D$ می‌گردد و تابع G قید بیشینه حجم سازه می‌باشد. مساله بهینه‌سازی به صورت کلی زیر فرمول‌بندی می‌گردد.

$$\min_{\chi} F(\chi_\phi(\Phi)) = \int_{\Omega} f(\mathbf{X}) \chi_\phi(\Phi) d\Omega \quad (2)$$

$$G(\chi_\phi(\Phi)) = \int_{\Omega} \chi_\phi(\Phi) d\Omega - V_{\max} \leq 0 \quad (3)$$

⁴ Radial basis functions

¹ Moving iso-surface threshold

² End-compliance

³ Move limit strategy

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K \left(\frac{d\bar{F}}{d\phi} - \tau \nabla^2 \phi \right) \quad (9)$$

در واقع تغییرات تابع $\bar{F}$ نسبت به ϕ یا همان مشتق توپولوژی تابع و جمله سرعت مورد نیاز در معادله سطوح هم تراز می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$\bar{F}' = d_t \bar{F} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(\bar{F} + \delta \bar{F}) - \bar{F}}{\text{meas}(\Omega \setminus \Omega_\epsilon) - \text{meas}(\Omega)} \quad (10)$$

شکل ۱ نشان دهنده مفهوم مشتق توپولوژیکی می‌باشد. مشتق توپولوژیکی یعنی اندازه‌گیری میزان تغییرات تابع هدف وقتی که یک سوراخ Ω_ϵ با شعاع ϵ در یک نقطه مشخص از ماده Ω ایجاد شود. Γ_ϵ نشان دهنده مرز سوراخ است. معادله تکامل زمانی به شکل نهایی زیر تعریف می‌گردد.

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -K(d_t \bar{F} - \tau \nabla^2 \phi) & \text{in } D \\ \phi = 0 & \text{on } \partial D \end{cases} \quad (11)$$

معادله بالا یک معادله واکنش-انتشار^۵ می‌باشد که با تنظیم

مناسب پارامتر τ پیچیدگی‌های حل عددی مساله بهینه‌سازی کنترل

می‌گردد. مشتق زمانی تابع با استفاده از معادله‌های (۵) و (۱۰) به

صورت زیر می‌باشد.

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{F}_R}{dt} &= \int_D \frac{d\bar{F}_R}{d\phi} \frac{\partial \phi}{\partial t} dD = \int_D \frac{d\bar{F}_R}{d\phi} \left(-K \frac{d\bar{F}_R}{d\phi} \right) dD \\ &= - \int_D K \left(\frac{d\bar{F}_R}{d\phi} \right)^2 dD \leq 0 \end{aligned} \quad (12)$$

معادله بالا دلالت بر این نکته دارد که جمع تابع لاگرانژی $\bar{F}$ و

جمله جعلی انرژی در صورتی که تابع سطوح هم‌تراز بر اساس معادله

(۱۱) بروز گردد به شکل یکنواختی کاهش می‌یابد.

۳- تعریف مساله بهینه‌سازی کمانشی

مساله بهینه‌سازی به صورت بیشینه کردن اولین ضریب بار کمانش بحرانی سازه یا کمینه کردن منفی بار کمانش بحرانی تعریف می‌گردد. همچنین قید بیشینه حجم و شرط رعایت معادلات تعادل سازه برای یک مساله دو بعدی تنش صفحه‌ای رعایت می‌گردد. تعریف مساله به شکل زیر می‌باشد.

$$\min F = -\lambda_{cr} \quad (13)$$

$$\begin{cases} -\text{div}(C_{ijkl} e_{kl}(u)) = 0 & \text{on } \Omega \\ u_i = \bar{u}_i & \text{on } \Gamma_u \\ t_i = \bar{t}_i & \text{on } \Gamma_t \end{cases} \quad (14)$$

$$G = \int_\Omega d\Omega - V_{\max} \leq 0 \quad \text{on } \Omega \quad (15)$$

λ_{cr} ضریب بار بحرانی کمانش سازه، C_{ijkl} تانسور الاستیسیته، t_i

یا نیروی وارد بر سطح برابر با $\sigma_{ij} n_j$ و مساوی با $C_{ijkl} u_{k,l} n_j$ می

باشد همچنین $\bar{t}_i$ و $\bar{u}_i$ مقادیری ثابت برای جابجایی و نیروی وارد بر

سطح به ترتیب در مرز Γ_u و Γ_t می‌باشند. ضریب بار بحرانی سازه به

صورت زیر تعریف می‌گردد [۱۵].

$$\lambda = - \frac{\int_\Omega C_{ijkl} e_{ij}(\psi) e_{kl}(\varphi) d\Omega}{\int_\Omega C_{ijkl} e_{kl}(u) \psi_{m,i} \varphi_{m,j} d\Omega} \quad (16)$$

ψ شکل مود کمانشی سازه و e کرنش می‌باشد.

از روش لاگرانژ با ضرایب نامعین جهت تبدیل معادله مقید به

$$\chi_\phi(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } \phi(x) \geq 0 \\ 0 & \text{if } \phi(x) < 0 \end{cases} \quad (4)$$

در ناحیه $V_{\max}$ حد بالای حجم سازه می‌باشد و X نشان دهنده یک نقطه

در ناحیه Ω است. برای تعریف ساده‌تر مساله در کل ناحیه ثابت D از

تابع مشخصه زیر استفاده می‌شود. تابع مشخصه^۱ $\chi_\phi(\phi)$ به منظور

تعریف مساله در کل ناحیه طراحی D تعریف گردیده است.

مساله بهینه‌سازی با کمک روش لاگرانژ با ضرایب نامعین^۲ به

صورت مساله بهینه‌سازی نامقید زیر تعریف می‌گردد. همچنین با اضافه

نمودن جمله انرژی جعلی به تابع هدف بهینه‌سازی می‌توان به یک

مساله بهینه‌سازی با قابلیت تنظیم دست یافت.

$$\begin{aligned} \min \bar{F}_R(\chi_\phi(\phi), \phi) &= \int_D f(X) \chi_\phi(\phi) d\Omega \\ &+ \alpha \left(\int_D \chi_\phi(\phi) d\Omega - V_{\max} \right) + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 d\Omega \\ &= \int_D \bar{f}(X) \chi_\phi(\phi) d\Omega - \alpha V_{\max} + \int_D \frac{1}{2} \tau |\nabla \phi|^2 d\Omega \end{aligned} \quad (5)$$

F_R تابع هدف قابل تنظیم و $\tau > 0$ پارامتر تنظیم می‌باشد که در

واقع تعیین کننده نسبت تابع هدف با جمله انرژی جعلی است. با

تنظیم این پارامتر به راحتی می‌توان پیچیدگی‌های توپولوژی ایجاد

شده در فرایند حل مساله بهینه‌سازی را ساده‌تر نمود و بر ناپایداری‌های

حل ناشی از این پیچیدگی‌ها غلبه کرد و فرایند رسیدن به توپولوژی

بهینه به صورت نرم‌تر صورت پذیرد. α ضریب لاگرانژ است و مساله

بهینه‌سازی به صورت $\bar{f} = f + \alpha$ خلاصه می‌گردد. برپایه شرایط

KKT مساله بهینه‌سازی به صورت زیر توضیح داده می‌شود.

$$\left\langle \frac{d\bar{F}_R}{d\phi}(\chi_\phi(\phi)), \phi \right\rangle = 0, \quad \alpha G = 0, \quad \alpha \geq 0, \quad G \leq 0 \quad (6)$$

$\left\langle \frac{d\bar{F}_R}{d\phi}, \phi \right\rangle$ مشتق فرشه^۳ $\bar{F}_R$ نسبت به ϕ و در راستای Φ می

باشد. توابع سطوح هم‌ترازی که بتوانند شرایط (۷) را برقرار کنند پاسخ

مساله بهینه‌سازی می‌باشند. اما یافتن این چنین حلی به شکل مستقیم

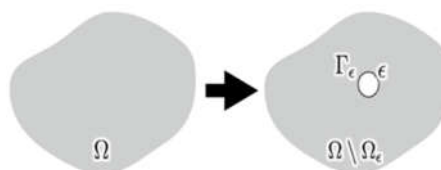
تقریباً غیرممکن است لذا مساله بهینه‌سازی با یک معادله تکامل

زمانی^۴ و تعریف متغیر جعلی t جایگزین می‌گردد. برای ایجاد معادله

تکامل زمانی فرض می‌گردد که تغییرات تابع سطوح هم‌تراز نسبت به

زمان t برابر با منفی گرادیان تابع هدف است.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -K \frac{d\bar{F}_R}{d\phi} \quad (8)$$



شکل ۱- مفهوم مشتق توپولوژی

که $K > 0$ ضریب تناسب است. با جایگزینی معادله (۵) در (۷)

داریم.

¹ Characteristic function

² Lagrange's method of undetermined multipliers

³ Fréchet derivative

⁴ Time evolution equation

⁵ Reaction-diffusion equation

⁶ Traction

معادله نامقید $\bar{F}$ با ضرایب لاگرانژ α و $\tilde{u}$ استفاده می‌گردد:

$$F = -\lambda_{cr} + \int_{\Omega} \tilde{u}_i \operatorname{div}(C_{ijkl} e_{k,l}(u)) d\Omega + \alpha \left(\int_{\Omega} d\Omega - V_{max} \right) \quad (17)$$

جمله دوم سمت راست معادله بالا را با استفاده از قضیه گرین جایگزین می‌کنیم و داریم:

$$\bar{F} = -\lambda_{cr} + \int_{\Gamma} \tilde{u}_i t_i d\Gamma - \int_{\Omega} e_{i,j}(\tilde{u}) C_{ijkl} e_{k,l}(u) d\Omega + \alpha \left(\int_{\Omega} d\Omega - V_{max} \right) \quad (18)$$

برای محاسبه مشتق توپولوژی نیاز به بدست آوردن $\delta \bar{F}$ می‌باشد.

در ابتدا با ایجاد سوراخ بسیار ریز در ناحیه Ω معادلات تعادل (۱۳) و (۱۴) با استفاده از روش ارائه شده در به شکل زیر تبدیل می‌گردد:

$$\operatorname{Div} (C_{ijkl} (e_{k,l}(u) + \delta e_{k,l}(u))) = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \Omega_e \quad (19)$$

$$u_i + \delta u_i = \bar{u}_i \quad \text{in } \Gamma_u \quad (20)$$

$$t_i + \delta t_i = \bar{t}_i \quad \text{in } \Gamma_t \quad (21)$$

$$t_i + \delta t_i = 0 \quad \text{in } \Gamma_e \quad (22)$$

و فرض می‌شود که معادله تعادل جدید سازه شرایط مرزی قبلی را برقرار نموده و در مرز سوراخ نیز هیچ نیروی وارد بر سطحی به سازه اعمال نمی‌گردد. برای یافتن $\delta \bar{F}$ ابتدا باید $\delta \lambda_{cr}$ محاسبه گردد. تغییرات معادله (۱۵) که شامل سوراخ می‌باشد برای ضریب بار بحرانی به شکل زیر است.

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_e} C_{ijkl} e_{i,j}(\psi) e_{k,l}(\varphi) d\Omega + \delta \lambda_{cr} \int_{\Omega} C_{ijkl} e_{k,l}(u) \psi_{m,i} \varphi_{m,j} d\Omega + \lambda_{cr} \int_{\Omega \setminus \Omega_e} C_{ijkl} \delta e_{k,l}(u) \psi_{m,i} \varphi_{m,j} d\Omega + \lambda_{cr} \int_{\Omega \setminus \Omega_e} C_{ijkl} e_{k,l}(u) \psi_{m,i} \varphi_{m,j} d\Omega = 0 \quad (23)$$

با تفاضل معادله (۲۲) از معادله (۱۵) خواهیم داشت:

$$\delta \lambda_{cr} \int_{\Omega} C_{ijkl} e_{k,l}(u) \psi_{m,i} \varphi_{m,j} d\Omega - \int_{\Omega_e} C_{ijkl} e_{i,j}(\psi) e_{k,l}(\varphi) d\Omega + \lambda_{cr} \int_{\Omega \setminus \Omega_e} C_{ijkl} \delta e_{k,l}(u) \psi_{m,i} \varphi_{m,j} d\Omega - \lambda_{cr} \int_{\Omega_e} C_{ijkl} e_{k,l}(u) \psi_{m,i} \varphi_{m,j} d\Omega = 0 \quad (24)$$

با در نظر گرفتن این نکته که جمله

$$\int_{\Omega_e} C_{ijkl} e_{i,j}(\psi) e_{k,l}(\varphi) d\Omega + \lambda_{cr} \int_{\Omega_e} C_{ijkl} e_{k,l}(u) \psi_{m,i} \varphi_{m,j} d\Omega$$

برابر با صفر می‌باشد، $\delta \lambda_{cr}$ به صورت زیر استخراج می‌گردد.

$$\delta \lambda_{cr} = -\lambda_{cr} \frac{\int_{\Omega \setminus \Omega_e} C_{ijkl} \delta e_{k,l}(u) \psi_{m,i} \varphi_{m,j} d\Omega}{\int_{\Omega} C_{ijkl} u_{k,l}(u) \psi_{m,i} \varphi_{m,j} d\Omega} \quad (25)$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \bar{F} + \delta \bar{F} &= -\lambda_{cr} - \delta \lambda_{cr} + \int_{\Gamma_u \cup \Gamma_t} \tilde{u}_i (t_i + \delta t_i) d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_e} \tilde{u}_i (t_i + \delta t_i) d\Gamma \\ &- \int_{\Omega \setminus \Omega_e} e_{i,j}(\tilde{u}) C_{ijkl} (u_{k,l} + \delta u_{k,l}) d\Omega \\ &+ \alpha \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_e} d\Omega - V_{max} \right) \\ &= -\lambda_{cr} + \lambda_{cr} \frac{\int_{\Omega \setminus \Omega_e} C_{ijkl} \delta e_{k,l}(u) \psi_{m,i} \varphi_{m,j} d\Omega}{\int_{\Omega} C_{ijkl} u_{k,l}(u) \psi_{m,i} \varphi_{m,j} d\Omega} \\ &+ \int_{\Gamma_u \cup \Gamma_t} \tilde{u}_i (t_i + \delta t_i) d\Gamma + \int_{\Gamma_e} \tilde{u}_i (t_i + \delta t_i) d\Gamma \\ &- \int_{\Omega \setminus \Omega_e} e_{i,j}(\tilde{u}) C_{ijkl} (u_{k,l} + \delta u_{k,l}) d\Omega \\ &+ \alpha \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_e} d\Omega - V_{max} \right) \end{aligned} \quad (26)$$

با جایگزینی معادله (۲۱) در جمله چهارم معادله بالا این جمله حذف می‌شود. همچنین با نرمال کردن بردارهای ویژه نسبت به ماتریس سفتی تنش، در واقع مخارج جمله‌ها تبدیل به یک می‌شوند. سپس با کسر کردن معادله (۲۵) از معادله (۱۷)، $\delta \bar{F}$ به شکل زیر بدست می‌آید.

$$\begin{aligned} \delta \bar{F} &= \lambda_{cr} \int_{\Omega \setminus \Omega_e} C_{ijkl} \delta e_{k,l}(u) \psi_{m,i} \psi_{m,j} d\Omega \\ &- \lambda_{cr} \int_{\Omega_e} C_{ijkl} e_{k,l}(u) \psi_{m,i} \psi_{m,j} d\Omega + \int_{\Gamma_u \cup \Gamma_t} \tilde{u}_i \delta t_i d\Gamma \\ &- \int_{\Omega \setminus \Omega_e} \tilde{u}_{i,j} C_{ijkl} \delta e_{k,l}(u) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega_e} e_{i,j}(\tilde{u}) C_{ijkl} \delta e_{k,l}(u) d\Omega - \alpha \int_{\Omega_e} d\Omega \end{aligned} \quad (27)$$

جمله دوم و پنجم معادله بالا با استفاده از قضیه گرین به صورت زیر جایگزین می‌گردند.

$$\begin{aligned} \delta \int_{\Omega \setminus \Omega_e} C_{ijkl} \delta e_{k,l}(u) \psi_{m,i} \psi_{m,j} d\Omega &= \int_{\Gamma_t} C_{ijkl} \psi_{m,i} \psi_{m,j} n_j \delta u_k d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_e} C_{ijkl} \psi_{m,i} \psi_{m,j} n_j \delta u_k d\Gamma \\ &- \int_{\Omega \setminus \Omega_e} \operatorname{div}(C_{ijkl} \psi_{m,i} \psi_{m,j}) \delta u_i d\Omega \\ \int_{\Omega \setminus \Omega_e} e_{i,j}(\tilde{u}) C_{ijkl} \delta e_{k,l}(u) d\Omega &= \int_{\Gamma_u \cup \Gamma_t} \tilde{t}_i \delta u_i d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_e} C_{ijkl} e_{i,j}(\tilde{u}) n_j \delta u_k d\Gamma \\ &- \int_{\Omega \setminus \Omega_e} \operatorname{div}(C_{ijkl} e_{i,j}(\tilde{u})) \delta u_i d\Omega \end{aligned} \quad (28)$$

معادلات (۲۷) و (۲۸) در معادله (۲۶) جایگزین می‌گردند. با در نظر گرفتن این نکته که شرایط مرزی قبل از ایجاد سوراخ و بعد از آن تغییری نمی‌نماید یعنی:

$$\delta u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_u \quad (30)$$

$$\delta t_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_t \quad (31)$$

داریم:

که A برابر است با:

$$\begin{aligned} A_{ijkl} &= A_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + A_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ A_1 &= -\frac{3(1-\nu)(1-14\nu+15\nu^2)}{2(1+\nu)(7-5\nu)(1-2\nu)^2} E \\ A_2 &= \frac{15E(1-\nu)}{2(1+\nu)(7-5\nu)} \end{aligned} \quad (45)$$

و B برابر است با:

$$\begin{aligned} B_{ijkl} &= B_1 \delta_{ij} \delta_{kl} + B_2 (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ B_1 &= \left[\frac{4-5\nu}{7-5\nu} \frac{3\lambda^2+4\mu\lambda}{\mu} - \frac{3-5\nu}{4(7-5\nu)} \frac{(3\lambda+2\mu)^2}{\mu} \right] \\ B_2 &= 2 \frac{4-5\nu}{7-5\nu} \mu \end{aligned} \quad (46)$$

۴- شبیه سازی

برای حل مسائل بهینه‌سازی سازه‌های پیوسته معمولاً از روش المان محدود مرسوم استفاده می‌گردد. با این حال این روش دارای مشکلاتی است. با انتخاب متغیر طراحی در محل گره‌ها، از ایجاد نواحی شطرنجی^۱ اجتناب می‌گردد، اما ممکن است پدیده جزیره‌ای شدن^۲ یا ایجاد نواحی حاوی ماده جدا افتاده از پیکربندی بهینه در سازه بهینه شده ظاهر گردد. برای جلوگیری از این پدیده از روش المان محدود تنش هیبریدی^۳ در این پژوهش استفاده شده است. همچنین به دلیل استفاده از توابع شکل مستقل در محاسبه مولفه‌های تنش در این روش، طیف تنش‌ها نرم‌تر شده و برخی از مقادیر بالای تنش‌های محلی که ناشی از لبه‌های کوچک نامنظم و تیز هستند و باعث ایجاد ناپایداری در حل مساله بهینه‌سازی می‌گردند از بین می‌روند. در ادامه فرایند بهینه‌سازی، جهت بدست آوردن مقادیر و بردارهای ویژه^۴ می‌توان فرمول زیر را حل نمود:

$$(K + \lambda_j K_G) \psi_j = 0 \quad (47)$$

و λ_j و ψ_j مقادیر ویژه و بردارهای ویژه می‌باشند.

۴-۱- مثال عددی حل مساله کمانش

برای اطمینان نسبی از صحت فرایند کدنویسی مساله المان محدود تنش‌هیبریدی، باربرانی ستون "یک سرگیردار - یک سرمفصل" را ابتدا با استفاده از فرمول اوپلر، $P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2}$ ، بدست آورده و با روش المان محدود مقایسه می‌شود. K مخرج معادله ضریب تصحیح طول ستون می‌باشد که برای ستون یک سرگیردار و یک سرمفصل ۰/۷ می‌باشد. با در نظر گرفتن ابعاد طول ستون ۱۰۰، عرض ۶ و ضخامت ۱۰ و همچنین مدول الاستیسیته ۱ مقدار بار بحرانی تئوری برابر است با:

$$\begin{aligned} \delta \bar{F} &= \lambda \left(\int_{\Gamma_t} C_{ijkl} \psi_{m,i} \psi_{m,j} n_i \delta u_k d\Gamma \right. \\ &+ \int_{\Gamma_e} C_{ijkl} \psi_{m,i} \psi_{m,j} n_i \delta u_k d\Gamma \\ &- \int_{\Omega \setminus \Omega_e} \text{div}(C_{ijkl} \psi_{m,i} \psi_{m,j}) \delta u_i d\Omega \\ &+ \int_{\Omega \setminus \Omega_e} \text{div}(C_{ijkl} e_{i,j}(\bar{u})) \delta u_i d\Omega - \int_{\Gamma_t} \bar{t}_i \delta u_i d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_u} \bar{u}_i \delta t_i d\Gamma + \int_{\Omega_e} e_{i,j}(\bar{u}) C_{ijkl} e_{k,l}(u) d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_e} C_{ijkl} e_{i,j}(\bar{u}) n_i \delta u_k d\Gamma - \alpha \int_{\Omega_e} d\Omega \end{aligned} \quad (32)$$

اگر این امکان وجود داشته باشد معادله‌ای حل شود که تمامی ضرایب انتگرال‌های حاوی δu_i و δt_i را صفر کند در واقع توانستیم که معادله (۳۱) را کوچکتر نموده و حل آن را ساده‌تر نماییم. به معادله حاصل از حذف کردن این ضرایب معادله الحاقی می‌گویند. پس با مساوی صفر قرار دادن این ضرایب معادله الحاقی زیر حاصل می‌شود و از حل این معادله $\bar{u}$ یا ضریب معادله الحاقی به دست می‌آید.

$$\text{div}(C_{ijkl} e_{i,j}(\bar{u})) = \lambda \text{div}(C_{ijkl} \psi_{m,i} \psi_{m,j}) \quad \text{in } \Omega \quad (33)$$

$$\bar{u}_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_u \quad (34)$$

$$\bar{t}_k = \lambda C_{ijkl} \psi_{m,i} \psi_{m,j} n_i \quad \text{on } \Gamma_t \quad (35)$$

و در نتیجه $\delta \bar{F}$ برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned} \delta \bar{F} &= \lambda \left(\int_{\Gamma_e} C_{ijkl} \psi_{m,i} \psi_{m,j} n_i \delta u_k d\Gamma \right. \\ &+ \int_{\Omega_e} e_{i,j}(\bar{u}) C_{ijkl} e_{k,l}(u) d\Omega \\ &- \int_{\Gamma_e} C_{ijkl} e_{i,j}(\bar{u}) n_i \delta u_k d\Gamma - \alpha \int_{\Omega_e} d\Omega \end{aligned} \quad (36)$$

در معادله بالا δu همچنان نامعین می‌باشد. به منظور بدست آوردن δu ، معادله شرایط مرزی (۱۸) تا (۲۱) از (۱۳) کسر می‌گردد و معادله شرایط مرزی جدید به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\text{div}(C_{ijkl} \delta u_{k,l}) = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \Omega_e \quad (37)$$

$$\delta u_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_u \quad (38)$$

$$\delta t_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_t \quad (39)$$

$$\delta t_i = -t_i \quad \text{on } \Gamma_e \quad (40)$$

در معادله شرایط مرزی بالا به دلیل اینکه شعاع سوراخ، به اندازه کافی کوچک در نظر گرفته شده است می‌توان تاثیر شرایط مرزی Γ_u و Γ_t برای حل δu در Γ_e را نادیده گرفت و معادله شرایط مرزی جدید به صورت زیر می‌شود:

$$\text{div}(C_{ijkl} \delta u_{k,l}) = 0 \quad \text{in } \Omega \setminus \Omega_e \quad (41)$$

$$\delta t_i = -\sigma_{ij}^0 n_j + O(\epsilon) \quad \text{on } \Gamma_e \quad (42)$$

علامت 0 نشان دهنده وضعیت قبل از ایجاد سوراخ می‌باشد. این معادله توسط گوزینا و بونت [۱۶] حل شده است و نتیجه به صورت زیر می‌باشد:

$$\delta u_i = -\frac{\epsilon}{\mu} \left(\frac{4-5\nu}{7-5\nu} \sigma_{ij}^0 n_j - \frac{3-5\nu}{4(7-5\nu)} \sigma_{ij}^0 n_j + O(\epsilon) \right) \quad (43)$$

بعد از جایگزینی $\delta \bar{F}$ در فرمول مشتق توپولوژیکی (۹) و گرفتن حد خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} d_t \bar{F} &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta \bar{F}}{4\pi\epsilon^3} \\ &= e_{i,j}(\bar{u}) A_{ijkl} u_{k,l}^0 - \lambda u_{k,l}^0 B_{ijkl} \psi_{m,i}^0 \psi_{m,j}^0 - \alpha \end{aligned} \quad (44)$$

¹ Checkerboard patterns

² Islanding phenomenon

³ Hybrid stress finite element method

⁴ Eigenvalues and eigenvectors

⁵ Stiffness, stress stiffness tensors

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} = 0.36 \quad (48)$$

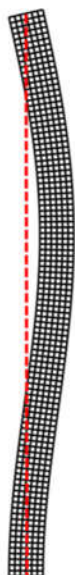
مقدار بار بحرانی $\lambda_{cr} = 0.36$ در شبیه‌سازی با قرار دادن مقدار نیروی اعمالی برابر با ۱ بدست می‌آید. همان‌گونه که مشخص است نتایج کاملاً منطبق می‌باشند و نشان دهنده صحت شبیه‌سازی است. در شکل ۲ شکل مود ویژه اول شبیه‌سازی نشان داده شده است.

۴-۲- مثال‌های بهینه‌سازی عددی

مثال اول: این مثال یک تیر یک سرگیردار با بار توزیع شده یکنواخت اعمالی به سمت پایین در سمت آزاد آن مطابق شکل ۳ می‌باشد. ابعاد تیر 24×40 با ضخامت ۱ بوده و مدول الاستیسیته ۱ و ضریب پواسون 0.3 می‌باشد.

بار توزیع شده یکنواخت با 0.1 نیوتن بر متر به یک هفتم میانی عرض ستون اعمال شده است. بیشینه حجم قابل قبول سازه 0.4 حجم اولیه و استپ‌های زمانی جعلی 0.1 برای حل در نظر گرفته شده است. برای اجتناب از خطاهای عددی در زمان حل مساله، مدول الاستیسیته 10^6 برای المان‌های خارج از ناحیه طراحی لحاظ شده است.

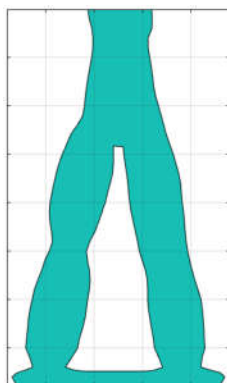
این مساله با تابع هدف بیشینه کردن ۵ عدد از کوچک‌ترین ضرایب بار بحرانی کمانشی حل شده است. ناحیه طراحی با 24×40 المان مربعی یکسان و چهارگرهی گسسته شده است و نوع المان انتخاب شده تنش صفحه‌ای می‌باشد. پارامتر تنظیم $\tau = 10^{-6}$ پس از شبیه‌سازی‌های متنوع به عنوان مقدار مناسب انتخاب گردیده است. شبیه‌سازی پس از نزدیک به ۲۰۰ تکرار همگرا گردیده و سازه بهینه شده در شکل ۴ نمایش داده شده است. در شکل ۵ بخش‌های الف، ب، به ترتیب کوچک‌ترین ضریب بار بحرانی کمانشی سازه و تغییرات حجم ناحیه طراحی نسبت به حجم اولیه در طول فرایند بهینه‌سازی ارائه گردیده است. همانگونه که واضح می‌باشد توپولوژی بهینه به شکل دو بازوی از هم باز شده (۸) که به نحو موثری می‌تواند مانع از کمانش شود حاصل گردیده است. حجم سازه نهایی ۴۰ درصد حجم اولیه و برابر با بیشینه حجم قیدگذاری شده در تعریف مثال می‌باشد. کوچک‌ترین ضریب بار بحرانی کمانشی برابر با ۳ و همچنین میزان انرژی کرنشی سازه بهینه $4/5 \times 10^{-2}$ می‌باشد.



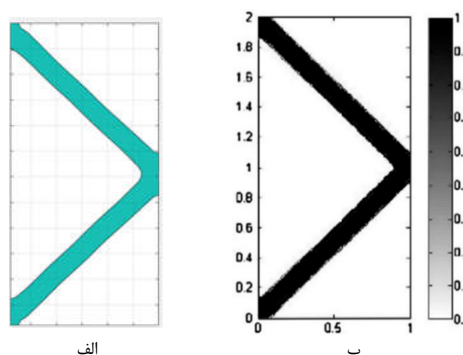
شکل ۲- شکل مود ویژه اول



شکل ۳- تیر یکسرگیردار تحت بار توزیع شده یکنواخت اعمالی

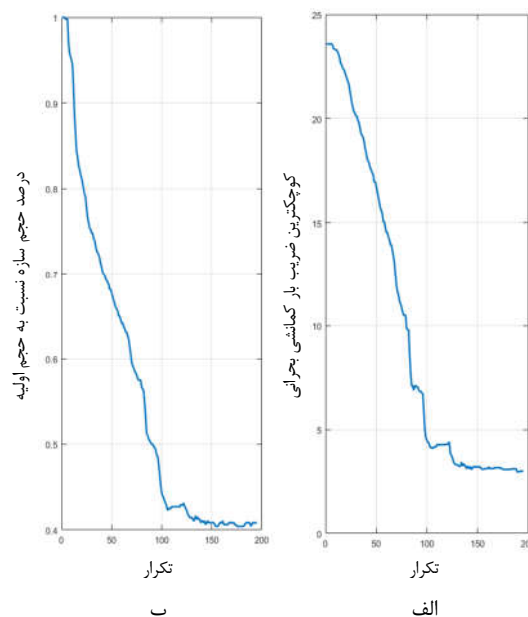


شکل ۴- توپولوژی بهینه شده تیر یکسرگیردار



شکل ۷- توپولوژی بهینه‌شده با تابع هدف کمینه کردن انرژی کرنشی و بدون در نظر گرفتن قید کماتش (الف) روش سطوح هم‌تراز (ب) روش SIMP

در مرحله بعد جهت ارزیابی کامل‌تر، شبیه‌سازی جدیدی با پارامترهای برابر با شبیه‌سازی مرحله قبل اما با اضافه نمودن قید کماتش به مساله صورت پذیرفته است. کوچک‌ترین ضریب بار بحرانی مجاز حداکثر برابر با ۱ به عنوان قید کماتشی اعمال گردیده است. پس از شبیه‌سازی و انجام حدود ۲۵۰ تکرار، توپولوژی بهینه شده مطابق شکل ۸ بخش الف بدست آمده است. با دقت در شکل بهینه شده واضح است که بازوی پایینی توپولوژی بهینه که بار فشاری را تحمل می‌نماید با جابجا شدن به سمت بالا نسبت به کل ناحیه ثابت مساله، سعی در کوتاه‌تر شدن دارد و همچنین این بازو نسبت به بازوی بالا که بار کششی را تحمل می‌کند و در معرض کماتش قرار ندارد پهن‌تر می‌باشد. و همچنین در شکل ۹ تغییرات انرژی کرنشی، حجم سازه و کوچک‌ترین ضریب بار بحرانی در طی فرایند بهینه‌سازی ارائه گردیده است. انرژی کرنشی توپولوژی بهینه برابر با 3.9×10^{-4} می‌باشد. جهت مقایسه نتایج با مثال مقاله مذکور، در شکل ۸ بخش ب، ج و د، توپولوژی بهینه‌شده به سه روش بهینه‌سازی SIMP در کنار روش حل سطوح هم‌تراز قرار داده شده است که تایید کننده نتیجه بدست آمده از طریق روش بهینه‌سازی سطوح هم‌تراز می‌باشد. همچنین گراف کوچک‌ترین ضرایب بار بحرانی سازه در مقابل انرژی کرنشی برای هر چهار روش حل در شکل ۱۰ ارائه شده است. این گراف مشخصاً نشان می‌دهد که در حل مساله بهینه‌سازی به روش سطوح هم‌تراز با رعایت قیود ضریب بار بحرانی و بیشینه حجم مجاز مد نظر مثال مذکور، انرژی کرنشی کمتری نیز بدست آمده است که نتیجه نسبی بهتری می‌باشد. یکی از دلایل پاسخ بهتر در حل به روش سطوح هم‌تراز، برطرف نمودن مشکل اساسی المان‌های خاکستری^۲ به وجود آمده با روش SIMP و تشکیل مرزهای کاملاً واضح در روش بهینه‌سازی با سطوح هم‌تراز می‌باشد. این المان‌های خاکستری در شکل ۸ بخش ب، ج و د مشاهده می‌گردند.



شکل ۵- تغییر پارامترها در طول فرایند بهینه‌سازی (الف) کوچک‌ترین ضریب بار کماتش بحرانی سازه (ب) کسر حجمی سازه

مثال دوم: در این مثال، شکل و ابعاد اولیه، تکیه‌گاه‌ها، بارگذاری، جنس مواد، نوع المان‌ها و قید حجم، کاملاً مشابه مثال پژوهش انجام شده توسط جائو و هایتانو [۳] می‌باشد که از روش SIMP^۱ برای بهینه‌سازی استفاده نموده است. این مثال یک صفحه یک سر گیردار با ابعاد 1×2 ، ضخامت و مدول الاستیسیته برابر با ۱ می‌باشد که در شکل ۶ نشان داده شده است. بار اعمالی به سازه به صورت نقطه‌ای و به سمت پایین است و مقدار آن برابر 0.005 می‌باشد. بیشینه حجم سازه مورد نیاز برابر با 0.15 حجم اولیه سازه و مقدار پارامتر تنظیم τ برابر با 10^{-5} انتخاب می‌گردد. همچنین مقدار Δt برای حل معادله سطوح هم‌تراز 0.1 می‌باشد. ناحیه طراحی با 20×40 المان مربعی یکسان و چهارگرمی تنش صفحه‌ای گسسته شده است.

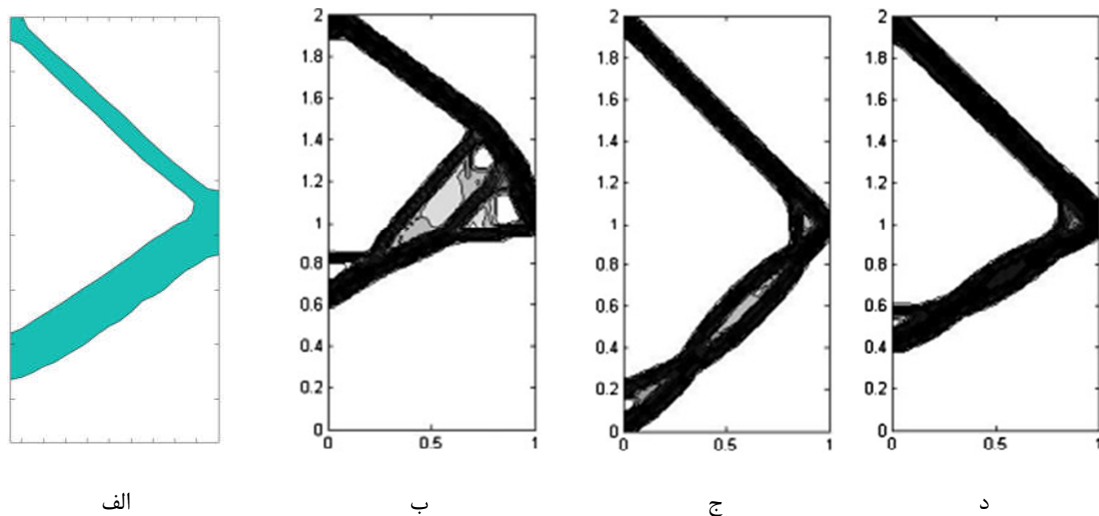
در مرحله اول، مساله بهینه‌سازی با در نظر گرفتن تابع هدف کمینه کردن حداقل انرژی کرنشی سازه و بدون در نظر گرفتن قید کماتشی حل می‌گردد. توپولوژی بهینه شده در شکل ۷ نشان داده شده است. در این شرایط کوچک‌ترین ضریب بار بحرانی کماتش سازه برابر با 0.22 است که کاملاً یکسان با بخش اول مثال مقاله [۳] می‌باشد.



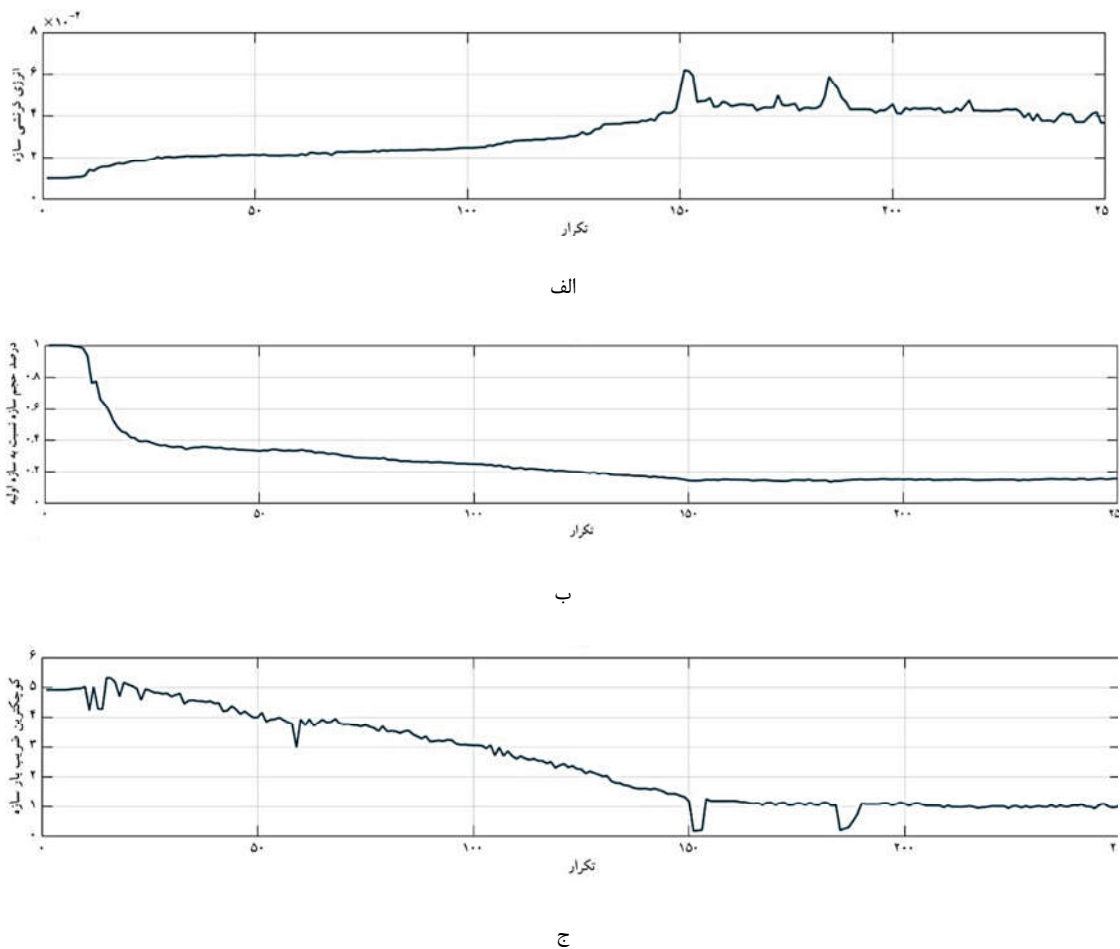
شکل ۶- صفحه‌ای بارگذاری شده و دارای تکیه‌گاه

² Gray-scale elements

¹ Solid Isotropic Material with Penalization

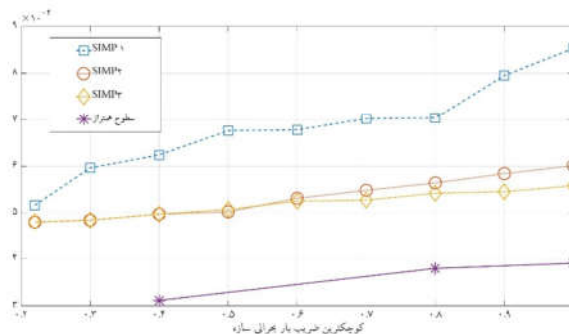


شکل ۸- توپولوژی بهینه الف) روش سطوح هم‌تراز ب، ج و د) روش‌های مبتنی بر SIMP



شکل ۹- تغییر پارامترها در طول فرایند بهینه‌سازی الف) انرژی کرنشی سازه ب) کسر حجمی سازه ج) کوچک‌ترین ضریب بار کماتش سازه

- [5] Jansena M., Lombaerta G., Schevenelsb M., Robust topology optimization of structures with imperfect geometry based on geometric nonlinear analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 285, pp. 452-467, 2015.
- [6] Osher J. and Sethian J.A., Front propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations. *Journal of Computational Physics*, Vol. 79, No. 1, pp. 12-49, 1988.
- [7] Sethian J.A. and Wiegmann A., Structural boundary design via level set and immersed interface methods. *Journal of Computational Physics*, Vol. 163, No. 2, pp. 489-528, 2000.
- [8] Wang M.Y., Wang X.M. and Guo D.M., A level set method for structural topology optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 192, No. 1-2,3, pp. 227-246, 2003
Allaire G., Jouve F., and Toader A.M., Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method. *Journal of Computational Physics*, Vol. 194, No. 1, pp. 363-393, 2004.
- [9] Xia Qi., Wang Michael. Yu. and Shi Tielin., A level set method for shape and topology optimization of both structure and support of continuum structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 272, pp. 340-353, 2014.
- [10] Xia Qi., Wang Michael. Yu. and Shi Tielin., A move limit strategy for level set based structural optimization. *Engineering Optimization*, Vol. 45, No. 9, pp. 1061-1072, 2013.
- [11] Yamada T., Izui K., Nishiwaki S., Takezawa A., A topology optimization method based on the level set method incorporating a fictitious interface energy. *Comput Methods Appl Mech Eng.* Vol. 199, No. 45-48, pp. 2876-2891, 2010.
- [12] Weil Peng. and Li Zuyu. and Li Xueping. and Wang Michael. Yu., An 88-line MATLAB code for the parameterized level set method based topology optimization using radial basis functions. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 58, No. 2, pp. 831-849, 2018.
- [13] Dunning Peter. D., Ovtchinnikov Evgueni., Scott Jennifer. and Kim H. Alicia., Level-set topology optimization with many linear buckling constraints using an efficient and robust eigensolver. *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 107, No. 12, pp. 1029-1053, 2016.
- [14] Thomsen Christian. Rye., Wang Fengwen., Sigmund Ole., Buckling strength topology optimization of 2D periodic materials based on linearized bifurcation analysis. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, Vol. 339, pp. 115-136, 2018.
- [15] Guzina BB., Bonnet M., Topological derivative for the inverse scattering of elastic waves. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, Vol. 57, No. 2, pp. 161-179, 2004.



شکل ۱۰- نمودار تغییرات کوچک‌ترین ضریب بار بحرانی سازه در مقابل انرژی کرنشی

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش سعی بر آن شد که مساله پایداری در مقابل کماتش برای سازه‌های پیوسته دوبعدی مورد بررسی قرار گیرد. بهینه‌سازی با استفاده از روش سطوح هم‌تراز انجام گرفته و توپولوژی بهینه بدون وابستگی به توپولوژی اولیه استخراج گردیده است. جمله سرعت مورد نیاز در روش سطوح هم‌تراز به صورت کاملاً پیوسته و با اعمال قیود کماتشی محاسبه گردیده است. ویژگی اصلی توپولوژی‌های بهینه، کوچکتر شدن و پهن‌تر شدن اعضا تحت بار فشاری در سازه بهینه شده می‌باشد. با استفاده از روش بهینه‌سازی سطوح هم‌تراز و تنظیم پارامتر τ ، مشکل ایجاد موده‌های جعلی در روش‌های مرسوم بهینه‌سازی سازه‌های پیوسته به طور کامل حذف و کارایی این روش از طریق چندین مثال نشان داده شده است. همچنین با مقایسه این روش بهینه‌سازی با روش‌های مرسوم، صحت نتایج اثبات گردیده است. به دلیل برتری روش بهینه‌سازی سطوح هم‌تراز در ایجاد مرزهای واضح نسبت به روش‌های مرسوم، در مواردی پاسخ‌های بهینه‌تری نیز مشاهده می‌گردد.

۶- سپاسگزاری

از حمایت مادی و معنوی شرکت معدنی و صنعتی گل‌گهر سیرجان در انجام این پژوهش تقدیر و تشکر می‌گردد.

۷- مراجع

- [1] Neves MM., Rodrigues H., Guedes JM., Generalized topology design of structures with a buckling load criterion. *Struct Optim.* Vol. 10, No. 2, pp. 71-78, 1995.
- [2] Neves MM., Sigmund O., Bendsoe MP., Topology optimization of periodic microstructures with a penalization of highly localized buckling modes. *Int J Numerical Methods Eng.* Vol. 54, No. 6, pp. 809-834, 2002.
- [3] Gao Xingjun., Ma Haitao., Topology optimization of continuum structures under buckling constraints. *Computers and Structures*, Vol. 157, pp. 142-152, 2015.
- [4] Luo Quantian., Tong Liyong., Structural topology optimization for maximum linear buckling loads by using a moving iso-surface threshold method. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. 52, No. 1, pp. 71-90, 2015.