Scientific Researches in
Theoretical and Applied Physics
Vol. 1, Issue. 1, Spring 2023

Research Paper

Thermal Quantum Entanglement in XY-type Three-qubit Spin Chain Under Inhomogeneous Magnetic Field

Matin Alipour*[1], Rahimeh Soufiyani [2]

This paper is an open access and licensed under the CC BY NC license.

DOI:10.22034/STRAP.2023.15724

Reference to this article: Alipour, M., & Soufiani, R. (2023). Thermal quantum entanglement in XY-type three-qubit spin chain under inhomogeneous magnetic field. *Scientific Researches in Theoretical and Applied Physics*, *1*(1), 27-32.

Keywords

First keyword,
Seccond keyword,
Third keyword, ...

A B S T R A C T

In this paper, quantum thermal entanglement in a three qubit XY spin chain in a non homogenuous magnetic field is investigated and the amount of entanglement between the adjacent and non-adjacent qubits is measured by the concurrence criteria. Indeed, the dependence of the thermal entanglement on the controllable variables B (magnetic field), temperature T and the amount of heterogeneity b is investigated. The results of the paper shows that the thermal entanglement is decreased by increasing all three parameters B, T and b. Moreover, by controlling the mentioned parameters one can change the thermal entanglement between non-adjacent spins, c(ρ_13), so that its value gets a bigger amount with respect to the thermal entanglement of the adjacent spins, i.e., c(ρ_12) and c(ρ_23). Finally, changes of the thermal entanglement between the spins with respect to the temperature has been compared with the time evolution of the entanglements between the corresponding qubits.

Received: 2022/09/05

Accepted: 2022/12/21

Available: 2023/06/10

*** Corresponding Author: Matin Alipour**
E-mail: matinalipour777@gmail.com

1. University of Tabriz
2. University of Tabriz, Faculty of Phisycs

مقاله پژوهشی

درهم تنیدگی کوانتومی حرارتی در زنجیره اسپینی سه کیوبیتی نوع XY تحت میدان مغناطیسی ناهمگن

متین علی‌پور [۱]*، رحیمه صوفیانی [۲]

این مقاله به صورت دسترسی باز و با لایسنس CC BY NC کریتیو کامانز قابل استفاده است.

DOI:10.22034/STRAP.2023.15724

ارجاع به این مقاله: علی‌پور، متین؛ صوفیانی، رحیمه. (۱۴۰۱). درهم تنیدگی کوانتومی حرارتی در زنجیره اسپینی سه کیوبیتی نوع XY تحت میدان مغناطیسی ناهمگن. *پژوهش‌های علمی در فیزیک نظری و کاربردی*، ۱(۱)، ۲۷-۳۲.

کلیدواژه‌ها

درهم‌تنیدگی کوانتومی حرارتی ، زنجیره اسپینی نوع XY ، میدان مغناطیسی ناهمگن، تلاقی

چکیده

در این مقاله درهم‌تنیدگی کوانتومی حرارتی در یک زنجیره اسپینی سه کیوبیتی نوع XY را تحت اثر میدان مغناطیسی ناهمگن مورد بررسی قرار داده‌ایم و از معیار تلاقی (کانکورنس) برای اندازه‌گیری میزان درهم‌تنیدگی بین کیوبیت‌های مجاور و غیرمجاور استفاده کرده‌ایم. همچنین چگونگی وابستگی درهم‌تنیدگی حرارتی به متغیرهای قابل کنترل میدان مغناطیسی B ، دمای T و میزان ناهمگنی b مورد بررسی قرار گرفته‌است. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که این همبستگی با افزایش هر سه پارامتر B ، T و b کاهش پیدا می‌کند. به‌علاوه با کنترل پارامترهای یاد شده می‌توان درهم‌تنیدگی حرارتی بین اسپین‌های غیرمجاور، $c(\rho_{13})$ ، را طوری تغییر داد که مقدار آن نسبت به درهم‌تنیدگی‌های حرارتی بین اسپین‌های مجاور یعنی $c(\rho_{12})$ و $c(\rho_{23})$ مقدار بزرگتری کسب کند. در نهایت، تغییرات دمایی درهم‌تنیدگی حرارتی بین اسپین‌ها با تغییرات زمانی درهم‌تنیدگی‌های کیوبیت‌های نظیر مقایسه شده‌است.

دریافت شده: ۱۴۰۱/۰۶/۱۴
پذیرفته شده: ۱۴۰۱/۰۹/۳۰
منتشر شده: ۱۴۰۲/۰۳/۲۰

* نویسنده مسئول: متین علی پور
رایانامه: matinalipour777@gmail.com

۱- دانشگاه تبریز
۲- دانشگاه تبریز، دانشکده فیزیک

مقدمه

درهم‌تنیدگی کوانتومی به عنوان یک ویژگی جالب در مکانیک کوانتومی نوعی همبستگی غیرموضعی ذاتی است که به عنوان یک فاکتور بسیار مهم برای اطلاعات و محاسبات کوانتومی مطرح است . این همبستگی در سیستم‌های حالت جامد که در زنجیره اسپینی نمود پیدا کرده‌است بسیار مهم و حائز اهمیت می‌باشد. در واقع، زنجیره اسپینی یکی از کاندیداهای ساخت کامپیوترهای کوانتومی است که از کدگذاری و برهمکنش هایزنبرگی می‌توان در محاسبات کوانتومی استفاده کرد. همچنین می‌توان از درهم‌تنیدگی کوانتومی درکدگذاری ،انتقال از راه دور و فشرده‌سازی اطلاعات یا حالت‌های کوانتومی استفاده کرد. باید در نظر داشت عوامل محیطی بردر-هم‌تنیدگی کوانتومی اثر می‌گذارد. از طرف دیگر، درهم‌تنیدگی حرارتی نوع طبیعی و پایدار همبستگی کوانتومی وابسته به تعادل حرارتی است و به‌طور کلی برای درک خواص سیستم‌های حالت جامد به‌کار می‌رود. اندازه‌گیری درهم‌تنیدگی حرارتی در یک زنجیره اسپینی سه کیوبیتی انگیزه اصلی این مقاله است. ما در این مقاله میدان مغناطیسی ناهمگن را وارد کرده‌ایم و تاثیرات آن را بر درهم‌تنیدگی حرارتی بین اسپین‌های مجاور و غیرمجاور در زنجیره مورد بررسی قرار داده‌ایم. برای این منظور، ابتدا طیف هامیلتونی سیستم را محاسبه کرده و ماتریس‌های چگالی کاهش یافته برای زیرسیستم-های مربوطه را بدست آورده‌ایم. سپس از طریق معیار تلاقی برای حالت‌های X، درهم‌تنیدگی حرارتی زیرسیستم‌های دو کیوبیتی را محاسبه کرده‌ایم که در ادامه به معرفی مدل و جزئیات مساله می‌پردازیم.

معیار تلاقی برای سیستم دو کیوبیتی که به عنوان معیار درهم‌تنیدگی کوانتومی به‌کار می‌رود به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$c(\rho)= \max\{۰ ,\ \lambda_1-\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4\} \qquad (1)$$

که در آن، ρ ماتریس چگالی سیستم مربوطه و مقادیر λ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ جذر مقادیر ویژه عملگر زیر هستند

$$R= (\sigma_1^Y \otimes \sigma_2^Y)\, \rho^* \,(\sigma_1^Y \otimes \sigma_2^Y)^{\dagger} \qquad (2)$$

ρ^* مزدوج مختلط *ماتریس چگالی* است.

برای حالت‌های دوکیوبیتی نوع X که ماتریس چگالی آن‌ها به شکل زیر است:

$$\rho=\begin{bmatrix} \rho^{11} & 0 & 0 & \rho^{14} \\ 0 & \rho^{22} & \rho^{23} & 0 \\ 0 & \rho^{32} & \rho^{33} & 0 \\ \rho^{41} & 0 & 0 & \rho^{44} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

معیار تلاقی (کانکورنس) از رابطه (۱) به‌صورت زیر استخراج می‌شود [4]:

$$c(\rho)=2\max\{0,|\rho_{23}|-\sqrt{\rho_{11}\rho_{44}},|\rho_{14}|-\sqrt{\rho_{22}\rho_{33}}\} \qquad (4)$$

مدل هایزنبرگ XY برای زنجیره سه کیوبیتی

در این بخش مدل سه کیوبیتی هایزنبرگ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که تحت تاثیر میدان مغناطیسی غیریکنواخت قرار دارد. این مدل با هامیلتونی زیر داده می‌شود:

$$H=J(\sigma_1^X\sigma_2^X+\sigma_2^X\sigma_3^X+\sigma_1^Y\sigma_2^Y+\sigma_2^Y\sigma_3^Y)+B_1\sigma_1^Z+B_2\sigma_2^Z+B_3\sigma_3^Z \qquad (5)$$

می‌توان با استفاده از تبدیل جردن - ویگنر، هامیلتونی بالا را به شکل زیر نوشت:

$$H=2J(\sigma_1^+\sigma_2^-+\sigma_2^+\sigma_3^-+\sigma_1^-\sigma_2^++\sigma_2^-\sigma_3^+)+B_1\sigma_1^Z+B_2\sigma_2^Z+B_3\sigma_3^Z \qquad (6)$$

در رابطه (5)، $\sigma_n=(\sigma_n^X,\sigma_n^Y,\sigma_n^Z)$ ماتریس‌های پائولی معروف هستند و اندیس n برچسب شماره کیوبیت است که از ۱ تا ۳ تغییر می‌کند.B میدان مغناطیسی در جهت Z است .J ثابت جفت‌شدگی هست، حالت $J<0$ باشد مربوط به زنجیره فرومغناطیسی است و $J>0$ مربوط به زنجیره پادفرومغناطیسی است. ما برای سادگی، در محاسبات خود $J=1$ را در نظر خواهیم گرفت. میدان‌های مغناطیسی موضعی بر روی کیوبیت‌ها را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$B_1=B+b\ ،B_2=B\ ،B_3=B-b \qquad (7)$$

که در رابطه بالا، b پارامتر ناهمگنی میدان مغناطیسی است.

با انتخاب پایه محاسباتی به شکل زیر،

$$\{|000\rangle, |001\rangle, |010\rangle, |100\rangle, |110\rangle, |101\rangle, |011\rangle, |111\rangle\}$$

ویژه مقدارهامیلتونی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$E_1=3B$$

$$E_2=B+2\Delta$$

$$E_3=B$$

$$E_4=B-2\Delta$$

$$E_5=-B-2\Delta$$

$$E_6=-B$$

$$E_7=-B+2\Delta$$

$$E_8=-3B \qquad (8)$$

ویژه بردارهای مربوطه نیز به‌صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$|\Psi_1\rangle=|000\rangle$

$|\Psi_2\rangle=\frac{1}{\Delta(\Delta+b)}[(\Delta^2+b\Delta-1)\ |001\rangle+(\Delta+b)\ |010\rangle+|100\rangle]$

$|\Psi_3\rangle=\frac{1}{\Delta}(-|001\rangle+|010\rangle+|100\rangle)$

$|\Psi_4\rangle=\frac{1}{\Delta(\Delta-b)}[(\Delta^2-b\ \Delta-1)|001\rangle+(\Delta-b)|010\rangle+|100\rangle]$

$|\Psi_5\rangle=\frac{1}{\Delta(\Delta-b)}[(\Delta^2-b\Delta-1)|011\rangle+(\Delta-b)|101\rangle+|110\rangle]$

$|\Psi_6\rangle=\frac{1}{\Delta}(-|011\rangle+|101\rangle+|110\rangle)$

$|\Psi_7\rangle=\frac{1}{\Delta(\Delta+b)}[(\Delta^2+b\ \Delta-1)|011\rangle+(\Delta+b)|101\rangle+|110\rangle]$

$|\Psi_8\rangle=|111\rangle$

$\Delta=\sqrt{2+b^2}$ (9)

در ادامه به بررسی حالت‌های زیرسیستم‌های دو کیوبیتی و درهم‌تنیدگی حرارتی نظیر آن‌ها می‌پردازیم.

ماتریس‌های چگالی کاهش یافته برای زیرسیستم‌های دو کیوبیتی

برای بررسی درهم‌تنیدگی کوانتومی حرارتی بین کیوبیت‌های مجاور و غیرمجاور در زنجیره سه اسپینی مورد مطالعه، نیاز به محاسبه ماتریس‌های چگالی کاهش یافته مربوطه داریم. خوشبختانه حالت مربوط به زیرسیستم‌های دو کیوبیتی همه از نوع X هستند و تلاقی آن‌ها بطور دقیق از طریق رابطه (۴) قابل محاسبه است.

در حالت تعادل حرارتی ، وضعیت سیستم در دمای T را می‌توان با ماتریس چگالی زیر توصیف کرد:

$\rho(T)=(1/Z)\exp(-\beta H)=(1/Z)\sum_{n=1}^{n=8}\exp(-\beta E_n)|\Psi_n\rangle\langle\Psi_n|$
(10)

در رابطه بالا $\beta=1/K_BT$، K_B و ثابت بولتزمن می‌باشد. Z تابع پارش سیستم است که با رابطه $Z=Tr\exp(-\beta H)$ داده می‌شود. با استفاده از طیف هامیلتونی که در بخش قبل بدست آمد، تابع پارش Z به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$Z=2\cosh(3\beta B)+2\cosh(\beta B)+4\cosh(\beta B)\cosh(2\beta\Delta)$ (11)

حال با استفاده از (10) ، ماتریس چگالی را یافته و ماتریس‌های چگالی کاهش یافته مربوط به کیوبیت‌های مجاور (همسایه) و نیز کیوبیت‌های غیرمجاور یعنی $\rho^{(12)}(T)$، $\rho^{(13)}(T)$ و $\rho^{(23)}(T)$ را با استفاده از ردگیری جزئی $\rho^{(12)}(T)=Tr_3(\rho(T))$ ، $\rho^{(13)}(T)=Tr_2(\rho(T))$ و $\rho^{(23)}(T)=Tr_1(\rho(T))$ محاسبه می‌کنیم. سپس به بررسی تلاقی بین کیوبیت‌های مربوطه خواهیم پرداخت.

با استفاده از روابط (8)، (9) ، (10) و (۱۱)، ماتریس چگالی قابل محاسبه است که از طریق ردگیری جزئی روی اطلاعات کیوبیت سوم، درایه‌های غیر صفر ماتریس چگالی کاهش یافته مربوط به کیوبیت‌های اول و دوم بصورت زیر بدست می‌آیند:

$\boldsymbol{\rho_{11}^{(12)}}=e^{(-\beta B)}[e^{(-2\beta B)}+(1/\Delta)^2+\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}+\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}]$

$\boldsymbol{\rho_{22}^{(12)}}=(1/\Delta)^2(b^2e^{(\beta B)}+e^{(-\beta B)})+\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}(\theta^2e^{(-\beta B)}+e^{(\beta B)})+\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}(\Theta^2e^{(-\beta B)}+e^{(\beta B)})$

$\boldsymbol{\rho_{23}^{(12)}}=2(1/\Delta)^2b\sinh(\beta B)+\xi\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}(\theta e^{(-\beta B)}+e^{(\beta B)})+\gamma\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}(\Theta e^{(-\beta B)}+e^{(\beta B)})$

$\boldsymbol{\rho_{32}^{(12)}}=2(1/\Delta)^2b\sinh(\beta B)+\xi\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}(\theta e^{(-\beta B)}+e^{(\beta B)})+\gamma\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}(\Theta e^{(-\beta B)}+e^{(\beta B)})$

$\boldsymbol{\rho_{33}^{(12)}}=(1/\Delta)^2(b^2e^{(-\beta B)}+e^{(\beta B)})+\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}(\xi^2e^{(-\beta B)}+e^{(\beta B)})+\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}(\gamma^2e^{(-\beta B)}+e^{(\beta B)})$

$\boldsymbol{\rho_{44}^{(12)}}=e^{(\beta B)}[e^{(2\beta B)}+(1/\Delta)^2+\theta^2\,\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}+\Theta^2\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}]$ (12)

در رابطه (12) ، از نمادگذاری زیر استفاده کرده‌ایم:

$\Omega=\frac{1}{\Delta(\Delta+b)}$

$\theta=\Delta^2+b\Delta-1$

$\xi=\Delta+b$,

$\Phi=\frac{1}{\Delta(\Delta-b)}$

$\Theta=\Delta^2-b\Delta-1$

$\gamma=\Delta-b$ (13)

همچنین در محاسبه درایه‌های غیر صفر ماتریس کاهش یافته مربوط به کیوبیت‌های اول و سوم و نیز کیوبیت‌های دوم و سوم ، از رابطه (13) بهره گرفته‌ایم.

حال از طریق ردگیری جزئی روی اطلاعات کیوبیت دوم، درایه‌های غیر صفر ماتریس چگالی کاهش یافته مربوط به کیوبیت‌های اول و سوم به‌صورت زیر قابل محاسبه هستند:

$$\boldsymbol{\rho}_{11}^{(13)}=e^{(-\beta B)}[e^{(-2\beta B)}+b^2(1/\Delta)^2+\xi^2\,\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}+\gamma^2\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}]$$

$$\boldsymbol{\rho}_{22}^{(13)}=cosh(\beta B)[2(1/\Delta)^2+2\theta^2\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}+2\Theta^2\Phi^2\,e^{(2\beta\Delta)}]$$

$$\boldsymbol{\rho}_{23}^{(13)}=cosh(\beta B)[-2(1/\Delta)^2+2\theta\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}+2\Theta\Phi^2\,e^{(2\beta\Delta)}]$$

$$\boldsymbol{\rho}_{32}^{(13)}=cosh(\beta B)[-2(1/\Delta)^2+2\theta\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}+2\Theta\Phi^2\,e^{(2\beta\Delta)}]$$

$$\boldsymbol{\rho}_{33}^{(13)}=cosh(\beta B)[2(1/\Delta)^2+2\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}+2\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}]$$

$$\boldsymbol{\rho}_{44}^{(13)}=e^{(\beta B)}[e^{(2\beta B)}+b^2(1/\Delta)^2+\xi^2\,\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}+\gamma^2\,\Phi^2\,e^{(2\beta\Delta)}] \qquad (14)$$

در نهایت ، از طریق ردگیری جزئی روی اطلاعات کیوبیت اول، درایه‌های غیر صفر ماتریس چگالی کاهش یافته مربوط به کیوبیت‌های دوم و سوم به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\boldsymbol{\rho}_{11}^{(\text{۲۳})}= e^{(-\beta B)}[e^{(-2\beta B)}+(1/\Delta)^2+\theta^{\,2}\,\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}+\Theta^2\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}]$$

$$\boldsymbol{\rho}_{22}^{(\text{۲۳})}= (1/\Delta)^2\,(b^2e^{(-\beta B)}+e^{(\beta B)})+\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}(\xi^2e^{(-\beta B)}+\theta^2e^{(\beta B)})+\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}(\gamma^2e^{(-\beta B)}+\Theta^2e^{(\beta B)})$$

$$\boldsymbol{\rho}_{23}^{(\text{۲۳})}= -2(1/\Delta)^2b\,sinh(\beta B)+\xi\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}(e^{(-\beta B)}+\theta e^{(\beta B)})+\gamma\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}(e^{(-\beta B)}+\Theta e^{(\beta B)})$$

$$\boldsymbol{\rho}_{32}^{(\text{۲۳})}= -2(1/\Delta)^2b\,sinh(\beta B)+\xi\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}(e^{(-\beta B)}+\theta e^{(\beta B)})+\gamma\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}(e^{(-\beta B)}+\Theta e^{(\beta B)})$$

$$\boldsymbol{\rho}_{33}^{(\text{۲۳})}= (1/\Delta)^2(e^{(-\beta B)}+b^2e^{(\beta B)})+\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}(e^{(-\beta B)}+\xi^2e^{(\beta B)})+\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}(e^{(-\beta B)}+\gamma^2e^{(\beta B)})$$

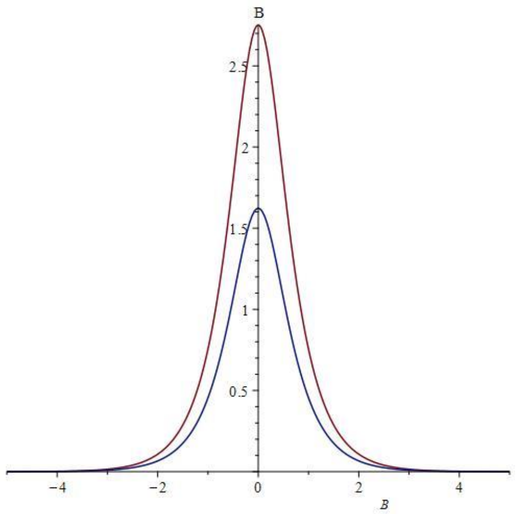
$$\boldsymbol{\rho}_{44}^{(\text{۲۳})}= e^{(\beta B)}[e^{(2\beta B)}+(1/\Delta)^2+\Omega^2e^{(-2\beta\Delta)}+\Phi^2e^{(2\beta\Delta)}] \qquad (15)$$

درهم‌تنیدگی کوانتومی حرارتی زیرسیستم‌ها

در این بخش مقدار درهم‌تنیدگی کوانتومی حرارتی زیرسیستم‌های مربوطه را مورد ارزیابی قرار می‌دهیم . اثرات حرارتی تمایل به از بین‌بردن همبستگی-های کوانتومی دارند که این اثر باعث کاهش همدوسی می‌شود. می‌خواهیم ببینیم برای درهم‌تنیدگی مابین کیوبیت‌ها چه اتفاقی می‌افتد.

با استفاده از درایه‌های غیر صفر ماتریس چگالی کاهش یافته (12) ، (14) و (15) و همچنین معیار تلاقی در رابطه (4) ، درهم‌تنیدگی حرارتی زیر سیستم‌ها قابل محاسبه است. در این بخش، درهم‌تنیدگی زیرسیستم‌ها را از طریق رسم نمودارهایی بر حسب پارامترهای قابل کنترل T، B وb مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌دهیم .

در شکل (۱)، معیار تلاقی برای هر سه جفت کیوبیت مجاور (۱۲)، (۲۳) و غیرمجاور (۱۳) بر حسب میدان مغناطیسی همگن B (b=0)رسم شده است.

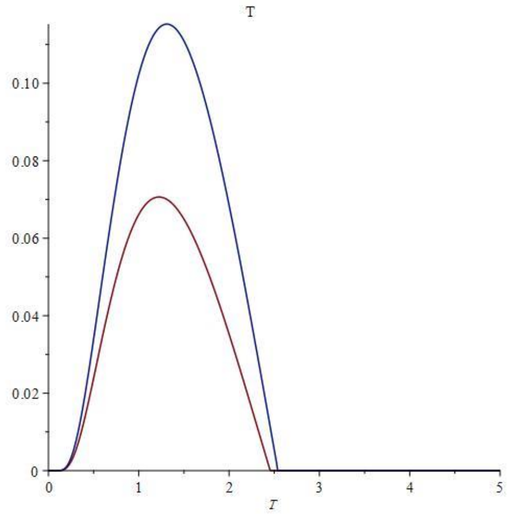


شکل (1). رنگ آبی، درهم‌تنیدگی حرارتی $c(\rho_{13})$ و رنگ قرمز ، درهم‌تنیدگی حرارتی $c(\rho_{12})$ یا $c(\rho_{23})$ ، برحسب میدان مغناطیسی B ، که T=1 و b=0است

.

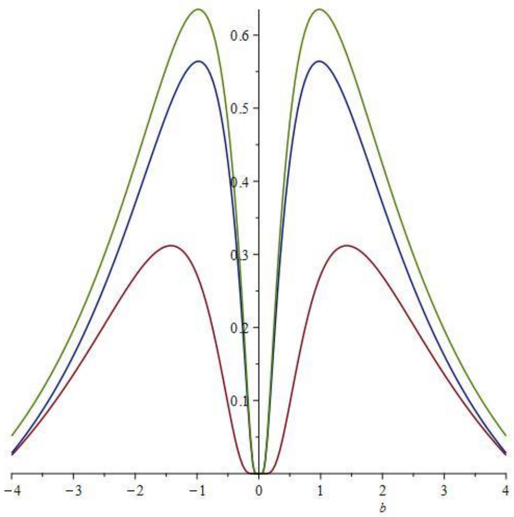
مشاهده می‌شود که با افزایش میدان مغناطیسی ، در قسمت منفی نمودار، درهم‌تنیدگی حرارتی افزایش می‌یابد سپس در قسمت مثبت شروع به کاهش می‌کند. در واقع نمودار متقارن است. $c(\rho_{12})$ و $c(\rho_{23})$ با رنگ قرمز، در محدوده مشخص شده، منطبق برهم هستند و همانند یکدیگر رفتار می‌کنند، که انتظار آن را داشتیم. $c(\rho_{13})$ با رنگ آبی، دارای مقدار کمتری نسبت به $c(\rho_{12})$ و $c(\rho_{23})$ است.

در شکل (2) درهم‌تنیدگی حرارتی برحسب دمای T رسم شده است . با بررسی آن متوجه می‌شویم که با افزایش دما درهم‌تنیدگی به یک نقطه بیشینه می‌رسد سپس شروع به کاهش می‌کند. $c(\rho_{12})$ و $c(\rho_{23})$ با رنگ آبی مجددا منطبق برهم هستند و $c(\rho_{13})$ با رنگ قرمز ، دارای مقدار کمتری نسبت به $c(\rho_{12})$ و $c(\rho_{23})$ می‌باشد.



شکل (2)؛
رنگ قرمز ، درهم‌تنیدگی حرارتی $c(\rho_{13})$ و رنگ آبی ، درهم‌تنیدگی حرارتی $c(\rho_{12})$ یا $c(\rho_{23})$ ، برحسب زمان T ، که $B=2$ و $b=0$ است .

در شکل (3) درهم‌تنیدگی حرارتی برحسب مقدار ناهمگنی مغناطیسی b رسم شده است.



شکل (3)؛
رنگ قرمز ، درهم‌تنیدگی حرارتی $c(\rho_{13})$ ، رنگ آبی درهم‌تنیدگی حرارتی $c(\rho_{12})$ و رنگ سبز درهم‌تنیدگی حرارتی $c(\rho_{23})$، برحسب مقدار ناهمگنی مغناطیسی b ، که $B=0$ و $T=1$ است.

متوجه می شویم که با افزایش مقدار ناهمگنی مغناطیسی در قسمت منفی، ابتدا تلاقی به یک نقطه بیشینه می‌رسد سپس به صفر رسیده و با رفتن به سمت قسمت مثبت مجددا به حداکثر مقدار خود رسیده و سپس کاهش می‌یابد. به عبارتی نمودار متقارن است. در این نمودار $c(\rho_{23})$ که با رنگ سبز مشخص شده است دارای بیشترین مقدار درهم‌تنیدگی حرارتی است بعد از آن به ترتیب $c(\rho_{12})$ با رنگ آبی و $c(\rho_{13})$ با رنگ قرمز قرار گرفته‌اند.

تشابه رفتاری در درهم‌تنیدگی‌های $c(\rho_{12})$ و $c(\rho_{23})$ نکته‌ای است که انتظار آن را داشتیم و آنچه تفاوت بین این دو درهم‌تنیدگی حرارتی کوانتومی را ایجاد می‌کند ، مقدار ناهمگنی میدان مغناطیسی یعنی b است.

از طرفی می‌توان مقدار درهم‌تنیدگی حرارتی بین کیوبیت‌های غیرمجاور یعنی $c(\rho_{13})$ را با تغییر پارامترهای قابل کنترل تحت‌تاثیر قرار داد تا نسبت به درهم‌تنیدگی کیوبیت‌های مجاور مقدار بزرگ‌تری اختیار کند.

مقایسه درهم تنیدگی حرارتی و زمانی

می‌دانیم که سیستم‌های کوانتومی با محیط اطراف برهم‌کنش می‌کنند که موجب عدم همدوسی آن می‌شود. یکی از راه‌حل‌ها این است که معادله شرودینگر را به نحوی تغییر دهیم که این همدوسی به‌طور خودکار با تکامل سیستم کوانتومی از بین برود ، که این را اثر ناهمدوسی ذاتی می‌گویند . نام همدوسی ذاتی توسط تقریب مارکوی بررسی می‌شود . در مرجع [15]، زنجیره اسپینی سه کیوبیتی با این نوع ناهمدوسی ذاتی درنظر گرفته شده و تغییرات درهم‌تنیدگی بین جفت کیوبیت‌ها بررسی شده است. تکامل زمانی عملگر چگالی برای سیستم مورد نظر ما به‌صورت زیر است:

$$\rho(t)=\sum_{mn} exp[-\frac{\gamma t}{2}(E_m-E_n)^2-i(E_m-E_n)t] \langle\Psi_m|\rho(0)|\Psi_n\rangle|\Psi_m\rangle\langle\Psi_n| \qquad (۱۶)$$

γ در رابطه بالا نرخ ناهمدوسی ذاتی است که براساس ویژه مقادیر و ویژه بردارهای داده شده در روابط (۸) و (۹) نوشته شده‌است . برای محاسبه درایه‌های ماتریس چگالی از رابطه(8)، (9) و (16) استفاده می‌شود و همچنین برای محاسبه درهم‌تنیدگی زمانی از رابطه (4) بهره برده می‌شود، که این محاسبات در مرجع [15] انجام گرفته است.

اگر تلاقی را بر حسب تغییرات زمانی بررسی کنیم، متوجه می‌شویم که با افزایش زمان، به‌صورت نوسانی کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش میدان مغناطیسی، تلاقی افزایش و سپس کاهش می‌یابد و این رفتار را تکرار می‌کند. در واقع برای کیوبیت‌های اول و دوم، میدان مغناطیسی B می‌تواند به کمک مقدار ناهمگنی میدان بیاید تا تلاقی زمانی را افزایش دهد. نهایتا درهم-تنیدگی زمانی ممکن است با افزایش ناهمگنی میدان مغناطیسی افزایش و سپس کاهش یابد. با مقایسه می‌توان مشابهت‌هایی بین درهم‌تنیدگی حرارتی و زمانی در رفتار سیستم که برحسب میدان مغناطیسی B و ناهمگنی b تغییر می‌کند پیدا کرد . همچنین با کنترل میدان مغناطیسی و ناهمگنی مربوط به آن می‌توان هر دو درهم‌تنیدگی را تحت کنترل داشت . به‌علاوه در تلاقی زمانی متوجه می‌شویم که میدان مغناطیسی غیریکنواخت می‌تواند تلاقی $\boldsymbol{c(\rho(t)_{13})}$ را تا حد زیادی افزایش دهد که در دو مورد دیگر امکان‌پذیر نیست. همچنین میدان مغناطیسی می‌تواند به مقدار ناهمگنی میدان مغنایسی کمک کند که برای تلاقی کیوبیت‌های اول و دوم صادق است. به‌طریق مشابه در درهم‌تنیدگی کوانتمی حرارتی متوجه شدیم، $\mathbf{c(\rho(T)_{13})}$ را می‌توان با تغییر پارامترهای متغیر مانند میدان مغناطیسی و مقدار

ناهمگنی میدان افزایش داد و به مقدار بزرگتری نسبت به دو مورد دیگر رساند. در حالت کلی در تلاقی زمانی، میدان مغناطیسی غیریکنواخت برای $c(\rho(t)_{13})$ مفیدتر است.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه، درهم‌تنیدگی حرارتی را زمانی که تحت یک میدان مغناطیسی غیریکنواخت هست برای زنجیره سه کیوبیت بررسی کردیم. از طریق هامیلتونی داده شده و همچنین با استفاده از محاسبات ریاضی درهم‌تنیدگی حرارتی به‌دست آمد. به‌طور خلاصه ، در سه موردی که برای درهم‌تنیدگی حرارتی $c(\rho_{12})$ ، $c(\rho_{23})$ و $c(\rho_{13})$ بررسی شد با افزایش میدان مغناطیسی درهم‌تنیدگی حرارتی کاهش می‌یابد. برای درهم‌تنیدگی حرارتی بر حسب دما هم همچون مورد قبل با افزایش دما، همبستگی کوانتومی بین کیوبیت‌ها کاهش می‌یابد. تغییرات درهم‌تنیدگی جفت کیوبیت‌های سیستم بر حسب مقدار ناهمگنی میدان مغناطیسی b نیز به‌همین صورت است و ما متوجه شدیم که درهم‌تنیدگی حرارتی $c(\rho_{12})$ و $c(\rho_{23})$ بر حسب سه پارامتر در محدوده بررسی شده همچون یکدیگر رفتار می‌کنند و آنچه موجب تمایز آن‌ها می‌شود مقدار ناهمگنی میدان مغناطیسی است. همچنین درهم‌تنیدگی حرارتی $c(\rho_{13})$ که با پارامترهایی که قابل تغییر هستند، قابل کنترل است و می‌توان مقدار آن را طوری تغییر داد که نسبت به درهم‌تنیدگی حرارتی $c(\rho_{12})$ و $c(\rho_{23})$ افزایش یابد.

منابع و مراجع

[1] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau, R. Jozsa, A. Peres, and K. Wooters, Phys. Rev. Lett. 70, 1895 (1993)

[2] A. K. Ekert, Phys. Rev. Lett. 67, 661 (1991).

[3] S. Hill and W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 78, 5022 (1997).

[4] W. K. Wootters, Phys. Rev. Lett. 80, 2245 (1998).

[5] M. Murao, D. Jonathan, M. B. Plenio, and V. Vedral, Phys. Rev. A59, 156 (1999).

[6] M. C. Arnesen, S. Bose, and V. Vedral, Phys. Rev. Lett. 87, 017901 (2001).

[7] X. G. Wang, Phys. Rev. A64, 012313 (2001).

[8] M. C. Arnesen, S. Bose, and V. Vedral, Phys. Rev. Lett. 87, 017901 (2001).

[9] G. L. Kamta and A. F. Starace, Phys. Rev. Lett. 88, 107901 (2002).

[10] Osterloh A, Amico L, Falci G and Fazio R 2002 Nature

[11] Y. Sun, Y. G. Chen, and H. Chen, Phys. Rev. A68, 044301 (2003).

[12] U. Glaser, H. B¨uttner, and H. Fehske, Phys. Rev. A68, 032318 (2003), quant-ph/0305108.

[13] L. F. Santos, G. Rigolin and C. O. Escobar, Phys. Rev. A69, 042304 (2004).

[14] Guo-Feng Zhang, Shu-Shen Li. Phys. Rev. A 72, 034302 (2005)

[15] Guo-Feng Zhang. Physical Review A 75, 034304 (2007)

[16] Yue Zhou, Guo-Feng Zhang. The European Physical Journal D volume 47, pages227–231 (2008)

[17] Horodecki R, Horodecki P, Horodecki M and Horodecki K 2009 Rev. Mod. Phys.

[18] Jin-Liang Guo, He-Shan Song. Physica A 388 (2009) 2254–2261

[19] Tomotaka Kuwahara, Naomichi Hatano. Phys. Rev. A 83, 062311 (2011)

[20] Onofre Rojas, M Rojas, N. S. Ananikian and S. M. de Souza. Phys. Rev. A 86, 042330 (2012)

[21] Raphael Fortes, Gustavo Rigolin. Phys. Rev. A 96, 022315 (2017)

[22] Mohammad Reza Pourkarimi, Vol. 16, No. 7 (2018) 1850057

[23] Youssef Khedif, Mohammed Daoud, El Hassan Sayouty. Phys. Scr. 94 (2019) 125106

[24] DaeKil Park. Quantum Information Processing volume 18, Article number: 172 (2019)

[25] Abdel-Aty Abdel-Haleem, Khedr Ahmad N, Khedr Ahmad N, Saddeek Yasser B. Thermal Science 2020 Volume 24, Issue Suppl. 1 (2020)

[26] L. S. Lima. Journal of Low Temperature Physics volume 198, pages241–251 (2020)

[27] Youssef Khedif, Mohammed Daoud. Vol. 36, No. 11, 2150074 (2021)