

پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای مرکب حاوی سیال تحت ضربه سرعت پایین

رضا پاک‌نژاد

دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران، rezapakn3120@gmail.com

فرامرز آشنای قاسمی*

استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی، تهران، ایران، f.a.ghasemi@sru.ac.ir

کرامت ملک‌زاده فرد

استاد، گروه تحلیل سازه‌های هوافضایی، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران، k.malekzadeh@gmail.com

چکیده

در این پژوهش، برای اولین بار پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای مرکب حاوی سیال پر با شرایط مرزی مختلف با در نظر گرفتن وزن معادل سیال و سفتی دینامیکی معادل پوسته و سیال، تحت ضربه سرعت پایین بررسی شد. نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی و دو روش ریلی و توابع تیر به‌همراه تابع وزنی گلرکین برای حل معادله‌های حاکم و نرم افزار ABAQUS جهت صحت‌گذاری نتایج استفاده شدند. نوآوری اصلی این تحقیق استفاده از سفتی معادل دینامیکی سازه حاوی سیال و جرم معادل سازه-سیال در مدل دو درجه آزادی جرم و فنر جهت محاسبه نیروی برخورد و رفتار متقابل ضربه‌زننده و پوسته مرکب می‌باشد. نتایج نشان داد شرایط مرزی اختیار شده روی پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای مرکب تحت ضربه با سرعت پایین بسیار مؤثر بوده و وجود سیال فرکانس طبیعی سازه را کاهش می‌دهد. به‌طوری‌که اختلاف فرکانس طبیعی پایه برای پوسته استوانه‌ای خالی و پر از سیال آب ۷۸٪ محاسبه شد. پارامترهایی مانند شعاع، طول و ضخامت پوسته استوانه‌ای، شرایط مرزی مختلف، جرم و سرعت ضربه‌زننده از عوامل مهم و تأثیرگذار در بررسی ارتعاشات، ضربه و طراحی سازه‌ها می‌باشند.

واژه‌های کلیدی: ارتعاشات آزاد، ضربه سرعت پایین، پوسته استوانه‌ای، سیال، تابع وزنی گلرکین، جرم و فنر.

Dynamic Response of Composite Cylindrical Shell Containing Fluid Subjected to Low-Velocity Impact

R. Paknejad

F. Ashenai Ghasemi

K. Malekzadeh Fard

Faculty of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

Faculty of Mechanical Engineering, Shahid Rajaee Teacher Training University, Tehran, Iran

Department of Aerospace Engineering, Malek-c-Ashtar University of Technology, Tehran, Iran

Abstract

In this research, for the first time, the dynamic response of a composite cylindrical shells containing fluid filled with different boundary conditions by considering the equivalent weight of the fluid and the equivalent dynamic stiffness of the shell and fluid under low-velocity impact was investigated. The first-order shear deformation theory and the two methods of Rayleigh and beam functions along with the Galerkin weight function were used to solve the governing equations and ABAQUS software was used to validate the results. The main innovation of this research is the use of equivalent dynamic stiffness of the structure containing fluid and equivalent mass of the structure-fluid with a two-degree-of-freedom model of mass and spring to calculate the impact force and interaction between the impactor and the composite shell. The results showed that the various boundary conditions were very effective on the dynamic response of the composite cylindrical shell under low-velocity impact and the presence of fluid reduced the natural frequency of the structure. The difference in the fundamental natural frequency for empty and fluid-filled cylindrical shell was calculated 78%. Parameters such as radius, length and thickness of the shell, different boundary conditions, mass and velocity of impactor are important and influential factors in the study of vibrations, impact phenomenon and structural design.

Keywords: Free vibration, Low-velocity impact, Cylindrical shell, Fluid, Galerkin weight function, Mass and spring.

۱- مقدمه

یابد. چنین آسیبی به‌راحتی قابل مشاهده نیست، اما تأثیر آن بر مقاومت سازه قابل تعیین است. اگرچه تحقیقات مناسبی توسط دانشمندان انجام شده است، اما جای آن دارد تا دامنه مطالعه در این زمینه گسترش داده شود.

بررسی فرکانس طبیعی یک مخزن استوانه‌ای مرکب که قسمتی از آن دارای سیال و دو انتهای آن گیردار می‌باشد، توسط فیروزآبادی و همکاران [۱] به انجام رسید. آن‌ها با استفاده از فرمول‌بندی المان محدود، معادله‌های مربوط به سازه و سیال را استخراج نموده و با بهره‌گیری از روش تحلیل مودال به حل معادله‌ها پرداختند. تأثیر میزان ارتفاع سیال، نسبت چگالی سیال به مخزن، زاویه چیدمان الیاف در لایه‌ها، ضخامت لایه‌های سازنده و نسبت‌های هندسی مخزن بر فرکانس طبیعی مطالعه شد. چن و همکاران [۲] ارتعاشات سه بعدی

پوسته‌ها با توجه به شکل، طراحی و کاربرد در زمینه‌های مختلفی از جمله هوافضا، خودروسازی، نفت، صنایع فلزی و غیرفلزی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این راستا بررسی پوسته‌های حاوی سیال به عنوان منابع ذخیره آب، روغن‌های خام یا شیمیایی و فرآورده‌های تصفیه شده از اهمیت ویژه‌ای برخوردار هستند. تأثیر متقابل سازه و سیال داخلی، عوامل خارجی و استفاده از روش‌های حل مختلف را می‌توان در طراحی هرچه بهتر سازه‌ها مد نظر قرار داد. هم‌چنین یکی از بزرگترین نگرانی‌ها در مورد سازه‌ها به‌خصوص سازه‌هایی که جهت نگهداری مواد مهم صنعتی می‌باشند، رفتار آن‌ها تحت تأثیر اجسام خارجی است. استحکام سازه به دلیل آسیب ضربه به شدت کاهش می‌

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: f.a.ghasemi@sru.ac.ir

یک مخزن استوانه‌ای هوشمند پر شده از سیال متراکم غیر چسبنده را با شرط مرزی ساده، با استفاده از معادله‌های سه‌بعدی پیزوالاستیسیته و روابط فضای حالت بررسی نمودند. آن‌ها فرکانس طبیعی مخزن استوانه‌ای را بر اساس شماره موج محوری، نسبت چگالی سیال به مخزن و نسبت ضخامت به شعاع مخزن محاسبه کردند. گانچالوز و همکاران [۳] رفتار دینامیکی غیر خطی پوسته‌های استوانه‌ای محتوی سیال تحت بار محوری را مورد مطالعه قرار دادند. ایشان تأثیر مقدار بار محوری و کوپلینگ مودال را روی پاسخ پس‌کمانش و پایداری پوسته استوانه‌ای حاوی سیال و هم‌چنین مناطق بحرانی و خطر بررسی نمودند. عبدالغفار شاه و همکاران [۴] ارتعاشات پوسته استوانه‌ای ایزوتروپیک روی بستر الاستیک را در دو حالت خالی و پر از سیال با استفاده از روش انتشار موج تحقیق کردند. آن‌ها نشان دادند که در پوسته حاوی سیال افزایش ضرایب وینکلرو پاسترناک باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود. نورال ایزیان و همکاران [۵] با استفاده از نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی و روش عددی اسپلین، فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مرکب حاوی سیال ساکن با زاویه چیدمان الیاف متعامد و زاویه‌دار را برای دو شرط مرزی دوسر لولا و دو سر گیردار بررسی نمودند. آن‌ها تأثیر طول، ضخامت، تعداد لایه‌ها، مواد مختلف و شرایط مرزی فرض شده در مسئله را با توجه به داده‌های موج طولی و محیطی محاسبه نمودند.

انصاریان و جعفری [۶] ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی محتوی سیال را با استفاده از نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی برای شرط مرزی ساده مورد مطالعه و تحقیق قرار دادند. در این پژوهش روابط کرنش- تغییر مکان و انحناء- تغییر مکان بر مبنای تقریب اول لاو نوشته شده و فرکانس‌های طبیعی پوسته از روش انرژی محاسبه گردید. سیال ایده‌آل فرض شده و بعد از حل مسئله اثر پارامترهای مختلف از جمله چگالی سیال، ارتفاع سیال و زاویه الیاف در دو حالت پوسته خالی و محتوی سیال بررسی شده است. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که وجود سیال درون پوسته، افزایش چگالی آن و هم‌چنین ارتفاع سیال داخل پوسته فرکانس‌های طبیعی را کاهش می‌دهد. ثین و انگوین [۷] ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای حاوی سیال را با استفاده از روش دینامیک سفتی بررسی کردند. در این پژوهش یک روش تحلیلی جدید براساس نظریه ریسنر- میندلین و معادله‌های سیال غیرلزج تراکم ناپذیر برای ساختارهای مورد مطالعه، پیشنهاد شده است. برای مقایسه از نتایج تجربی ارتعاش آزاد یک پوسته استوانه‌ای فایبر گلاس- پلی استر حاوی سیال استفاده شده است. ملک‌زاده و همکاران [۸] مدل دینامیکی را برای پانل‌های ساندویچی استوانه‌ای کامپوزیتی با هسته انعطاف‌پذیر و شرایط مرزی ساده که با جرم‌های کوچک و بزرگ تحت ضربات سرعت پایین قرار می‌گیرد با استفاده از یک نظریه پانل ساندویچی مرتبه بالای بهبود یافته مورد بررسی قرار دادند. تنش‌های داخلی برای هسته و رویه‌ها در نظر گرفته شد. فرمول‌سازی بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول برای رویه‌ها و توصیف چندجمله‌ای میدان‌های جابه‌جایی در هسته، بر اساس مدل دوم فروستینگ صورت گرفت. در این تحقیق، اثرات دینامیکی هسته نرم و رویه‌ها در نظر گرفته شده است. ضربات به طور همزمان و عمودی بر روی صفحه بالایی پانل با جرم‌ها و سرعت‌های اولیه متفاوت اتفاق افتاد. نیروهای تماسی بین پانل و ضربه‌زننده‌ها به

عنوان نیروهای داخلی سیستم مورد بررسی قرار گرفتند. سفتی تماس غیر خطی با یک روش تحلیلی بهبود یافته جدید ارائه شد. نتایج عددی ساختارهای ذکر شده با مدلسازی در نرم‌افزار المان محدود ABAQUS مقایسه شد. پاک نژاد و همکاران [۹] اثر شرایط مرزی دلخواه روی یک ورق چند لایه مرکب که تحت بار ضربه‌ای با جرم بزرگ و سرعت پایین قرار گرفته، مورد بررسی قرار دادند. از نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی و میدان جابه‌جایی بر پایه چند جمله‌ای‌های جبری مناسب و تابع وزنی گالرکین استفاده و معادله‌های حرکت برای چند نوع شرط مرزی مختلف حل شدند. نتایج نشان داد شرایط مرزی اختیار شده روی فرکانس طبیعی ورق مرکب مؤثر است. این تأثیرها در نیروی تماسی و جابه‌جایی ورق برای تکیه‌گاه‌های گیردار نسبت به ساده و آزاد قابل ملاحظه است. پارامترهایی مانند شرایط مرزی مختلف، جرم و سرعت ضربه‌زننده در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت و شعاع ضربه‌زننده از عوامل مهم و تأثیرگذار در بررسی پدیده ضربه و طراحی سازه‌ها می‌باشد.

در این پژوهش نوآوری‌هایی به شرح زیر انجام شده است: ۱- برای اولین بار پاسخ دینامیکی پوسته استوانه‌ای مرکب حاوی سیال پر با شرایط مرزی مختلف با در نظر گرفتن جرم معادل سیال و سفتی دینامیکی معادل پوسته و سیال، تحت ضربه سرعت پایین مورد بررسی قرار گرفت. ۲- برای نخستین بار از سفتی معادل دینامیکی سازه حاوی سیال و جرم معادل مجموع سازه و سیال در مدل جرم و فنر دو درجه آزادی استفاده شد. پدیده ضربه بر روی استوانه حاوی سیال پر با حل تحلیلی برای شرایط مرزی مختلف تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته است. تحقیقات گذشته، بررسی ارتعاشات آزاد و اجباری بر روی پوسته‌های استوانه‌ای حاوی سیال صرفاً با بررسی یک نوع شرط مرزی و عموماً با شرط مرزی ساده بوده است. به‌دلیل این‌که فرکانس طبیعی پایه در پاسخ ضربه بر روی پوسته مؤثر است، از دو روش ریلی و توابع تیر به‌همراه تابع وزنی گلرکین برای تحلیل ارتعاشات آزاد و استخراج فرکانس طبیعی پوسته استفاده شد. معادله‌های حاکم بر پوسته استوانه‌ای در حالت ضربه دینامیکی به صورت مرتبط و کوپله با مدل جرم و فنر حل گردیدند. تأثیر شماره‌های موج محیطی، شرایط مرزی، ضخامت، شعاع و طول پوسته و نسبت آن‌ها روی فرکانس طبیعی و هم‌چنین اثرات برخورد جسم خارجی با جرم و سرعت متفاوت در زیر نقطه تماس مطالعه شد.

۲- معادله‌های حاکم

۲-۱- روابط پایه و معادله‌های حرکت

پوسته استوانه‌ای ساخته شده از ماده مرکب و حاوی سیال به شعاع R ، طول L و ضخامت h در شکل ۱ نشان داده شده است. جهت تحلیل، فرض‌های زیر در نظر گرفته می‌شوند:

- ۱- لایه‌های مورد استفاده در ساخت پوسته الاستیک بوده و می‌تواند ایزوتروپیک یا اورتوتروپیک از جنس مواد مرکب باشد.
- ۲- تغییر مکان‌ها و چرخش‌ها کوچک فرض شده است.
- ۳- از اثرات رطوبت و دما صرف نظر شده است.
- ۴- از اثرات امواج برگشتی از مرزها صرف نظر شده است.

طبق فرض مسئله، چون سیال تراکم‌ناپذیر بوده و از اثرات امواج سطحی صرف‌نظر می‌شود، انرژی پتانسیل سیال صفر می‌گردد. هم-چنین $W_{external}$ بار نیروهای خارجی وارد بر پوسته می‌باشد. σ_{xx} و $\sigma_{\theta\theta}$ تنش‌های اصلی محوری و $\tau_{x\theta}$ ، τ_{xz} و $\tau_{\theta z}$ تنش‌های برشی می‌باشند.

روابط بین تنش‌ها و ممان‌ها به‌صورت زیر حاصل می‌شوند:

$$(N_{xx}; N_{\theta\theta}; N_{x\theta}; Q_{xz}; Q_{\theta z}) = \int_Z (\sigma_{xx}; \sigma_{\theta\theta}; \tau_{x\theta}; \tau_{xz}; \tau_{\theta z}) dZ$$

$$(M_{xx}; M_{\theta\theta}; M_{x\theta}) = \int_Z (\sigma_{xx}; \sigma_{\theta\theta}; \tau_{x\theta}) Z dZ \quad (۸)$$

هم‌چنین روابط بین تنش، کرنش و سفتی انتقال یافته به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx}^k \\ \sigma_{\theta\theta}^k \\ \tau_{x\theta}^k \\ \tau_{\theta z}^k \\ \tau_{xz}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11}^k & \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{16}^k & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{12}^k & \bar{Q}_{22}^k & \bar{Q}_{26}^k & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{16}^k & \bar{Q}_{26}^k & \bar{Q}_{66}^k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44}^k & \bar{Q}_{45}^k \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45}^k & \bar{Q}_{55}^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^k \\ \varepsilon_{\theta\theta}^k \\ \gamma_{x\theta}^k \\ \gamma_{\theta z}^k \\ \gamma_{xz}^k \end{pmatrix} \quad (۹)$$

با جایگذاری روابط (۹) در (۸)، معادله‌های تنش و ممان به‌فرم زیر حاصل می‌شوند:

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{\theta\theta} \\ N_{x\theta} \\ M_{xx} \\ M_{\theta\theta} \\ M_{x\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{x\theta} \end{pmatrix} \quad (۱۰)$$

$$\begin{pmatrix} Q_{\theta z} \\ Q_{xz} \end{pmatrix} = K_{sh} \begin{bmatrix} A_{44} & A_{45} \\ A_{45} & A_{55} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{pmatrix}$$

k_{sh} ضریب تصحیح برشی است که مقدار آن برای پوسته‌های استوانه‌ای برابر با $5/6$ در نظر گرفته می‌شود. هم‌چنین A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} به‌ترتیب ماتریس‌های سفتی کششی، کوپل کششی و خمشی می‌باشند که از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (Z_k - Z_{k-1}) \quad (i, j = 1; 2; 4; 5; 6)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \quad (i, j = 1; 2; 6)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}^k (Z_k^3 - Z_{k-1}^3) \quad (i, j = 1; 2; 6)$$

$$(I_0; I_1; I_2) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho_k(1; z; z^2) dz \quad (۱۲)$$

ρ جرم حجمی کل ورق مرکب، I ممان اینرسی و h ضخامت مجموع لایه‌ها می‌باشند. بعد از اکستریم‌سازی تابع همیلتون در معادله (۴)، معادله‌های حرکت پوسته استوانه‌ای حاوی سیال به‌صورت زیر بیان می‌شوند [۵]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(N_{x\theta} - \frac{1}{2R} M_{x\theta} \right) = I_0 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(N_{x\theta} + \frac{1}{2R} M_{x\theta} \right) + \frac{\partial N_\theta}{R \partial \theta} + \frac{Q_\theta}{R} = I_0 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_1 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\theta}{R \partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} - P_f = I_0 \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (۱۳)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{x\theta}}{R \partial \theta} - Q_x = I_1 \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{\partial M_\theta}{R \partial \theta} - Q_\theta = I_1 \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \psi_\theta}{\partial t^2}$$

در رابطه (۱۳)، P_f فشار سیال داخلی وارد بر پوسته استوانه‌ای می‌باشند. با جایگذاری منته‌های نیروها و ممان‌ها از رابطه (۱۰) در روابطه (۱۳)، به‌منظور برقراری شرایط مرزی پوسته استوانه‌ای مورد

۵- لایه‌ها نازک فرض شده ولی اثرات تغییر شکل‌های برشی نیز منظور شده است.

۶- تحلیل فقط شامل پاسخ برخورد اول که حاوی انرژی بیشتر و خطرناک است می‌باشد.

۷- سیال ساکن، غیر متراکم و غیر لزج می‌باشد.

با توجه به دستگاه محورهای مختصات استوانه‌ای و بر اساس نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی، جابه‌جایی هر نقطه از پوسته در راستای w و v بصورت رابطه (۱) بیان می‌شوند:

$$u(x; \theta; z; t) = u_0(x; \theta; t) + z \psi_x(x; \theta; t)$$

$$v(x; \theta; z; t) = v_0(x; \theta; t) + z \psi_\theta(x; \theta; t) \quad (۱)$$

$$w(x; \theta; z; t) = w_0(x; \theta; t)$$

u_0 و v_0 و w_0 جابه‌جایی‌های ورق در جهات x (θ) و z در جهت مرکز استوانه، ψ_x و ψ_θ بیان‌کننده دوران عمود در راستای x و y می‌باشند. روابط کرنش و جابه‌جایی به‌صورت زیر است:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{0xx} + Z \kappa_{xx}; \varepsilon_{\theta\theta} = \varepsilon_{0\theta\theta} + Z \kappa_{\theta\theta}$$

$$\varepsilon_{x\theta} = \varepsilon_{0x\theta} + Z \kappa_{x\theta} \quad (۲)$$

$$\gamma_{x\theta} = 2\varepsilon_{x\theta}; \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{0xz}$$

$$\gamma_{\theta z} = 2\varepsilon_{\theta z} = \varepsilon_{0\theta z}$$

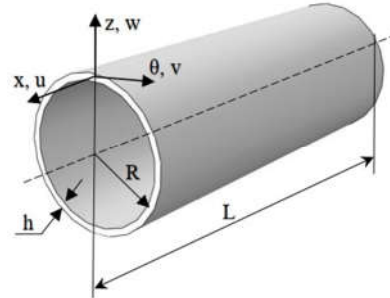
ε_{0xx} و $\varepsilon_{0\theta\theta}$ مؤلفه‌های کرنش عمودی، مؤلفه کرنش برشی، $\varepsilon_{0x\theta}$ و ε_{0xz} مؤلفه‌های کرنش برشی عرضی صفحه میانی، κ_{xx} و $\kappa_{\theta\theta}$ و $\kappa_{x\theta}$ انحناهای صفحه میانی پوسته می‌باشند.

$$\varepsilon_{0xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x}; \varepsilon_{0\theta\theta} = \frac{\partial v_0}{R \partial \theta} + \frac{v_0}{R}$$

$$\varepsilon_{0x\theta} = \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{R \partial \theta}$$

$$\varepsilon_{0xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \psi_x; \varepsilon_{0\theta z} = \frac{\partial w_0}{R \partial \theta} + \psi_\theta - \frac{v_0}{R}$$

$$\kappa_{xx} = \frac{\partial \psi_x}{\partial x}; \kappa_{\theta\theta} = \frac{\partial \psi_\theta}{R \partial \theta}; \varepsilon_{0x\theta} = \frac{\partial \psi_{\theta x}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_x}{R \partial \theta}$$



شکل ۱- پوسته استوانه‌ای حاوی سیال

استخراج معادله‌های حاکم و شرایط مرزی بر اساس اصل کمینه‌سازی لاگرانژی همیلتون به‌شرح زیر است:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta L dt = \int_{t_1}^{t_2} [\delta T_{shell} + \delta T_{fluid} - \delta U_{shell} - \delta U_{fluid} + \delta W_{external}] dt = 0 \quad (۴)$$

T_{shell} انرژی جنبشی پوسته، U_{shell} انرژی پتانسیل پوسته و T_{fluid} انرژی جنبشی سیال از روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$T_{shell} = \frac{1}{2} \int_V \rho [\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2] dV \quad (۵)$$

$$T_{fluid} = \frac{1}{2} \int_V \rho \phi \phi_{,R} dV = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A \rho \phi \phi_{,R} dAdz \quad (۶)$$

$$U_{shell} = \int_V (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{\theta\theta} \varepsilon_{\theta\theta} + \tau_{x\theta} \gamma_{x\theta} + \tau_{xz} \gamma_{xz}) \quad (۷)$$

نظر، میدان جابه‌جایی به صورت بسط سری فوریه دوگانه زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x; \theta; t) &= \sum_m \sum_n U_{mn}(t) \cos(\alpha_m x) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \\ v(x; \theta; t) &= \sum_m \sum_n V_{mn}(t) \sin(\alpha_m x) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \\ w(x; \theta; t) &= \sum_m \sum_n W_{mn}(t) \sin(\alpha_m x) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \\ \psi_x(x; \theta; t) &= \sum_m \sum_n \Psi_{xmn}(t) \cos(\alpha_m x) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \\ \psi_\theta(x; \theta; t) &= \sum_m \sum_n \Psi_{\theta mn}(t) \sin(\alpha_m x) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (14)$$

که در آن‌ها $\alpha_m = \frac{m\pi}{l}$ و U_{mn} ، V_{mn} ، W_{mn} ، Ψ_{xmn} و $\Psi_{\theta mn}$ ضرایب وابسته به زمان بوده که باید از حل معادلات (۱۳) بر حسب تغییر مکان‌ها تعیین شوند.

۲-۲- برهم‌کنش سازه-سیال

جهت بررسی تأثیر مایع درونی بر ارتعاشات پوسته، ابتدا باید با استفاده از یک مدل ریاضی به تحلیل برهم‌کنش جامد و سیال در سطح تماس آن‌ها پرداخت. پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی به‌طور کامل یا جزئی با یک سیال غیر قابل تراکم و غیر چسبنده پر شده و جریان سیال از نوع جریان پتانسیل می‌باشد [۷]:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{z^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (15)$$

که در آن Φ تابع پتانسیل سیال، x مؤلفه محوری، θ مؤلفه محیطی و z مؤلفه شعاعی در دستگاه استوانه‌ای هستند. معادله برنولی به فرم زیر تعریف می‌شود [۷]:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{P_f}{\rho_f} = 0 \quad (16)$$

فشار داخلی سیال از خطی کردن معادله (۱۶) به دست می‌آید:

$$P_f = -\rho_f \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_z \quad (17)$$

Σ بخشی از سطح سازه در تماس با سیال می‌باشد.

برای به دست آوردن اثرات سیال، باید شرایط مرزی تأثیر متقابل سیال و جامد در معادله‌های سیال اعمال شود. با توجه به این‌که در نقطه تماس سیال با پوسته، سیال نمی‌تواند در پوسته فرو رود و همیشه تماس دائمی بین سطح داخلی پوسته و لایه پیرامونی سیال وجود دارد، سرعت شعاعی سیال با سرعت شعاعی پوسته در نقطه تماس این دو، مقداری یکسان است [۷]:

$$v_f = \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_z = \frac{\partial w_0}{\partial t} \Big|_z \quad (18)$$

w_0 جابجایی نرمال پوسته و v_f سرعت سیال هستند.

برای حل معادله دیفرانسیل تابع پتانسیل سرعت سیال، از روش جداسازی متغیرها استفاده می‌شود [۷]:

$$\Phi(x; \theta; z; t) = \Psi(z) f(x) \cos(m\theta) e^{i\omega t} \quad (19)$$

با جایگذاری رابطه (۱۹) در (۱۵) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\left(\frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \Psi(z)}{\partial z} \right) \frac{1}{\Psi(z)} - \frac{m^2}{z^2} + \frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = 0 \quad (20)$$

معادله (۲۰) منتهی با روابط زیر می‌شود:

$$\left\{ \frac{1}{f(x)} \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = -k_n^2 \right. \quad (21)$$

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2 \Psi(z)}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \Psi(z)}{\partial z} \right) \frac{1}{\Psi(z)} - \frac{m^2}{z^2} = k_n^2 \right. \quad (22)$$

از معادله (۲۱) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} + k_n^2 f(x) = 0 \quad (23)$$

جواب معادله (۲۳) به‌قرار زیر است:

$$f(x) = B_1 \cos(k_n x) + B_2 \sin(k_n x) \quad (24)$$

k_n با توجه شرایط مرزی سیال به دست می‌آید.

از معادله (۲۲) می‌توان نوشت:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \frac{\partial \Psi}{\partial z} - \left(\frac{m^2}{z^2} + k_n^2 \right) \Psi = 0 \quad (25)$$

معادله (۲۵) با استفاده از توابع پیراسته بسط نوع اول و دوم از مرتبه m حل می‌شود:

$$\Psi(z) = A_1 I_m(k_n z) + A_2 K_m(k_n z) \quad (26)$$

در نهایت، تابع پتانسیل Φ و نیروی هیدرودینامیک سیال بصورت زیر به دست می‌آیند:

$$\Phi(x; \theta; z; t) = \frac{\Psi(z) \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{z=R}}{\Psi'(z) \frac{\partial w}{\partial t} \Big|_{z=R}} \quad (27)$$

$$P_f(x; \theta; z; t) = -\rho_f \frac{\Psi(z) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{z=R}}{\Psi'(z) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \Big|_{z=R}}$$

و فشار هیدرودینامیک سیال به فرم زیر محاسبه می‌گردد [۷]:

$$P_f = -\rho_f \frac{1}{m + k_n R I_{m+1}(k_n R) / I_m(k_n R)} \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = m^* \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} \quad (28)$$

معادله (۲۸) در روابط (۱۳) جایگذاری می‌شود.

۳-۲- توابع تیر و تابع وزنی گالریکین

توابع تیر یک انتخاب متداول و پرکاربرد از متغیرهای میدان برای پوسته‌های استوانه‌ای هستند. برای این منظور، جهت حل دستگاه معادله‌های (۱۳)، شرایط مرزی تیر باید با شرایط مرزی پوسته یکسان باشد و از نظر هندسی آن‌را ارضا کند. استدلال می‌شود که اگر پوسته استوانه‌ای یک محور باریک در نظر گرفته شود، باید شبیه رفتار یک تیر با شرایط مرزی همگن باشد. معادله زیر برای به دست آوردن روابط توابع تیر در نظر گرفته شده است [۱۰]:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \right) = -\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (29)$$

که در آن E ، I و μ به ترتیب مدول الاستیسیته، ممان اینرسی سطح و جرم واحد طول می‌باشند.

با حل معادله (۲۹)، رابطه (۳۰) برای تابع تیر جهت برقراری شرایط هندسی با در نظر گرفتن شرایط مرزی از طریق اعمال ضرایب عددی متفاوت به دست می‌آید [۱۰]:

$$\begin{aligned} \xi_i(x) &= \alpha_1 \cosh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + \alpha_2 \cos\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) \\ &\quad - \gamma_m \left(\alpha_3 \sinh\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) + \alpha_4 \sin\left(\frac{\lambda_m x}{L}\right) \right) \end{aligned} \quad (30)$$

که در آن α_1 ، α_2 ، α_3 و α_4 اعداد ثابتی بوده و با توجه به شرایط هندسی می‌توانند مقادیر صفر، ۱ یا -۱ داشته باشند. روابط ریاضی شرایط مرزی هندسی برای حالت گیردار و ساده را می‌توان با توجه به پارامترهای رابطه (۳۰) به صورت زیر در نظر گرفت [۱۰]:

- گیردار-گیردار

$$\begin{aligned} \xi_i(x) &= \xi_i'(x) = 0 \\ \alpha_1 &= 1; \alpha_2 = -1; \alpha_3 = 1; \alpha_4 = -1; \cos \lambda_m \cosh \lambda_m = 1 \\ \gamma_m &= \frac{\cosh \lambda_m - \cos \lambda_m}{\sinh \lambda_m - \sin \lambda_m} \end{aligned} \quad (31)$$

- ساده-ساده

پاسخ معادله‌های دیفرانسیل بصورت رابطه (۳۷) است:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= A_1 \sin(\omega t + \varphi) \\ \Delta_2 &= A_2 \sin(\omega t + \varphi) \end{aligned} \quad (37)$$

حرکت عمومی سیستم را می‌توان در لحظه زمانی t با توجه به جواب‌های عمومی معادله‌های (۳۷) در رابطه (۳۸) تعریف می‌شود:

$$\begin{cases} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{cases} = c_1 \bar{\varphi}^{(1)} \sin(\omega_1 t + \psi_1) + c_2 \bar{\varphi}^{(2)} \sin(\omega_2 t + \psi_2) \quad (38)$$

در رابطه (۳۸)، ω_1 و ω_2 فرکانس‌های طبیعی، $\bar{\varphi}^{(1)}$ و $\bar{\varphi}^{(2)}$ شکل مدهای اول و دوم می‌باشند. ضرایب مجهول C_1 ، C_2 ، ψ_1 و ψ_2 را با اعمال شرایط اولیه می‌توان به‌دست آورد:

$$\begin{cases} \Delta_1(t=0) = 0 \\ \Delta_2(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{\Delta}_1(t=0) = v_0 \\ \dot{\Delta}_2(t=0) = 0 \end{cases} \quad (39)$$

$$F(t) = K_c^* (\Delta_1 - \Delta_2) \quad (40)$$

در نتیجه نیروی تماسی $F(t)$ ، ω_1 ، ω_2 ، ψ_1 ، ψ_2 و K_c^* از روابط زیر به‌دست می‌آیند [۹]:

$$F(t) = \frac{K_c^* V}{(\psi_2 - \psi_1)} \left[\frac{1 - \psi_2}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) - \frac{1 - \psi_1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right] \quad (41)$$

$$\psi_1 = \frac{K_c^*}{K_c^* - M_I \omega_1^2} \quad \text{و} \quad \psi_2 = \frac{K_c^*}{K_c^* - M_I \omega_2^2}$$

$$\omega_1; \omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{(N+1)K_c^* + K_g}{NM_I} \pm \sqrt{\left(\frac{(N+1)K_c^* + K_g}{NM_I} \right)^2 - 4 \frac{K_c^* K_g}{NM_I}} \right)} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} K_c^* &= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \right)^{\frac{2(n-1)}{n+1}} \left(\frac{N}{N+1} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} (V)^{\frac{2(n-1)}{n+1}} (K_c)^{\frac{2(n-1)}{n+1}} (m_I)^{\frac{n-1}{n+1}} \\ K_g &= \omega^2 M_{eff} \end{aligned} \quad (43)$$

۳- نتایج و بحث

۳-۱- بررسی نتایج ارتعاش آزاد

برای نشان دادن دقت تحلیل‌های حاضر، صحت روابط و روش‌های حل مورد استفاده، چندین مثال از مطالعات گذشته با نتایج تحقیق حاضر مورد مقایسه قرار گرفت. دو روش ریلی و گلرکین با استفاده از توابع تیر به همراه نرم‌افزارهای برنامه‌نویسی Matlab و Maple و هم-چنین نرم‌افزار شبیه‌سازی المان محدود ABAQUS در این پژوهش به‌کار گرفته شدند. جدول ۱ مشخصات ماده ارتوتروپیک این تحقیق را نشان می‌دهد.

جدول ۱- مشخصات مکانیکی ماده [۶ و ۱۰]

مشخصات مکانیکی	نوع ماده
$E_{11} = 181 \text{ GPa}; E_{22} = 103 \text{ GPa}$	کربن/اپوکسی
$G_{12} = 712 \text{ GPa}; G_{23} = 2/5 \text{ GPa}$	
$\nu_{12} = 0.28; \rho = 1600 \text{ kg/m}^3$	

در جدول‌های ۲ و ۳، روش ۱- استفاده از سری‌های فوریه و برنامه-نویسی در محیط نرم‌افزار Matlab و روش ۲- به‌کارگیری توابع تیر، روش تابع وزنی گلرکین و برنامه‌نویسی در محیط نرم‌افزار Maple را نشان می‌دهد. نتایج به‌دست آمده جهت اطمینان و صحت‌سنجی در نرم‌افزار المان محدود ABAQUS مدل‌سازی و حل گردید. پوسته استوانه‌ای مورد مقایسه دارای طول ۳ متر، شعاع ۰/۵ متر، ضخامت m ۰/۰۴، زاویه چیدمان الیاف برای آن $[0/90/90/0]$ و سیال مورد

$$\xi_i(x) = \xi_i''(x) = 0 \quad (32)$$

بنابراین u, v, w, ψ_x و ψ_θ بر اساس سری فوریه دوگانه به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x; \theta; t) &= \sum_m \sum_n U_{mn} \frac{d\xi_u(x)}{dx} \cos(n\theta) e^{i\omega t} \\ v(x; \theta; t) &= \sum_m \sum_n V_{mn} \xi_v(x) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \\ w(x; \theta; t) &= \sum_m \sum_n W_{mn} \xi_w(x) \cos(n\theta) e^{i\omega t} \\ \psi_x(x; \theta; t) &= \sum_m \sum_n \Psi_{xmn} \frac{d\xi_{\psi_x}(x)}{dx} \cos(n\theta) e^{i\omega t} \\ \psi_\theta(x; \theta; t) &= \sum_m \sum_n \Psi_{\theta mn} \xi_{\psi_\theta}(x) \sin(n\theta) e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (33)$$

با جایگذاری معادله‌های (۳۳) در روابط (۱۳) و استفاده از روش تابع وزنی گلرکین رابطه زیر استخراج شده و حل می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x; \theta; t) \\ v(x; \theta; t) \\ w(x; \theta; t) \\ \psi_x(x; \theta; t) \\ \psi_\theta(x; \theta; t) \end{Bmatrix} = \{0\} \quad (34)$$

L_{ij} عملگرهای دیفرانسیلی هستند که تعدادی از آن‌ها در پیوست بیان شده است. در رابطه (۳۴)، با جداسازی ماتریس‌های سختی و جرم و شرایط مرزی مختلف، فرکانس‌های طبیعی محاسبه می‌شوند.

$$[[K_{ij}] - \omega^2 [M_{ij}]] \{ U_{mn} \ V_{mn} \ W_{mn} \ \Psi_{xmn} \ \Psi_{\theta mn} \}^T = 0 \quad (35)$$

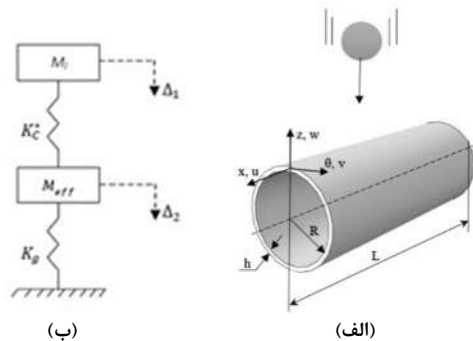
در رابطه (۳۵)، M_{ij} و ω_{ij} به‌ترتیب ماتریس سختی، ماتریس جرم و فرکانس طبیعی سیستم می‌باشند.

۴-۲- روابط و معادله‌های ضربه اعمالی

شکل ۲ الف) پوسته استوانه‌ای مرکب چند لایه حاوی سیال با ضربه‌زننده در مرکز را نشان می‌دهد. برای تعیین نیروی ضربه‌ای اعمالی بر پوسته، با توجه به شکل ۲ ب) از یک سیستم دو درجه آزادی جرم-فنر استفاده می‌شود [۹ و ۱۱]:

$$\begin{aligned} M_I \dot{\Delta}_1 + K_c^* (\Delta_1 - \Delta_2) &= 0 \\ M_{eff} \dot{\Delta}_2 + K_c^* (\Delta_2 - \Delta_1) + K_g \Delta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

در رابطه (۳۶)، M_I جرم ضربه‌زننده، M_{eff} جرم مؤثر پوسته و سیال، Δ_1 جابجایی ضربه‌زننده و Δ_2 جابجایی پوسته در نقطه تماس می‌باشند. K_c^* سفتی تماسی خطی شده و K_g سفتی معادل پوسته می‌باشد.



شکل ۲- الف) پوسته استوانه‌ای محتوی سیال با ضربه‌زننده در مرکز ب) مدل دو درجه آزادی جرم-فنر

استفاده آب با جرم حجمی 1000 kg/m^3 و مدول بالک $2/2 \text{ GPa}$ می‌باشد.

شکل ۳ نمودار تأثیر اعداد موج محیطی بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای مرکب را برای دو حالت خالی و پر از سیال آب با در نظر گرفتن مشخصات ماده جدول ۱ و شرط مرزی ساده نشان می‌دهد. در پوسته‌ها فرکانس طبیعی پایه با توجه به نوع ماده سازنده آن‌ها در عدد موج محیطی بالاتری اتفاق می‌افتد.

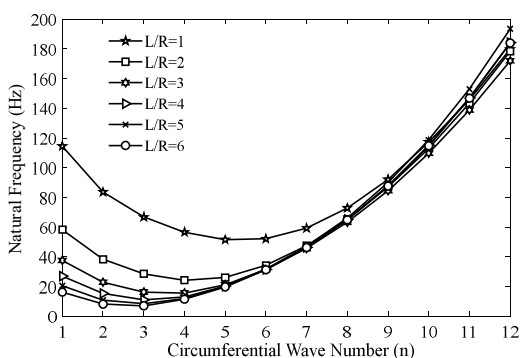
جدول ۲- مقایسه فرکانس طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای خالی

n	روش ۱- [۶]	مرجع [۶]	اختلاف (%)	روش ۲- [۶]	اختلاف (%)	ABAQUS
۱	۲۱۹/۶۲	۲۲۱/۴۸	-۰/۸۵	۲۱۹/۶۲	-۰/۸۵	۲۱۹/۶۷
۲	۱۰۹/۱۷	۱۱۱/۳۷	-۲	۱۰۹/۱۷	-۲	۱۰۹/۲۷
۳	۶۵/۰۹	۶۷	-۲/۹	۶۵/۱۱	-۲/۹	۶۵/۲۳
۴	۶۰/۶۶	۶۲/۸۷	-۳/۶	۶۰/۶۸	-۳/۶	۶۰/۹۹
۵	۸۱/۳۸	۸۴/۵۳	-۳/۹	۸۱/۴۰	-۳/۸	۸۲/۲۱

جدول ۳- مقایسه فرکانس طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای حاوی سیال

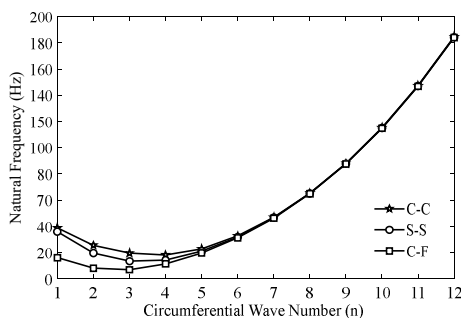
n	روش ۱- [۶]	مرجع [۶]	اختلاف (%)	روش ۲- [۶]	اختلاف (%)	ABAQUS
۱	۳۵/۸۸	۳۶/۰۶	-۰/۵	۳۵/۷۳	-۰/۹۱	۳۵/۳۵
۲	۱۹/۷۰	۱۹/۸۶	-۰/۸۱	۱۹/۶۲	-۱/۲	۱۹/۴۳
۳	۱۳/۴۰	۱۳/۶۴	-۱/۸	۱۳/۳۶	-۲	۱۳/۲۵
۴	۱۴/۱۶	۱۴/۳۳	-۱/۲	۱۴/۱۰	-۱/۶	۱۳/۸۹
۵	۲۱/۰۱	۲۱/۱۷	-۰/۸	۲۰/۹۲	-۱/۲	۲۰/۵۸

نمودار تأثیر نسبت طول به شعاع بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای حاوی سیال با توجه به افزایش عدد موج محیطی با توجه به مشخصات مکانیکی ماده جدول ۱ و مشخصات هندسی جدول‌های ۲ و ۳ نشان داده شده‌اند (شکل ۴). در این نمودار که برای شرط مرزی C-F اعمال شده است، مقدار شعاع پوسته ثابت و ارتفاع پوسته استوانه‌ای از ۰/۵ متر تا ۳ متر تغییر می‌یابد. با افزایش ارتفاع پوسته، فرکانس طبیعی کاهش یافته و فرکانس طبیعی پایه در عدد موج محیطی پایین‌تری اتفاق می‌افتد. اختلاف فرکانس طبیعی پایه بین بیشترین و کمترین نسبت طول به شعاع برای حالت پوسته بدون سیال ۰/۸۲٪ و پوسته محتوی سیال آب ۸۶/۱۵٪ می‌باشد [۶].



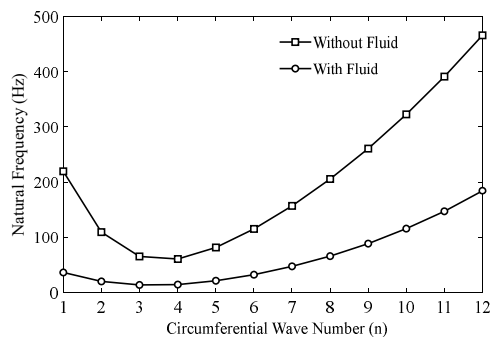
شکل ۴- تأثیر نسبت طول به شعاع بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای حاوی سیال برای شرط مرزی C-F

شرایط مرزی اعمالی در دو سر پوسته استوانه‌ای، باعث تغییرات قابل توجه در فرکانس‌های طبیعی در اعداد موج محیطی پایین می‌شود. با افزایش این عدد، فرکانس‌های طبیعی همگرا می‌شوند. بیشترین مقادیر مربوط به شرط مرزی C-C به علت گیردار بودن دو طرف پوسته و کمترین آن برای شرط مرزی S-F با توجه به شرایط اعمالی در این تحقیق می‌باشد. به دلیل نزدیکی مقادیر محاسبه شده در شرط مرزی C-F و S-F، فرکانس‌های طبیعی شرط مرزی S-F نشان داده نشده‌اند (شکل ۵). اختلاف فرکانس طبیعی پایه بین بیشترین و کمترین مقدار در این حالت برای پوسته بدون سیال ۵/۸٪ و پوسته محتوی سیال آب ۶۲٪ می‌باشد [۱۶].

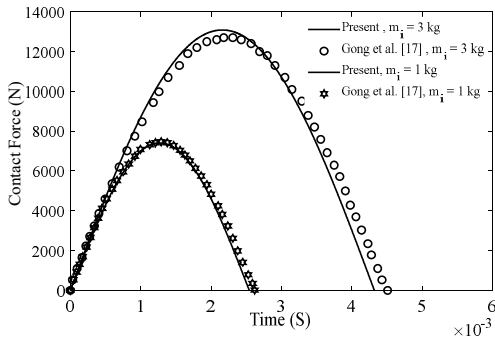


شکل ۵- تأثیر شرایط مرزی بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای حاوی سیال آب

در این حالت فرکانس طبیعی ابتدا کاهش و سپس با بالا رفتن عدد موج محیطی افزایش می‌یابد. فرکانس طبیعی پایه برای پوسته استوانه‌ای خالی در عدد موج محیطی $(m=1, n=4)$ و برای پوسته استوانه‌ای محتوی سیال در عدد موج محیطی $(m=1, n=3)$ به دست می‌آید. وجود سیال به دلیل افزایش مقدار ماتریس جرم با توجه به اینکه فشار وارده از طرف سیال به پوسته به صورت منفی در ماتریس سختی یا مثبت در ماتریس جرم اعمال می‌شود، باعث کاهش مقدار فرکانس طبیعی می‌گردد. اختلاف فرکانس طبیعی پایه برای پوسته استوانه‌ای خالی و پر از سیال آب ۷۸٪ می‌باشد [۶، ۱۳ و ۱۴].



شکل ۶- تأثیر اعداد موج محیطی بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای خالی و پر از سیال آب و شرط مرزی S-S

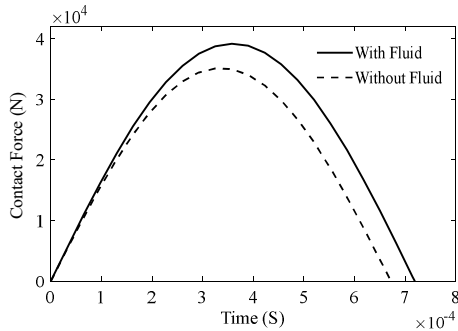


شکل ۷- مقادیر نیروی تماسی برای پوسته مرکب خالی

جدول ۵- مشخصات ضربه‌زننده [۹]

R_i (m)	۰/۱۲۷	m_i (kg)	۳
v_i (ms^{-1})	۳	ρ_i (kgm^{-3})	۷۸۳۳

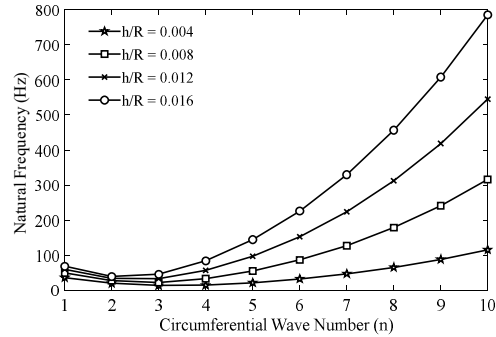
تغییرات نیروی برخورد در نقطه تماس در دو حالت پوسته استوانه‌ای خالی و پر از سیال آب برای شرط مرزی دو سر گیردار در شکل ۸ نشان داده شده است. در حالت پوسته حاوی سیال، به علت وجود مایع، پوسته سنگین‌تر شده و سیال مانند بستر الاستیک عمل می‌نماید و در اثر برخورد، سازه دچار شوک ضربه‌ای می‌گردد. بنابراین بیشینه نیروی تماسی در پوسته پر از مایع بیشتر از پوسته خالی است. میزان این اختلاف ۱۰/۴٪ می‌باشد. همچنین در اثر نیروی ضربه‌ای، میزان جابه‌جایی پوسته پر از سیال به دلیل سنگین بودن و افزایش مؤلفه‌های سفتی پوسته استوانه‌ای، بسیار کمتر از پوسته خالی بوده و در زمان بسیار بالاتری در نیم دوره تناوب به صفر می‌رسد (شکل ۹).



شکل ۸- نیروی تماسی برای پوسته استوانه‌ای خالی و پر از سیال و شرط مرزی C-C

شکل‌های ۱۰ و ۱۱ میزان تغییرات نیروی تماسی و جابه‌جایی پوسته حاوی سیال را بر اساس افزایش جرم ضربه‌زننده برای سه مقدار جرم متفاوت با سرعت ثابت نشان می‌دهند. با افزایش جرم، میزان انرژی جنبشی ضربه‌زننده افزایش یافته و باعث بالا رفتن نیروی برخورد و جابه‌جایی پوسته در نقطه تماس می‌شود. میزان اختلاف در بیشینه نیروی تماسی برای جرم ۴ کیلوگرمی نسبت به جرم ۳ کیلوگرمی، ۱۶/۱٪ و جرم ۵ کیلوگرمی نسبت به جرم ۴ کیلوگرمی ۱۲/۷٪ و برای بیشینه جابه‌جایی به ترتیب ۲۴/۹٪ و ۱۹/۸٪ می‌باشند [۹ و ۱۰].

تأثیر ضخامت لایه‌های پوسته استوانه‌ای برای شرط مرزی C-S در شکل ۶ نشان داده شده است. با افزایش ضخامت لایه‌ها، حدود انتگرالی در محاسبه انرژی جنبشی و همچنین ماتریس‌های سفتی محوری و خمشی افزایش یافته و سبب بالا رفتن فرکانس طبیعی پوسته می‌گردد. هر چه ضخامت لایه‌ها بیشتر می‌شود، اختلاف در میزان فرکانس طبیعی در اعداد موج محیطی بالاتر افزایش یافته و پاسخ‌ها واگرا می‌گردند. این مقدار برای بیشترین و کمترین مقدار نسبت ضخامت به شعاع در عدد موج محیطی ($n=10$) برای پوسته خالی ۳۰٪ و در پوسته حاوی سیال ۴۴٪ می‌باشد [۶].



شکل ۶- تأثیر نسبت ضخامت به شعاع بر فرکانس طبیعی پوسته استوانه‌ای حاوی سیال برای شرط مرزی C-S

۲-۳- بررسی نتایج ضربه سرعت پایین

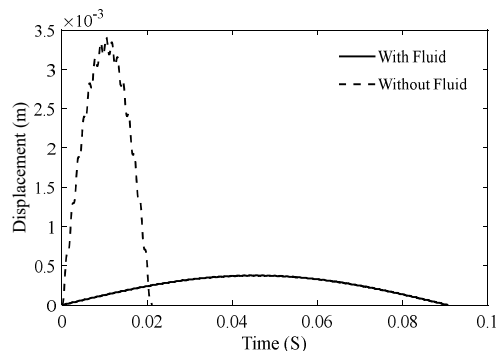
برای اثبات درستی روابط به‌دست آمده برای نیروی تماسی پوسته استوانه‌ای و ضربه‌زننده در نقطه تماس، کار مقایسه و صحت‌سنجی در شکل ۷ نشان داده شده است. در این بررسی، پوسته استوانه‌ای مرکب با ۴۸ لایه و زاویه چیدمان $[+45/-45/0]_s$ / $[+45/-45/0]_s$ از جنس گرافیت/اپوکسی در نظر گرفته شده و مشخصات فیزیکی و مکانیکی آن در جدول ۴ ارائه گردیده است. نمودارهای حاصل انطباق خوب تحقیق حاضر با نتایج مرجع ذکر شده را نشان می‌دهد.

جدول ۴- مشخصات پوسته و ضربه‌زننده [۱۷]

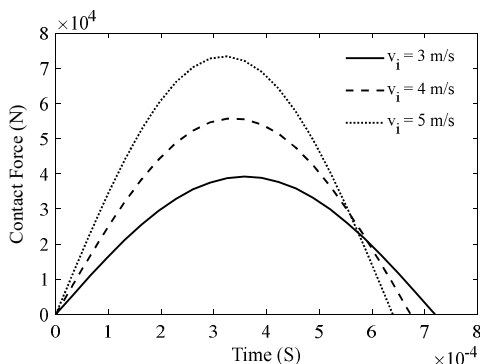
D_{11} (Nm)	$1/3864 \times 10^6$	a_{11} (Nm^{-1})	$1/0.752 \times 10^{-10}$
D_{12} (Nm)	$3/2491 \times 10^3$	a_{12} (Nm^{-1})	$4/8293 \times 10^{-10}$
D_{22} (Nm)	$5/8201 \times 10^3$	a_{22} (Nm^{-1})	$2/2709 \times 10^{-10}$
D_{66} (Nm)	$3/9205 \times 10^3$	a_{66} (Nm^{-1})	$3/7129 \times 10^{-10}$
h (m)	۰/۱۲۷	h_{ply} (mm)	۰/۲۶۴
R_{shell} (m)	۰/۳	L_{shell} (m)	۰/۳
v_i (ms^{-1})	۶	ρ_i (kgm^{-3})	۷۹۷۲

پوسته استوانه‌ای مرکب حاوی سیال با مشخصات مکانیکی جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود. ضربه‌زننده کرومی از جنس فولاد و مشخصات آن در جدول ۵ گزارش شده است. نتایج تاریخچه نیروی تماسی و جابه‌جایی‌های پوسته استوانه‌ای مرکب در اثر برخورد گوی کرومی با آن در حالت‌های مختلف برای شرط مرزی پوسته دو سر گیردار ارائه می‌گردد.

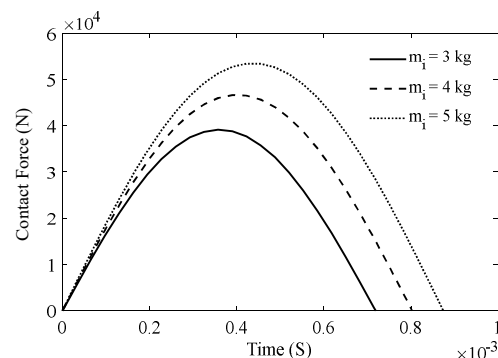
تأثیر اختلاف جرم‌ها و سرعت‌های متفاوت ضربه‌زننده در یک مقدار انرژی جنبشی ثابت ۱۳/۵ ژول، روی نیروی تماسی و جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای مرکب حاوی سیال برای شرط مرزی دو سر گیردار در شکل‌های ۱۴ و ۱۵ نشان داده شده است. با افزایش جرم و کاهش سرعت ضربه‌زننده در مقدار انرژی جنبشی ثابت، بیشینه نیروی تماسی در این سه حالت کاهش و زمان رسیدن نیروی تماسی به صفر در نیم دوره تناوب افزایش می‌یابد. هم‌چنین بیشینه جابه‌جایی در نقطه تماس با افزایش جرم و کاهش سرعت افزایش می‌یابد. اختلاف بین بیشترین و کمترین مقدار جابه‌جایی برای این حالت ۲۹٪ می‌باشد [۹].



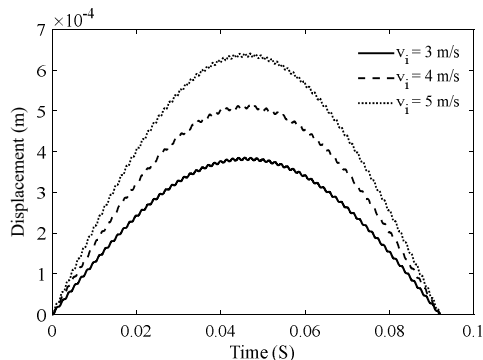
شکل ۹- جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای خالی و پر از سیال و شرط مرزی C-C



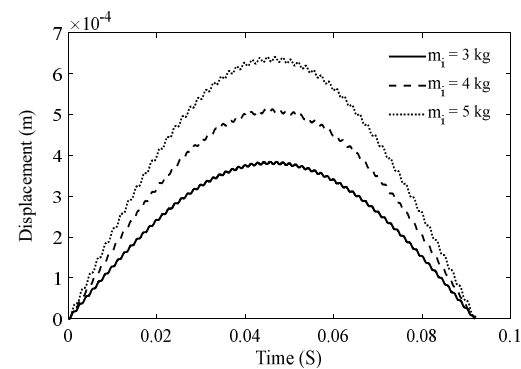
شکل ۱۲- نیروی تماسی بر اساس سرعت ضربه‌زننده برای پوسته استوانه‌ای پر از سیال برای شرط مرزی C-C



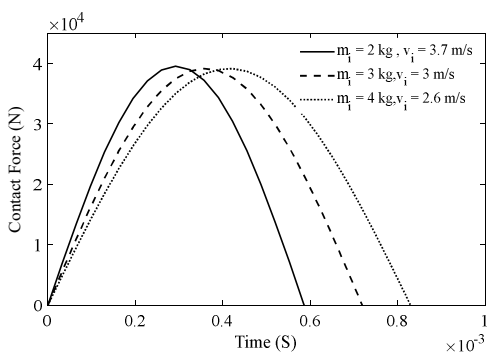
شکل ۱۰- نیروی تماسی بر اساس جرم ضربه‌زننده برای پوسته استوانه‌ای پر از سیال و شرط مرزی C-C



شکل ۱۳- جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای پر از سیال بر اساس سرعت ضربه‌زننده برای شرط مرزی C-C



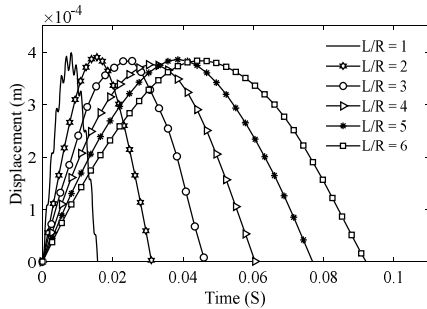
شکل ۱۱- جابه‌جایی بر اساس جرم ضربه‌زننده برای پوسته استوانه‌ای پر از سیال و شرط مرزی C-C



شکل ۱۴- نیروی تماسی برای پوسته استوانه‌ای پر از سیال بر اساس انرژی جنبشی ثابت ۱۳/۵ ژول و شرط مرزی C-C

از آنجایی که در رابطه انرژی جنبشی، سرعت از مرتبه دو می‌باشد، با بالا رفتن سرعت ضربه‌زننده در مقدار جرم ثابت، میزان بیشینه نیروی تماسی و بیشینه جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای حاوی سیال در نقطه تماس افزایش بیشتری می‌یابد (شکل‌های ۱۲ و ۱۳). هم‌چنین زمان رسیدن به نیروی تماسی صفر در نیم دوره تناوب با ازدیاد سرعت، کاهش پیدا می‌کند. میزان اختلاف برای بیشینه نیروی تماسی در ضربه‌زننده با سرعت ۴ متر بر ثانیه نسبت به سرعت ۳ متر بر ثانیه، ۲۹/۷٪ و سرعت ۵ متر بر ثانیه نسبت به سرعت ۴ متر بر ثانیه، ۲۴/۴٪ و برای بیشینه جابه‌جایی به ترتیب ۲۵/۳٪ و ۲۰٪ می‌باشند [۹].

در حالی که شعاع پوسته استوانه‌ای ثابت است، با افزایش ارتفاع، جرم آن افزایش یافته و فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. این تغییرات سفتی تماس خطی شده را افزایش داده و همین امر باعث کم شدن مقدار جابه‌جایی و افزایش مدت زمان آن در رسیدن به صفر در نیم دوره تناوب می‌گردد (شکل ۱۸). در این نمودارها نیز اختلاف بین بیشترین و کمترین مقدار زمانی ۸۴/۵٪ به دست می‌آید [۱۵].

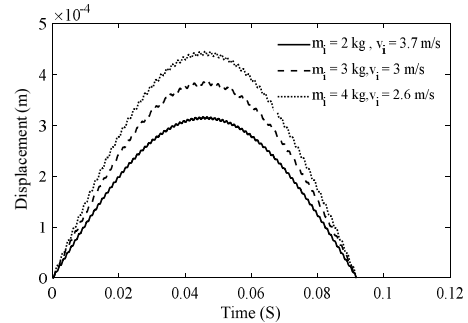


شکل ۱۸- جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای پر از سیال با تغییرات طول پوسته و شرط مرزی C-S

۴- نتیجه‌گیری

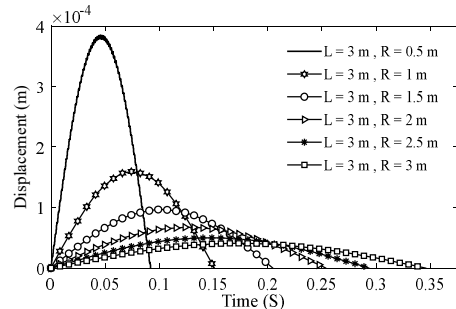
در این تحقیق، برای اولین بار پاسخ دینامیکی شامل ارتعاشات آزاد و ضربه با سرعت پایین روی پوسته استوانه‌ای مرکب محتوی سیال دارای شرایط مرزی متفاوت با استفاده از نظریه مرتبه اول تغییر شکل برشی، سری‌های فوریه، توابع تیر و روش تابع وزنی گلرکین مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. تاریخچه نیروی تماسی و جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای با مدل جرم و فنر محاسبه گردید. نتایج مهم به دست آمده عبارت است از:

- وجود سیال باعث افزایش جرم و در نتیجه کاهش فرکانس طبیعی می‌شود. اختلاف بین فرکانس طبیعی پایه در پوسته خالی و پر از سیال ۷۸٪ می‌باشد.
- شرایط مرزی پوسته استوانه‌ای بر روی فرکانس طبیعی مؤثر بوده به طوری که بیشترین فرکانس مربوط به شرط مرزی C-C و کمترین فرکانس مربوط به شرط مرزی S-F است. اختلاف برای فرکانس طبیعی پایه بین این دو شرط مرزی ۶۲٪ می‌گردد.
- با افزایش نسبت طول به شعاع پوسته، فرکانس طبیعی در حالت‌های با و بدون سیال کاهش می‌یابد. اختلاف برای این دو حالت بین ۶۷/۶٪ تا ۷۷/۹٪ می‌باشد.
- وجود سیال باعث افزایش جرم پوسته شده و مانند یک بستر الاستیک عمل می‌نماید. همین امر در هنگام ضربه باعث ایجاد شوک در پوسته شده و نیروی تماسی افزایش می‌یابد. اختلاف بیشترین مقدار نیروی برخورد در پوسته خالی و پر از سیال ۱۰/۴٪ می‌باشد.
- میزان جابه‌جایی در نقطه تماس برای پوسته حاوی سیال بسیار کمتر از پوسته خالی بوده ولی زمان رسیدن به جابه‌جایی صفر در نیم دوره تناوب قابل ملاحظه است.
- افزایش جرم و سرعت ضربه‌زننده باعث بالا رفتن مقدار نیروی تماسی و جابه‌جایی پوسته می‌شود. اختلاف بین بیشترین و

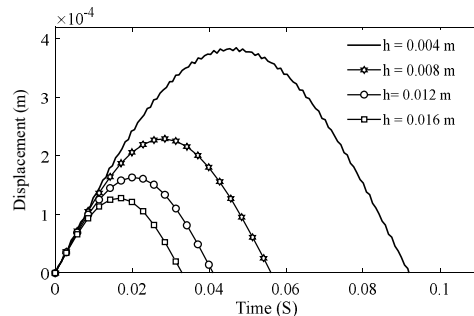


شکل ۱۵- جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای پر از سیال بر اساس انرژی جنبشی ثابت ۱۳/۵ ژول و شرط مرزی C-C

شکل ۱۶ تغییرات جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای حاوی سیال را بر اساس تغییرات شعاع پوسته با ثابت در نظر گرفتن ارتفاع آن برای شرط مرزی C-S نشان می‌دهد. با افزایش شعاع پوسته، جرم نهایی افزایش و فرکانس طبیعی، K_C و K_C^* کاهش یافته و باعث کم شدن تاریخچه و بیشینه زمان جابه‌جایی پوسته زیر نقطه تماس می‌شود. در این حالت اختلاف بین بیشترین و کمترین مقدار جابه‌جایی با تغییرات شعاع ۰/۵ متر و ۳ متر، ۸۹/۶٪ و اختلاف زمانی ۷۵٪ محاسبه شده است [۱۵]. هم‌چنین با افزایش ضخامت پوسته، فرکانس طبیعی کاهش و جرم پوسته افزایش می‌یابد. این تغییرها، زیاد شدن K_C^* و کاهش جابه‌جایی و مدت زمان آن برای پوسته استوانه‌ای حاوی سیال را در پی دارد (شکل ۱۷). اختلاف بیشترین و کمترین مقدار جابه‌جایی ۶۶/۷٪ و برای اختلاف زمانی ۶۴/۸٪ می‌باشد [۱۵].



شکل ۱۶- جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای پر از سیال با تغییرات شعاع پوسته و شرط مرزی C-S



شکل ۱۷- جابه‌جایی پوسته استوانه‌ای پر از سیال با تغییرات ضخامت پوسته و شرط مرزی C-S

Journal of the Brazilian Society Mechanical Science and Engineering, Vol. 28, pp. 331-338, 2006.

- [4] Shah A. G., Mahmood T., Naeem M. N. and Arshad S. H., Vibration characteristics of fluid-filled cylindrical shells based on elastic foundations, *Acta Mechanica*, Vol. 216, pp. 17-28, 2011.
- [5] Nurul Izyan M. D., Viswanathan K. K., Aziz Z. A. and Prabakar K., Free vibration of layered cylindrical shells filled with fluid, *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol. 37, No.6, pp. 803-820, 2016.
- [6] Ansaryan Y. and Jafari A. A., Investigation of free and forced vibration of a composite circular cylindrical shell with internal fluid, *Journal of solid and fluid mechanics*, Vol. 7, No. 2, 2017. (In Persian فارسی)
- [7] Thinh T. I. and Nguyen M. C., Dynamic Stiffness Method for free vibration of composite cylindrical shells containing fluid, *Applied Mathematical Modelling*, Vol. 40, No. 21-22, pp. 9286-9301, 2016.
- [8] Malekzadeh Fard K., Veisi Ghorghabad A., Azarnia A. H. and Ashenai Ghasemi F., High order impact elastic analysis of circular thick cylindrical sandwich panels subjected to multi-mass impacts, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 12, pp. 2281-2310, 2015.
- [9] Paknejad R., Ashenai Ghasemi F. and Malekzadeh Fard K., The effects of arbitrary boundary conditions on a laminated composite plate response subjected to large mass & low velocity impact, *Journal of Solid and Fluid Mechanics*, Vol. 7, No. 1, pp. 35-49, 2018. (In Persian فارسی)
- [10] Khalili S. M. R., Malekzadeh K., Davar A. and Mahajan P., Dynamic response of pre-stressed fiber metal laminate (FML) circular cylindrical shells subjected to lateral pressure pulse loads, *Composite Structures*, Vol. 92, No. 6, pp. 1308-1317, 2010.
- [11] Shivakumar K. N., Elber W. and Illg W., Prediction of impact force and duration due to low velocity on circular composite laminates, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 52, No.1, pp. 674-680, 1985.
- [12] Shokuhfar A., Khalili S. M. R., Ashenai Ghasemi F., Malekzadeh K. and Raissi S., Analysis and optimization of smart hybrid composite plates subjected to low-velocity impact using the response surface methodology (RSM), *Thin-Walled Structures*, Vol. 46, No. 11, pp. 1204-1212, 2008.
- [13] Pourmoayed A. R., Malekzadeh Fard K. and Shahravi M., Buckling and Vibration analysis of a thick cylindrical sandwich panel with flexible core using an improved higher order theory, *Modares Mechanical Engineering*, Vol. 17, No. 3, pp. 227-238, 2017. (In Persian فارسی)
- [14] Pourmoayed A. P., Malekzadeh Fard K. and Shahravi M., Vibration analysis of a cylindrical sandwich panel with flexible core using an improved higher-order theory, *Latin American Journal of Solids and Structures*, Vol. 14, No. 4, pp. 714-742, 2017.
- [15] Azarafza R., Golkar A. R. and Davar A., Analytical investigation of low-velocity oblique impact on composite cylindrical shells, *Journal of Science and Technology of Composites*, Vol. 7, No. 3, pp. 1106-1119, 2020. (In Persian فارسی)
- [16] Hadi A., Shakhesi S., Ovesy H. and Fazilati J., Free vibration of functionally graded materials cylindrical shells on elastic foundation under axial force, lateral pressure and different boundary conditions, *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering*, Vol. 50, No. 5, pp. 1097-1112, 2018. (In Persian فارسی)
- [17] Gong S. W., Toh S. L. and Shim P. W., The elastic response of orthotropic laminated cylindrical shells to low-velocity impact, *Journal of Composite Engineering*, Vol. 4, No. 2, pp. 247-266, 1994.

کمترین مقدار نیروی تماسی در تأثیر سرعت ضربه‌زننده ۰/۴۶/۶٪ و برای جابه‌جایی پوسته ۰/۳۷/۳٪ را نشان می‌دهد.

- افزایش شعاع پوسته نسبت به ارتفاع آن کاهش بیشتری را در میزان جابه‌جایی و افزایش قابل ملاحظه‌ای را در مقدار تاریخچه زمان زیر نقطه تماس در پی دارد. اختلاف بین بیشترین و کمترین مقدار جابه‌جایی ۰/۸۹/۶٪ می‌باشد.

۵- نماده

جابه‌جایی پوسته	$u_0; v_0; w_0$
مدول الاستیسیته	E_{ij}
مختصات	$x; \theta; z$
ماتریس سفتی	$A_{ij}; B_{ij}; D_{ij}$
سفتی تماسی خطی شده	K_C^*
سفتی معادل پوسته	K_g
مؤلفه‌های سرعت سیال	$V_x; V_\theta; V_z$
ممان اینرسی	I
فاکتور تصحیح برشی	K_{sh}
فرکانس طبیعی	ω_{mn}
چگالی (kgm^{-3})	ρ
چگالی سیال	ρ_f
ضریب پواسون	ν_{ij}
چرخش برشی	$\psi_x; \psi_\theta$

۶- پیوست

$$\begin{aligned}
 L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{13} &= -L_{31} = \frac{A_{12}}{R} \frac{\partial}{\partial x} \\
 L_{22} &= A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{A_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{K_{sh}}{R^2} A_{44} - I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{24} &= L_{42} = B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{26}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + (B_{16} + B_{16}) \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} \\
 L_{33} &= K_{sh} A_{55} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + K_{sh} \frac{A_{44}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - \frac{A_{22}}{R^2} - P_f - I_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{35} &= -L_{53} = K_{sh} A_{44} - \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{R}{R} \frac{\partial x}{\partial x} \\
 L_{41} &= L_{14} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2B_{16}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{44} &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{66}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - K_{sh} A_{55} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{52} &= L_{25} = B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{B_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{2B_{26}}{R} \frac{\partial^2}{\partial x \partial \theta} + K_{sh} \frac{A_{44}}{R} \\
 &\quad - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
 L_{55} &= D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{D_{22}}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} - K_{sh} A_{44} - I_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}
 \end{aligned}$$

۷- مراجع

- [1] Firouz-Abadi R. D., Haddadpour H. and Kouchak zadeh M. A., Free vibrations of composite tanks partially filled with fluid, *Thin-Walled Structures*, Vol. 47, pp. 1567-1574, 2009.
- [2] Chen W. Q., Bian Z. G., Lv C. F. and Ding H. J., 3D free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder filled with compressible fluid, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, pp. 947-964, 2004.
- [3] Goncalves P. B., da Silva F. M. A. and del Prado Z. J. G. N., Transient stability of empty and fluid-filled cylindrical shells,