

Research Paper



Non-classicality Features and Incomplete Information of the Anharmonic Oscillator with Perturbed Potential in Real Representations of the Quantum Phase Space



Parvin Sadeghi *¹



This paper is an open access and licensed under the CC BY NC license.



DOI: 10.22034/STRAP.2023.15720

Reference to this article: Sadeghi, P. (2023). Non-classicality features and incomplete information of the anharmonic oscillator with perturbed potential in real representations of the quantum phase space. *Scientific Researches in Theoretical and Applied Physics*, 1(1), 17-26.

Keywords

Quantum phase-space;
Anharmonic oscillator;
Non-classicality
indicator; Quantum
Tsallis entropy;
Wigner function;
Husimi function;
Rivier function

Received: 2022/08/12

Accepted: 2022/12/21

Available: 2023/06/10

ABSTRACT

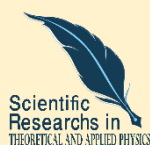
In this paper, we study the non-classicality characteristic of the anharmonic oscillator created with the fourth and sixth-order perturbed potential by using the non-classicality indicator introduced by Sadeghi et. al. in the real representations of Wigner, Husimi and Rivier are shown that the non-classicality behavior of the system is the same in all three representations and with the increase of the anharmonic parameter, the non-classicality feature of the system increases. Also, using the Tsallis entropy in the quantum phase space with the help of the nonextensivity parameter based on the probability distribution functions of Wigner and Husimi. According to the non-extensivity parameter, β , unequal to 1, it is evident that the obtained information from the state under consideration is not complete in the Wigner and Husimi representations and some information using both probability distribution functions is unavailable. The values of the nonextensivity parameters of entropy in all three representations show that the extracted information in the Wigner and Rivier representations is more than the information appearing in the Husimi representation.

* Corresponding Author: Parvin Sadeghi

E-mail: psadeghi@tabrizu.ac.ir

1. Marand faculty of Engineering, University of Tabriz, Tabriz, Iran

مقاله پژوهشی



ویژگی‌های غیرکلاسیکی و ناکامل بودن اطلاعات نوسانگر ناهماهنگ با پتانسیل اختلالی در نمایش‌های حقیقی در فضای فاز کوانتومی



پروین صادقی*^۱



این مقاله به صورت دسترسی باز و با لایسنس CC BY NC کپی‌رایت کاملاً قابل استفاده است.



ارجاع به این مقاله: صادقی، پروین. (۱۴۰۱). ویژگی‌های غیرکلاسیکی و ناکامل بودن اطلاعات نوسانگر

ناماهنگ با پتانسیل اختلالی در نمایش‌های حقیقی در فضای فاز کوانتومی. پژوهش‌های علمی در فیزیک نظری و کاربردی ۱(۱): ۱-۴.

DOI: 10.22034/STRAP.2023.15720



چکیده

در این مقاله، ویژگی غیرکلاسیکی نوسانگر ناهماهنگ ایجاد شده با پتانسیل اختلالی مرتبه چهارم و ششم با استفاده از پارامتر غیرکلاسیکی معرفی شده توسط صادقی و همکارانش در نمایش‌های حقیقی ویگنر، هوسیمی و ریویر بررسی شده و نشان داده می‌شود که در هر سه نمایش رفتار غیرکلاسیکی سیستم یکسان بوده و با افزایش پارامتر ناهماهنگی ویژگی غیرکلاسیکی سیستم افزایش می‌یابد. همچنین، بر اساس آنتروپی تسالیس در فضای فاز کوانتومی با کمک پارامتر نافزونوری مطرح شده در آنتروپی تسالیس بر اساس نمایش ویگنر و هوسیمی، با توجه به این که $\beta \neq 1$ ، مشخص می‌شود که اطلاعات به دست آمده از سیستم بررسی شده در این مقاله در نمایش‌های ویگنر و هوسیمی کامل نمی‌باشد و برخی اطلاعات با استفاده از هر سه تابع توزیع احتمالاتی غیرقابل دسترس است. با مقایسه پارامتر نافزونوری در آنتروپی مشاهده شد که میزان اطلاعات کسب شده از نمایش ویگنر و ریویر نسبت به میزان اطلاعات به دست آمده از نمایش هوسیمی بیشتر است.

کلیدواژه‌ها

فضای فاز کوانتومی، توابع توزیع حقیقی، نوسانگر ناهماهنگ، شاخص غیرکلاسیکی، آنتروپی کوانتومی تسالیس، تابع ویگنر، تابع هوسیمی، تابع ریویر

دریافت شده: ۱۴۰۱/۰۵/۲۱

پذیرفته شده: ۱۴۰۱/۰۹/۳۰

منتشر شده: ۱۴۰۲/۰۳/۲۰

* نویسنده مسئول: پروین صادقی

رایانامه: psadeghi@tabrizu.ac.ir

۱- دانشکده فنی و مهندسی مرند، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

در زمینه اپتیک کوانتومی در برخی از سیستم‌های نوری ویژگی‌های کوانتومی ناشی از پدیده‌های غیرخطی منجر به ظهور مفهوم غیر کلاسیکی شده‌اند که حالت‌هایی را مشخص می‌کند که اثرات آنها با نور کلاسیک قابل توصیف نیست [۱]. همان‌طور که از طریق آزمایش‌های اخیر با یون‌های به دام افتاده [۲،۳] و کیوبیت‌های ابرسانا [۴] نشان داده شده است، آمار غیر کلاسیک منبع بسیار مهمی برای سنجش کوانتومی است [۵]. در برخی از آزمایش‌ها با در نظر گرفتن ویژگی غیرخطی در پتانسیل نوسانگر هماهنگ خصلت غیر کلاسیکی در حالت‌های ایجاد شده آشکار می‌شود. به ویژه برای سیستم‌های مکانیک نوری [۶]، درهم‌تنیدگی نوسانگرهای غیرخطی [۷]، تشدید کننده‌های نانو مکانیکی [۸]. با ایجاد ویژگی غیرخطی متوسط در یک سیستم شامل کیوبیت و نوسانگر می‌توان درهم‌تنیدگی کوانتومی را تقویت و تثبیت نمود [۹]. همچنین در مرجع [۱۰] افزایش عملکرد خنک کننده‌های کوانتومی با استفاده از ویژگی غیرخطی پتانسیل نوسانگر بررسی شده است.

با توجه به اهمیت پتانسیل‌های غیرخطی نوسانگر در این مقاله، به ارتباط ما بین میزان غیر کلاسیکی بودن حالت پایه نوسانگر هماهنگ در حضور اختلال غیرخطی ایجاد شده در پتانسیل این حالت با پارامتر ناهماهنگی پرداخته خواهد شد. از آن جایی که حالت پایه نوسانگر هماهنگ نزدیکترین حالت به حالت کلاسیکی هست و در فضای فاز کوانتومی با نمایش ویگنر همیشه مثبت است، بنابراین با اختلال ایجاد شده در پتانسیل نوسانگر هماهنگ در صورت ایجاد رفتار غیر کلاسیکی در این حالت، تابع توزیع ویگنر در بعضی از نقاط فضای فاز مقدار منفی به دست خواهد آورد، که با برخی از شاخص‌ها مانند δ که در مقاله [۱۱] معرفی شده است، میزان منفی بودن تابع توزیع ویگنر مشخص می‌شود. با توجه به این‌که، در این مقاله علاوه بر نمایش ویگنر، از نمایش‌های حقیقی هوسیمی^۲ و ریوبر^۴ استفاده خواهد شد و از طرفی، در نمایش هوسیمی که برای همه حالت‌ها این تابع توزیع همیشه مثبت است پارامتر δ کارایی ندارد، بنابراین از شاخص η استفاده می‌شود، که بر اساس مفهوم تداخل بنا نهاده شده است و در نمایش‌های فضای فاز کوانتومی حقیقی مورد بررسی کاربرد دارد [۱۲]. در ادامه با استفاده از آنتروپی کوانتومی تسالیس^۵ که بر اساس توابع توزیع حقیقی در فضای فاز کوانتومی تعریف شده است [۱۴]، به میزان اطلاعات کسب شده از طریق نمایش‌های ویگنر، هوسیمی و ریوبر برای این حالت پرداخته می‌شود. در بخش بعد شاخص η به عنوان شاخص مورد استفاده در این مقاله معرفی می‌شود. در بخش سوم، آنتروپی تسالیس در فضای فاز کوانتومی معرفی می‌شود. در بخش چهارم، حالت پایه و اولین حالت برانگیخته ایجاد شده توسط پتانسیل غیرخطی با استفاده از اختلال‌های مرتبه چهارم و ششم پرداخته می‌شود و رفتار غیر کلاسیکی این حالت بررسی می‌شود. در بخش پنجم، با استفاده از پارامتر نافزونوری آنتروپی

تسالیس در فضای فاز کوانتومی میزان اطلاعات به دست آمده از نمایش ویگنر، هوسیمی و ریوبر برای حالت‌های حاصل شده در بخش چهارم مورد بررسی قرار می‌گیرد. بخش آخر نیز به نتیجه‌گیری اختصاص خواهد یافت.

شاخص‌های غیر کلاسیکی در فضای فاز کوانتومی

شاخص غیر کلاسیکی δ با استفاده از مقدار منفی تابع توزیع ویگنر در فضای فاز کوانتومی به صورت

$$\delta = \int_{-\infty}^{\infty} [|W(q, p)| - W(q, p)] dq dp \quad (1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} W(q, p) dq dp - 1$$

تعریف شده است [۱۱]. در این عبارت q و p مختصه مکان و تکانه تعمیم یافته می‌باشد.

با توجه به این‌که این شاخص بر اساس مقدار منفی تابع توزیع ویگنر تعریف شده است، در نمایشی مانند هوسیمی که برای همه حالت‌ها همیشه مثبت است کاربرد ندارد. همچنین در نمایش ریوبر که تابع توزیع در بعضی مناطق مقدار منفی دارد رفتار شاخص δ با نمایش ویگنر یکسان نیست [۱۲]. اصولاً همه توابع توزیع از این لحاظ که شامل کل اطلاعات کمیات فیزیکی سیستم مورد بررسی هستند، معادل هم می‌باشند. معمولاً توابع توزیعی برای حل مسئله انتخاب می‌شود که باعث آسانی در پیش‌برد حل مسئله شود و در برخی مواقع انتخاب تابع توزیع خاص برای سادگی حل مسئله صورت می‌گیرد. برای حل مسائل برخورد اغلب استفاده از تابع توزیع ویگنر و برای بررسی سیستم‌های آشوبناک نیز اغلب از تابع توزیع هوسیمی استفاده می‌شود [۱۳]. بنابراین ویژگی غیر کلاسیکی حالت‌ها مربوط به طبیعت آن حالت‌ها است و نباید با انتخاب نمایش متفاوت رفتار این ویژگی‌ها تغییر یابد.

همچنین تفاوت در رفتار شاخص‌های غیر کلاسیکی مختلف در توابع توزیع متفاوت ناشی از نوع تعریف شاخص است و نباید به انتخاب تابع توزیع نسبت داده شود. بنابراین در سال ۲۰۱۰ شاخص غیر کلاسیکی η توسط صادقی و همکارانش [۱۲] به صورت

$$\eta = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} [|F_{ij}(q, p)| - F_{ij}(q, p)] dq dp}{\int_{-\infty}^{\infty} [|F_{ij}(q, p)| + F_{ij}(q, p)] dq dp} \quad (2)$$

معرفی شد. این شاخص بر اساس ویژگی‌های تداخلی حالت کوانتومی تعریف شده است. رفتار غیر کلاسیکی شاخص فوق برای برخی حالت‌های بررسی شده در نمایش‌های حقیقی ویگنر، هوسیمی و ریوبر رفتار مشابه دارد [۱۲].

در ادامه از شاخص η برای بررسی رفتار غیر کلاسیکی حالت مورد نظر در نمایش‌های حقیقی استفاده می‌شود.

آنتروپی تسالیس در فضای فاز کوانتومی

ω^5 و ω^3 هستند [۸، ۱۰، ۱۹]. از آنجایی که این مدل دقیقاً قابل حل نیست، ویژگی‌های سیستم حاصل با استفاده از نظریه اختلال بررسی می‌شود. در ادامه، حالت پایه برای بررسی انتخاب شده است زیرا، حالت پایه نوسانگر هماهنگ مانند حالت همدوس نزدیک‌ترین حالت به کلاسیک است و در نمایش ویگنر مثبت است. حالتی که در هامیلتونی رابطه بالا صدق می‌کند

$$|\Psi\rangle = \sum_{n=0}^3 \gamma_{2n} |2n\rangle \quad (6)$$

است، که $|n\rangle$ حالت عددی نوسانگر هماهنگ و γ_{2n} ضرایب بهنجار هستند. با استفاده از مرتبه اول نظریه آشفتگی مستقل از زمان، حالت اختلالی n ام به صورت

$$|\Psi\rangle = |n\rangle + \lambda \sum_{k \neq n} \frac{V_{kn}}{E_k - E_n} |k\rangle \quad (7)$$

است که $V = \lambda_4 q^4 + \lambda_6 q^6$ و $V_{kn} = \langle n^{(0)} | V | k^{(0)} \rangle$ با اختلال وارد شده به نوسانگر هماهنگ رابطه (۷) برای حالت پایه به رابطه (۸) تبدیل می‌شود، که ضرایب بهنجار

$$c = \frac{\sqrt{96 + 117\lambda_4^2 + 945\lambda_4\lambda_6 + 2055\lambda_6^2}}{4\sqrt{6}} \quad (9)$$

$$\gamma_0 = \frac{1}{c} \quad (10)$$

$$\gamma_2 = -\frac{\gamma_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{45\lambda_6}{4} + 3\lambda_4 \right) \quad (11)$$

$$\gamma_4 = -\gamma_0 \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{15\lambda_6}{2} + \lambda_4 \right) \quad (12)$$

$$\gamma_6 = -\sqrt{5}\gamma_0\lambda_6 \quad (13)$$

هستند.

حال، برای بررسی ویژگی‌های غیرکلاسیکی رابطه (۸)، این حالت در نمایش ویگنر نوشته می‌شود. تعریف تابع توزیع ویگنر به صورت [۱]

$$W(q, p) = 2Tr[\hat{\rho}\hat{D}(\alpha)(-1)^{\hat{a}^\dagger\hat{a}}\hat{D}^{-1}(\alpha)] \quad (14)$$

است، که $\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a})$ عملگر جابجایی با عملگرهای نردبانی $\hat{a} = 1/\sqrt{2}(\hat{q} + i\hat{p})$ و $\hat{a}^\dagger = 1/\sqrt{2}(\hat{q} - i\hat{p})$ هست، و از آن جایی که تابع چگالی از رابطه (۸)

$$\begin{aligned} \langle m | \hat{D}(\alpha) | n \rangle &= (\langle m | \hat{D}(\alpha) | n \rangle)^* \\ &= \left(\frac{n!}{m!}\right)^{1/2} \alpha^{m-n} e^{-|\alpha|^2/2} L_n^{m-n}(|\alpha|^2) \end{aligned} \quad (15)$$

آنتروپی یکی از مفاهیم اساسی در ترمودینامیک و مکانیک آماری کلاسیک است. همچنین در مکانیک کوانتومی، این مفهوم کاربردهای وسیعی دارد [۱۵]. اولین بار وهرل^۶ در فضای فاز کوانتومی با استفاده از تابع توزیع هوسیمی که همیشه مثبت است آنتروپی را به شکل

$$S_{Wehrl} = -\int H(q, p) \ln[H(q, p)] dq dp \quad (3)$$

معرفی نمود [۱۶]. با توجه به اینکه در نظریه اطلاعات کوانتومی بین میزان اطلاعات مفید، عدم قطعیت کوانتومی و آنتروپی ارتباط نزدیکی وجود دارد، از طرفی، در برخی سیستم‌ها دسترسی به اطلاعات کامل امکان‌پذیر نیست بنابراین برای بررسی این گونه سیستم‌ها از آنتروپی‌های نافزونور مانند آنتروپی تسالیس بهره برده می‌شود [۱۷]. محققین از آنتروپی کوانتومی تسالیس بر اساس ماتریس چگالی استفاده نموده و با استفاده از پارامتر نافزونوری میزان اطلاعات دریافتی از سیستم را بررسی می‌نمایند [۱۸]. همچنین، صادقی و همکارانش آنتروپی تسالیس را علاوه بر تابع توزیع هوسیمی به سایر توابع توزیع حقیقی تعمیم دادند و آنتروپی تسالیس را بر حسب توابع توزیع حقیقی در فضای فاز کوانتومی به صورت

$$S_\beta = \frac{1}{\beta-1} \left[1 - \int_{-\infty}^{\infty} |F(q, p)|^\beta dq dp \right] \quad (4)$$

تعریف نمودند [۱۴]. در آنتروپی فوق $F(q, p)$ تابع توزیع حقیقی در فضای فاز کوانتومی برای حالت مورد بررسی است و پارامتر β شاخص نافزونوری نامیده می‌شود. برای مقدار $\beta = 1$ دسترسی به همه اطلاعات سیستم امکان‌پذیر است و مقدار $\beta \neq 1$ به معنی ناکامل بودن اطلاعات در مورد سیستم تحت بررسی است. در ادامه این مقاله با بررسی آنتروپی کوانتومی تسالیس با استفاده از توابع توزیع ویگنر، هوسیمی و ریبور میزان اطلاعات استخراج شده از این نمایش‌ها برای حالت پایه و اولین حالت برانگیخته نوسانگر هماهنگ با جملات اختلالی بررسی شده است.

ویژگی غیرکلاسیکی نوسانگر ناهماهنگ

در این بخش در مورد سیستم فیزیکی نوسانگر هماهنگ یک بعدی بحث می‌شود که پتانسیل آن با جملاتی از مرتبه چهارم و ششم دچار اختلال شده است. هامیلتونی این سیستم به صورت

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2) + \lambda_4 q^4 + \lambda_6 q^6 \quad (5)$$

است، که ω فرکانس نوسان می‌باشد. با توجه به رابطه بالا پارامترهای ناهماهنگی، $\lambda_4 \leq 1$ و $\lambda_6 \leq 1$ ، به ترتیب با ابعادی متناسب با ابعاد حاصل

می‌شود، مقادیر چشم‌داشتی عملگر \hat{D} در رابطه (۱۴) روی حالت‌های عددی [۲۰]

در نمایش هوسیمی تبدیل می‌شود. همچنین نمایش ریور با استفاده از تابع حالت در نمایش مختصه مکان ($\Psi(q) = \langle q | \Psi \rangle$) و مختصه تکانه

$$\phi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dq \Psi(q) e^{-ipq} \quad (19)$$

با رابطه

$$R(q, p) = \text{Re} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Psi(q) \phi^*(p) e^{-ipq} \right] \quad (20)$$

تعریف می‌شود [۱۲]. با کمک رابطه بالا، رابطه (۸) در نمایش ریور به شکل

$$\begin{aligned} R(q, p) = \text{Re} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ipq} \right. \\ \left. [\gamma_0^2 \psi_0(q) \phi_0^*(p) + \gamma_2^2 \psi_2(q) \phi_2^*(p) \right. \\ \left. + \gamma_4^2 \psi_4(q) \phi_4^*(p) + \gamma_6^2 \psi_6(q) \phi_6^*(p) \right. \\ \left. + \gamma_0 \gamma_2 (\psi_0(q) \phi_2^*(p) + \psi_2(q) \phi_0^*(p)) \right. \\ \left. + \gamma_0 \gamma_4 (\psi_0(q) \phi_4^*(p) + \psi_4(q) \phi_0^*(p)) \right. \\ \left. + \gamma_0 \gamma_6 (\psi_0(q) \phi_6^*(p) + \psi_6(q) \phi_0^*(p)) \right. \\ \left. + \gamma_2 \gamma_4 (\psi_2(q) \phi_4^*(p) + \psi_4(q) \phi_2^*(p)) \right. \\ \left. + \gamma_2 \gamma_6 (\psi_2(q) \phi_6^*(p) + \psi_6(q) \phi_2^*(p)) \right. \\ \left. + \gamma_4 \gamma_6 (\psi_4(q) \phi_6^*(p) + \psi_6(q) \phi_4^*(p)) \right. \\ \left. + \gamma_6 \gamma_2 (\psi_6(q) \phi_2^*(p) + \psi_2(q) \phi_6^*(p)) \right) \end{aligned} \quad (21)$$

نوشته می‌شود. حال، برای بررسی رفتار غیر کلاسیکی حالت پایه مختل شده نوسانگر هماهنگ، شاخص غیر کلاسیکی η در هر سه نمایش ویگنر، هوسیمی و ریور برحسب پارامتر ناهماهنگی λ_4 به ازای پارامتر ناهماهنگی λ_6 ثابت ۰، ۰/۰۰۶ و ۰/۰۱۶ در شکل ۱ رسم شده است. با توجه به این که ویژگی غیر کلاسیکی حالت مورد نظر یک ویژگی فیزیکی هست و نباید از نمایشی به نمایش دیگر تغییر کند، انتظار می‌رود که بر اساس همه توابع توزیع رفتار شاخص غیر کلاسیکی یکسان باشد و همان‌طور که مشاهده می‌شود به ازای مقدار ثابت پارامتر ناهماهنگی λ_6 با افزایش مقدار پارامتر ناهماهنگی λ_4 مقدار شاخص غیر کلاسیکی با رفتاری مشابه در هر سه نمایش افزایش می‌یابد.

همچنین با مقایسه مقادیر به دست آمده برای شاخص غیر کلاسیکی در شکل ۱، با ثابت در نظر گرفتن پارامتر ناهماهنگی λ_4 ، با افزایش پارامتر ناهماهنگی λ_6 ، شاخص غیر کلاسیکی η افزایش می‌یابد. حال این سوال مطرح است که آیا همه اطلاعات حالت تحت بررسی با استفاده از توابع توزیع کوانتومی استخراج می‌شود؟ برای پاسخ دادن به این سوال در بخش بعد از آنتروپی کوانتومی تسالیس استفاده خواهد شد.

هستند، که $L_n^{m-n} (|\alpha|^2 = 1/2(q^2 + p^2))$ چند جمله‌ای‌های لاگر می‌باشند. برای حالت رابطه (۸) و با استفاده از روابط (۱۴) و (۱۵) تابع ویگنر به شکل

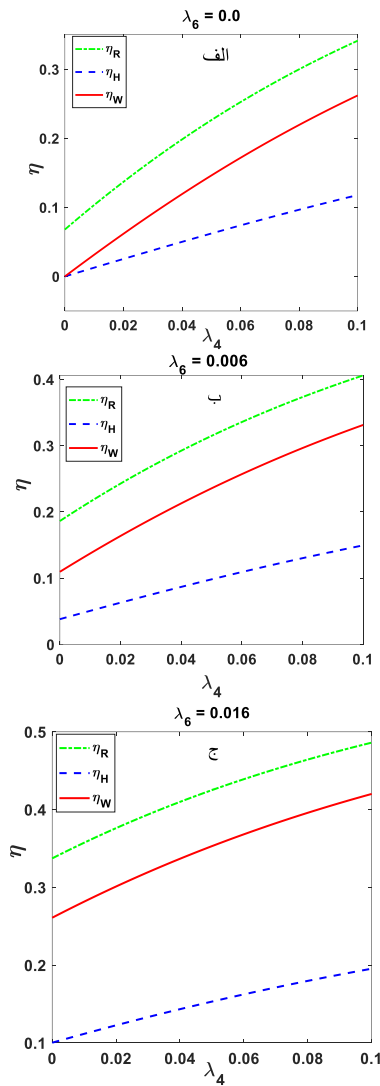
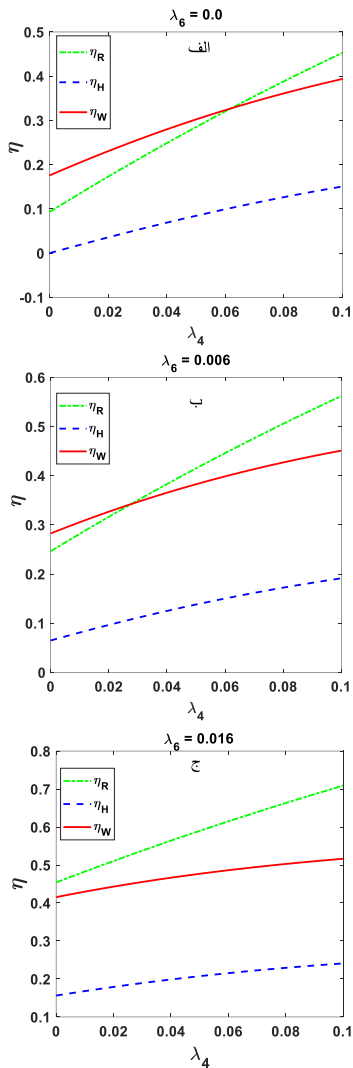
$$\begin{aligned} W(\alpha) = \frac{2}{\pi} e^{-2|\alpha|^2} [\gamma_0^2 L_0(4|\alpha|^2) \\ + \gamma_2^2 L_2(4|\alpha|^2) + \gamma_4^2 L_4(4|\alpha|^2) \\ + \gamma_6^2 L_6(4|\alpha|^2) + 4\sqrt{2}\gamma_0\gamma_2 \\ \times \text{Re}(\alpha^2) L_0^2(4|\alpha|^2) + \frac{16}{\sqrt{3}}\gamma_0\gamma_4 \\ \times \text{Re}(\alpha^4) L_0^2(4|\alpha|^2) + \frac{32}{3\sqrt{5}}\gamma_0\gamma_6 \\ \times \text{Re}(\alpha^6) L_0^2(4|\alpha|^2) + \frac{4}{\sqrt{3}}\gamma_2\gamma_4 \\ \times \text{Re}(\alpha^2) L_2^2(4|\alpha|^2) + \frac{16}{3\sqrt{10}}\gamma_2\gamma_6 \\ \times \text{Re}(\alpha^4) L_2^2(4|\alpha|^2) + \frac{8}{\sqrt{3}}\gamma_4\gamma_6 \\ \times \text{Re}(\alpha^2) L_4^2(4|\alpha|^2) \\ \times \text{Re}(\alpha^2) L_4^2(4|\alpha|^2) \end{aligned} \quad (16)$$

نوشته می‌شود. برای حالت مورد نظر در نمایش هوسیمی از هموار کردن تابع توزیع ویگنر از رابطه

$$H(q, p) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dq' dp' W(q', p') e^{-(q-q')^2 - (p-p')^2} \quad (17)$$

استفاده می‌شود [۱۳]، و رابطه (۱۶) به رابطه

$$\begin{aligned} H(q, p) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(q^2+p^2)} [\gamma_0^2 \frac{1}{2} + \gamma_2^2 \frac{1}{16} (q^2 + p^2)^2 \\ + \gamma_4^2 \frac{1}{768} (q^2 + p^2)^4 + \gamma_6^2 \frac{1}{92160} (q^2 + p^2)^6 \\ - \gamma_0 \gamma_2 \frac{\sqrt{2}}{4} (q^2 - p^2) + \gamma_0 \gamma_4 \frac{\sqrt{6}}{48} (q^4 - p^4 - 6qp) \\ + \gamma_0 \gamma_6 \frac{\sqrt{5}}{480} (q^6 - p^6 - 15q^2 p^4 + 15q^4 p^2) \\ + \gamma_2 \gamma_4 \frac{\sqrt{3}}{96} (p^2 - q^2)(p^2 + q^2)^2 + \gamma_6 \gamma_4 \frac{\sqrt{30}}{23040} \\ \times (q^2 - p^2)(p^2 + q^2)^4 + \gamma_2 \gamma_6 \frac{\sqrt{10}}{1920} (p - q + \sqrt{2}q) \\ \times (q - p + \sqrt{2}q)(q + p + \sqrt{2}q)(\sqrt{2}q - q - p) \\ \times (p^2 + q^2)^2 \end{aligned} \quad (18)$$



شکل ۴: شاخص غیرکلاسیکی η برای اولین حالت برانگیخته نوسانگر ناهماهنگ با رنگ قرمز (پیوسته) برای تابع توزیع ویگنر و رنگ آبی (خط چین) برای تابع توزیع هوسیمی و رنگ سبز (نقطه چین) در نمایش ریویز بر حسب پارامتر ناهماهنگی λ_4 که در پتانسیل ضریب اختلال مرتبه چهارم است. برای $\lambda_6 = 0.016, 0.006, 0.0$ در پتانسیل ضریب اختلال مرتبه ششم است. مشاهده می‌شود که با افزایش هر دو پارامتر ناهماهنگی مقدار شاخص غیرکلاسیکی در هر سه نمایش به طور یکسان افزایش می‌یابد.

شکل ۱: شاخص غیرکلاسیکی η برای حالت پایه نوسانگر ناهماهنگ با رنگ قرمز (پیوسته) برای تابع توزیع ویگنر و رنگ آبی (خط چین) برای تابع توزیع هوسیمی و رنگ سبز (نقطه چین) در نمایش ریویز بر حسب پارامتر ناهماهنگی λ_4 که در پتانسیل ضریب اختلال مرتبه چهارم است. برای مقادیر $\lambda_6 = 0.016, 0.006, 0.0$ در پتانسیل ضریب اختلال مرتبه ششم است. مشاهده می‌شود که با افزایش هر دو پارامتر ناهماهنگی مقدار شاخص غیرکلاسیکی در هر سه نمایش به طور یکسان افزایش می‌یابد.

برای اولین حالت برانگیخته مختل شده با استفاده از مرتبه اول نظریه آشتفتگی مستقل از زمان، مشابه رابطه (۸)، رابطه

$$|\Psi\rangle = \gamma_1 |1\rangle + \gamma_3 |3\rangle + \gamma_5 |5\rangle + \gamma_7 |7\rangle \quad (22)$$

به دست می‌آید که ضرایب بهنجار

$$c = \frac{\sqrt{64 + 630\lambda_4^2 + 6930\lambda_4\lambda_6 + 19985\lambda_6^2}}{8} \quad (23)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{c} \quad (24)$$

$$\gamma_3 = -\gamma_1 \frac{\sqrt{6}}{4} \left(\frac{105\lambda_6}{4} + 5\lambda_4 \right) \quad (25)$$

$$\gamma_5 = -\gamma_1 \frac{\sqrt{30}}{8} \left(\frac{21\lambda_6}{2} + \lambda_4 \right) \quad (26)$$

$$\gamma_7 = -\gamma_1 \frac{\sqrt{35}}{4} \lambda_6 \quad (27)$$

با محاسبه تابع توزیع ویگنر، هوسیمی و ریویر در شکل ۲ شاخص غیر کلاسیکی η برحسب پارامتر ناهماهنگی λ_4 برای مقادیر ثابت ۰، ۰/۰۰۶ و ۰/۰۱۶

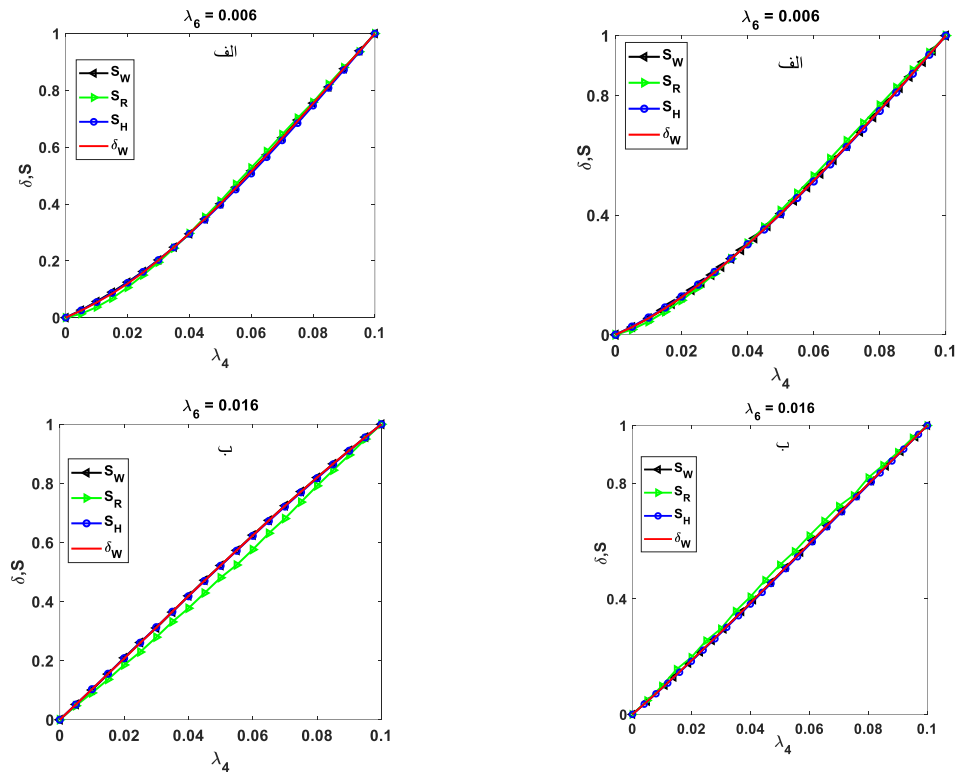
پارامتر ناهماهنگی λ_6 رسم شده است. همانند حالت پایه نوسانگر هماهنگ مختل شده در حالت برانگیخته مختل شده با افزایش پارامتر ناهماهنگی مقدار شاخص غیر کلاسیکی η به طور یکسان در هر سه نمایش افزایش می‌یابد.

از طرفی حالت همدوس و همدوس فشرده حالت‌های مهمی هستند که از برهم‌نهی پواسنی همه حالت‌های عددی ممکن (ویژه حالت‌های نوسانگر هماهنگ) با ضرایب مختلف بدست می‌آیند و بنابراین بینهایت جمله تداخلی دارند، که محاسبه دقیق تحلیلی یا عددی آن برای رسم شاخص η را با مشکل روبرو می‌سازد. اگرچه روش‌هایی برای محاسبه تقریبی آن می‌توان یافت که در گزارش‌های بعدی محقق ارائه خواهد شد.

آنتروپی تسالیس و نوسانگر ناهماهنگ

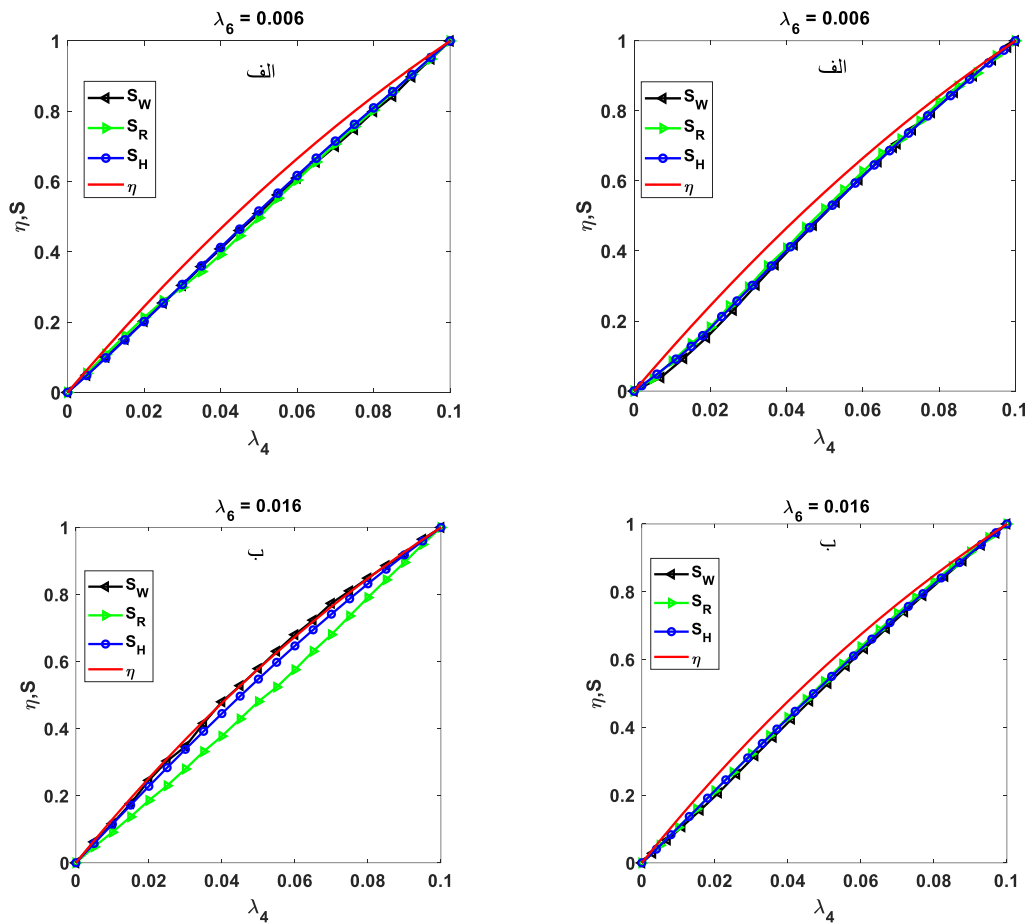
در این بخش با استفاده از آنتروپی تسالیس میزان اطلاعات به دست آمده از نمایش‌های ویگنر، هوسیمی و ریویر برای حالت‌های مطرح شده در بخش قبل بررسی می‌شود. از آن جایی که در مرجع [۱۴] رابطه مستقیم شاخص غیر کلاسیکی δ و η و عدم قطعیت بررسی شده است و از طرفی آنتروپی

نمادی از میزان عدم قطعیت می‌باشد، بنابراین ارتباط این دو شاخص امکان‌پذیر است. در شکل ۳ نمودار شاخص غیر کلاسیکی δ در نمایش ویگنر از رابطه (۱) و آنتروپی کوانتومی تسالیس با استفاده از رابطه (۴) در نمایش‌های ویگنر، هوسیمی و ریویر، برای مقادیر مختلفی از پارامتر نافزونوری β بر حسب پارامتر ناهماهنگی λ_4 به ازای مقادیر ثابت λ_6 محاسبه شده است. انتخاب پارامتر نافزونوری β مناسب برای هر یک از نمایش‌های ویگنر، هوسیمی و ریویر به انطباق نمودار شاخص غیر کلاسیکی δ در نمایش ویگنر و آنتروپی تسالیس در نمایش مورد نظر بستگی دارد. نتایج به دست آمده از طریق محاسبات عددی است، لذا بهترین انطباق به ازای مقادیر مختلف β در آنتروپی تسالیس و شاخص غیر کلاسیکی برای حالتی هست که کمترین انحراف استاندارد مابین این دو پارامتر وجود داشته باشد. همچنین برای مقایسه آسان‌تر، هر دو کمیت به ۱ بهنجار شده‌اند. با توجه به شکل ۳ برای حالت پایه مختل شده در نمایش ویگنر برای مقدار $\lambda_6 = 0.16$ ، $\lambda_4 = 0.994$ با انحراف استاندارد $10^{-5} \times 1.892 \times 6$ و برای مقدار $\lambda_6 = 0.06$ ، $\lambda_4 = 0.999$ با انحراف استاندارد $10^{-6} \times 1.433 \times 8$ و در نمایش هوسیمی برای $\lambda_6 = 0.16$ ، $\lambda_4 = 0.600$ با انحراف $10^{-6} \times 1.406 \times 1$ و برای $\lambda_6 = 0.06$ ، $\lambda_4 = 0.64$ با انحراف استاندارد $10^{-4} \times 9.292 \times 10$ است. همچنین در نمایش ریویر برای $\lambda_6 = 0.16$ ، $\lambda_4 = 0.21$ با $\beta = 0.90$ ، $\lambda_6 = 0.06$ و برای 9.230×10^{-3} با انحراف 5.425×10^{-3} است با توجه به این که پارامتر نافزونوری در هر دو نمایش کمتر از ۱ به دست آمد، مشخص می‌شود که اطلاعات حالت پایه نوسانگر ناهماهنگ ایجاد شده با جملات اختلالی در نمایش‌های ویگنر، هوسیمی و ریویر به طور کامل قابل دسترسی نیست. مقادیر پارامتر نافزونوری در هر سه نمایش گویای آن است که اطلاعات استخراج شده در نمایش ویگنر بیشتر از اطلاعات ظاهر شده در نمایش هوسیمی است. دلیل استخراج ناقص اطلاعات در هر سه نمایش این است که حالت تحت بررسی حل دقیقی از هامیلتونی مورد بحث نیست و پاسخ تقریبی این هامیلتونی است و در نمایش هوسیمی، علاوه بر دلیل یاد شده برای نمایش ویگنر و ریویر در این مثال، هموار کردن تابع ویگنر برای به دست آوردن تابع توزیع هوسیمی می‌باشد که بخش دیگری از اطلاعات را پنهان می‌کند [۱۵].



شکل ۳. آنتروپی تسالیس در فضای فاز کوانتومی برای حالت پایه نوسانگر ناهماهنگ، با استفاده از توابع توزیع ویگنر با رنگ سیاه، هوسیمی با رنگ آبی، ریویر با رنگ سبز و شاخص غیرکلاسیکی δ با رنگ قرمز در نمایش ویگنر برحسب پارامترهای ناهماهنگی λ_4 که ضریب اختلال مرتبه چهارم پتانسیل است. با مقادیر ثابت 0.006 ، 0.016 که $\lambda_6 =$ ضریب اختلال مرتبه ششم پتانسیل است. مشاهده می‌شود با انطباق شاخص غیرکلاسیکی با آنتروپی تسالیس برای پارامترهای نافزونوری متفاوت، مقادیری غیر از ۱ برای هر سه تابع توزیع به دست می‌آید که بیانگر اطلاعات ناکامل استخراج شده از نمایش‌های ویگنر و هوسیمی و ریویر برای این حالت است.

شکل ۴: آنتروپی تسالیس در فضای فاز کوانتومی برای اولین حالت برانگیخته نوسانگر ناهماهنگ، با استفاده از توابع توزیع ویگنر با رنگ سیاه، هوسیمی با رنگ آبی، ریویر با رنگ سبز و شاخص غیرکلاسیکی δ با رنگ قرمز در نمایش ویگنر برحسب پارامترهای ناهماهنگی λ_4 با مقادیر ثابت 0.006 ، 0.016 است. مشاهده می‌شود با انطباق شاخص غیرکلاسیکی δ با آنتروپی تسالیس برای پارامترهای نافزونوری متفاوت، مقادیری غیر از ۱ برای هر سه تابع توزیع به دست می‌آید.



شکل ۵: آنتروپی تسالیس در فضای فاز کوانتومی برای حالت پایه نوسانگر ناهماهنگ، با استفاده از توابع توزیع ویگنر با رنگ سیاه، هوسیمی با رنگ آبی، ریویر با رنگ سبز و شاخص غیر کلاسیکی η با رنگ قرمز برحسب پارامترهای ناهماهنگی λ_4 با مقادیر ثابت $\lambda_6 = 0.006, 0.016$ است. مشاهده می‌شود با آنتروپی تسالیس برای پارامترهای متفاوت، مقادیری غیر از ۱ برای هر سه تابع توزیع به دست می‌آید.

شکل ۶: آنتروپی تسالیس در فضای فاز کوانتومی برای اولین حالت برانگیخته نوسانگر ناهماهنگ، با استفاده از توابع توزیع ویگنر با رنگ سیاه، هوسیمی با رنگ آبی، ریویر با رنگ سبز و شاخص غیر کلاسیکی η با رنگ قرمز برحسب پارامترهای ناهماهنگی λ_4 با مقادیر ثابت $\lambda_6 = 0.006, 0.016$ است. مشاهده می‌شود با انطباق شاخص غیر کلاسیکی η با آنتروپی تسالیس برای پارامترهای نافزونوری متفاوت، مقادیری غیر از ۱ برای هر سه تابع توزیع به دست می‌آید.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله به ویژگی‌های غیرکلاسیکی حالت پایه و اولین حالت برانگیخته نوسانگر ناهماهنگ ایجاد شده با پتانسیل مختل شده مرتبه چهارم و ششم بر اساس توابع توزیع در فضای فاز کوانتومی مورد بحث قرار گرفت و با استفاده از شاخص غیرکلاسیکی η مشاهده گردید که با افزایش مقدار پارامتر ناهماهنگی λ_6 و λ_4 ، مقدار شاخص غیرکلاسیکی در هر سه نمایش با رفتار مشابه افزایش می‌یابد. همچنین، با استفاده از تعریف آنتروپی تسالیس در فضای فاز کوانتومی در نمایش‌های ویگنر، هوسیمی و ریویر در انطباق با شاخص غیرکلاسیکی δ و η میزان اطلاعات دریافتی از این حالت با استفاده از این توابع توزیع مورد بررسی قرار گرفت و نتیجه به‌دست آمده بر اساس پارامتر نافزونوری β این‌گونه بود که، در هر سه نمایش برای این حالت اطلاعات کامل استخراج نمی‌شود. و با مقایسه پارامتر نافزونوری می‌توان نتیجه گرفت که میزان اطلاعات کسب شده از نمایش ویگنر و ریویر نسبت به میزان اطلاعات به‌دست آمده از نمایش هوسیمی بیشتر است. دلیل آن هم در تقریبی بودن پاسخ هامیلتونی و علاوه بر این، نمایش هوسیمی از هموار کردن تابع توزیع ویگنر به‌دست می‌آید و باعث مخفی شدن بخشی از اطلاعات در این نمایش می‌شود. با تعمیم نتایج به دست آمده با حالت پایه و اولین حالت برانگیخته برای تمامی ترازهای نوسانگر ناهماهنگ می‌توان برای حالت همدوس مختل شده نیز این مسئله را مورد بررسی قرار داد. بررسی اثرات اختلال نوسانگر ناهماهنگ بر حالت همدوس و حالت های فشرده توسط نویسندگان در دست بررسی است که گزارش آن در آینده ارائه خواهد شد.

نتایج مشابهی از انطباق شاخص غیرکلاسیکی δ برای آنتروپی تسالیس اولین حالت برانگیخته نوسانگر ناهماهنگ در نمایش ویگنر، هوسیمی و ریویر حاصل می‌شود. در شکل ۴ در نمایش ویگنر برای مقادیر 0.06 و 0.16 $\lambda_6 = 0.99$ ، $\beta = 0.99$ با انحراف استاندارد 1.579×10^{-3} و 8.22×10^{-4} و در نمایش هوسیمی برای 0.16 $\lambda_6 = 0.34$ ، $\beta = 0.34$ با انحراف استاندارد 8.14×10^{-4} و برای 0.06 $\lambda_6 = 0.50$ ، $\beta = 0.50$ با انحراف استاندارد 2.267×10^{-3} است و در نمایش ریویر برای مقادیر 0.06 و 0.16 $\lambda_6 = 0.54$ ، $\beta = 0.54$ و 0.50 ، $\beta = 0.50$ با انحراف استاندارد 6.107×10^{-3} و 5.11×10^{-3} است.

از انطباق شاخص غیرکلاسیکی η و آنتروپی تسالیس در نمایش ویگنر، هوسیمی و ریویر برای حالت پایه و اولین حالت برانگیخته نوسانگر ناهماهنگ به ترتیب در شکل ۵ و ۶ نتایجی همانند انطباق شاخص غیرکلاسیکی δ و آنتروپی تسالیس به‌دست می‌آید. در شکل ۵ برای حالت پایه در نمایش ویگنر برای مقدار 0.16 $\lambda_6 = 0.40$ ، $\beta = 0.40$ با انحراف استاندارد 2.492×10^{-2} و برای مقدار 0.06 $\lambda_6 = 0.30$ ، $\beta = 0.30$ با انحراف استاندارد 1.959×10^{-2} و در نمایش هوسیمی برای هر دو مقدار 0.16 و 0.06 $\lambda_6 = 0.20$ ، $\beta = 0.20$ با انحراف استاندارد 1.512×10^{-2} و 1.137×10^{-2} و در نمایش ریویر برای مقدار 0.16 $\lambda_6 = 0.90$ ، $\beta = 0.90$ با انحراف استاندارد 1.589×10^{-2} و برای مقدار 0.06 $\lambda_6 = 0.20$ ، $\beta = 0.20$ با انحراف استاندارد 1.976×10^{-2} است. در شکل ۶ برای اولین حالت برانگیخته نوسانگر ناهماهنگ با انطباق شاخص غیرکلاسیکی η و آنتروپی تسالیس در نمایش ویگنر برای مقدار 0.16 $\lambda_6 = 0.10$ ، $\beta = 0.10$ با انحراف استاندارد 1.205×10^{-2} و برای مقدار 0.06 $\lambda_6 = 0.20$ ، $\beta = 0.20$ با انحراف استاندارد 2.173×10^{-2} است. در نمایش هوسیمی برای هر دو مقدار 0.16 و 0.06 $\lambda_6 = 0.10$ ، $\beta = 0.10$ با انحراف استاندارد 2.025×10^{-2} و 2.558×10^{-2} و در نمایش ریویر برای 0.16 $\lambda_6 = 0.53$ ، $\beta = 0.53$ با انحراف استاندارد 3.37482×10^{-2} و برای مقدار 0.06 $\lambda_6 = 0.32$ ، $\beta = 0.32$ با انحراف استاندارد 1.0^{-2} 2.388×10^{-2} است. با بررسی مقدار پارامتر نافزونوری β ، در همه موارد اطلاعات استخراج شده در نمایش ویگنر، هوسیمی و ریویر کامل نیست.

- Technology* **2** (2015). DOI [10.1140/epjqt/s40507-015-0029-x](https://doi.org/10.1140/epjqt/s40507-015-0029-x)
- [9] V. Montenegro, A. Ferraro, S. Bose, Nonlinearity-Induced Entanglement Stability in a Qubit-Oscillator System, *Physical Review A* **90** (2014) 013829. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.90.013829>
- [10] S. Karar, S. Datta, S. Ghosh, A.S. Majumdar, Anharmonicity can enhance the performance of quantum refrigerators, *arxiv*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1902.10616>
- [11] A. Kenfack, K. Zyczkowski, Negativity of the Wigner function as an indicator of non-classicality, *Journal of Optics B: Quantum and Semiclassical Optics* **6** (2004) 396. <https://doi.org/10.1088/1464-4266/6/10/003>
- [12] P. Sadeghi, S. Khademi, S. Nasiri, Nonclassicality indicator for the real phase-space distribution functions, *Physical Review A* **82** (2010) 012102. [10.1103/PhysRevA.82.012102](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.82.012102)
- [13] H. Lee, Theory and application of the quantum phase-space distribution functions, *Physics Reports* **259** (1995) 147-211. [https://doi.org/10.1016/0370-1573\(95\)00007-4](https://doi.org/10.1016/0370-1573(95)00007-4)
- [14] P. Sadeghi, S. Khademi, A.H. Darooneh, Tsallis entropy in phase-space quantum mechanics, *Physical Review A* **86** (2012) 012119. [10.1103/PhysRevA.86.012119](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.86.012119)
- [15] V.V. Dodonov, A.S.M. de Castro, S.S. Mizrahi, Covariance entanglement measure for two-mode continuous variable systems, *Physical Letters A* **296** (2002) 73-81. [https://doi.org/10.1016/S0375-9601\(02\)00254-2](https://doi.org/10.1016/S0375-9601(02)00254-2)
- [16] A. Wehrl, On the relation between classical and quantum-mechanical entropy, *Reports on Mathematical Physics* **16** (1979) 353-358. [https://doi.org/10.1016/0034-4877\(79\)90070-3](https://doi.org/10.1016/0034-4877(79)90070-3)
- [17] C. Tsallis, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, *Journal of Statistical Physics* **52** (1988) 479-487. <https://doi.org/10.1007/BF01016429>
- [18] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics*, Springer, New York, (2008). <https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-387-85359-8>
- [19] L. Latmiral, F. Armata, M.G. Genoni, I. Pikovski, M.S. Kim, Probing anharmonicity of a quantum oscillator in an optomechanical cavity, *Physical Review A* **93** (2016) 052306. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.052306>
- [20] K. Si, N. Zhu, H. Jia, Time evolution of the non-classicality for the Fock states and their superposition states by the Wigner function, *Modern Physics Letters B* **25** (2011) 1401-1415. [10.1142/S021798491102636X](https://doi.org/10.1142/S021798491102636X)
- [1] F. Albarelli, A. Ferraro, M. Paternostro, M.G.A. Paris, Nonlinearity as a resource for nonclassicality in anharmonic systems, *Physical Review A* **93** (2016) 032112. [10.1103/PhysRevA.93.032112](https://doi.org/10.1103/PhysRevA.93.032112)
- [2] J. Zhang, M. Um, D. Lv, J.N. Zhang, L.M. Duan, K. Kim, Noon states of nine quantized vibrations in two radial modes of a trapped ion, *Physical Review Letters* **121** (2018) 160502. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.121.160502>
- [3] F. Wolf, C. Shi, J.C. Heip, M. Gessner, L. Pezzè, A. Smerzi, M. Schulte, K. Hammerer, P.O. Schmidt, Motional fock states for quantum-enhanced amplitude and phase measurements with trapped ions, *Nature Communications* **10** (2019) 1-8. <https://doi.org/10.1038/s41467-019-0576-4>
- [4] W. Wang, Y. Wu, Y. Ma, W. Cai, L. Hu, X. Mu, Y. Xu, Zi-Jie Chen, H. Wang, Y.P. Song, H. Yuan, C.L. Zou, L.M. Duan, L. Sun Heisenberg-limited single-mode quantum metrology in a superconducting circuit, *Nature Communications* **10** (2019) 1-6. <https://doi.org/10.1038/s41467-019-12290-7>
- [5] L. Innocenti, L. Lachman, R. Filip, Nonclassicality detection from few Fock-state probabilities, *npj Quantum information* **8** (2022) 1-6. <https://doi.org/10.1038/s41534-022-0538-y>
- [6] J.C. Sankey, C Yang, B.M. Zwickl, A.M. Jayich, J.G.E. Harris, Strong and tunable nonlinear optomechanical coupling in a low-loss system, *Nature Physics* **6** (2010) 707-712. <https://doi.org/10.1038/nphys1707>
- [7] C. Joshi, M. Jonson, E. Andersson, P. Öhberg, Quantum entanglement of anharmonic oscillators, *Journal Of Physics B: Atomic, Molecular And Optical Physics* **44** (2011) 245503. [10.1088/0953-075/44/24/245503](https://doi.org/10.1088/0953-075/44/24/245503)
- [8] B. Teklu, A. Ferraro, M. Paternostro, M.G.A. Paris, Nonlinearity and nonclassicality in a nanomechanical resonator, *EPJ Quantum*

منابع و مراجع