

شبیه سازی عددی انتقال گرمای همرفتی اجباری نانو سیال در داخل میکرو کانال موج دار تحت میدان مغناطیسی

مهدی مسلمی*
 استادیار، موسسه آموزش عالی آیندگان، تنکابن، ایران، mehdimoslemi1982@gmail.com
 فائزه نجاتی
 استادیار، موسسه آموزش عالی آیندگان، تنکابن، ایران، civilifa_nj@yahoo.com

چکیده

در این مطالعه انتقال گرمای همرفتی اجباری جریان لایه‌ای نانو سیال آب و اکسید مس در میکرو کانال موج دار در حضور میدان مغناطیسی با استفاده از روش عددی مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات تابع جریان، انتقال گردابه و انرژی به روش تفاضل محدود گسسته سازی شده و با قراردادن شرایط مرزی توجه به شرایط مرزی مورد نظر در محیط نرم افزار فرترن حل می گردند. تاثیر پارامترهای مختلفی از جمله عدد رینولدز در محدوده ۵۰-۵۰۰، کسر حجمی ۰-۱۰٪، عدد هارتمن ۲۰-۳۰ و دامنه موج های ۰/۳-۰/۳ بر عملکرد یک میکرو کانال موج دار مورد بررسی قرار می گیرد. با توجه به نتایج به دست آمده، شکل سینوسی میکرو کانال به طور مستقیم بر انتقال گرما تاثیر گذاشته و با افزایش دامنه موج میکرو کانال عدد ناسلت افزایش می یابد. از طرفی گردابه های ایجاد شده در رینولدزهای بالا نیز سبب بهبود کارایی میکرو کانال و افزایش انتقال گرما می گردد. همچنین نتایج نشان می دهد که با افزایش عدد هارتمن، خط جریان در نزدیکی دیواره منظم تر شده و با توجه به گردادیان دمایی ایجاد شده، عدد ناسلت افزایش می یابد.

واژه های کلیدی: انتقال گرما، نانو سیال، جریان گردابی، میدان مغناطیسی، میکرو کانال موج دار، بهبود کارایی.

Numerical simulation of forced convection of nanofluids inside a wavy micro channel in the presence of magnetic field effect

M. Moslemi
 F. Nejati

Department of Mechanical Engineering, Ayandegan Institute- of- Higher Education, Tonekabon, Iran
 Department of Civil Engineering, Ayandegan Institute- of- Higher Education, Tonekabon, Iran

Abstract

In this study, numerical method of forced convection heat transfer of laminar flow of nano fluid water and copper oxide in wavy micro channel in the presence of magnetic field is investigated. The equations of flow stream function, vorticity and energy are discretized by finite difference method and are solved according to the desired boundary conditions and the development of a FORTRAN software. The effect of various parameters such as Reynolds number 50-500, volume fraction 0-10%, Hartmann number 0-20, and wave amplitude 0-0.3 was evaluated in improving the performance of a wavy micro channel. According to the presented results, the sinusoidal shape of the micro channel has a direct effect on the heat transfer and the Nusselt number increases with the increase of the micro channel wave amplitude. On the other hand, the vortices created at high Reynolds have also improved micro channel efficiency and increased heat transfer. The results showed that with increasing Hartmann number the flow line near the wall became more regular and due to the created temperature gradient, the Nusselt number increased.

Keywords: Heat transfer, nanofluid, Vorticity, magnetic field, wavy micro channel, efficiency improvement.

۱-مقدمه

استفاده از دستگاه های خنک کننده پیشرفته و بهینه، امری اجتناب ناپذیر برای حفظ عملکرد ایمن و کارآمد دستگاه های دارای قطعات میکروالکترونیک و نظیر آنها است. پیشرفت در فناوری میکرو کانال ها باعث شده که از آنها به عنوان وسایل دفع گرما در تجهیزات میکروالکترونیک استفاده شود. انتقال گرما زیاد، اندازه کوچک، نیاز به مقدار کم سیال خنک کننده از ویژگی میکرو کانال هاست. گسترش سطح دستگاه های خنک کننده با تغییر هندسه کانال های گرمای مانند موج دار کردن سطح کانال موجب تغییراتی در بازده مبادله کن های گرمای می شود. تغییر در سرعت جریان یا معلق کردن ذرات جامد در سیال نیز یکی از روش های مورد استفاده برای افزایش انتقال گرما می باشد. ایجاد میدان مغناطیسی با توجه به رژیم جریان نیز می تواند باعث افزایش یا حتی کاهش آهنگ انتقال گرما گردد. در ادامه مطالعاتی که در این زمینه انجام شده است بررسی می گردد. بیشتر تحقیقات نشان داده اند که افزودن نانو ذرات با رسانایی گرمایی نسبتاً

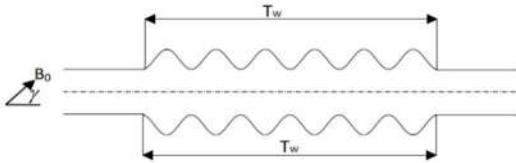
بالا به سیال پایه، موجب افزایش عملکرد گرمای نانو سیال می شود [۱]. زینلی هریس [۲] انتقال گرما جابجایی اجباری در حالت جریان لایه ای و با استفاده از نانو سیال آب- اکسید آلومینوم در کانالی با مقطع مثلثی در شرایط مرزی شار ثابت در دیواره را به صورت آزمایشگاهی مورد مطالعه قرار دادند. نتایج آنها نشان می داد که ضریب انتقال گرما آزمایشگاهی نانو سیال بیشتر از ضریب انتقال گرمای آزمایشگاهی آب خالص است و نیز این ضریب انتقال گرما بیشتر از حالت محاسبه شده در نظری است. نانو سیالات جنبه های ویژه ای دارند که آنها را کاملاً از مخلوط سیالات دوقازی که در آنها ذرات در ابعاد میکرو یا میلی متر هستند، متمایز می کنند [۳]. زرین قلم و همکاران [۴] مطالعه تجربی ای در مورد تأثیر کسر حجمی و عدد رینولدز بر ضریب انتقال گرما و افت فشار نانو سیال آب و اکسید مس داشتند. آنها دریافتند به طور کلی ضریب انتقال گرما نانو سیالات بیشتر از سیال پایه است. علاوه بر این مشاهده گردید که با افزایش کسر حجمی و عدد رینولدز، ضریب انتقال گرما و عدد ناسلت افزایش می یابد، اما میزان این افزایش در رینولدزهای پایین بیشتر مشهودتر

* نویسنده مکاتبه کننده، آدرس پست الکترونیکی: mehdimoslemi1982@gmail.com

است. چو [۵] در آزمایشگاه آرگون در ایالات متحده، نانو سیالات را تولید کرد. اوگوت و دیلکی [۶] به بررسی عددی انتقال گرما نانو سیال جریان آشفته بر روی مبادله‌کن صفحه موج‌دار دوزنقه‌ای، که شرایط مرزی در دیواره به صورت شار گرمای ثابت بود، پرداختند. با استفاده از نتایج به دست آمده دریافتند که انتقال گرما با افزایش غلظت نانو ذرات افزایش می‌یابد. علاوه بر این، آن‌ها متوجه شدند که استفاده از نانو سیال در کانال دوزنقه‌ای باعث افزایش عملکرد دستگاه‌های گرمایی می‌شود و در نتیجه به طراحی مبادله‌کن گرمایی فشرده‌تر کمک می‌کند. شهزاد و همکاران [۷] اثرات انتقال گرما همرفت آزاد نانو سیال با استفاده از مدل بنگیرنو در یک کانال موج را بررسی کردند که در آن اثرات هم‌زمان حرکت براونی و ترمودیفیوژن بحث شده است. وانگ پنگ و همکاران [۸] با استفاده از سه روش تک فاز همگن، دو فاز اوایلر-اوایلر و دو فاز اوایلر-لاگرانژ انتقال گرما در نانو سیال را مورد مطالعه قرار دادند و با نتایج تجربی مشابه مقایسه کردند. آن‌ها نشان دادند که از بین مدل‌های مورد استفاده، مدل اوایلر-لاگرانژ دقیق‌ترین تحلیل را ارائه می‌دهد، در حالی که مدل تک فاز از کمترین دقت برخوردار است. ذبیحی و همکاران [۹] مطالعه هم‌زمان آزمایشگاهی و عددی برای نانو سیال آب-اکسید آلومینیوم در حالت جریان لایه‌ای در کانال با مقطع مثلث متساوی‌الاضلاع و شار گرمای ثابت را انجام دادند که نتیجه آن افزایش آهنگ انتقال گرما با افزایش غلظت حجمی نانو ذرات بود. کانال‌هایی با صفحات غیر مسطح، به دلیل آن‌که سطح انتقال گرما را افزایش می‌دهند، کاربرد زیادی دارند از جمله کانال‌های سینوسی شکل هم باعث افزایش انتقال گرما می‌گردد و در عین حال تأثیر کمتری بر گرادیان فشار نامطلوب در طول کانال دارند. کانال‌های موج‌دار در بسیاری از کاربردهای مهندسی دیده می‌شوند [۱۰]. جای و همکاران [۱۱] با در نظر گرفتن دنده‌های مختلف در دیواره‌های جانبی کانال میزان انتقال گرما را در میکرو کانال گرمایی، افزایش داد. علاوه بر این با افزایش عدد رینولدز استفاده از دنده‌های مختلف به دلیل افزایش افت فشار در میکرو کانال، مزیت خود را به عنوان یک روش تقویت انتقال گرما مؤثر از دست می‌دهد. احمد و همکاران [۱۲] جریان نانو سیال را در یک کانال موج‌دار مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها با استفاده از روش‌های عددی و تغییر عدد رینولدز (بین ۱۰۰ تا ۴۰۰) و تغییر درصد حجمی نانو ذرات (از صفر تا ۵ درصد)، به بررسی اثر این پارامترها بر روی انتقال گرما پرداختند. ژو و همکاران [۱۳] با استفاده از روش حجم محدود و شبیه‌سازی هندسی دیواره موج‌دار به عنوان عامل اصلی بهبود راندمان انتقال گرما، بهترین نسبت طول به دامنه موج را ارائه دادند. مون و همکاران [۱۴] در مطالعه‌ای، افزایش انتقال گرما در کانال‌های موج‌دار را به صورت سه‌بعدی بررسی کردند. آن‌ها با مقیاس میکرو و چند هماهنگ در سطح مقطع مربع، با توجه بیشتر بر تأثیر هندسه سطح کانال، با استفاده از نسبت عدد ناسلت در کانال‌های موج‌دار به مستقیم، به تحلیل پارامتری آب سرد در رینولدزهای مختلف پرداختند. طراحی بهتری از چاه گرمایی میکرو کانال موج‌دار با تغییر طول موج یا دامنه در امتداد جهت جریان توسط لین و همکاران [۱۵] ارائه شده است. افزایش انتقال گرما با تشکیل گرداب‌ها، به دیواره‌های منحنی نسبت داده شده که باعث اختلاط خنک‌کننده می‌شود و انتقال گرما بین دیواره کانال با مایع خنک‌کننده را تقویت می‌کند. کیرچ و کول [۱۶]

به بررسی انتقال گرما و افت فشار در عملکرد کانال‌های موج‌دار پرداختند. با توجه به جریان ایجاد شده توسط ساختار امواج، آن‌ها نشان دادند که کانال‌های با طول موج کوتاه، کاهش فشار بالایی نسبت به کانال‌های با طول موج طولانی‌تر دارند و با افزایش طول موج عملکرد انتقال گرمایی افزایش می‌یابد. اسکولانگ و همکاران [۱۷] به صورت تجربی مطالعه‌ای بر روی انتقال گرما در یک کانال گرم‌کننده هوای خورشیدی با استفاده از شیارهای موج‌دار همراه با جفت باله‌های دوزنقه‌ای که در صفحه جاذب قرار گرفته، انجام داده‌اند. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که شیارهای موج‌دار همراه با جفت باله‌های دوزنقه‌ای افزایش قابل توجهی در انتقال گرما، نسبت به کانال صاف ایجاد می‌کند و جفت باله‌های دوزنقه‌ای به‌تنهایی انتقال گرمایی بسیار بالاتری را نشان می‌دهد اما شیار موج‌دار باعث افت قابل توجهی در فشار می‌شود. یاداو و همکاران [۱۸] مطالعه‌ای بر روی افزایش انتقال گرما در میکرو کانال با استفاده از سطح گسترده انجام داده‌اند و با مقایسه میکرو کانال مستطیل شکل و میکرو پره‌های استوانه‌ای به این نتیجه رسیده‌اند که عملکرد انتقال گرما میکرو کانال از میکرو پره‌ها بهتر است. همچنین در صورت وجود میکرو کانال‌های سطح گسترده، میانگین دمای سطح کاهش می‌یابد. میدان مغناطیسی هم بر همرفت اجباری و هم بر همرفت آزاد اثرگذار است. استفاده از میدان مغناطیسی در همرفت آزاد، باعث کاهش سرعت در نزدیکی دیواره شده و کاهش انتقال گرما می‌شود [۱۹]. ملک پور و قاسمی [۲۰] به بررسی تأثیر میدان مغناطیسی بر همرفت آزاد در یک محفظه مثلثی پرداختند. آن‌ها دریافتند که افزایش عدد هارتمن باعث کاهش سرعت سیال در محفظه مثلثی شده و انتقال گرمایی همرفتی آزاد را کاهش می‌دهد. برخلاف همرفت آزاد، در همرفت اجباری، میدان مغناطیسی باعث تخت شدن پروفیل سرعت می‌شود، این امر موجب افزایش سرعت در نزدیکی دیواره‌های کانال شده و به نوبه خود، ضریب انتقال گرما را افزایش می‌دهد. میدان مغناطیسی باعث جهت‌گیری منظم ذرات نانو سیال می‌شود و این موجب ارتباط بیشتر بین ذرات نانو می‌گردد. در نتیجه در یک جریان نانو سیال، اعمال میدان مغناطیسی مطلوب می‌تواند انتقال گرما را به‌طور چشمگیری افزایش دهد [۲۱]. امین‌فر و همکاران [۲۲] به بررسی اثر میدان مغناطیسی غیریکنواخت ناشی از جریان الکتریکی در یک سیال مغناطیسی پرداختند. آن‌ها نشان دادند که میدان مغناطیسی تا ۲۲ درصد ضریب انتقال گرما را افزایش می‌دهد و مانع ته‌نشین شدن ذرات نانو می‌شود. جواهرده و کریمی [۲۳] انتقال گرما ترکیبی سیال غیر نیوتنی همراه با اثر مغناطیسی را در سطح موج‌دار مورد بررسی قرار دادند. نتایج آن‌ها نشان می‌داد با افزایش اثر مغناطیسی عدد ناسلت و مقدار انتقال گرما افزایش می‌یابد. نور آذر و همکاران [۲۴] به صورت عددی به بررسی و تحلیل جریان نانو ذرات تحت میدان مغناطیسی بر روی یک صفحه تخت پرداختند. موتواوا و همکاران [۲۵] به صورت آزمایشگاهی به بررسی تأثیر میدان مغناطیسی بر انتقال گرما جریان لایه‌ای در یک کانال مستطیلی پرداختند. نتایج آن‌ها نشان می‌داد که اعمال میدان مغناطیسی باعث افزایش ضریب انتقال گرما شده و حداکثر ۲۰ درصد انتقال گرما را افزایش می‌دهد. سلیک [۲۶] به بررسی اثر میدان مغناطیسی بر جریان در یک کانال با سطح مقطع مستطیل پرداخت و تا عدد هارتمن ۱۰۰۰ را مورد بررسی قرار داد. علیزاده و همکاران [۲۷]

سطح موج‌دار بالا و پایین مطابق دمای T_w قرار دارند که از دمای محیط T_{∞} بیشتر می‌باشد. ابتدا و انتهای میکرو کانال به صورت صاف و بدون موج بوده که دیوار آن در این قسمت آدیاباتیک می‌باشد. دمای نانو سیال را T_0 فرض می‌گردد. جریان تحت میدان مغناطیسی یکنواخت B_0 قرار دارد به طوری که جهت میدان مغناطیسی زاویه γ را با محور افقی دارد. در این مطالعه مقدار $\gamma = \pi/4$ در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- مدل فیزیکی مسئله

معادلات تابع جریان و چرخش حاکم در این روش برای یک جریان غیرقابل تراکم، پایدار، دوبعدی به صورت زیر ارائه می‌گردد:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -\Omega \quad (2)$$

$$\bar{u} \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \Omega}{\partial y} = \frac{\mu_{nf}}{\rho_{nf}} \left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Omega}{\partial y^2} \right) + \left[\frac{\sigma_{nf}}{\rho_{nf}} B_0^2 \left(-\cos^2 \gamma \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \sin \gamma \cos \gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \sin^2 \gamma \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - \sin \gamma \cos \gamma \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \right) \right] \quad (3)$$

$$\bar{u} \frac{\partial T}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha_{nf} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

در معادلات فوق، \bar{u} و \bar{v} بردار سرعت سیال در جهت x و y ، ψ تابع جریان، ρ_{nf} چگالی، T دمای سیال و B_0 میدان مغناطیسی می‌باشند.

در معادلات بالا چگالی مؤثر لزجت دینامیکی و ظرفیت گرمایی نانو سیال به صورت زیر تعریف می‌شود. [۳۲-۳۶]:

$$\rho_{nf} = \rho_f (1 - \phi) + \rho_s \phi \quad (5)$$

$$\mu_{nf} = (1 + 2.5 \phi) \mu_f \quad (6)$$

$$(\rho C_p)_{nf} = (\rho C_p)_f (1 - \phi) + (\rho C_p)_s \phi \quad (7)$$

در این مقاله با فرض شکل کرووی برای نانو ذرات از رابطه ماکسول-گارنت برای تعیین رسانایی گرمایی استفاده شده است که به صورت زیر تعیین می‌شود [۳۷]:

$$k_{nf} = \left(\frac{k_s + 2k_f - 2\phi(k_f - k_s)}{k_s + 2k_f + \phi(k_f - k_s)} \right) k_f \quad (8)$$

همچنین رسانایی الکتریکی مؤثر نانو سیال از رابطه ماکسول به صورت زیر نوشته می‌شود [۳۸]:

$$\frac{\sigma_{nf}}{\sigma_f} = 1 + \frac{3 \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} - 1 \right) \phi}{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} + 2 \right) - \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} - 1 \right) \phi} \quad (9)$$

متغیرهای بدون بعد برای بی بعد سازی معادلات به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\omega = \frac{yL}{U_{\infty} \tau}, \psi = \frac{\psi}{U_{\infty} L}, u = \frac{\bar{u}}{U_{\infty}}, v = \frac{\bar{v}}{U_{\infty}}, x = \frac{x}{L}, y = \frac{y}{L}, \theta = \frac{T - T_{\infty}}{T - T_w}, Ha = LB_0 \sqrt{\frac{\sigma_f}{\mu_f}}, Re = \frac{\mu_f}{\nu} \quad (10)$$

که در آن Ha عدد هارتمن و Re عدد رینولدز سیال پایه است و مشخصات ترموفیزیکی سیال پایه و اکسید مس در جدول آمده است.

با بررسی انتقال گرمای همرفتی ترکیبی نانو سیال درون کانال با حفره باز دریافتند که افزودن کسر حجمی نانو ذرات در رینولدزهای پایین آهنگ انتقال گرما را بیشتر می‌کند. مسلمی و همکاران [۲۸] انتقال گرمای همرفتی طبیعی نانو سیال را در حضور میدان مغناطیسی در داخل حفره موجدار شبیه‌سازی کردند. آن‌ها دریافتند که آهنگ انتقال گرما بر روی سطح داغ در حضور میدان مغناطیسی کاهش می‌یابد. اثر میدان مغناطیسی القایی بر جریان همرفت آزاد در دیوارهای میکرو کانال عمودی نارسانا و رسانا توسط شانکار و همکاران [۲۹] مورد بررسی قرار گرفت. نتایج آن‌ها نشان می‌دهد که افزایش اعداد هارتمن و پراپرتل مغناطیسی منجر به کاهش قابل توجهی در سرعت جریان حجمی می‌شود. رشیدی و همکاران [۳۰] به بررسی انتقال گرمای همرفتی و رسانش نانو سیال در کانال عمودی با دیواره سینوسی تحت تأثیر میدان مغناطیسی پرداختند و دریافتند که با افزایش عدد گراشف برای نانو سیالات با کسر حجمی متفاوت، عدد ناسلت متوسط افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش عدد هارتمن، ناسلت متوسط افزایش می‌یابد. ولی پور و همکاران [۳۱] انتقال گرما در یک میکرو کولر که حاوی نانو سیال بود در حضور میدان مغناطیسی را شبیه‌سازی کردند. نتایج آن‌ها نیز نشان می‌داد افزایش عدد هارتمن میزان انتقال گرما و افت فشار را بیشتر می‌کند. در این مقاله انتقال گرمای همرفتی اجباری جریان لایه‌ای نانو سیال آب و اکسید مس در میکرو کانال موج‌دار در حضور میدان مغناطیسی مورد بررسی قرار گرفته است. روش حل عددی مورد استفاده بدین صورت می‌باشد که معادلات تابع جریان، انتقال گردابه و انرژی با استفاده نگاشت سطح موج‌دار به صاف تبدیل می‌شود و سپس با استفاده از روش اختلاف محدود معادلات گسسته سازی و حل می‌گردند. با در نظر گرفتن شرایط مرزی به بررسی تأثیر پارامترهایی مانند دامنه موج، کسر حجمی نانو سیال، عدد هارتمن، میدان مغناطیسی و عدد رینولدز در میکرو کانال موج‌دار پرداخته شده است. از نوآوری این مقاله می‌توان کاربرد نگاشت در میکرو کانال موج‌دار برای حل معادلات جریان گردابه نانو سیال و جداسازی معادلات به دست آمده به روش تفاضل محدود است. در انتقال گرمای همرفتی اجباری نام برد. با رسم نمودارهای ناسلت متوسط و محلی در حالت‌های مختلف این پارامترها و مقایسه آن‌ها با یکدیگر، سعی شده بهترین حالت برای افزایش انتقال گرما در یک میکرو کانال موج‌دار ارائه شود.

۲- مدل سازی مسئله

در شکل ۱ مدل فیزیکی و سیستم مختصاتی مسئله نشان داده شده است. اتلاف لزجتی ناچیز می‌باشد و در نظر گرفته نمی‌شود. مفروضات فوق طوری طراحی شده‌اند تا مدل نظری را به ساده‌ترین شکل ممکن حفظ کند. در این سیستم مختصاتی x در طول صفحات موج‌دار و در جهت جریان و y عمود بر جریان می‌باشد. معادله سطح موج‌دار صفحه بالایی به صورت زیر می‌باشد:

$$S(X) = L + \alpha \sin(\pi(\bar{x} - \bar{x}_s) / L) \quad (1)$$

که در آن L فاصله متوسط عمودی سطح موج‌دار از مرکز محفظه و α بزرگی دامنه موج می‌باشد. سطح موج‌دار پایینی به صورت $-S(X)$ است.

جدول ۱- مشخصات ترموفیزیکی آب و نانوذره اکسید مس [۳۹]

	$\rho(kg/m^3)$	$C_p(J/kgK)$	$k(w/m^2K)$	$\sigma(\Omega/m)$
آب	۹۹۷/۱	۴۱۷۹	۰/۶۱۳	۰/۰۵
اکسید مس	۶۵۰۰	۵۴۰	۱۸	$۲/۷ \times 10^{-۸}$

بیشتر قلمروهای فیزیکی غیر مستطیلی هستند بنابراین اعمال قلمرو محاسباتی مستطیلی شکل بر چنین قلمروهای فیزیکی به نوعی میانمایی برای اعمال شرایط مرزی نیاز دارد. از آنجاکه شرایط مرزی نقش کلیدی در حل معادلات دارند، چنین میانمایی‌هایی خطاهایی را در نقاط با بیشترین حساسیت‌ها سبب می‌شود علاوه بر این در شبکه‌های غیریکنواخت در نزدیکی مرزها، پیچیدگی‌های بیشتری در رابطه با معادلات تفاضل محدود به وجود می‌آید زیرا از تقریب‌های با فواصل نامساوی استفاده می‌کنیم. این نوع معادله تفاضل محدود از گره‌ای به گره دیگر تغییر می‌کند و برنامه‌نویسی آن دشوار است. برای غلبه بر این مشکلات، فضای فیزیکی را به فضای محاسباتی منتقل می‌گردد. این انتقال با معرفی دستگاه مختصات کلی انجام می‌شود و شبکه غیر مستطیلی موجود در فضای فیزیکی را به شبکه یکنواخت مستطیلی در فضای محاسباتی تصویر می‌کند. برای پرهیز از مشکلات ناشی از عدم تساوی فواصل در معادلات تفاضل محدود، قلمرو فیزیکی را به قلمرو محاسباتی مستطیلی یکنواختی منتقل می‌شود.

در نتیجه باید فضای فیزیکی مسئله را به فضای محاسباتی تبدیل کردید که از شبکه‌سازی جبری استفاده شده است. که از تبدیل زیر برای تبدیل سطح موجدار به سطح صاف استفاده می‌گردد [۴۰]:

$$\xi = x, \eta = \frac{y}{s(x)} \quad (11)$$

بنابراین با بی‌بعد سازی معادلات ۲-۴ و تغییر متغیر گفته شده سطح موجدار به سطح صاف تبدیل می‌شود معادلات تبدیل شده بدون بعد جریان، گرداب‌ها و انتقال گرما به صورت زیر می‌گردد [۳۹]:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\partial \psi}{\partial \eta} = -\omega \quad (12)$$

$$u \left(\frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right) + v \eta_y \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \frac{1}{Re} \left(\frac{1}{(1 - \phi) + \frac{\rho_s}{\rho_f} \phi} \right) \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi^2} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial^2 \omega}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\partial \omega}{\partial \eta} \right] + \frac{Ha^2}{Re} \left[1 + \frac{3 \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} - 1 \right) \phi}{\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} + 2 \right) - \left(\frac{\sigma_s}{\sigma_f} - 1 \right) \phi} \right] \left(\frac{1}{(1 - \phi) + \frac{\rho_s}{\rho_f} \phi} \right) \times \left[\cos^2 \gamma \left(\eta_x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \eta_{xx} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) + \sin^2 \gamma \left(\eta_y^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi^2} + \eta_y^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \right) + 2 \sin \gamma \cos \gamma \left(\eta_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} + \eta_x \eta_y \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} + \eta_{xy} \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right) \right] \quad (13)$$

$$u \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) + v \eta_y \frac{\partial T}{\partial \eta} = \quad (14)$$

$$\frac{1}{Re Pr} \left(\frac{k_s - 2\phi(k_f - k_s) + 2k_f}{k_s - 2\phi(k_f - k_s) + 2k_f} \right) \left(\frac{\rho C_p}{\rho C_p} \right)_s \phi \left(\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + (\eta_x^2 + \eta_y^2) \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 T}{\partial \xi \partial \eta} + (\eta_{xx} + \eta_{yy}) \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)$$

که در آن

$$u = \eta_y \frac{\partial \psi}{\partial \eta}, v = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \eta_x \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \right), \eta_y = \frac{1}{s(x)}, \eta_x = \frac{-y's'(x)}{s(x)^2}, \eta_{xx} = \frac{y'(2s'^2 + ss'')}{s(x)^3}, \eta_{yy} = 0 \quad (15)$$

که شرایط مرزی آن به صورت زیر است:

$$\eta = 1, u = v = 0 \rightarrow \psi = cte = 1, \theta = 1 \quad (16)$$

$$\eta = 0, \psi = \omega = 0 \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \quad (17)$$

$$\psi = \frac{3}{2} \left(\eta - \frac{\eta^3}{3} \right), \omega = -3\gamma, \theta = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial v}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0 \quad (19)$$

عدد ناسلت موضعی به صورت زیر تعریف می‌شود

$$Nu_x = \frac{(\partial T / \partial n)_{\bar{x}}}{T_w - T_0} \quad (20)$$

که مشتق بردار عمود بر سطح موجدار جسم است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \sqrt{\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)^2} \quad (21)$$

در نهایت بعد از بی‌بعد سازی و تغییر متغیر سطح موجدار به صاف عدد ناسلت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Nu_x = (\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \left(\frac{k_m}{k_f} \right) \quad (22)$$

عدد ناسلت متوسط با انتگرال گیری از اعداد ناسلت موضعی بر روی دیواره بالای میکرو کانال به صورت زیر مشخص می‌گردد [۳۹]:

$$Nu_m = \frac{1}{S} \int_{x_0}^{x_L} Nu_x ds = \frac{1}{S} \left(\frac{k_m}{k_f} \right) \quad (23)$$

$$\int_{x_0}^{x_L} (\eta_x^2 + \eta_y^2)^{1/2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} d\xi$$

که در رابطه بالا \bar{S} برابر است با:

$$\bar{S}(\xi) = \int_{x_0}^{x_L} (1 + \bar{S}'^2) d\xi \quad (24)$$

همچنین ضریب اصطکاک C_f به صورت زیر تعریف می‌شود: [۴۰]:

$$Re C_f = (\eta_y^2 - \eta_x^2) \frac{\partial^2 \psi}{\partial \eta^2} \quad (25)$$

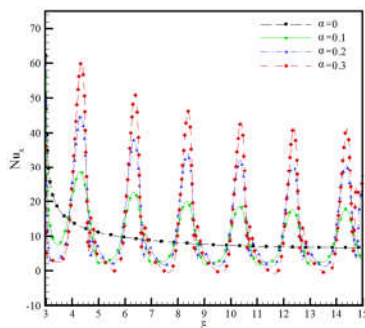
۳- روش حل عددی

معادلات دیفرانسیل بدون بعد شده ۱۲-۱۴ به روش تفاضل محدود و فرمولبندی شبه ضمنی (ADI) گسسته سازی شده، بدین صورت که از روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم با استفاده از شرایط مرزی مشخص شده در دیواره میکرو کانال و به روش تکرار، حل و همگرا می‌شوند. معادلات جبری انتقال گردابه و انرژی بعد از جداسازی به شکل ماتریس سه قطری درآمده و به صورت زیر نوشته می‌شود:

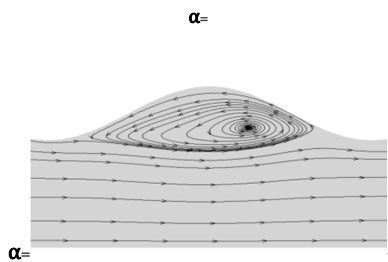
$$A_{i,j} X_{i,j}^{n+1} + B_{i,j} X_{i,j}^{n+1} + C_{i,j} X_{i,j+1}^{n+1} = D_{i,j} \quad (26)$$

پژوهش حاضر بسیار نزدیک به نتایج ونگ و همکاران می‌باشد و درصد اختلاف بسیار کم می‌باشد.

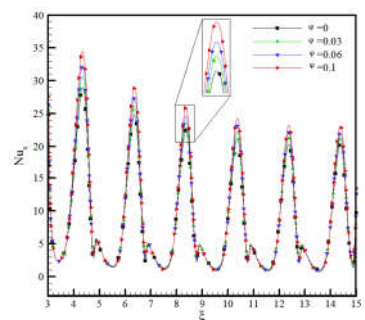
در شکل ۲ و ۳ اثر پارامتر دامنه موج میکرو کانال بر روی عدد ناسلت موضعی و متوسط در $Ha=50, Re=500$ و کسر حجمی $0/1$ پرداخته می‌شود. ناسلت متوسط در میکرو کانال‌های موج‌دار با طول موج کوچک‌تر، مانند $0/1 = \alpha$ تنها کمی بزرگ‌تر از میکرو کانال‌های مسطح می‌باشند، در صورتی‌که با افزایش دامنه موج به $0/2$ و $0/3$ ناسلت متوسط به یک‌باره افزایش چشم‌گیری می‌یابد. این اتفاق به دلیل ایجاد جریان ثانویه می‌باشد که باعث چرخش سیال و ایجاد گردابه می‌شود و هرچقدر دامنه موج افزایش یابد، خط جریان دچار گردابه بیشتری می‌شود. در شکل ۵ عدد ناسلت محلی در قسمت همگرا میکرو کانال افزایش می‌یابد زیرا در این قسمت اندازه سرعت و شیب آن افزایش پیدا می‌کند، درحالی‌که در قسمت واگرای میکرو کانال کاهش می‌یابد. همچنین تفاوت عدد ناسلت متوسط در دامنه موج‌های $0/2$ و $0/3$ ناچیز است. در شکل ۴ نحوه تشکیل گردابه، جهت و مرکزیت آن در دامنه موج $0/2$ نشان داده شده است.



شکل ۲- نمودار عدد ناسلت محلی در دامنه موج های $0/1, 0/2, 0/3$.



شکل ۳- نحوه تشکیل یک گردابه در قسمت موج‌دار میکرو کانال در دامنه موج $0/2$.



شکل ۴- نمودار عدد ناسلت محلی برای کسر حجمی‌های مختلف، $Re=10$ و $Ha=200$.

به جای X در معادله بالا پارامتر چرخش (ω) و دما (T) قرار گیرد. همان‌طور که مشاهده می‌شود معادله ۲۶ به صورت سه قطری هست که به آسانی با الگوریتم توماس قابل حل است، حل معادلات آن قدر ادامه دارد که به حد همگرایی به دست آید که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\left| \frac{X^{n+1}(i,j) - X^n(i,j)}{X^n(i,j)} \right| < 5 \times 10^{-9} \quad (27)$$

۴- نتایج

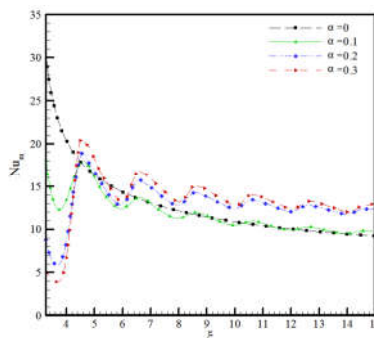
۴-۱- شبکه‌بندی و اعتبار سنجی

برای دستیابی به تعداد شبکه مناسب از شبکه‌بندی‌های 360×50 ، 740×60 ، 1000×75 و 1480×80 استفاده شده است. با توجه به اینکه نتایج دو شبکه‌بندی 1000×75 و 1480×80 اختلاف کمتر از ۵ درصد می‌باشد در حالی که برای سایر شبکه‌بندی‌ها اختلاف بیشتر از ۱۰٪ است. بنابراین در این مطالعه از شبکه 1000×75 استفاده می‌گردد.

جدول ۲- عدد ناسلت نتایج حاصل از این پژوهش و مقاله ونگ و

همکاران [۴۰] در $Pr=6/83, Re=500, \alpha=0/1$			
ξ	مطالعه حاضر	مرجع [۴۰]	درصد اختلاف
۳,۴	۸,۳۸۵۱۳	۷,۴۵	۱۱,۱۵
۵,۲	۲,۴۴۷۲	۲,۱۱	۱۳,۷
۶,۴	۱۴,۰۶۰۷	۱۴,۹	۵,۹۶
۷,۳	۲,۰۴۶۶۴۴	۱,۸۵	۹,۶۱

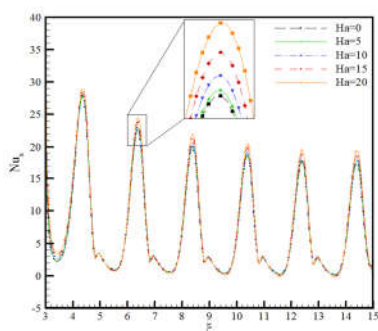
در ادامه برای اعتبارسنجی کد، نتایج حاصل از این پژوهش را با مقادیر پژوهش ونگ و همکاران [۴۰] مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که مشاهده می‌گردد در جدول ۲ عدد ناسلت محلی به‌دست آمده از در نمودار شکل ۵ و ۶ تغییرات اثر کسر حجمی بر عدد



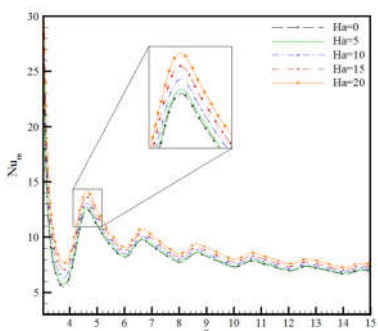
شکل ۵- نمودار عدد ناسلت متوسط در دامنه موج های $0/1, 0/2, 0/3$.

ناسلت موضعی و متوسط در عدد رینولدز 200 ، دامنه موج $0/2$ و عدد پرانتل $6/93$ نشان داده شده است. با افزایش کسر حجمی نانو ذرات در سیال پایه، رسانایی گرمایی مؤثر نانو سیال افزایش یافته، در نتیجه انتقال گرما و عدد ناسلت نیز بهبود می‌یابد و بیشتر می‌شود.

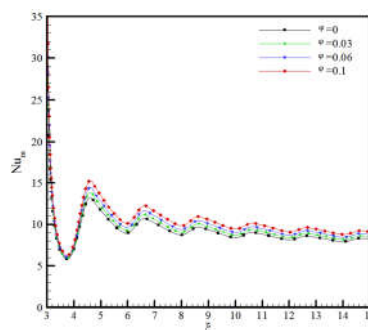
انتقال گرما افزایش می‌یابد.



شکل ۷- نمودار عدد ناسلت محلی در اعداد هارتمن مختلف

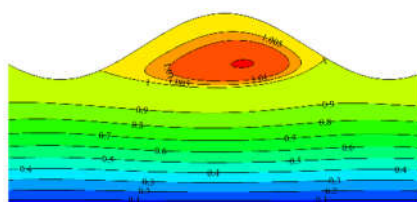


شکل ۸- نمودار عدد ناسلت متوسط در اعداد هارتمن مختلف

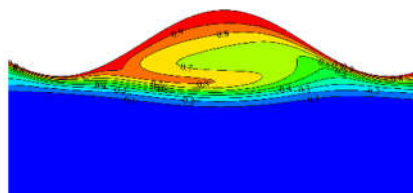


شکل ۶- نمودار عدد ناسلت متوسط برای کسر حجمی‌های مختلف، $Re=200$ و $Ha=10$

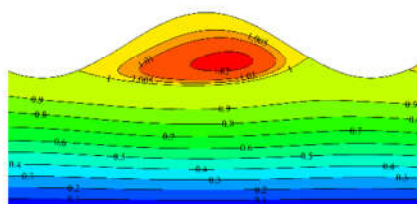
در شکل ۷ تأثیر اثر میدان مغناطیسی (عدد هارتمن) بر عدد ناسلت موضعی و متوسط نشان داده شده است. افزایش عدد هارتمن باعث کاهش سرعت در داخل کانال می‌گردد بنابراین گرادیان دما کمتر شده انتقال گرما کاهش می‌یابد، در نتیجه میدان مغناطیسی نقش کنترل دهنده جریان را دارد. در شکل ۹- الف نمودار خط جریان در عدد رینولدز ۲۰۰، دامنه موج ۰/۲ و کسر حجمی ۰/۱ و عدد هارتمن مختلف نشان داده شده است. با افزایش عدد هارتمن احتمال ایجاد گردابه در دیواره کمتر می‌شود و این به خاطر کاهش سرعت در نزدیکی دیواره است. در شکل ۹- ب کانتور بدون بعد دما نشان داده شده است. هرچه قدرت میدان مغناطیسی بیشتر شود خطوط هم‌دما به هم نزدیک‌تر می‌شود؛ بنابراین با افزایش عدد هارتمن در نزدیکی دیواره مقدار گرادیان دما افزایش می‌یابد. در نتیجه عدد ناسلت موضعی و متوسط (شکل‌های ۷ و ۸) بیشتر شده و میزان



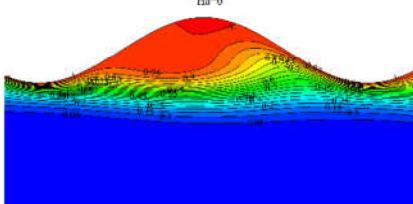
Ha=0



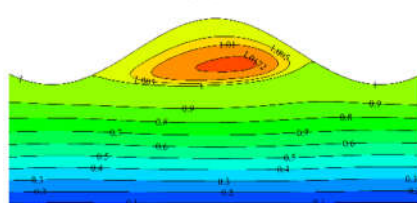
Ha=0



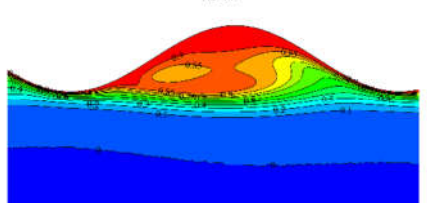
Ha=10



Ha=10



Ha=20



Ha=20

الف

ب

شکل ۹- کانتور جریان (الف) و کانتور دما (ب) برای عدد هارتمن مختلف

۵- نتیجه گیری

در این مطالعه انتقال گرمای همرفتی اجباری جریان لایه‌ای نانو سیال در میکرو کانال موج‌دار در حضور میدان مغناطیسی به صورت عددی بررسی شده است. تأثیر کسر حجم نانو ذرات، دامنه موج سینوسی و عدد هارتمن بر خصوصیات انتقال گرما و جریان سیال مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد افزودن نانو ذرات با رسانایی گرمایی بالا به یک سیال پایه، خاصیت انتقال گرمای سیال را بهبود می‌دهد و در نتیجه عدد ناسلت میانگین در میکرو کانال افزایش می‌یابد. این روند افزایشی با بالا رفتن عدد رینولدز به دلیل به وجود آمدن گردابه های بزرگ‌تر شدت می‌گیرد. با تغییر شکل میکرو کانال از حالت موازی به موج‌دار به دلیل ایجاد جریان ثانویه در قسمت‌های موج‌دار میکرو کانال، روند افزایشی انتقال گرما مشاهده می‌شود. موج‌دار بودن میکرو کانال، کارایی نانو سیال در انتقال گرما را نیز افزایش داده است. علاوه بر این، نتایج نشان می‌دهد که با افزایش عدد هارتمن، سرعت جریان در نزدیکی دیواره موج‌دار میکرو کانال افزایش می‌یابد و پروفیل سرعت در نزدیکی دیواره صاف می‌شود که به طبع انتقال گرما افزایش می‌یابد. با افزایش عدد رینولدز نیروی اینرسی بیشتری بر جریان حاکم می‌گردد و تأثیر عدد هارتمن را نیز افزایش می‌دهد. این نتایج که با ایجاد تغییرات در پارامترهای مختلف مورد بررسی به دست آمده‌اند، در طراحی مبادله‌کن گرمایی فشرده و بهینه مفید می‌باشند.

۶- فهرست علائم اختصاری

C_f	ضریب اصطکاک
C_p	گرمای ویژه در فشار ثابت ($\text{kJ kg}^{-1} \text{K}^{-1}$)
K_f	رسانایی گرمایی (W/mK)
L	طول سطح ورودی (m)
Nu_x	عدد ناسلت محلی
Nu_m	عدد ناسلت متوسط
k_{nf}	ضریب انبساط گرمایی
\bar{u}	سرعت (ms^{-1})
u, v	سرعت بدون بعد
h	ضریب انتقال گرمای همرفتی ($\text{W/m}^2 \text{K}$)
Re	عدد رینولدز
Ha	عدد هارتمن
Pr	عدد پرانتل
Gz	عدد گراز
Br	عدد بریکمن
x, y	مختصات دکارتی (m)
B_0	قدرت میدان مغناطیسی
علائم یونانی	
α	دامنه موج
ρ	چگالی سیال (kg m^{-3})
μ	لزجت دینامیکی ($\text{kg s}^{-1} \text{m}^{-1}$)
ν	لزجت سینماتیکی ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$)
θ	دمای بدون بعد
ξ, η	سیستم مختصات

ψ	تابع جریان
Ψ	تابع جریان بدون بعد
Ω	چرخش
ω	چرخش بدون بعد
φ	کسر حجمی
τ	اصطکاک
γ	زاویه جهت میدان مغناطیسی
σ	رسانایی الکتریکی (s/m)

۷- مراجع

- [1] Aminossadati S, A Raisi, B Ghasemi., Effects of magnetic field on nanofluid forced convection in a partially heated microchannel. **46**(10), pp. 1373-1382, 2011.
- [2] Heris SZ, Z Edalati, SH Noie, O Mahian., Experimental investigation of Al₂O₃/water nanofluid through equilateral triangular duct with constant wall heat flux in laminar flow. **35**(13), pp. 1173-1182, 2014.
- [3] Singh A., Thermal conductivity of nanofluids. **58**(5), pp. 600-607, 2008.
- [4] Zarrinhalam M, Karimipour A, Toghraie D., Experimental study of the effect of solid volume fraction and Reynolds number on heat transfer coefficient and pressure drop of CuO-water nanofluid. *Experimental Thermal and Fluid Science*. Sep 1;76, pp.342-51, 2016.
- [5] Das SK, Choi SU, Patel HE., Heat transfer in nanofluids—a review. *Heat transfer engineering*. Dec 1;27(10), pp.3-19, 2006.
- [6] Ögüt EB, Dilki S., Effect of prandtl number on turbulent heat transfer of corrugated trapezoidal plate heat exchangers using nanofluids. *The Online Journal of Science and Technology-April*. Apr;9(2), 2019.
- [7] Shehzad N, A Zeeshan, R Ellahi, and K Vafai., Convective heat transfer of nanofluid in a wavy channel: Buongiorno's mathematical model, pp. 446-455, 2016.
- [8] Peng W, Minli B, Jizu L, Liang Z, Wenzheng C, Guojie L., Comparison of multidimensional simulation models for nanofluids flow characteristics. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*. Jan 1;63(1), pp.62-83, 2013.
- [9] Zabih K, F Gholamian, and SJ Vasefi., Experimental and Numerical Investigation of Al O-Water Nanofluid Inside a Triangular Tube. **22**(5), pp. 601-607, 2013.
- [10] Heidary H, Kermani MJ., Effect of nano-particles on forced convection in sinusoidal-wall channel. *International Communications in Heat and Mass Transfer*. Dec 1;37(10), pp.1520-7, 2010.
- [11] Chai L, GD Xia, H Wang., Numerical study of laminar flow and heat transfer in microchannel heat sink with offset ribs on sidewalls. **92**, pp. 32-41, 2016.
- [12] Ahmed M, N Shuaib, M Yusoff, M Transfer., Numerical investigations on the heat transfer enhancement in a wavy channel using nanofluid. **55**(21-22), pp. 5891-5898, 2012.
- [13] Zhou J, Hatami M, Song D, Jing D., Design of microchannel heat sink with wavy channel and its time-efficient optimization with combined RSM and FVM methods. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Dec 1;103, pp.715-24, 2016.
- [14] Moon J, J.R Pacheco, and A Pacheco-Vega., Heat transfer enhancement in wavy micro-channels through multiharmonic surfaces. in *ASME 2018 International Mechanical Engineering Congress and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, 2018.

- مغناطیسی. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، ۵۰(۳)، ص: ۱۷۳-۲۰۲۰، ۱۶۵
- [32] Mahmoudi A, I Mejni, MA Abbassi., and A.J.P.T. Omri, Lattice Boltzmann simulation of MHD natural convection in a nanofluid-filled cavity with linear temperature distribution. **256**, pp. 257-271, 2014.
- [33] Maxwell JC., A treatise on electricity and magnetism. Vol. 1. Clarendon press, 1873.
- [34] Murshed S, K Leong, and C Yang., Enhanced thermal conductivity of TiO₂-water based nanofluids. *International Journal of thermal sciences*, **44**(4), pp. 367-373, 2005.
- [35] Timofeeva EV, Routbort JL, Singh D. Particle shape effects on thermophysical properties of alumina nanofluids. *Journal of applied physics*. Jul 1;106(1), pp.014304, 2009.
- [36] Brinkman HC., The viscosity of concentrated suspensions and solutions. *The Journal of chemical physics*, **20**(4), pp. 571-571, 1952.
- [37] Sheikholeslami M, Rashidi MM, Ganji DD., Effect of non-uniform magnetic field on forced convection heat transfer of Fe₃O₄-water nanofluid. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. Sep 1;294, pp.299-312, 2015.
- [38] Sheikholeslami M, Ganji DD. Ferrohydrodynamic and magnetohydrodynamic effects on ferrofluid flow and convective heat transfer. *Energy*. Oct 1;75, pp.400-10, 2014.
- [39] Javaherdeh K, Moslemi M, Shahbazi M., Natural convection of nanofluid in a wavy cavity in the presence of magnetic field on variable heat surface temperature. *Journal of Mechanical Science and Technology*. Apr;31(4), pp.1937-45, 2017.
- [40] Wang CC, Chen CK., Forced convection in a wavy-wall channel. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Jun 1;45(12), pp.2587-95, 2002.
- [15] Lin L, Zhao J, Lu G, Wang XD, Yan WM., Heat transfer enhancement in microchannel heat sink by wavy channel with changing wavelength/amplitude. *International Journal of Thermal Sciences*. Aug 1;118, pp.423-34, 2017.
- [16] Kirsch KL, Thole KA., Heat transfer and pressure loss measurements in additively manufactured wavy microchannels. *Journal of turbomachinery*. Jan 1;139(1), pp.011007, 2017.
- [17] Skullong S, Promvong P, Thianpong C, Jayranaiwachira N, Pimsarn M., Heat transfer augmentation in a solar air heater channel with combined winglets and wavy grooves on absorber plate. *Applied Thermal Engineering*. Jul 25;122, pp.268-84, 2017.
- [18] Yadav V, Baghel K, Kumar R, Kadam ST., Numerical investigation of heat transfer in extended surface microchannels. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. Feb 1;93, pp.612-22, 2016.
- [19] Kefayati GR., Lattice Boltzmann simulation of MHD natural convection in a nanofluid-filled cavity with sinusoidal temperature distribution. *Powder technology*. Jul 1;243, pp.171-83, 2013.
- [20] Malekpour A, B Ghasemi., MAGNETIC FIELD EFFECT ON NATURAL CONVECTION IN A NANOFUID FILLED TRIANGULAR ENCLOSURE. 2013.
- [21] Nouri R, M Gorji-Bandpy, D Ganji., Numerical investigation of the effect of magnetic field angle change on forced convection heat transfer of nanofluid in a sinusoidal channel. *15 th fluid dynamics conferens*, 2013.
- [22] Aminfar H, Mohammadpourfard M, Zonouzi SA., Numerical study of the ferrofluid flow and heat transfer through a rectangular duct in the presence of a non-uniform transverse magnetic field. *Journal of Magnetism and Magnetic materials*. Feb 1;327, pp.31-42, 2013.
- [۲۳] کوروش، جواهرده، کریمی، حبیب، بررسی عددی جریان ترکیبی سیال غیر نیوتنی با اثر مگنوهیدرودینامیک برای سطح قائم موج دار. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، (۲)۴۴(۱-۷)، ص: ۱۴-۲۰.
- [24] Nourazar SS, Habibi Martin M, Simiari M., The HPM applied to MHD nanofluid flow over a horizontal stretching plate. *Journal of Applied Mathematics*. Jan 1;2011.
- [25] Motozawa M, Chang J, Sawada T, Kawaguchi Y., Effect of magnetic field on heat transfer in rectangular duct flow of a magnetic fluid. *Physics Procedia*. Jan 1;9, pp.190-3, 2010.
- [26] Çelik İ. Solution of Magnetohydrodynamic flow in a rectangular duct by Chebyshev Polynomial Method. *Applied Mathematics*.;2(3), pp.58-65, 2012.
- [۲۷] شاکر، هادی عباس علیزاده، آریا مطلق صابر شبیه‌سازی عددی انتقال گرمای جایجایی ترکیبی نانوسیال درون کانال دارای حفره روباز با استفاده از مدل غیرهمگن بونگیورنو. مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز، ۲۰۲۰.
- [28] Javaherdeh K, M Moslemi, and M Shahbazi., Natural convection of nanofluid in a wavy cavity in the presence of magnetic field on variable heat surface temperature. *Journal of Mechanical Science and Technology*, **31**(4), pp. 1937-1945, 2017.
- [29] Shankar Goud B, Pramod Kumar P, Malga BS., Induced magnetic field effect on MHD free convection flow in nonconducting and conducting vertical microchannel walls. *Heat Transfer*. Mar;51(2), pp.2201-18, 2022.
- [30] Rashidi MM, Nasiri M, Khezerloo M, Laraqi N. Numerical investigation of magnetic field effect on mixed convection heat transfer of nanofluid in a channel with sinusoidal walls. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*. Mar 1;401, pp.159-68, 2016.
- [۳۱] فتاحی، دهقان، مازیار، ولی پور، محمدصادق، انتقال حرارت در یک میکرو کولر سه بعدی با نانوسیال عامل تحت تاثیر میدان